



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/10.11.01.09-TDI

**MODELO DO CAMPO GRAVITACIONAL DE UM
CORPO COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA IRREGULAR
UTILIZANDO O MÉTODO DA EXPANSÃO DO
POTENCIAL EM SÉRIE E DETERMINAÇÃO DE SEUS
COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS**

Marcelo Lisboa Mota

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Evandro Marconi Rocco, aprovada em 14 de dezembro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3PQ2FAB>>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

E-mail: pubtc@inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas
(CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial
(ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos
Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação
(SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/10.11.01.09-TDI

**MODELO DO CAMPO GRAVITACIONAL DE UM
CORPO COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA IRREGULAR
UTILIZANDO O MÉTODO DA EXPANSÃO DO
POTENCIAL EM SÉRIE E DETERMINAÇÃO DE SEUS
COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS**

Marcelo Lisboa Mota

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Evandro Marconi Rocco, aprovada em 14 de dezembro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3PQ2FAB>>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Mota, Marcelo Lisbôa.

M856m Modelo do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular utilizando o método da expansão do potencial em série e determinação de seus coeficientes dos harmônicos esféricos / Marcelo Lisbôa Mota. – São José dos Campos : INPE, 2017.

xxx + 246 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/10.11.01.09-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientador : Dr. Evandro Marconi Rocco.

1. Campo gravitacional. 2. Expansão do potencial em série. 3. Concentrações de massa. 4. Harmônicos esféricos. I.Título.

CDU 52-336:629.78



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

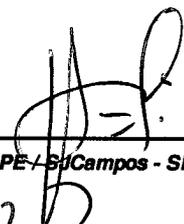
This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Marcelo Lisboa Mota**

Título: "MODELO DO CAMPO GRAVITACIONAL DE UM CORPO COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA IRREGULAR UTILIZANDO O MÉTODO DA EXPANSÃO DO POTENCIAL EM SÉRIE E DETERMINAÇÃO DE SEUS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS"

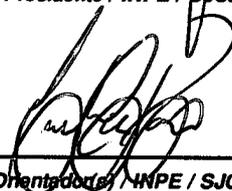
Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Doutor(a)** em **Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle**

Dr. Hans-Ulrich Pilchowski



Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Evandro Marconi Rocco



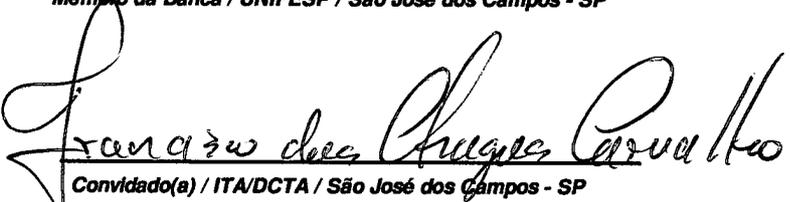
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



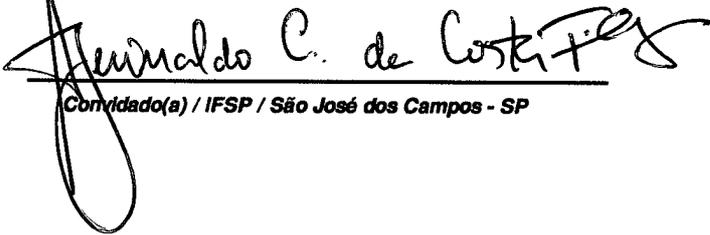
Membro da Banca / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Dr. Francisco das Chagas Carvalho



Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

Dr. Aguinaldo Cardozo da Costa Filho



Convidado(a) / IFSP / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

(x) unanimidade

São José dos Campos, 14 de dezembro de 2017

“O universo é o grande livro da filosofia. O livro está sempre aberto para o olhar humano, mas não pode esperar compreendê-lo quem não dominar primeiro a linguagem e os caracteres com os quais ele foi escrito. Essa linguagem é a matemática.”

Galileu Galilei

Dedico este trabalho a meus pais, Maria José Lisboa e Jandir Camargo da Mota (In memoriam).

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, luz e caminho que conduz minha vida.

A todos meus mestres, desde o jardim de infância até aqui, simbolizando este agradecimento à “Dona” Nair, minha professora do primeiro ano primário que me alfabetizou.

A meu orientador Dr. Evandro Marconi Rocco, pela sua orientação segura, atenciosa, paciente e, principalmente, pela disponibilidade e amizade.

Aos membros da Banca Examinadora, pelas correções e sugestões feitas, contribuindo para o aprimoramento deste trabalho.

Ao Dr. Valdemir Carrara, por ter me acolhido e auxiliado na fase de ingresso no INPE.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e a todos seus funcionários, em especial, a funcionária Valdirene Moreira, por sua atenção e auxílio.

Aos meus colegas pós-graduandos, pela sua amizade, em especial, a Anderson Brazil Nardin, pela sua atenção e paciência.

Aos Profs. Drs. Alexandre Pereira Chahad e Marcio Merino Fernandes, pelo seu auxílio e amizade.

Aos Profs. Drs. Mario Francisco Mucheroni, Eduardo Morgado Belo e Fernando Eduardo Torres Orihuela, pelo apoio e amizade.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, por me proporcionar a oportunidade de concluir o curso de doutorado no INPE.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

À Juliet, minha companheira inseparável, pela paciência e carinho.

RESUMO

O objetivo geral deste trabalho foi estabelecer uma metodologia para determinar o modelo do campo gravitacional em torno de um corpo com distribuição de massa irregular, utilizando o método da expansão do potencial em série, após a sua decomposição em elementos tetraédricos, calculando-se o seu potencial total, como o somatório dos potenciais relativos a cada tetraedro. Com este propósito, primeiramente, foi modelado o campo gravitacional gerado por um cubo homogêneo unitário e, em seguida, e os resultados obtidos foram comparados e validados com aqueles apresentados pelo modelo exato desse hexaedro. De posse do modelo, foram determinados seus coeficientes dos harmônicos esféricos, também ratificados pelos resultados existentes na literatura. A partir da validação desta técnica para o cubo homogêneo, procurou-se aplicá-la na modelagem dos campos gravitacionais dos asteroides (25143) Itokawa, (1620) Geographos e (433) Eros, utilizando os dados reais disponibilizados pelo JPL/NASA, produzindo resultados consistentes quando comparados com aqueles apresentados na literatura. Utilizando o mesmo procedimento adotado para o cubo, também foram calculados os coeficientes de Stokes para esses asteroides até o grau 6, além de realizar simulações de órbitas em torno desses asteroides, utilizando os modelos obtidos pelos métodos da expansão do potencial em série e concentrações de massa, com o intuito de compará-las. Além desses asteroides citados, também foram modelados os potenciais dos asteroides (2063) Bacchus, (101955) Bennu, (1580) Betulia, (4769) Castalia, (21) Lutetia e (4660) Nereus, cujos coeficientes dos harmônicos esféricos constam dos apêndices deste trabalho.

Palavras-chave: Campo gravitacional. Expansão do potencial em série. Concentrações de massa. Harmônicos esféricos.

**MODEL OF THE GRAVITATIONAL FIELD OF A BODY WITH IRREGULAR
MASS DISTRIBUTION USING THE METHOD OF THE POTENTIAL
EXPANSION IN SERIES, AND THE DETERMINATION OF THEIR
SPHERICAL HARMONIC COEFFICIENTS**

ABSTRACT

The general objective of this work was to establish a methodology to determine the gravitational field model around a body with irregular mass distribution, using the method of expansion of the potential in series, after its decomposition in tetrahedral elements, calculating its potential, as the sum of the potentials relative to each tetrahedron. For this purpose, initially, the gravitational field produced by a unitary homogeneous cube was modeled. The results obtained for the cube were compared and validated with those presented by the exact model of this hexahedron. Then, with the model, its coefficients of the spherical harmonics, which also ratified by the results in the literature, were determined. From the validation of this technique for the homogeneous cube, the same technique was applied in the modeling of the gravitational fields of the asteroids (25143) Itokawa, (1620) Geographos and (433) Eros, with the actual data provided by JPL / NASA, producing consistent results compared to those presented in the literature. Using the same procedure adopted for the cube, we also calculated the Stokes coefficients for these asteroids up to order 6. Simulations of trajectories around these asteroids were performed, using the models obtained by the expansion of the potential in series and by the concentrations of masses, with the intention of comparing them. In addition, were also modeled the gravitational fields of the asteroids (2063) Bacchus, (101955) Bennu, (1580) Betulia, (4769) Castalia, (21) Lutetia and (4660) Nereus, whose spherical harmonic coefficients were included in the appendices of this work.

Keywords: Gravitational field. Expansion of the potential in series. Concentrations of mass. Spherical harmonics.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1.1 – Foto do asteroide Gaspra.....	2
Figura 1.2 - Imagem do asteroide 243 Ida e sua lua Dactyl, primeiro satélite de um asteroide a ser descoberto.	2
Figura 1.3 - Escala dos asteroides que foram fotografados em alta resolução, a partir do maior para o menor: 4 Vesta, 21 Lutetia, 253 Mathilde, 243 Ida e sua lua Dactyl, 433 Eros , 951 Gaspra , 2867 Steins ,25143 Itokawa	3
Figura 2.1 - Sistemas de coordenadas para o cálculo da força gravitacional.	17
Figura 2.2 - Arquitetura do controle de trajetória.....	24
Figura 2.3 - Fluxograma de dados com os principais subsistemas do simulador orbital.	27
Figura 3.1 - Sistema de coordenadas esféricas.	30
Figura 3.2 - Representação dos harmônicos zonais.....	35
Figura 3.3 - Representação dos harmônicos tesserais.	36
Figura 3.4 - Representação dos harmônicos setoriais.....	36
Figura 3.5 - Tetraedro Q com os vértices V_1, V_2, V_3 e O	38
Figura 3.6 - Tetraedro retângular W com vértices O', V_1', V_2' e V_3'	41
Figura 3.7 - Construção de um cone, tendo como base Δ_s , na superfície do sólido, e vértice na origem do sistema de coordenadas.	45
Figura 3.8 - Tetraedro expandido em quatro novos tetraedros em relação à origem O	46
Figura 3.9 - Sólido com distribuição de massa irregular, decomposto em tetraedros....	50
Figura 3.10 - Modelo do corpo irregular utilizando o método do poliedro.....	52
Figura 3.11 - Tetraedro $OV_1V_2V_3$ com centro de massa em G	53
Figura 3.12 - Modelo matemático da órbita perturbada devido ao campo gravitacional.	55
Figura 4.1 - Coordenadas esféricas envolvendo latitude e longitude.	57
Figura 4.2 - Cálculo do potencial de um elemento de massa dM	61
Figura 4.3 - Distância entre os pontos P e B em coordenadas esféricas.....	61
Figura 5.1 - Paralelepípedo retangular de arestas a, b e c	66
Figura 5.2 - Gráfico da variação de F_ξ nas proximidades do ponto $(1/2,0,0)$	73
Figura 5.3 - Gráfico da variação de F_ξ nas proximidades do ponto $(1/2,1/2,1/2)$	73
Figura 5.4 - Cubo homogêneo centrado na origem O e eixos paralelos às suas arestas.	74
Figura 5.5 - Triângulo formado pelos pontos O, P e B	75
Figura 5.6 - Decomposição final do cubo homogêneo em 24 tetraedros congruentes... ..	76
Figura 5.7 - Gráficos dos modelos dos potenciais próximos ao ponto $(1/2,0,1/2)$	88

Figura 5.8 - Gráficos das forças correspondentes próximas ao ponto $(1/2,0,1/2)$	89
Figura 5.9 - Gráficos dos modelos dos potenciais próximos ao vértice $(1/2,1/2,1/2)$	89
Figura 5.10 - Gráficos dos modelos das forças próximos ao vértice $(1/2,1/2,1/2)$	90
Figura 5.11 - Gráficos dos modelos dos potenciais próximos ao ponto $(1/2,0,0)$	90
Figura 5.12 - Gráficos das forças correspondentes próximos ao vértice $(1/2,0,0)$	91
Figura 6.1 Formato do modelo do asteroide Itokawa, Ostro et al. (2004).	100
Figura 6.2 - Modelo poliédrico para o Itokawa, após translação e rotação.	106
Figura 6.3 - Vista ξ - η do asteroide Itokawa.	106
Figura 6.4 - Vista ξ - ζ do asteroide Itokawa.	106
Figura 6.5 - Vista η - ζ do asteroide Itokawa.....	107
Figura 6.6 - Órbita equatorial em torno do asteroide Itokawa.....	122
Figura 6.7 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	123
Figura 6.8 – Incremento de velocidade absoluta, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	123
Figura 6.9 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x ...	124
Figura 6.10 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y .	124
Figura 6.11 – Incremento das velocidades, devido às perturbações, relativas ao eixo z	124
Figura 6.12 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas às concentrações de massa em cada eixo e total.	125
Figura 6.13 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas à expansão em cada eixo e total.	125
Figura 6.14 - Órbita com inclinação de 45° em torno do asteroide Itokawa.	126
Figura 6.15 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão do potencial em série e concentrações de massa.	126
Figura 6.16 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.....	127
Figura 6.17 – Órbita com inclinação de 90° em torno do asteroide Itokawa.	127
Figura 6.18 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	128
Figura 6.19 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.....	128
Figura 6.20 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 250 metros.	130
Figura 6.21 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 300 metros.	130
Figura 6.22 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 400 metros.	131

Figura 6.23 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 500 metros.	131
Figura 6.24 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 5000 metros.	132
Tabela 7.2 - Vértices correspondentes a cada face triangular do Geographos.	136
Figura 7.1 - Modelo poliédrico do Geographos após translação e rotação.	141
Figura 7.2 - Vista $\xi - \eta$ do asteroide Geographos.	141
Figura 7.3 - Vista $\xi - \zeta$ do asteroide Geographos.	141
Figura 7.4 - Vista $\eta - \zeta$ do asteroide Geographos.	142
Figura 7.5 - Órbita equatorial em torno do asteroide Geographos.	152
Figura 7.6 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	152
Figura 7.7 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	153
Figura 7.8 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x	153
Figura 7.9 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y	154
Figura 7.10 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo z	154
Figura 7.11 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas às concentrações de massa em cada eixo e total.	154
Figura 7.12 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas ao método da expansão do potencial em cada eixo e total.	155
Figura 7.13 - Órbita com inclinação de 45° em torno do asteroide Geographos.	155
Figura 7.14 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão do potencial em série e concentrações de massa.	156
Figura 7.15 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	156
Figura 7.16 - Órbita com inclinação de 45° em torno do asteroide Geographos.	157
Figura 7.17 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	157
Figura 7.18 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	158
Figura 7.19 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 2600 metros.	159
Figura 7.20 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 3000 metros.	160
Figura 7.21 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 4000 metros.	160
Figura 8.1 - Modelo poliédrico do asteroide Eros.	166
Figura 8.2 - Vista $\xi - \eta$ do asteroide Eros.	167

Figura 8.3 - Vista $\xi - \zeta$ do asteroide Eros.	167
Figura 8.4 - Vista $\eta - \zeta$ do asteroide Eros.	167
Figura 8.5 - Órbita equatorial em torno do asteroide Eros, sem correções dos dados.	177
Figura 8.6 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	177
Figura 8.7 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.....	178
Figura 8.8 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x	178
Figura 8.9 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y	179
Figura 8.10 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo z	179
Figura 8.11 - Modelo poliédrico do asteroide Eros com 7790 faces.	185
Figura 8.12 - Vista $\xi - \eta$ do asteroide Eros com 7790 faces.	185
Figura 8.13 - Vista $\xi - \zeta$ do asteroide Eros com 7790 faces.	186
Figura 8.14 - Vista $\eta - \zeta$ do asteroide Eros com 7790 faces.	186
Figura 8.15 - Órbita equatorial em torno do asteroide Eros, com correções dos dados.	194
Figura 8.16 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	194
Figura 8.17 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.....	195
Figura 8.18 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x	195
Figura 8.19 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y	196
Figura 8.20 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo z	196
Figura 8.21 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas às concentrações de massa em cada eixo e total.	196
Figura 8.22 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas ao método da expansão do potencial em cada eixo e total.....	197
Figura 8.23 - Órbita com inclinação de 45° em torno do Eros, com correções de dados.	197
Figura 8.24 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão do potencial em série e concentrações de massa.	198
Figura 8.25 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.....	198
Figura 8.26 - Órbita com inclinação de 45° em torno do Eros, com correção de dados.	199
Figura 8.27 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.	199
Figura 8.28 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.....	200

Figura 8.29 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 18000 metros.	201
Figura 8.30 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 21000 metros.	201
Figura 8.31 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 25000 metros.	202
Figura C.1 – Triângulo formado pelos pontos O , P e B	222

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 5.1 - Estudo do grau da homogeneidade n do potencial do paralelepípedo.	70
Tabela 5.2 - Estudo do grau da homogeneidade \tilde{n} do potencial do paralelepípedo.	71
Tabela 5.3 - Valores do potencial exato para o cubo calculado em alguns pontos.	72
Tabela 5.4 - Coordenadas dos vértices dos tetraedros.	76
Tabela 5.5 - Relação entre a face triangular formada e seus respectivos vértices.	77
Tabela 5.6 - Valores dos potenciais obtidos no ponto $P_1(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$	82
Tabela 5.7 - Valores dos potenciais obtidos no ponto $P_2(2a, 2a, 2a)$	83
Tabela 5.8 - Coordenadas dos vértices dos tetraedros.	84
Tabela 5.9 - Face triangular formada por seus respectivos vértices.	85
e os correspondentes baricentros.	85
Tabela 5.10 - Valores dos potenciais obtidos pelos modelos apresentados.	87
Tabela 5.11 - Valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos calculados.	93
Tabela 5.12 - Valores dos coeficientes de Stokes calculados diretamente pelas integrais e as correspondentes diferenças entre os valores obtidos pela expansão do potencial em série.	96
Tabela 6.1 - Coordenadas dos vértices do asteroide Itokawa.	100
Tabela 6.2 - Vértices correspondentes a cada face triangular do asteroide Itokawa. ...	101
Tabela 6.3 - Coordenadas finais dos vértices do asteroide Itokawa.	104
Tabela 6.4 - Estudo do grau da homogeneidade n do potencial do asteroide Itokawa.	110
Tabela 6.5 - Estudo do grau da homogeneidade \tilde{n} do potencial do asteroide Itokawa.	111
Tabela 6.6 – Comparação entre os coeficientes dos harmônicos esféricos do Itokawa.	119
Tabela 6.7 - Comparação entre os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados, calculados a partir do potencial e de forma direta.	121
Tabela 7.1 - Coordenadas dos vértices do asteroide Geographos.	135
Tabela 7.3 - Coordenadas finais dos vértices do asteroide Geographos.	139
Tabela 7.4 - Estudo do grau de homogeneidade n do potencial do Geographos.	145
Tabela 7.5 - Estudo do grau de homogeneidade \tilde{n} do potencial do Geographos.	146
Tabela 7.6 - Coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados do Geographos.	150
Tabela 7.7 - Comparação entre os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados, calculados a partir do potencial e de forma direta.	151
Tabela 8.1 - Coordenadas dos vértices do asteroide Eros com 56644 faces.	164
Tabela 8.2 - Vértices correspondentes a cada face triangular do asteroide Eros.	164
Tabela 8.3 - Estudo do grau de homogeneidade n do potencial do Eros.	170
Tabela 8.4 - Estudo do grau de homogeneidade \tilde{n} do potencial do Eros.	170

Tabela 8.5 – Comparação entre os coeficientes dos harmônicos esféricos do Eros.....	174
Tabela 8.6 - Comparação entre os valores dos coeficientes de Stokes normalizados para o Eros com 56644 faces, sem correções, calculados a partir do potencial e de forma direta.	176
Tabela 8.7 - Coordenadas dos vértices do asteroide Eros com 7790 faces.	180
Tabela 8.8 - Vértices correspondentes a cada face triangular do asteroide Eros.....	180
Tabela 8.9 - Coordenadas finais dos vértices do asteroide Eros com 7790 faces.	184
Tabela 8.10 - Estudo do grau de homogeneidade n do potencial do Eros.....	189
Tabela 8.11 - Estudo do grau de homogeneidade \tilde{n} do potencial do asteroide Eros... ..	189
Tabela 8.12 - Coeficientes de Stokes normalizados do asteroide Eros com 7790 faces.	191
Tabela 8.13 - Comparação entre os valores dos coeficientes de Stokes normalizados para o Eros com 7790 faces, com correções, calculados a partir do potencial e de forma direta.	192
Tabela F – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Bacchus.....	229
Tabela G – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Bennu.....	231
Tabela H – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Betulia.....	233
Tabela I – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Castalia.	235
Tabela J – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Lutetia.....	237
Tabela K – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Nereus.....	239

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
NASA	National Aeronautics and Space Administration
JPL	Jet Propulsion Laboratory
ESA	European Space Agency
NEAR	Near Earth Asteroid Rendezvous
JAXA	Japan Aerospace Exploration Agency
STRS	Spacecraft Trajectory Simulator
NEAs	Near Earth Asteroids
PHAs	Potentially Hazardous Asteroids
MEPS	Método da Expansão do Potencial em Série
MCM	Método das Concentrações de Massa
MIT	Massachusetts Institute of Technology

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Medida da aresta do cubo homogêneo
e	Excentricidade
F	Força gravitacional
G	Constante gravitacional, igual a $6,673 \times 10^{-20} \text{ km}^3/\text{kg s}^2$
m	Massa do corpo menos massivo
r	Raio
ρ	Distancia de um ponto exterior a um corpo ao seu centro de massa
ρ'	Distância de um ponto pertencente a um corpo ao seu centro de massa
R	Raio normalizador
μ	Produto da massa pela constante gravitacional
Q	Corpo com distribuição de massa irregular
Q_i	Elementos tetraédricos obtidos pela decomposição do corpo a ser estudado
O	Centro de massa do corpo Q
U	Potencial gravitacional
V	Potencial gravitacional do cubo homogêneo
σ	Densidade
i	Inclinação
Ω	Ascensão reta do nodo ascendente
M'	Anomalia média
M	Massa do corpo mais massivo
E	Anomalia Excêntrica
ν	Longitude verdadeira
f	Anomalia verdadeira
ω	Argumento do perigeu
h	Momento angular específico
h_x, h_y, h_z	Componentes do momento angular específico
θ	Latitude
ϕ	Longitude

P_{nm}	Polinômios associados de Legendre
P_n	Polinômios de Legendre
C_{nm}, S_{nm}	Coefficientes dos harmônicos esféricos
M_i	Massas dos centros de atração secundários
M_1	Massa do primeiro centro de atração secundário
R_i	Distância entre a massa M_i e o centro de massa do corpo Q
$F_{\tilde{G}_i}$	Força gravitacional perturbadora exercida pela massa M_i
r_ξ, r_η, r_ζ	Componentes do vetor que une o centro de massa do corpo Q à massa m
$R_{i\xi}, R_{i\eta}, R_{i\zeta}$	Componentes do vetor que une o centro de massa do corpo Q à massa M_i
$r_{i\xi}, r_{i\eta}, r_{i\zeta}$	Componentes do vetor que une a massa M_i à massa m
$F_{\tilde{G}P}$	Resultante da força perturbadora
$F_{\tilde{G}_{i\xi}}, F_{\tilde{G}_{i\eta}}, F_{\tilde{G}_{i\zeta}}$	Componentes do vetor força gravitacional referente à M_i
ΔV	Varição da velocidade
V	Volume
A_{total}	Área total do asteroide
V_{total}	Volume total do asteroide
$I_{\xi\xi}$	Momento de inércia do asteroide em relação ao eixo ξ
$I_{\eta\eta}$	Momento de inércia do asteroide em relação ao eixo η
$I_{\zeta\zeta}$	Momento de inércia do asteroide em relação ao eixo ζ
$I_{\xi\eta}$	Produto de inércia do asteroide em relação aos eixos ξ e η
$I_{\xi\zeta}$	Produto de inércia do asteroide em relação aos eixos ξ e ζ
$I_{\eta\zeta}$	Produto de inércia do asteroide em relação aos eixos η e ζ
I	Tensor de inércia

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação para a exploração à pequenos corpos	1
1.2 Visão geral do trabalho.....	5
1.3 Objetivos do trabalho	6
1.4 Contribuições do trabalho.....	7
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 Teoria do potencial	9
2.2 Potencial gravitacional em torno de um corpo não esférico.....	12
2.3 Atração de uma partícula por um corpo de dimensões finitas e distribuição arbitrária de massa.....	17
2.4 Simulador de trajetórias e manobras orbitais	23
3. MODELAGEM DO CAMPO GRAVITACIONAL PARA CORPOS COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA ASSIMÉTRICOS	29
3.1 Método dos harmônicos esféricos: solução da equação de Laplace.....	30
3.2 Método da expansão em série convergente do potencial	37
3.3 Método das concentrações de massa	51
4. PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS	57
4.1 Relação entre o potencial gravitacional e coeficientes dos harmônicos esféricos ...	57
4.2 Estrutura do conjunto das equações lineares simultâneas	59
4.3 Método de resolução do conjunto de equações lineares.....	60
4.4 Integrais diretas para o cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos	60
5. RESULTADOS PARA O CUBO HOMOGÊNEO UNITÁRIO	65
5.1. O potencial Newtoniano exato de um cubo homogêneo	65
5.2. Modelagem do potencial do cubo homogêneo utilizando a decomposição em tetraedros	74
5.3. Modelagem do potencial do cubo homogêneo utilizando o método das concentrações de massa	84
5.4. Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao cubo	91
5.5 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos.....	95
5.6 Conclusão	97
6. RESULTADOS PARA O ASTEROIDE 25143 ITOKAWA	99
6.1 Modelo poliédrico inicial para o asteroide Itokawa	99
6.2 Modelo poliédrico final para o asteroide Itokawa	101
6.3 Modelo do campo gravitacional do asteroide (25143) Itokawa utilizando o método da expansão do potencial em série	107

6.4 Modelagem do potencial do asteroide 25143 Itokawa utilizando o método das concentrações de massa	112
6.5. Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Itokawa utilizando a expansão do potencial em série	115
6.6 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos do asteroide Itokawa	120
6.7 Simulações de trajetórias em torno do asteroide Itokawa	122
6.8 Estudo da perturbação gravitacional do asteroide Itokawa utilizando o modelo da expansão do potencial em série	129
6.9 Conclusão	132
7. RESULTADOS PARA O ASTEROIDE 1620 GEOGRAPHOS	135
7.1 Modelo poliédrico inicial para o asteroide Geographos	135
7.2 Modelo poliédrico final para o asteroide Geographos	136
7.3 Modelo do campo gravitacional do asteroide 1620 Geographos utilizando o método da expansão do potencial em série	142
7.4 Modelagem do potencial do asteroide 1620 Geographos utilizando o método das concentrações de massa	147
7.7 Simulações de trajetórias em torno do asteroide (1680) Geographos	151
7.8 Estudo da perturbação gravitacional do asteroide Itokawa utilizando o modelo da expansão do potencial em série	158
7.9 Conclusão	161
8. RESULTADOS PARA O ASTEROIDE (433) EROS	163
8.1 Modelo poliédrico para asteroide (433) Eros com 56644 faces sem correções	163
8.1.2 Modelo do campo gravitacional do asteroide (433) Eros com 56644 faces, sem correção, utilizando o método da expansão do potencial em série.....	168
8.1.3 Modelagem do potencial do asteroide 433 Eros com 56644 faces, sem correção, utilizando o método das concentrações de massa.....	171
8.1.4 Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Eros com 56644 faces, sem correção, utilizando a expansão do potencial em série	172
8.1.5 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos do asteroide Eros com 56644 faces, sem correções	175
8.1.6 Simulações de trajetórias em torno do asteroide (433) Eros com 56644 faces, sem correções	176
8.2 Modelo poliédrico para o asteroide (433) Eros com 7790 faces refinado.....	180
8.2.1 Modelo poliédrico inicial para o asteroide Eros com 7790 faces refinado	180
8.2.2 Modelo poliédrico final para o asteroide Eros com 7790 faces refinado	181
8.2.3 Modelo do campo gravitacional do asteroide 433 Eros com 7790 faces utilizando o método da expansão do potencial em série	186
8.2.4 Modelagem do potencial do asteroide 433 Eros com 7790 faces, com correção, utilizando o método das concentrações de massa.....	190

8.2.5 Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Eros com 7790 faces, com correção, utilizando a expansão do potencial em série.....	191
8.2.6 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos do asteroide Eros	192
8.2.7 Simulações de trajetórias em torno do asteroide (433) Eros, com 7790 faces, com correções.....	193
8.2.8 Estudo da perturbação gravitacional do asteroide Eros utilizando o modelo da expansão do potencial em série	200
8.3 Conclusão	202
9. CONCLUSÃO.....	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	209
APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL SOBRE O TETRAEDRO RETO RETÂNGULO	215
APÊNDICE B – RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES BETA E GAMMA.....	217
APÊNDICE C - DEDUÇÃO DO INTERVALO DE CONVERGÊNCIA PARA A EXPANSÃO EM SÉRIE DE POTENCIAS DA FUNÇÃO GERATRIZ DOS POLINOMIOS DE LEGENDRE.....	221
APÊNDICE D – TEOREMA DE EULER PARA FUNÇÕES HOMOGÊNEAS.	225
APÊNDICE E – RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE VERTÍCES E FACES DO MODELO POLIÉDRICO DO ASTEROIDE.....	227
APÊNDICE F – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 2063 BACCHUS OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA	229
APÊNDICE G – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 101955 BENNU OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA	231
APÊNDICE H – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 1580 BETULIA OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA	233
APÊNDICE I – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 4769 CASTALIA OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA	235
APÊNDICE J – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 21 LUTETIA OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA.....	237

APÊNDICE K – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DE STOKES NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 4660 NEREUS OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA	239
APÊNDICE L – DETERMINAÇÃO DE ALGUNS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS UTILANDO AS FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO DIRETA	241
APÊNDICE M - ALGORITMO PARA DETERMINAR O MODELO DO CAMPO GRAVITACIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DA EXPANSÃO DO POTENCIAL EM SÉRIE BASEADO NA METODOLOGIA DESENVOLVIDA NESTE TRABALHO	245

1. INTRODUÇÃO

Visando motivar o estudo proposto neste trabalho, inicia-se este capítulo apresentando um breve relato sobre algumas missões espaciais, que tem como objetivo explorar alguns asteroides. Logo em seguida, é exposta a sequência do desenvolvimento deste trabalho, acompanhada dos objetivos a serem atingidos, assim como, suas contribuições.

1.1 Motivação para a exploração à pequenos corpos

O estudo de missões a corpos pequenos tais como asteroides e cometas, tem despertado interesse crescente junto à comunidade científica, particularmente nos cientistas espaciais. Entretanto, tais missões apresentam uma dificuldade dinâmica extremamente desafiadora, pois, orbitando um asteroide com formato irregular, a força gravitacional não será central, e por conseguinte, um veículo espacial imerso nesse campo estará sujeito a várias forças perturbadoras, seja devido ao campo gravitacional gerado pela não esfericidade do corpo, ou à pressão de radiação solar (SRP), ou ainda, aos efeitos gravitacionais do Sol, alterando de forma significativa seus elementos orbitais e, conseqüentemente, variando sua trajetória em função do tempo. Logo, objetivando estudar as propriedades dinâmicas de um veículo espacial em órbita a esse astro, o principal problema a ser solucionado na fase de projeto da missão é elaborar um modelo matemático que reproduza com maior precisão as condições de distribuição do campo gravitacional exterior ao asteroide.

Sabendo que um asteroide pode ter participado da aurora da criação do sistema solar, o estudo de sua composição química, assim como, seu comportamento dinâmico, tornaram-se objetos de interesse dos cientistas, pois, os resultados de tais investigações, podem viabilizar conclusões sobre a formação dos planetas, assim como o entendimento da origem e evolução do cosmo, isto é, a compreensão desses pequenos corpos pode ser a chave para a decodificação do processo evolutivo do sistema solar.

Diante da importância do estudo de asteroides e cometas, e devido ao avanço da tecnologia, muitas agências espaciais intensificaram seus projetos voltados às missões espaciais não tripuladas, tendo como destino esses astros, chegando à sofisticação de

implementar órbitas muito próximas, e, inclusive, realizando pousos suaves em suas superfícies irregulares.

A sonda Galileu, lançada pela NASA em outubro de 1989, durante seu percurso ao planeta Júpiter, enviou grande quantidade de dados sobre as luas jovianas Io, Europa, Calisto e Ganimedes, além de enviar as primeiras imagens do asteroide 951 Gaspra, em outubro de 1991, Figura 1.1, permitindo obter informações fundamentais sobre a irregularidade do formato desse objeto.

Figura 1.1 – Foto do asteroide Gaspra.



Fonte: JPL/NASA (1991).

Em agosto de 1993, a mesma sonda Galileu enviou imagens do asteroide 243 Ida, Figura 1.2, descobrindo, inclusive, um pequeno satélite em torno de Ida, Dactyl (CHAPMAN et al., 1995).

Figura 1.2 - Imagem do asteroide 243 Ida e sua lua Dactyl, primeiro satélite de um asteroide a ser descoberto.



Fonte: JPL/NASA (1993).

A Figura 1.3, exibe a escala dos asteroides que foram fotografados em alta resolução.

Figura 1.3 - Escala dos asteroides que foram fotografados em alta resolução, a partir do maior para o menor: 4 Vesta, 21 Lutetia, 253 Mathilde, 243 Ida e sua lua Dactyl, 433 Eros , 951 Gaspra , 2867 Steins ,25143 Itokawa .



Fonte: JPL/NASA (1993).

Tais descobertas, assim como as observações terrestres indicando a existência de outros asteroides (PRAVEC e HAHN, 1997; PRAVEC et al. , 1998), estimularam o avanço do estudo da dinâmica orbital em torno de tais corpos irregulares, particularmente, despertaram a investigação da existência de órbitas estáveis que poderiam prolongar a vida útil do satélite (SCHEERES et al., 1996; GEISLER et al., 1997; PETIT et al., 1997; SCHEERES et al., 1998).

As primeiras imagens nas proximidades de um asteroide foram obtidas por meio de sobrevoos muito rápidos. Porém, os projetos mais recentes atingiram os objetivos de orbitar e até mesmo pousar em um asteroide. A sonda NEAR (Near Earth Asteroid Rendezvous) Shoemaker, lançada em 1996, enviou imagens do asteroide 253 Mathilde, e em 2000 realizou órbitas em torno do asteroide 433 Eros por um longo período de tempo, chegando a pousar nesse asteroide. Em maio de 2003, a Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA), enviou a sonda HAYABUSA, inicialmente denominada MUSES-C, que, além de pousar no asteroide Itokawa, retornou à Terra com amostras recolhidas de sua superfície. Porém, muito mais desafiador foi o projeto desenvolvido pela Agência Espacial Europeia (ESA) denominada de missão Internacional Rosetta: lançada em março de 2004, com o intuito de estudar a origem do Sistema Solar, a nave

espacial foi enviada para realizar um estudo detalhado do cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, o qual, além de ter uma órbita bem definida, mantém suas características de formação. Após alcançar a órbita desejada, em novembro de 2014, a Rosetta enviou uma sonda menor que estava acoplada a ela, o módulo Philae, com propósito de pousar no cometa, e estudar amostras de sua superfície. De fato, esse módulo tornou-se o primeiro objeto artificial a pousar na superfície de um cometa.

Em janeiro de 2006, a NASA lançou a sonda New Horizons, com o objetivo de estudar o planeta-anão Plutão e o Cinturão de Kuiper, sendo considerada o primeiro veículo espacial a sobrevoar Plutão e a fotografar suas pequenas luas Caronte, Nix, Hydra, Cérbero e Estige. Tal missão tem como objetivo principal caracterizar globalmente a geologia e a morfologia de Plutão e suas luas, além de mapear suas superfícies.

Lançada pela NASA, em agosto de 2011, a sonda Juno entrou em uma órbita polar ao redor do planeta Júpiter em julho de 2016, sendo esta, a primeira vez que Júpiter será visto abaixo da cobertura densa de nuvens. Seu objetivo primário será investigar a origem e evolução de Júpiter, e, por extensão, do Sistema Solar, analisando a composição do planeta, sua distribuição de massa, atmosfera, campos gravitacionais e magnéticos e suas regiões polares.

Lançada pela NASA em setembro de 2016, a sonda Origins Spectral Interpretation Resource Identification Security Regolith Explorer (OSIRIS-REx), tem como objetivo estudar e coletar amostras do asteroide 101955 Bennu, retornando à Terra em 2023. Este asteroide foi escolhido, pois, constatou-se a presença de grande quantidade de material carbônico em sua composição, elemento fundamental nas moléculas orgânicas e imprescindível para a existência de vida. De fato, os cientistas consideram esse asteroide como uma “cápsula do tempo” em relação à origem do sistema solar.

Analisando cada uma dessas missões, entre outras, percebe-se o aumento da dificuldade e das exigências de novos modelos matemáticos e ferramentas tecnológicas para prever e controlar a dinâmica de navegação de um veículo espacial em órbita em torno de um corpo irregular e, conseqüentemente, imerso em um campo gravitacional complexo.

1.2 Visão geral do trabalho

No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica e a revisão bibliográfica, baseadas na Teoria do Potencial e na solução da Equação de Laplace, indispensáveis para a elaboração de um modelo do campo gravitacional de um asteroide.

Visando determinar um modelo para o potencial, no capítulo 3, são apresentados os métodos dos harmônicos esféricos, da expansão do potencial em série convergente e das concentrações de massa, permitindo estabelecer uma relação entre os modelos obtidos pelos dois primeiros métodos. Desse modo, é possível obter os coeficientes dos harmônicos esféricos, a partir do modelo da expansão em série, por intermédio da resolução de um sistema de equações lineares, desenvolvido no capítulo 4, confrontando os valores calculados, com aqueles determinados diretamente.

Utilizando a expansão do seu potencial em uma série convergente, (KELLOGG, 2014, p.124), o capítulo 5, estabelece uma metodologia para modelar o campo gravitacional de um cubo unitário homogêneo, decompondo-o em tetraedros (WERNER, 1994), obtidos pela união dos vértices dos triângulos localizados na superfície do poliedro, ao centro de massa do cubo. De posse desses resultados, procurou-se validá-los, comparando-os com as soluções obtidas para este poliedro por meio do modelo exato desenvolvido por MacMillan (1958) e Waldvogel (1976), e pelo método das concentrações de massa, corroborando com a precisão do modelo concebido neste capítulo, considerando o intervalo de convergência do modelo. Encontrada a função potencial, os componentes da força são obtidos pelas derivadas parciais em relação às variáveis x , y e z , nos pontos para os quais essas derivadas são definidas, viabilizando estudar o comportamento dessas funções nas proximidades das bordas do cubo, além de possibilitar simulações de órbitas utilizando o Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), desenvolvido por Rocco (2008 e 2012). Após a obtenção da função potencial gravitacional até o grau e a ordem 22 para o cubo homogêneo, tratou-se de aplicá-la para obter os coeficientes da expansão em série convergente dos harmônicos esféricos correspondentes, confrontando esses coeficientes com os obtidos de forma direta, evidenciando a relevância em estabelecer um procedimento para obter um modelo matemático que represente o campo gravitacional de um cubo homogêneo e que possa ser aplicado a um asteroide.

Para modelar o campo gravitacional de um asteroide, utilizou-se a mesma técnica aplicada ao cubo homogêneo, decompondo-o em tetraedros, cujas coordenadas e triangulações são determinadas pelos dados coletados pelo radiotelescópio de Arecibo, localizado em Porto Rico, e fornecidos pelo JPL/NASA. Considerando a gama de dados disponíveis, foram estudados e modelados os asteroides (2063) Bacchus, (101955) Bennu, (1580) Betulia, (4769) Castalia, (433) Eros, (1620) Geographos, (25143) Itokawa, (21) Lutetia e (4660) Nereus, dos quais, foram eleitos os asteroides Itokawa, Geographos e Eros para serem apresentados neste trabalho de forma detalhada, capítulos 6, 7 e 8, respectivamente. Para os demais asteroides, os correspondentes coeficientes dos harmônicos esféricos são apresentados nos apêndices. Vale observar que para todos os asteroides estudados, houve um refinamento na determinação dos centros de massa, assim como nos cálculos dos tensores de inércia, implicando em uma translação e uma rotação, de modo a estabelecer maior precisão no estabelecimento dos eixos principais de inércia, sendo validados os resultados obtidos para o asteroide Itokawa (SCHEERES et al., 2004). No estudo do asteroide Eros, foram adotados os modelos com 7790 faces e 56644 faces, ambos utilizando os dados originais fornecidos pela NEAR, sendo que somente o primeiro modelo foi refinado como os demais asteroides. Porém, apesar do não refinamento do segundo modelo, devido ao custo computacional, ele foi convalidado pelos resultados apresentados por Miller et al. (2002).

1.3 Objetivos do trabalho

Este trabalho tem por objetivo geral, desenvolver uma metodologia para determinar um modelo matemático que melhor represente o campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular aplicando a expansão do potencial em série convergente. A partir dessa premissa, são estabelecidos os objetivos específicos, elencados a seguir:

- a) realizar uma revisão bibliográfica contendo trabalhos envolvendo o estudo da modelagem do campo gravitacional de um corpo não esférico, baseado nos métodos da expansão do potencial em série, dos harmônicos esféricos e das concentrações de massa, associados à decomposição poliédrica;

- b) estudar a modelagem que refaz as condições de distribuição do campo gravitacional exterior a um asteroide, utilizando os métodos já citados no item a);
- c) aplicar os métodos da expansão do potencial em série e das concentrações de massa, associados à decomposição em elementos tetraédricos, para modelar o campo gravitacional de um cubo homogêneo;
- d) comparar os resultados obtidos com aqueles referentes ao modelo exato;
- e) validar o modelo obtido pela expansão em série do potencial;
- f) calcular os coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao campo gravitacional do cubo homogêneo unitário, utilizando o método da expansão do potencial em série, assim como, de forma direta.
- g) confrontar os valores dos coeficientes determinados pelos dois procedimentos com aqueles já validados na literatura;
- h) aplicar os métodos da expansão do potencial em série e da concentrações de massa, associados à decomposição em elementos tetraédricos, para modelar o campo gravitacional do asteroide 25143 Itokawa;
- i) comparar os resultados obtidos pelos dois métodos;
- j) validar o modelo do campo gravitacional determinado pela expansão do potencial em série por meio de resultados já existentes na literatura;
- k) apresentar um algoritmo, baseado na metodologia desenvolvida neste trabalho, que mostre, passo a passo, como obter o modelo do campo gravitacional determinado utilizando a expansão do potencial em série.

1.4 Contribuições do trabalho

A principal contribuição deste trabalho consiste em desenvolver uma metodologia para estudar os conceitos fundamentais sobre as propriedades de um modelo para o campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular, com densidade

homogênea, utilizando a expansão do potencial em série, associada à sua decomposição em tetraedros. Vale ressaltar que, apesar da aplicação do método dos poliedros, (WERNER, 1994), o diferencial deste trabalho, está no procedimento para calcular o potencial de cada tetraedro, e, conseqüentemente, para a determinação do potencial total. Essa metodologia será colocada na forma de um algoritmo que descreverá os passos para modelar o objeto em estudo. Além disso, a partir da obtenção do modelo do potencial, o seu gradiente fornecerá os componentes da resultante do vetor força gerada pelo asteroide em um veículo espacial, possibilitando estudar o comportamento dinâmico de um satélite imerso nesse campo gravitacional.

No caso da utilização do ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), desenvolvido por Rocco (2008 e 2012), a disponibilização dos componentes analíticos da força perturbadora, diminuem o custo computacional, isto é, reduzem o custo computacional das simulações, pois requerem menos memória, em comparação com o método das concentrações de massa.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Teoria do potencial

No estudo da física-matemática durante o século 19, adotou-se a expressão "Teoria do Potencial", pois os pesquisadores acreditavam que as forças fundamentais da natureza seriam calculadas a partir de funções potenciais que satisfizessem a equação de Laplace. Assim, a teoria do potencial foi o estudo das funções que poderiam servir como potenciais. Com o passar do tempo, concluiu-se que a natureza é muito mais complexa, isto é, certos fenômenos são descritos por equações diferenciais parciais, ou mesmo ordinárias, não lineares. No entanto, o termo "teoria do potencial" manteve-se como uma expressão conveniente para descrever o estudo das funções que satisfaçam a equação de Laplace e suas generalizações.

Na formulação da lei da gravitação universal, apresentada em 1687 por Isaac Newton (1643-1727), foram consideradas apenas as forças mútuas de atração de dois pontos materiais. Estas forças são diretamente proporcionais ao produto das massas dessas partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Dessa forma, o primeiro e mais importante problema do ponto de vista da mecânica celeste e da geodesia foi estudar as forças de atração em um ponto material devido a um corpo finito, em particular, um elipsoide, uma vez que muitos corpos celestes podem ser aproximados por esta forma. Após as primeiras conquistas parciais por Newton e outros, estudos realizados em 1773 por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Adrien-Marie Legendre (1752-1833) entre 1784-1794 e por Pierre Simon Laplace (1749-1827) entre 1782-1799, esse estudo tornou-se de grande importância. Lagrange estabeleceu que o campo de forças gravitacionais, como hoje é chamado, é o campo de potencial, introduzindo uma função que, em 1828, foi chamada por George Green (1793-1841), de função potencial e mais tarde, em 1840, por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), somente de potencial.

De acordo com a lei da gravitação universal de Newton, o módulo da força de atração entre duas partículas de massas m e M , a uma distância r entre si, é dado pela Equação (2.1):

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (2.1)$$

sendo G a constante gravitacional. Adaptando a Eq. (2.1) à segunda lei de Newton, conclui-se que o módulo do vetor aceleração da partícula de massa m , em relação ao centro de massa do sistema formado pelas duas partículas, é expressa pela Equação (2.2):

$$a = \frac{GM}{r^2}. \quad (2.2)$$

Um vetor \mathbf{a} , correspondente à Equação (2.2), será determinado, escrevendo a aceleração como o gradiente de um escalar, denominado potencial, dado pela Equação (2.3):

$$\mathbf{a} = \nabla V. \quad (2.3)$$

considerando tal potencial expresso pela Equação (2.4)

$$V = \frac{kM}{r}. \quad (2.4)$$

Analisando a Equação (2.4), verifica-se que a grandeza é positiva, compatível com a convenção de sinal adotado pela astronomia e geodesia, contrariamente à adotada na física.

Se M for muito maior que a massa m , as Equações (2.3) e (2.4) são coerentes com um sistema de coordenadas, cuja origem está localizada no centro de massa da partícula de massa M . Caso o problema envolva várias partículas M_i , com distâncias correspondentes r_i , a aceleração associada, continua sendo escrita como o gradiente de um potencial, resultado do somatório dos potenciais V_i , expressos pela Equação (2.4). Na hipótese de se tratar de um sólido, com densidade variável σ , o somatório transforma-se em uma integral sobre o volume do sólido. Dessa forma, o potencial será dado pela Equação (2.5)

$$V = G \iiint_Q \frac{\sigma(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz. \quad (2.5)$$

Em relação ao vetor aceleração \mathbf{a} , a componente a_x , obtida a partir da Equação (2.4), resulta na Equação (2.6)

$$a_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -GM \frac{x}{r^3}, \quad (2.6)$$

cuja derivada segunda, em relação à variável x , vem a ser expressa pela Equação (2.7)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GM \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right). \quad (2.7)$$

Procedendo de modo análogo em relação às outras variáveis e somando esses resultados, obtém-se a equação de Laplace, apresentada pela Equação (2.8)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = GM \left[-\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0. \quad (2.8)$$

Adotando a notação U para o potencial, toda função $U = U(x, y, z)$ que tenha as derivadas parciais de segunda ordem contínuas e que satisfaça a equação de Laplace, dada pela Equação (2.9),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (2.9)$$

é denominada harmônica. Isto conduz à hipótese de que o potencial é uma função harmônica e as propriedades do potencial estão intimamente relacionadas com as propriedades das funções harmônicas. Nos problemas que recaem na equação de Laplace, são encontradas aplicações da teoria do potencial. Visto que as partes real e imaginária de uma função analítica de uma variável complexa são harmônicas, a teoria do potencial no plano complexo é essencialmente a teoria das funções analíticas. Neste caso, pode-se usar a poderosa técnica desenvolvida para funções analíticas, a fim de estudar os potenciais.

Gauss, assim como os pesquisadores da época, constatou que o método dos potenciais poderia ser aplicado não apenas em problemas relativos à teoria gravitacional, mas, em

geral, para resolver uma ampla gama de problemas na física matemática, em particular, em eletrostática e magnetismo.

2.2 Potencial gravitacional em torno de um corpo não esférico

Como citado anteriormente, a lei da atração gravitacional é válida para duas partículas puntiformes, não sendo mais aplicável a corpos com dimensões finitas com distribuições arbitrárias de massas. Porém, corpos esféricos, com distribuições de massas contendo camadas de mesma densidade, isto é, esferas concêntricas, atraem-se mutuamente, como se suas massas ficassem concentradas em seus centros. Além disso, se a distância entre dois corpos é muito maior, em comparação com suas dimensões, a atração entre elas pode ser calculada como se suas massas estivessem concentradas em seus centros de massa. Estes resultados possibilitam, em muitos casos, desprezar as dimensões e as distribuições de massas, tratando a atração gravitacional entre dois corpos, considerando-os pontos materiais. No entanto, há casos no sistema solar e em sistemas em que os desvios de esfericidade têm efeitos importantes. Logo, é necessário examinar o caso da atração gravitacional entre dois corpos finitos, tendo cada um, uma distribuição arbitrária de massa. Porém, devido à complexidade deste problema e ao objetivo do estudo proposto neste trabalho, é mais adequado tratar a atração entre um corpo de dimensões finitas, o asteroide, e um ponto material, o veículo espacial.

O estudo do campo gravitacional em torno de um corpo não esférico ganhou muito interesse na geodesia científica quando pesquisadores de renomes, inclusive Isaac Newton, reconheceram que a Terra não poderia ser uma esfera perfeita, mas sim, deveria ser uma esfera achatada devido a sua rotação.

Por volta de 1740, a Academia Francesa de Ciências realizou duas expedições, ambas sob lideranças de matemáticos franceses, Pierre Bouguer ao Peru e Pierre-Louis Pierre-Moreau de Maupertuis a Lapland, com o objetivo de medir o comprimento de um arco meridional de aproximadamente 1° , de latitude, um próximo ao equador e outro, ao Pólo Norte. A diferença entre os dois resultados é uma medida do achatamento, que é o desvio, em relação à esfera, do elipsoide equivalente à Terra. Estas medições indicaram que a Terra seria aproximadamente um elipsoide de revolução.

Everest (1830) foi o responsável por terminar o grande estudo cartográfico da Índia, ao longo do arco meridiano do sul indiano estendendo-se até o norte do Nepal, cobrindo uma distância de aproximadamente 2400 quilômetros, utilizando estudos do potencial gravitacional de um paralelepípedo.

Kellogg (1929) desenvolveu em seu livro uma fundamentação teórica essencial para a modelagem analítica do potencial gravitacional envolvendo corpos com distribuições de massas irregulares, apresentando trabalhos abrangendo algumas formas geométricas planas e espaciais.

MacMillan (1930), em sua obra, além de expor os conceitos físicos e matemáticos básicos para o estudo do potencial, deduziu o modelo para o potencial gravitacional de um paralelepípedo reto retângulo homogêneo, assim como para o cubo.

Nagy (1966) desenvolveu um estudo para analisar o efeito do campo gravitacional de um paralelepípedo reto retângulo utilizando um procedimento gráfico, no qual, o cálculo baseia-se em um algoritmo para a combinação linear das leituras feitas, a partir de um gráfico, cujas abscissas e ordenadas, são as coordenadas do poliedro, em relação à sua profundidade.

O cálculo do potencial gravitacional de um paralelepípedo também foi desenvolvido nos trabalhos de Bannerjee e Gupta (1977) e Montana et al. (1992). Waldvogel (1976) deduziu a expressão exata do potencial newtoniano de um cubo homogêneo, e posteriormente, para outros poliedros.

Lien e Kajiyama (1984) apresentaram um método simbólico para calcular as propriedades das integrais envolvendo um poliedro não convexo arbitrário, simplificando sobremaneira a determinação de tais resultados. Vale observar a importância desta técnica, sendo aplicado mais tarde por Werner (1997).

Balmino (1994) calculou analiticamente os coeficientes harmônicos esféricos do potencial gravitacional de um corpo homogêneo por meio dos harmônicos que descrevem seu formato, utilizando um elipsóide triaxial para a verificação numérica. Como exemplo, aplicou seus cálculos a lua de Marte Phobos e estabeleceu a convergência numérica das expressões para os harmônicos.

Hudson e Ostro (1994) obtiveram o formato tridimensional do asteroide 4769 Castalia (1989 PB) a partir de seu mapeamento obtido pela inversão de imagens de radar utilizando o efeito Doppler com atraso, devido à rotação do asteroide.

Devido ao formato irregular, Werner (1994) modelou a geometria dos asteroides por meio de um poliedro com densidade constante, expressando o potencial gravitacional exterior e os componentes da aceleração em termos das arestas e dos ângulos diédricos dos vértices do poliedro, aplicando esse método a Phobos, satélite de Marte, com 146 vértices e 288 faces triangulares.

Werner e Scheeres (1996) calcularam o potencial gravitacional exterior a um poliedro com formato fechado e densidade constante, utilizando um modelo físico calculado por radar para o asteroide 4769 Castalia, com o propósito de estudar a dinâmica orbital em suas proximidades; as superfícies de velocidade zero foram discutidas, e as famílias de órbita periódicas foram calculadas. Depois disso, outros trabalhos foram realizados para estudar a dinâmica nas proximidades de outros asteroides, tais como 4179 Toutatis (SCHEERES et al., 1998), 433 Eros (SCHEERES et al., 2000), 216 Kleopatra (YU E BAOYIN, 2012), assim como os asteroides 2002 AT4 e 1989 ML (SCHEERES, 2012).

Ostro et al. (1996) obtiveram o formato tridimensional do asteroide 1620 Geographos a partir de seu mapeamento obtido pela inversão de imagens de radar utilizando o efeito Doppler com atraso, devido à rotação do asteroide.

Werner (1997) apresentou relações recorrentes para as definições dos coeficientes harmônicos esféricos totalmente normalizados, permitindo derivá-los e integrá-los analiticamente para produzir o potencial gravitacional de um poliedro com densidade constante.

Benner et al. (1999) obtiveram o formato tridimensional do asteroide 2063 Bacchus a partir de seu mapeamento obtido pela inversão de imagens de radar utilizando o efeito Doppler com atraso, devido à rotação do asteroide.

Caso o formato de que o asteroide possa ser aproximado por um elipsóide, tal como a Terra ou Marte, o método clássico da série dos polinômios de Legendre pode ser aplicado para estudar o seu potencial gravitacional, pois a série convergirá rapidamente

(RIAGUAS et al., 1999). Entretanto, quando o seu formato for irregular, a série convergirá lentamente nas regiões muito próximas a ele (RIAGUAS et al., 1999; BLESA, 2006) e poderá, inclusive, divergir em determinados pontos de seu campo gravitacional (BALMINO, 1994; ELIPE E LARA, 2003).

Dechambre e Scheeres (2002) apresentaram um método envolvendo expressões analíticas, relacionando os harmônicos esféricos aos elipsoidais referentes às expansões em séries de um campo gravitacional, permitindo converter os cálculos dos harmônicos esféricos em elipsoidais no interior da esfera de Brillouin ou de Bjerhammar do corpo original, possibilitando calcular a trajetória de uma nave espacial nas proximidades de um asteroide com campo gravitacional já medido.

A partir dos dados coletados pelo veículo espacial NEAR-Shoemaker (MILLER et al., 2002) determinaram um modelo para o asteroide 433 Eros, assim como calcularam os coeficientes dos harmônicos esféricos desse asteroide.

Scheeres et al. (2004) realizaram um estudo sobre o comportamento dinâmico de um satélite em torno do asteroide 25143 Itokawa, utilizando o formato e o modelo de estado de rotação estimados a partir de dados de imagem de radar por Ostro et al. (2004), determinando opções de órbitas estáveis para a sonda Hayabusa. Além disso, foram calculados os coeficientes dos harmônicos esféricos desse asteroide.

Broucke e Prado (2004) estudaram as propriedades e perturbações das órbitas em torno de um objeto retangular alongado, aplicando essa análise ao cubo homogêneo unitário, com o intuito de modelar o movimento próximo a um asteroide.

Gaskell et al. (2006) realizou estudo da topografia geral do asteroide 25143 Itokawa utilizando um catálogo de mapas digitais referentes à sua superfície, fornecendo subsídios para o estudo atualizado do comportamento dinâmico em torno desse asteroide.

Utilizando os dados coletados pela sonda Hayabusa, durante a fase de aproximação ao asteroide 25143 Itokawa, permitiram Scheeres et al. (2006) refinarem o modelo do campo gravitacional desse asteroide, inicialmente, supondo a densidade constante, e,

posteriormente, assumindo o ambiente dinâmico real sobre este corpo, tanto na superfície quanto em sua órbita.

Park, Werner e Bhaskaran (2010) apresentaram um método utilizando definições de elementos finitos, como cubos e esferas, assumindo a forma poliédrica para modelar o campo gravitacional externo, estimando a variação da densidade interna de um pequeno corpo.

Zhenjiang, Meng, Hutao e Pingyuan (2012) apresentaram um método baseado no modelo poliédrico com o propósito de obter um modelo suficientemente preciso do harmônico esférico do campo gravitacional de um asteroide durante a fase de projeto da missão de exploração a esse astro, auxiliando no estudo da trajetória da órbita, assim como na trajetória de pouso.

Hu (2012) apresentou um estudo comparando os harmônicos esféricos com os elipsoidais na modelagem do campo gravitacional de um corpo não esférico, aplicando esse estudo para os asteroides Phobos e Eros.

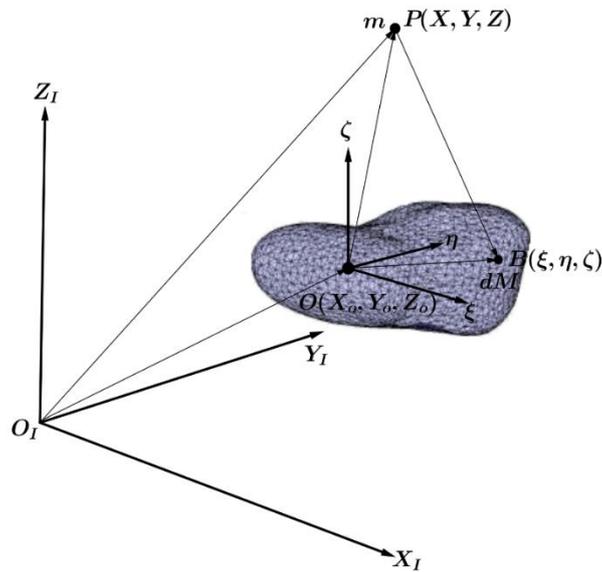
Venditti (2013) e Venditti et al. (2013a e 2013b) desenvolveram um estudo relacionado com manobras de veículos espaciais ao redor de corpos irregulares, utilizando o método das concentrações de massa associado ao modelo de poliedros, desenvolvido por meio de observações reais de asteroides e disponibilizados pelo JPL/NASA, para modelar o campo gravitacional desses corpos.

Scheeres et al. (2016) analisou o modelo do asteroide (101955) Bennu, alvo da missão da OSIRIS-REx, utilizando modelos baseados em observações terrestres deste corpo. Tais observações permitiram desenvolver o modelo de sua forma, o estado de rotação, a massa e as propriedades de sua superfície. Supondo uma distribuição uniforme de massa, permitiu estudar o geopotencial, declives superficiais e o ambiente dinâmico próximo à sua superfície, além de calcular os coeficientes dos harmônicos esféricos para esse asteroide.

2.3 Atração de uma partícula por um corpo de dimensões finitas e distribuição arbitrária de massa.

Em um sistema de coordenadas cartesianas inerciais X_I, Y_I, Z_I , sejam (X_o, Y_o, Z_o) as coordenadas do centro de massa O de um corpo Q , e sejam (X, Y, Z) as coordenadas de uma partícula no ponto P com massa m . Considere no ponto B um elemento de massa dM do corpo Q , e sejam (ξ, η, ζ) as coordenadas de B em um sistema de coordenadas com eixos paralelos aos do sistema fixo, mas com a sua origem em O , como ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - Sistemas de coordenadas para o cálculo da força gravitacional.



Fonte: Produção do autor.

Definindo (x, y, z) como as coordenadas de m relativas ao centro de massa de Q , tem-se que

$$x = X - X_o, \quad y = Y - Y_o, \quad z = Z - Z_o, \quad (2.10)$$

e, por consequência, a distância Δ , entre os pontos P e B , será dada pela Equação (2.11).

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2. \quad (2.11)$$

O módulo da força que atua na partícula m devido à atração do elemento de massa dM , é $Gm dM / \Delta^2$ na direção \mathbf{PB} , sendo $G = (6.6742 \pm 0.0010) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Os componentes da força ao longo dos três eixos de coordenadas são obtidos pela multiplicação da força pelos cossenos diretores da direção \mathbf{PB} . Uma vez que as coordenadas do ponto B em relação a P são $(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, com o auxílio da Equação (2.11), tem-se que os cossenos diretores são expressos pela Equação (2.12),

$$\frac{\xi - x}{\Delta}, \quad \frac{\eta - y}{\Delta}, \quad \frac{\zeta - z}{\Delta}, \quad (2.12)$$

e, conseqüentemente, os três componentes da força devido à atração por dM são dadas pela Equação (2.13)

$$Gm dM \frac{\xi - x}{\Delta^3}, \quad Gm dM \frac{\eta - y}{\Delta^3} \quad \text{e} \quad Gm dM \frac{\zeta - z}{\Delta^3}. \quad (2.13)$$

A integração ao longo de todo o corpo Q produz os componentes da força, expressas pela Equação (2.14)

$$F_x = Gm \iiint_Q \frac{\xi - x}{\Delta^3} dM, \quad F_y = Gm \iiint_Q \frac{\eta - y}{\Delta^3} dM, \quad F_z = Gm \iiint_Q \frac{\zeta - z}{\Delta^3} dM. \quad (2.14)$$

Introduzindo a densidade σ , função finita dependente das coordenadas ξ, η, ζ , as integrais dadas pela Equação (2.14), podem ser colocadas de uma forma mais concisa. Logo, a relação entre os elementos de massa e volume satisfazem a Equação (2.15)

$$dM = \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.15)$$

Calculando F_x, F_y e F_z ao longo de toda a massa M , os componentes da força são expressos pelas integrais triplas dadas pelas Equações (2.16), (2.17) e (2.18).

$$F_x = Gm \iiint_Q \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\xi - x}{\Delta^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.16)$$

$$F_y = Gm \iiint_Q \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\eta - y}{\Delta^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.17)$$

$$F_z = Gm \iiint_Q \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta - z}{\Delta^3} d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.18)$$

Desta forma, são necessárias três integrações triplas. Porém, é possível expressá-las utilizando apenas uma integral tripla, considerando as derivadas parciais de Δ^2 em relação às variáveis x, y, z . A partir da Equação (2.11), segue a Equação (2.19)

$$\Delta d\Delta = (x - \xi) dx + (y - \eta) dy + (z - \zeta) dz \quad (2.19)$$

ou, de forma equivalente, resulta a Equação (2.20)

$$-\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{\xi - x}{\Delta^3} dx + \frac{\eta - y}{\Delta^3} dy + \frac{\zeta - z}{\Delta^3} dz. \quad (2.20)$$

Lembrando que $\frac{d(\Delta^{-1})}{d\Delta} = -\frac{1}{\Delta^2}$, pode-se obter a igualdade entre os diferenciais

$d\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{1}{\Delta^2} d\Delta$. Logo, a Equação (2.20) pode ser reescrita pela Equação (2.21).

$$d\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{\xi - x}{\Delta^3} dx + \frac{\eta - y}{\Delta^3} dy + \frac{\zeta - z}{\Delta^3} dz. \quad (2.21)$$

Sabendo que

$$d\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\Delta}\right) dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Delta}\right) dz, \quad (2.22)$$

e, identificando os elementos correspondentes das Equações (2.21) e (2.22), obtém-se as Equações (2.23), (2.24) e (2.25):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{\xi - x}{\Delta^3}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = \frac{\eta - y}{\Delta^3}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = \frac{\zeta - z}{\Delta^3}. \quad (2.25)$$

Substituindo as Equações (2.23), (2.24) e (2.25), respectivamente, nas Equações (2.16), (2.17) e (2.18), resulta nos componentes da força dados pelas Equações (2.26), (2.27) e (2.28).

$$F_x = Gm \iiint_Q \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I}{\Delta} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.26)$$

$$F_y = Gm \iiint_Q \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{I}{\Delta} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.27)$$

$$F_z = Gm \iiint_Q \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I}{\Delta} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.28)$$

Nas integrais das Equações (2.26), (2.27) e (2.28), x , y , z são considerados parâmetros que devem ser tratados como constantes. Além disso, os limites de integração são independentes destes parâmetros. Vale observar que é admissível alterar a ordem de diferenciação e integração em relação a um parâmetro, desde que $\Delta \neq 0$ para todos os pontos pertencentes ao interior do intervalo de integração, ou seja, a partícula m deve ser exterior a Q ou no interior de uma cavidade deste. O caso em que a partícula é uma parte de Q exigiria investigação especial.

Define-se a função potencial U , tendo como expressão a Equação (2.29)

$$U = G \iiint_Q \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.29)$$

a qual, pode ser reescrita de modo mais conciso da forma da Equação (2.30)

$$U = G \iiint_Q \frac{dM}{\Delta}. \quad (2.30)$$

A partir das Equações (2.26), (2.27) e (2.28), segue-se, que os componentes da força que atua sobre m , podem ser escritos pela Equação (2.31)

$$F_x = m \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = m \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = m \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.31)$$

De modo similar, as forças que agem sobre os diferentes elementos de Q podem ser transferidas para o seu centro de massa, e a força resultante será igual e oposta à força que atua sobre m . Assim, os componentes são expressos pela Equação (2.32)

$$F_x^{(0)} = -m \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y^{(0)} = -m \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z^{(0)} = -m \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.32)$$

Para aplicações posteriores é desejável retornar ao sistema cartesiano de coordenadas fixo original. Então U deve ser considerada uma função das diferenças $X - X_o, Y - Y_o, Z - Z_o$, e os componentes da força em m serão dadas pela Equação (2.33)

$$F_x = m \frac{\partial U}{\partial X}, \quad F_y = m \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad F_z = m \frac{\partial U}{\partial Z}. \quad (2.33)$$

Os componentes da força que determinam a posição do centro de massa de Q são dados pela Equação (2.34)

$$F_x^{(0)} = m \frac{\partial U}{\partial X_o}, \quad F_y^{(0)} = m \frac{\partial U}{\partial Y_o}, \quad F_z^{(0)} = m \frac{\partial U}{\partial Z_o}. \quad (2.34)$$

Retomando à Equação (2.11), tem-se que a Equação (2.35)

$$\Delta^3 = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (2.35)$$

e, conseqüentemente, as derivadas parciais da Equação (2.35) em relação a x , y e z são dadas pela Equações (2.36), (2.37) e (2.38).

$$\frac{\partial(\Delta^3)}{\partial x} = -3\Delta(\xi - x), \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial(\Delta^3)}{\partial y} = -3\Delta(\eta - y), \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial(\Delta^3)}{\partial z} = -3\Delta(\zeta - z). \quad (2.38)$$

Diferenciando parcialmente as Equações (2.23), (2.24) e (2.25), em relação à x , y , z , e utilizando as Equações (2.36), (2.37) e (2.38), encontram-se as Equações (2.39), (2.40) e (2.41).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = \frac{-\Delta^3 + 3\Delta(\xi - x)^2}{\Delta^6}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = \frac{-\Delta^3 + 3\Delta(\eta - y)^2}{\Delta^6}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = \frac{-\Delta^3 + 3\Delta(\zeta - z)^2}{\Delta^6}. \quad (2.41)$$

Somando, membro a membro as Equações (2.39), (2.40) e (2.41), encontra-se a Equação (2.42).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = \frac{-3\Delta^3 + 3\Delta[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]}{\Delta^6}. \quad (2.42)$$

Verifica-se que o segundo membro da Equação (2.42) é nulo. Logo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{I}{\Delta} \right) = 0. \quad (2.43)$$

Lembrando que as derivadas segundas da função potencial, em relação à x , y , z são dadas pelas Equações (2.44), (2.45) e (2.46)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = G \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right) dM, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G \int \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right) dM, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = G \int \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right) dM, \quad (2.46)$$

somando, membro a membro, as Equações (2.44), (2.45) e (2.46), obtém-se a Equação (2.47)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = G \int \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right) \right] dM, \quad (2.47)$$

resultando na Equação (2.48)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (2.48)$$

denominada de equação de Laplace em termos das coordenadas cartesianas x , y , z . Logo, o problema para encontrar a atração mútua entre as massas M e m foi reduzido à obtenção da função U , definida pela Equação (2.29), dependente das variáveis x , y , z . As propriedades gerais das soluções da Equação (2.48) são estudadas na teoria do potencial Newtoniano, assim como, em problemas envolvendo eletrostática, escoamento de fluidos incompressíveis, equação do calor, etc. Caso o corpo de massa M possua simetria esférica, definindo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, seu potencial é dado pela Equação (2.49)

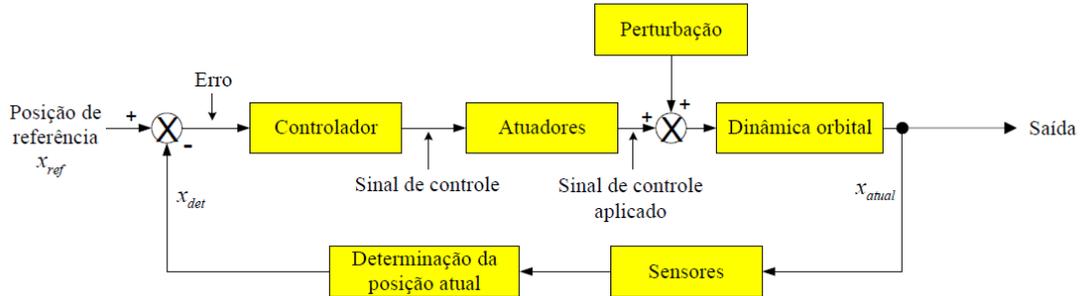
$$U = \frac{GM}{r}. \quad (2.49)$$

2.4 Simulador de trajetórias e manobras orbitais

Em razão do asteroide apresentar uma distribuição de massa irregular, seu campo gravitacional não será central. Logo, se for necessário manobrar um veículo espacial imerso nesse campo, torna-se indispensável identificar a perturbação de sua órbita.

Para comparar com a órbita perturbada, adota-se uma órbita kepleriana de referência, e utiliza-se do ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), (ROCCO, 2008 e 2012), cuja Figura 2.2 ilustra a arquitetura do controle de trajetória do STRS.

Figura 2.2 - Arquitetura do controle de trajetória.



Fonte: Adaptado de Rocco, 2012.

A equação de Kepler, dada pela Equação (2.50), permite calcular o movimento orbital a cada passo da simulação definido no STRS, sendo M' a anomalia média, E a anomalia excêntrica e e a excentricidade da órbita.

$$M' = E - e \sin E \quad (2.50)$$

Partindo de um estado inicial, posição e velocidade, e de um intervalo de tempo estipulado, pode-se transformar esse estado em elementos orbitais por meio da solução do problema inverso de posicionamento do veículo espacial. Posteriormente, empregando a Equação (2.50), esses elementos orbitais propagam-se no intervalo de tempo estabelecido, ou seja, no passo da simulação. A resolução do problema do posicionamento direto, (ROY, 2005), proporciona a obtenção dos novos elementos orbitais, que por sua vez, são convertidos em um novo estado.

As equações de (2.51) à (2.72) elencadas a seguir e que constam no simulador, transformam os elementos keplerianos a , e , i , Ω , ω e M , em estado:

$$R_{11} = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \quad (2.51)$$

$$R_{12} = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \quad (2.52)$$

$$R_{13} = \sin \Omega \sin i \quad (2.53)$$

$$R_{21} = \cos \omega \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen} \omega \cos \Omega \cos i \quad (2.54)$$

$$R_{22} = -\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \quad (2.55)$$

$$R_{23} = -\cos \Omega \operatorname{sen} i \quad (2.56)$$

$$R_{31} = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} i \quad (2.57)$$

$$R_{32} = \cos \omega \operatorname{sen} i \quad (2.58)$$

$$R_{33} = \cos i \quad (2.59)$$

$$R(\omega, i, \Omega) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\|\mathbf{r}\| = a(1 - e \cos E) \quad (2.61)$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mu \left(\frac{2}{\|\mathbf{r}\|} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.62)$$

$$\|\mathbf{r}\| = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} \quad (2.63)$$

$$\|\mathbf{v}\| = (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)^{1/2} \quad (2.64)$$

$$A_x = a R_{11} \quad (2.65)$$

$$A_y = a R_{21} \quad (2.66)$$

$$A_z = a R_{31} \quad (2.67)$$

$$B_x = a \sqrt{1 - e^2} R_{12} \quad (2.68)$$

$$B_y = a \sqrt{1 - e^2} R_{22} \quad (2.69)$$

$$B_z = a\sqrt{1-e^2} R_{32} \quad (2.70)$$

$$X_i = A_i(\cos E - e) + B_i \sin E \quad (2.71)$$

$$\dot{X}_i = \frac{an}{\|\mathbf{r}\|} (-A_i \sin E + B_i \cos E) \quad (2.72)$$

Para a transformação no sentido contrário, isto é, de estado para elementos keplerianos, utilizam-se as Equações apresentadas de (2.73) à (2.81):

$$\mathbf{h} = h_x \hat{\mathbf{I}} + h_y \hat{\mathbf{J}} + h_z \hat{\mathbf{K}} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (YZ - \dot{Y}Z) \hat{\mathbf{I}} + (ZX - \dot{Z}X) \hat{\mathbf{J}} + (XY - \dot{X}Y) \hat{\mathbf{K}} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} \quad (2.75)$$

$$\Omega = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{h_x}{h_y} \right) \quad (2.76)$$

$$i = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}{h_z} \right] \quad (2.77)$$

$$f = \text{sen}^{-1} \left[\frac{(1-e^2)^{1/2} \sin E}{1-e \cos E} \right] \quad (2.78)$$

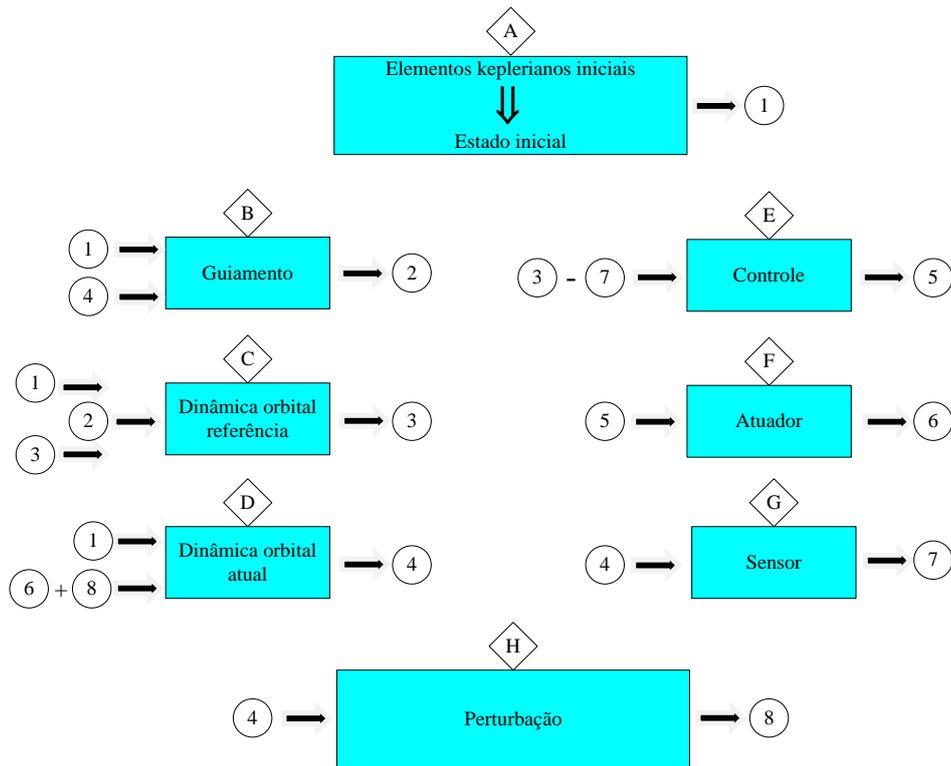
$$f = \text{cos}^{-1} \left(\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \right) \quad (2.79)$$

$$\text{tg } \upsilon = \frac{-\cos i \sin \Omega X + \cos i \cos \Omega Y + \sin i Z}{\cos \Omega X + \sin \Omega Y} \quad (2.80)$$

$$\upsilon = \omega + f \quad (2.81)$$

Em relação à arquitetura do simulador STRS, a Figura 2.3 apresenta o fluxograma de dados dos principais subsistemas presentes:

Figura 2.3 - Fluxograma de dados com os principais subsistemas do simulador orbital.



Fonte: Produção do autor.

Inicialmente, considerando o instante $t=0$, os elementos orbitais correspondentes são disponibilizados ao subsistema A, possibilitando o cálculo do estado inicial do veículo. Em seguida, esse estado inicial é enviado ao subsistema B responsável pelo guiamento, que define as variações na velocidade orbital delimitadas pelo cálculo de possíveis manobras a serem executadas, e também aos subsistemas C e D, responsáveis pelos cálculos dos estados de referência e atual, por meio das dinâmicas orbitais de referência e atual. O estado atual é fornecido pelo subsistema D. O subsistema E gera o sinal de controle a partir da comparação do estado de referência com o estado atual que foi determinado pelo subsistema G. Na sequência o sinal de controle é inserido no subsistema F que contém os modelos dos atuadores (propulsores) gerando o sinal de atuação que juntamente com o sinal de perturbação, definido no subsistema H, será utilizado pelo modelo da dinâmica orbital atual para gerar o estado atual fechando a malha de controle.

3. MODELAGEM DO CAMPO GRAVITACIONAL PARA CORPOS COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA ASSIMÉTRICOS

Considerando apenas a perturbação do campo gravitacional do asteroide, determinado por sua não esfericidade, a modelagem de seu potencial e, conseqüentemente, de sua força, é o principal problema a se resolver na fase de projeto da missão de exploração a esse astro, tendo em vista estudar as propriedades dinâmicas do satélite em sua órbita. Obtido o modelo do potencial do asteroide, procura-se analisá-lo por meio de técnicas matemáticas ou computacionais, com o propósito de entender seu comportamento geral, buscando uma solução para a equação estabelecida.

Devido ao desenvolvimento acentuado da ciência da computação, particularmente, nas áreas da modelagem tridimensional e da tecnologia de simulação, diante da impossibilidade de se trabalhar com a função exata do potencial, busca-se o modelo que reproduza as condições de distribuição do campo gravitacional exterior ao asteroide com maior precisão.

Das diversas técnicas existentes na literatura, este trabalho utiliza os métodos dos harmônicos esféricos, da expansão em série do potencial e das concentrações de massa, todos associados ao emprego da técnica poliedral para modelar o campo gravitacional do asteroide, estabelecendo um procedimento para correlacionar os dois primeiros modelos, permitindo obter os coeficientes dos harmônicos esféricos a partir da expansão em série do potencial, pela resolução de um conjunto de equações lineares simultâneas, confrontando esses valores com aqueles determinados diretamente.

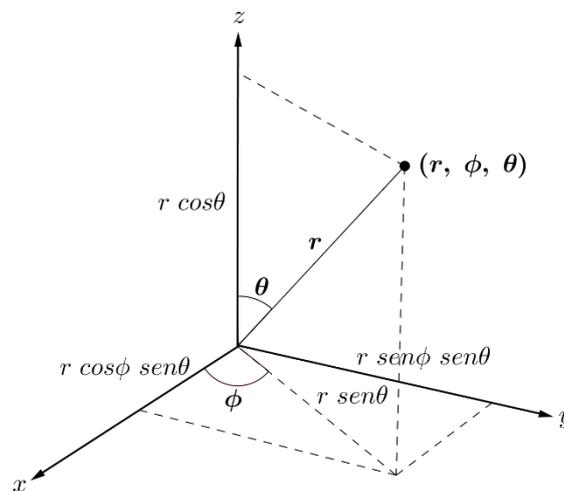
O método poliedral (WERNER, 1997) objetiva modelar o formato do asteroide por meio de um poliedro, resultado da união de elementos tetraédricos, ligando-se os vértices das bases triangulares, localizadas na superfície do asteroide, ao seu centro de massa; posteriormente, transformando um tetraedro qualquer em um tetraedro reto retângulo unitário, por meio de uma aplicação linear (LIEN E KAJIYA, 1984), as propriedades das integrais de um poliedro não convexo podem ser calculadas de forma mais simples, tais como o volume de cada elemento tetraédrico e seu correspondente baricentro, determinando-se o potencial total do asteroide como o somatório dos potenciais desses tetraedros. Vale salientar que quanto maior o número de tetraedros,

maior será a precisão dos cálculos, porém, implicando em aumento do custo computacional. Portanto, deve-se estabelecer uma relação entre o esforço de cálculo e a precisão desejada. Além disso, para acentuar a precisão dos dados, pode-se recorrer a observações astronômicas de terra e de imagens de missões de voos orbitais em torno do asteroide.

3.1 Método dos harmônicos esféricos: solução da equação de Laplace

Denomina-se função harmônica em um domínio D a solução da equação de Laplace que possua derivadas de segunda ordem contínuas em D . Na maioria dos problemas, essa solução satisfaz certas condições de contorno sobre determinadas superfícies pré-estabelecidas, denominados problemas de valor de contorno. Com o intuito de simplificá-los, em muitos casos é adequado adotar coordenadas polares cilíndricas ou esféricas em substituição às cartesianas. Inicialmente, serão adotadas as coordenadas esféricas r , ϕ e θ ilustradas na Figura 3.1.

Figura 3.1 - Sistema de coordenadas esféricas.



Fonte: Produção do autor.

Vale observar que na Figura 3.1, o complemento do ângulo θ e o ângulo ϕ são denominados colatitude e longitude, respectivamente.

As relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas são expressas pela Equação (3.1):

$$x = r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta. \quad (3.1)$$

Logo, utilizando as relações da Equação (3.1), obtém-se as coordenadas esféricas em função das coordenadas cartesianas, dadas pela Equação (3.2):

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{z} \right]. \quad (3.2)$$

A partir da Equação (3.2), aplicando a regra da cadeia pode-se reescrever a equação de Laplace em termos das coordenadas esféricas, e obtém-se a Equação (3.3):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3.3)$$

Supondo que o método de separação de variáveis possa ser aplicado na resolução da Equação (3.3), então, a solução $U = U(r, \phi, \theta)$ pode ser escrita na forma da Equação (3.4)

$$U(r, \phi, \theta) = R(r) \Phi(\phi) \Theta(\theta). \quad (3.4)$$

Substituindo a Equação (3.4) na Equação (3.3) e multiplicando-se o resultado por $\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{U}$, obtém-se a Equação (3.5)

$$\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\Theta} \left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot g \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\Theta} \left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot g \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}. \quad (3.6)$$

Observando a Equação (3.6), conclui-se que o seu primeiro membro depende das variáveis r e θ , enquanto que o segundo membro depende exclusivamente de ϕ . Logo, ambos os membros devem se igualar a uma constante positiva, definida por m^2 ,

pois caso contrário, a equação teria a solução trivial. Dessa forma, resulta na Equação (3.7):

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (3.7)$$

admitindo, como solução geral, a função dada pela Equação (3.8)

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos(m\phi) + B_1 \sen(m\phi). \quad (3.8)$$

sendo A_1 e B_1 constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. Supondo que as soluções da Equação (3.8) sejam periódicas de período 2π , então m deve assumir valores inteiros não negativos.

De forma análoga, separa-se a parcela que envolve a variável r da parcela dependente de θ , obtendo a Equação (3.9):

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot g \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sen^2\theta} = n^2, \quad (3.9)$$

permitindo escrever a Equação (3.10) na variável θ :

$$\frac{1}{\sen\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sen\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(n^2 - \frac{m^2}{\sen^2\theta} \right) \Theta = 0. \quad (3.10)$$

As Equações (3.7) e (3.10) estabelecem a relação de dependência dos ângulos de azimute e polar, ϕ e θ , respectivamente. Logo, como os valores característicos da Equação (3.7) são discretos, as funções características normalizadas correspondentes são expressas pela Equação (3.11):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{se } m=0 \\ \Phi_m^{(+)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\phi) \\ \Phi_m^{(-)}(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sen(m\phi) \end{aligned} \right\} \text{se } m \neq 0 \quad (3.11)$$

observando que os símbolos (+) e (-) enfatizam os casos das funções serem pares ou ímpares na variável ϕ . Na Equação (3.10), suas soluções são as chamadas funções polinomiais associadas de Legendre de primeira espécie, denotadas pela Equação (3.12)

$$P_l^m(\cos \theta) \equiv (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}, \text{ para } 0 \leq m \leq l, \quad (3.12)$$

sendo os polinômios de Legendre dados pela Equação (3.13)

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (1 - \cos^2 \theta)^l, \quad (3.13)$$

considerando $n^2 = l(l+1)$, para $l=0,1,2,\dots$, e lembrando que, dado m , tem-se a condição $l \geq m$. Aplicando a fórmula de Rodrigues para P_l , obtém-se a Equação (3.14)

$$P_l^m(\cos \theta) \equiv (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l, \text{ para } 0 \leq m \leq l, \quad (3.14)$$

Logo, as soluções normalizadas da Equação (3.10) são expressas pela Equação (3.15)

$$\Theta_l^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta). \quad (3.15)$$

Retornando à Equação (3.9), pode-se escrever $\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) = n^2$, e devido a

$n^2 = l(l+1)$, chega-se à equação de Euler-Cauchy, dada pela Equação (3.16):

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0, \quad (3.16)$$

a qual, apresenta a solução da forma indicada pela Equação (3.17)

$$R_l(r) = A_2 r^l + \frac{B_2}{r^{l+1}}, \quad (3.17)$$

sendo A_2 e B_2 constantes a serem determinadas a partir das condições de contorno do problema. Portanto, a solução geral da equação de Laplace, é dada pela Equação (3.18):

$$U(r, \phi, \theta) = \left[A_2 r^l + \frac{B_2}{r^{l+1}} \right] \Theta_l^m(\cos \theta) \Phi_m(\phi), \quad (3.18)$$

cujas funções $\Phi_m(\phi)$ e $\Theta_l^m(\cos \theta)$ são expressas pelas Equações (3.8) e (3.11), respectivamente. As funções dadas pela Equação (3.18) são denominadas harmônicas esféricas sólidas.

De posse da solução da equação de Laplace, para garantir a condição de continuidade dessa função em relação a uma esfera de raio r , delimita-se seu domínio estabelecendo que, em sua superfície, $U_o(\phi, \theta)$ assumam certos valores. Dessa maneira, para a região interior à esfera, coloca-se $B_2 = 0$, e para a região exterior, coloca-se $A_2 = 0$. Logo, a solução é dada pela expansão em série de harmônicos esféricos dada pela Equação (3.19)

$$U(r, \phi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \cos(m\phi) + B_{nm} \sin(m\phi)], \quad (3.19)$$

ou pela Equação (3.20)

$$U(r, \phi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \cos(m\phi) + B_{nm} \sin(m\phi)], \quad (3.20)$$

na qual os inteiros n e m denotam o grau e a ordem da série, respectivamente. As funções $P_n^m(\cos \theta)$ são os polinômios associados de Legendre, caso $m \neq 0$, ou polinômios de Legendre, caso $m = 0$, A_{nm} e B_{nm} são coeficientes a serem determinados. Observa-se na Equação (3.20), diferentemente da Equação (3.19), que o potencial gravitacional decresce com o aumento da distância, ou seja, satisfaz a condição dada pela Equação (3.21)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r, \phi, \theta) = 0. \quad (3.21)$$

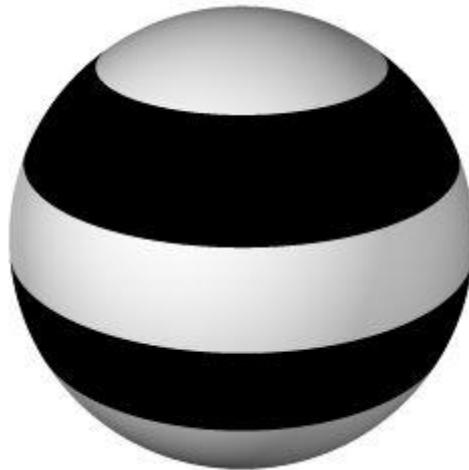
Com a finalidade de modelar o potencial gravitacional num ponto exterior ao asteroide, é conveniente reescrever a Equação (3.20) na forma da Equação (3.22)

$$U(r, \phi, \theta) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [C_{nm} \cos(m\phi) + S_{nm} \sin(m\phi)], \quad (3.22)$$

sendo R o raio normalizador, C_{nm} e S_{nm} são os novos coeficientes adimensionais que caracterizam o campo gravitacional e podem ser determinados de modo semelhante aos coeficientes A_{nm} e B_{nm} , quando a função U for conhecida na esfera de referência, sendo $C_{00} = 1$ e $S_{n0} = 0$.

Se $m = 0$, os harmônicos esféricos serão polinômios de Legendre de grau n na variável $t = \cos \theta$, apresentando n raízes reais localizadas no intervalo $-1 \leq t \leq 1$, ou $0 \leq \theta \leq \pi$, alternando n vezes seu sinal, independentemente da longitude. Dessa forma, dividirão a esfera em zonas e serão denominados harmônicos zonais, como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2 - Representação dos harmônicos zonais.



Fonte: Kuga et al., 2000.

Se $m \neq n \neq 0$, os harmônicos esféricos serão funções associadas que alternam seu sinal $n.m$ vezes no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$. Além disso, a função $\cos(m\phi)$ possui $2m$ raízes no intervalo $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Logo, esses harmônicos dividem a esfera em seções, de acordo com a alternância de seus sinais, como ilustrado na Figura 3.3. Tais harmônicos serão chamados de tesserais.

Figura 3.3 - Representação dos harmônicos tesserais.



Fonte: Kuga et al., 2000.

Caso $m = n$, os harmônicos esféricos se degeneram em funções que dividem a esfera em fusos positivos e negativos, alternadamente, com apresentado na Figura 3.4. Nesta situação, os harmônicos serão chamados de setoriais.

Figura 3.4 - Representação dos harmônicos setoriais.



Fonte: Kuga et al., 2000.

De modo geral, a superfície harmônica esférica, expressa pela Equação (3.23),

$$S_{nmi} = P_{nm}(\text{sen } \theta') [C_{nm} \cos(m\phi) + S_{nm} \text{sen}(m\phi)] \quad (3.23)$$

apresentará $(n - m)$ raízes, com uma distância π , ao longo de um meridiano e m raízes com a mesma distância ao longo de um paralelo.

Conforme a ordem e o grau dos polinômios e das funções associadas aumentam, ocorre uma redução nos valores dos coeficientes C_{nm} e S_{nm} , gerando erros de arredondamento, em razão da limitação do número de dígitos significativos. Logo, visando minimizar tais efeitos, tem-se como hábito normalizar esses coeficientes, assim como os polinômios e as funções associadas. Portanto, adotando este procedimento, os coeficientes dos harmônicos esféricos e as funções associadas de Legendre normalizados, denotados, respectivamente, por \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} e \bar{P}_{nm} , são expressos, segundo Heiskanen e Moritz (1967), pelas Equações (3.24), (3.25) e (3.26), respectivamente:

$$\bar{C}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}} C_{nm}, \quad (3.24)$$

$$\bar{S}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}} S_{nm}, \quad (3.25)$$

$$\bar{P}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}} P_{nm}, \quad (3.26)$$

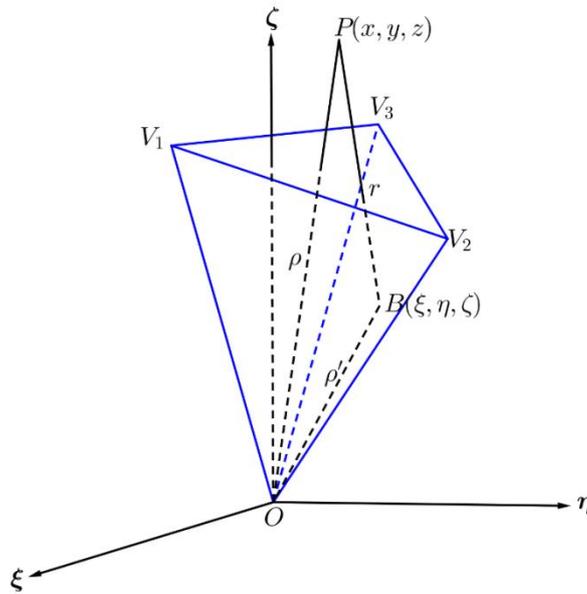
nas quais δ_{0m} representa o delta de Kronecker.

3.2 Método da expansão em série convergente do potencial

Pretende-se, agora, tendo como ferramentas fundamentais os trabalhos desenvolvidos por Kellogg (2014) e MacMillan (1956), associados ao método da decomposição de um poliedro em tetraedros, elaborado por Werner (1994), apresentar uma metodologia para se calcular, de forma aproximada, o potencial de um corpo com distribuição de massa assimétrica. Com esse objetivo, calculando o potencial de cada um dos tetraedros, conclui-se que o potencial do poliedro será o somatório desses potenciais.

Seja Q o tetraedro de massa M , formado pelos vértices V_1 , V_2 , V_3 e O , estando, este último, localizado na origem do sistema de coordenadas ξ, η, ζ , como ilustrado na Figura 3.5.

Figura 3.5 - Tetraedro Q com os vértices V_1, V_2, V_3 e O .



Fonte: Produção do autor.

Considere uma massa unitária localizada no ponto $P(x, y, z)$ e um elemento de massa dM localizado em um ponto qualquer do tetraedro Q , denotado por $B(\xi, \eta, \zeta)$. Definindo γ como o ângulo formado pelos vetores OP e OB , da Figura 3.5, utilizando o teorema dos cossenos, pode-se obter o valor de r , como segue a Equação (3.27)

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma. \quad (3.27)$$

Isolando $\frac{1}{r}$ da Equação (3.27), tem-se a Equação (3.28):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma}}, \quad (3.28)$$

e colocando ρ^2 em evidência, resulta na Equação (3.29)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho \sqrt{1 - 2 \frac{\rho'}{\rho} \cos \gamma + \frac{\rho'^2}{\rho^2}}}. \quad (3.29)$$

Definindo $\chi = \rho'/\rho$ e $u = \cos \gamma$, então a Equação (3.29) tornar-se-á a Equação (3.30):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho \sqrt{1 - 2\chi u + \chi^2}}. \quad (3.30)$$

Desenvolvendo a função $\left(\sqrt{1 - 2u\chi + \chi^2}\right)^{-1}$ em uma série de potências de χ convergente, obtém-se a Equação (3.31)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2u\chi + \chi^2}} = P_0(u) + P_1(u)\chi + P_2(u)\chi^2 + \dots, \quad (3.31)$$

desde que $|\chi| < \sqrt{2} - 1$, sendo $P_0(u), P_1(u), P_2(u), \dots$ os correspondentes polinômios de Legendre. Logo, a Equação (3.31) pode ser escrita em uma série de potências negativas na variável ρ , dada pela Equação (3.32):

$$\frac{1}{r} = P_0(u) \frac{1}{\rho} + P_1(u) \frac{\rho'}{\rho^2} + P_2(u) \frac{\rho'^2}{\rho^3} + \dots, \quad (3.32)$$

válida para $\rho'/\rho < \sqrt{2} - 1$, porém, ainda convergente se satisfizer $-1 \leq u \leq 1$ e $\rho'/\rho < 1$. Considerando d a maior distância entre um ponto da distribuição de massa e a origem, se $\rho' \leq d$, então a série dada pela Equação (3.32) será uniformemente convergente em todas as seis variáveis para todo ponto P exterior à esfera centrada na origem e de raio $\rho = d\tau$, $\tau > 1$. Logo, a Equação (3.32) pode ser multiplicada por uma densidade contínua, ou contínua por partes, e integrada termo a termo sobre o volume do sólido Q , resulta em uma expansão do potencial U correspondente a distribuição de massa de Q , válida para todos os pontos exteriores a toda esfera contendo a distribuição, convergindo uniformemente. Portanto, o potencial será expresso pela Equação (3.33):

$$U = \iiint_Q G\sigma \frac{1}{r} dV = G\sigma \iiint_Q \left(P_0(u) \frac{1}{\rho} + P_1(u) \frac{\rho'}{\rho^2} + P_2(u) \frac{\rho'^2}{\rho^3} + \dots \right) dV, \quad (3.33)$$

e levando em conta que a densidade do sólido, $\sigma = M/V$, considerada constante, e integrando termo a termo a Equação (3.33), resulta na Equação (3.34)

$$U = G \frac{M}{V} \left[\iiint_{\mathcal{Q}} P_0(u) \frac{1}{\rho} dV + \iiint_{\mathcal{Q}} P_1(u) \frac{\rho'}{\rho^2} dV + \iiint_{\mathcal{Q}} P_2(u) \frac{\rho'^2}{\rho^3} dV + \dots \right]. \quad (3.34)$$

Reescrevendo, adequadamente, a Equação (3.34), obtém-se a Equação (3.35)

$$U = G \frac{M}{V} \left[\iiint_{\mathcal{Q}} P_0(u) \frac{1}{\rho} dV + \iiint_{\mathcal{Q}} P_1(u) \frac{\rho' \rho}{\rho^3} dV + \iiint_{\mathcal{Q}} P_2(u) \frac{\rho'^2 \rho^2}{\rho^5} dV + \dots \right]. \quad (3.35)$$

Além disso, da Figura 3.5, deduz-se as Equações (3.36) e (3.37)

$$u \rho \rho' = \xi x + \eta y + \zeta z, \quad (3.36)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{e} \quad \rho' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad (3.37)$$

Logo, multiplicando os polinômios de Legendre pelas Equações (3.36) e (3.37), conclui-se que os integrandos da Eq. (3.35) são funções polinomiais homogêneas nas variáveis ξ , η e ζ . Portanto, a dificuldade da obtenção do potencial está atrelada aos cálculos das integrais da Equação (3.35), as quais podem ser simplificadas, aplicando o método desenvolvido por Lien e Kajjia (1984), como descrito a seguir.

Os integrandos da Equação (3.35) são polinômios representados, genericamente, pela Equação (3.38)

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \xi^{n_1} \eta^{n_2} \zeta^{n_3}. \quad (3.38)$$

Visando calcular as integrais da Equação (3.35), pode-se concentrar a atenção na integral da Equação (3.39)

$$I = \iiint_Q \xi^{n_1} \eta^{n_2} \zeta^{n_3} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.39)$$

Supondo-se que os vértices do tetraedro da Figura 3.5 sejam dados por $O(0,0,0)$, $V_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $V_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ e $V_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$, a transformação linear T , expressa pela Equação (3.40)

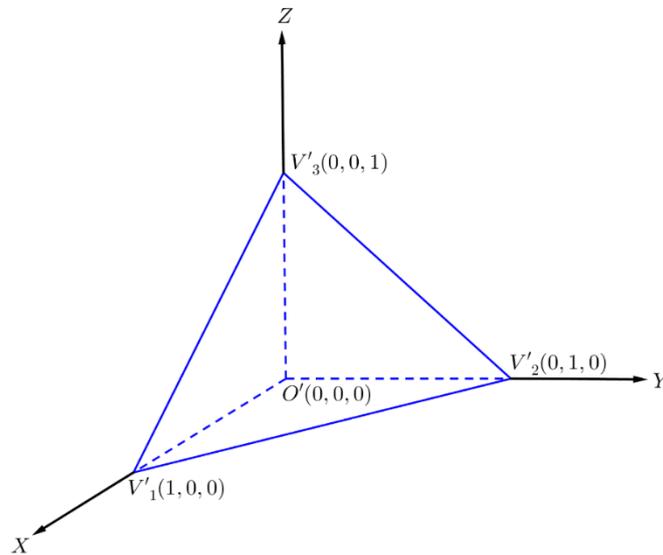
$$T = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

relacionando o sistema antigo ξ, η, ζ , com o novo sistema X, Y, Z , satisfazendo a Equação (3.41)

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

transformando o tetraedro inicial em um tetraedro retangular, cujos vértices são $O'(0,0,0)$, $V'_1(1,0,0)$, $V'_2(0,1,0)$ e $V'_3(0,0,1)$, como mostra a Figura 3.6.

Figura 3.6 - Tetraedro retângulo W com vértices O' , V'_1 , V'_2 e V'_3 .



Fonte: Produção do autor.

Segundo a transformação dada pela Equação (3.40), a integral da Equação (3.39) pode ser reescrita como a Equação (3.42)

$$I = \iiint_Q \xi^{n_1} \eta^{n_2} \zeta^{n_3} d\xi d\eta d\zeta = \|T\| \iiint_W \tilde{X}^{n_1} \tilde{Y}^{n_2} \tilde{Z}^{n_3} dX dY dZ, \quad (3.42)$$

sendo $\tilde{X} = \xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 Z$, $\tilde{Y} = \eta_1 X + \eta_2 Y + \eta_3 Z$, $\tilde{Z} = \zeta_1 X + \zeta_2 Y + \zeta_3 Z$ e $\|T\|$ o Jacobiano, valor absoluto do determinante da matriz de transformação.

Avaliando a integral de uma função polinomial $\xi^{n_1} \eta^{n_2} \zeta^{n_3}$ sobre o tetraedro reto retângulo W , obtém-se a Equação (3.43)

$$\begin{aligned} \iiint_W \xi^{n_1} \eta^{n_2} \zeta^{n_3} d\xi d\eta d\zeta &= \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \int_0^{1-\zeta-\eta} \xi^{n_1} \eta^{n_2} \zeta^{n_3} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{n_1! n_2! n_3!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 3)!} \end{aligned}, \quad (3.43)$$

cujos detalhes são apresentados no apêndice A. Portanto, sabendo que é sempre possível transformar um tetraedro qualquer em um tetraedro reto retângulo por meio da transformação linear dada pela Equação (3.40), conclui-se que a integral de um polinômio, ao longo de um tetraedro, pode ser calculada pelas Equações (3.42) e (3.43).

Para exemplificar o cálculo descrito, definindo-se a Equação (3.44)

$$U_0 = G \frac{M}{V} \iiint_Q P_o(u) \frac{1}{\rho} dV, \quad (3.44)$$

e, sabendo que $P_o(u) = 1$, então a Equação (3.44) resulta na Equação (3.45)

$$U_0 = G \frac{M}{V} \iiint_Q P_o(u) \frac{1}{\rho} dV = G \frac{M}{\rho V} \iiint_Q dV = \frac{GM}{\rho}, \quad (3.45)$$

que representa o potencial Kepleriano. Analogamente, considerando a segunda parcela da Equação (3.35), dada pela Equação (3.46)

$$U_1 = G \frac{M}{V} \iiint_Q P_1(u) \frac{\rho' \rho}{\rho^3} dV = \frac{GM}{\rho^3 V} \iiint_Q P_1(u) \rho' \rho dV, \quad (3.46)$$

sendo $P_1(u) = u$, logo, a Equação (3.46) torna-se a Equação (3.47)

$$U_1 = \frac{GM}{\rho^3 V} \iiint_Q (x\xi + y\eta + z\zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.47)$$

cujo resultado, utilizando o método de Lien e Kajiya (1984), é dado pela Equação (3.48)

$$U_1 = \frac{GM \left[(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)x + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)y + (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)z \right]}{4\rho^3}. \quad (3.48)$$

Portanto, adotando-se este procedimento em relação a todas as parcelas da Equação (3.35), conclui-se que o potencial do tetraedro Q é representado pela Equação (3.49).

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} U_i = G \frac{M}{V} \sum_{i=0}^{\infty} \iiint_Q P_i(u) \frac{\rho'^i \rho^i}{\rho^{2i+1}} dV. \quad (3.49)$$

Devido à impossibilidade de obter a soma infinita da Equação (3.49), deve-se truncá-la, obtendo um valor aproximado para o potencial, indicado pela Equação (3.50):

$$U = \sum_{i=0}^n U_i + \varepsilon = G \frac{M}{V} \sum_{i=0}^n \iiint_Q P_i(u) \frac{\rho'^i \rho^i}{\rho^{2i+1}} dV + \varepsilon, \quad (3.50)$$

destacando que ε é o erro de truncamento. Dessa forma, lembrando que o segundo membro da Equação (3.35) é uma série uniformemente convergente no intervalo adotado, quanto maior o valor de n , menor será ε , sempre ponderando o custo computacional em relação à precisão.

Supondo, agora, que o integrando da Equação (3.39) esteja em coordenadas esféricas, tem-se que, a integral a ser analisada é dada pela Equação (3.51)

$$I = \iiint_Q f(r, \phi, \theta) dv, \quad (3.51)$$

sendo Q o domínio de um sólido qualquer. Definindo \mathbf{r} como o versor radial, seja $\mathbf{G}(r, \phi, \theta)$ uma função vetorial e $g(r, \phi, \theta)$ uma função escalar, tal que satisfaça a Equação (3.52)

$$\mathbf{G}(r, \phi, \theta) = g(r, \phi, \theta) \mathbf{r}, \quad (3.52)$$

de modo que a função $f(r, \phi, \theta)$ coincida com o divergente de \mathbf{G} , isto é, $\nabla \cdot \mathbf{G} = f$.

Lembrando que o divergente, em coordenadas esféricas, é dado pela Equação (3.53)

$$\nabla \mathbf{G} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{G}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathbf{G}_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{G}_\phi}{\partial \phi}, \quad (3.53)$$

então, aplicando a Equação (3.53) para a função \mathbf{G} , resultam as Equações (3.54) e (3.55)

$$\nabla \mathbf{G}(r, \phi, \theta) = f(r, \phi, \theta) = \frac{\partial g(r, \phi, \theta)}{\partial r} + 2 \frac{g(r, \phi, \theta)}{r}, \quad (3.54)$$

$$g(r, \phi, \theta) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 f(r', \phi, \theta) dr'. \quad (3.55)$$

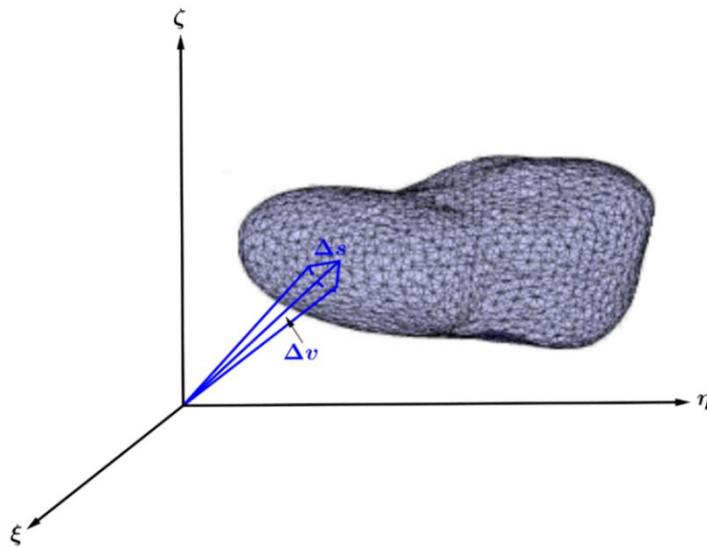
Aplicando o teorema do divergente, a Equação (3.51) tornar-se-á a Equação (3.56)

$$I = \iiint_Q f(r, \phi, \theta) dv = \iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{G} dv = \iint_{\partial Q} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\partial Q} g(r, \phi, \theta) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.56)$$

Portanto, a Equação (3.56) mostra que a integral de volume relativa ao sólido Q pode ser representada por uma integral de superfície sobre o contorno fechado do poliedro correspondente, simbolizado por ∂Q .

Para ilustrar esse conceito, supõe-se a construção de um cone, cuja base é um elemento de área da face do poliedro Q , representado por Δs , tendo como vértice, a origem do sistema de coordenadas, mostrado na Figura 3.7.

Figura 3.7 - Construção de um cone, tendo como base Δs , na superfície do sólido, e vértice na origem do sistema de coordenadas.



Fonte: Produção do autor.

Utilizando a Equação (3.53), a integral ao longo do pequeno volume do cone, descrito por Δv , resulta na Equação (3.57):

$$\iiint_{\Delta v} f(r, \phi, \theta) dv = \iint_{\partial \Delta v} g(r, \phi, \theta) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.57)$$

Devido ao vetor \mathbf{n} estar direcionado para fora do cone e normal à área lateral desse sólido, então, será ortogonal ao vetor radial \mathbf{r} , ou seja, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ nessa região. Sendo assim, a integral da Equação (3.57) somente terá valor relevante na região Δs , definida como base do cone. Logo, a Equação (3.58)

$$\iiint_{\Delta v} f(r, \phi, \theta) dv = \iint_{\Delta s} g(r, \phi, \theta) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3.58)$$

indica que uma integral de volume ao longo do cone, pode ser representada por uma integral de superfície sobre a sua base.

Ao analisar a Equação (3.56), constata-se que o vetor \mathbf{n} é normal à fronteira do poliedro Q , direcionado para fora desse sólido. Por outro lado, o vetor \mathbf{n} , da Equação (3.58), é normal à fronteira e direcionado para fora do cone Δv . Assim sendo, tais vetores podem

apontar em direções opostas. De fato, eles apontarão na mesma direção, quando os interiores de Q e Δv ocuparem o mesmo semi espaço dividido pela base do cone Δs . Neste caso, diz-se que Q e Δv são coerentes. A partir dessa definição, a integral da Equação (3.57) será igual a uma soma de integrais de volume sobre os cones construídos, convenientemente, pelas faces do poliedro Q , resultando na Equação (3.59)

$$I = \iiint_Q f(r, \phi, \theta) dv = \iint_{\partial Q} g(r, \phi, \theta) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{\Delta v_i} S(\Delta v_i) \iiint_{\Delta v_i} f(r, \phi, \theta) dv, \quad (3.59)$$

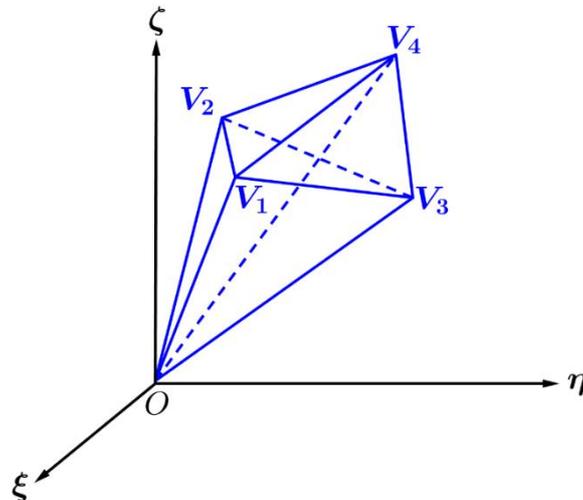
introduzindo a função de sinal $S(\Delta v_i)$, definida para um cone Δv_i , pela Equação (3.60)

$$S(\Delta v_i) = \begin{cases} +1, & \text{se } \Delta v_i \text{ e } Q \text{ são coerentes} \\ -1, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.60)$$

A função de sinal $S(\Delta v_i)$ determina se a integral sobre Δv_i tem uma contribuição positiva ou negativa para a integral sobre Q . Se Δv_i é coerente com Q , a integral sobre Δv_i tem uma contribuição positiva em relação a Q ; caso contrário, negativa.

Na Figura 3.8, o tetraedro $Q(V_1, V_2, V_3, V_4)$, possui quatro faces $F_1(V_2, V_4, V_3)$, $F_2(V_1, V_3, V_4)$, $F_3(V_1, V_4, V_2)$ e $F_4(V_1, V_2, V_3)$.

Figura 3.8 - Tetraedro expandido em quatro novos tetraedros em relação à origem O .



Fonte: Produção do autor.

Adota-se o sentido horário em relação a ordem dos vértices de cada face de modo que o vetor normal às faces sempre aponte para fora do tetraedro. Além disso, uma face F_i associada a origem, forma um novo tetraedro $Q_i(0, V_m, V_j, V_k)$, sendo (V_m, V_j, V_k) os vértices de F_i . Assim, são formados quatro novos tetraedros $Q_1(0, V_2, V_3, V_4)$, $Q_2(0, V_1, V_3, V_4)$, $Q_3(0, V_1, V_2, V_4)$ e $Q_4(0, V_1, V_2, V_3)$, podendo-se afirmar que os três primeiros são coerentes com Q , diferentemente do que ocorre com Q_4 . Visto que cada tetraedro tem um vértice localizado na origem, uma integral ao longo desses tetraedros pode ser calculada utilizando o método descrito, ou seja, uma integral sobre o tetraedro Q , equivale à soma da integral sobre cada tetraedro Q_i , dada pela Equação (3.61)

$$I = \iiint_Q f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4} S(Q_i) \iiint_{Q_i} f(\xi, \eta, \varsigma) dv. \quad (3.61)$$

De acordo com a definição de coerência em relação ao tetraedro Q , tem-se que $S(Q_1) = S(Q_2) = S(Q_3) = 1$ e $S(Q_4) = -1$. Além disso, as coordenadas da face $F_i(V_m, V_j, V_k)$ são dadas por $V_m(\xi_m, \eta_m, \varsigma_m)$, $V_j(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)$ e $V_k(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$, definindo uma transformação linear T_i , representada pela Equação (3.62):

$$T_i = \begin{pmatrix} \xi_m & \xi_j & \xi_k \\ \eta_m & \eta_j & \eta_k \\ \varsigma_m & \varsigma_j & \varsigma_k \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

O determinante da matriz de transformação será positivo se Q_i for coerente com a base F_i e negativo, caso contrário. Logo, implicitamente, o determinante $|T_i|$ representa os efeitos da função de sinal $S(Q_i)$ e do Jacobiano $\|T_i\|$. Assim, a Equação (3.61) torna-se a Equação (3.63)

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_Q f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \sum_{Q_i} S(Q_i) \iiint_{Q_i} f(\xi, \eta, \varsigma) dv \\
&= \sum_{Q_i} S(Q_i) \|T_i\| \iiint_{W_i} f(g_\xi, g_\eta, g_\varsigma) dV = \sum_{Q_i} |T_i| \iiint_{W_i} f(g_\xi, g_\eta, g_\varsigma) dV, \quad (3.63)
\end{aligned}$$

na qual, as funções g_ξ , g_η e g_ς são definidas pela Equação (3.64)

$$\begin{aligned}
\xi &= g_\xi(X, Y, Z) = \xi_m X + \xi_j Y + \xi_k Z \\
\eta &= g_\eta(X, Y, Z) = \eta_m X + \eta_j Y + \eta_k Z. \\
\varsigma &= g_\varsigma(X, Y, Z) = \varsigma_m X + \varsigma_j Y + \varsigma_k Z
\end{aligned} \quad (3.64)$$

Pode-se representar um poliedro Q formado por f faces, a arestas e v vértices, pela notação $Q(F, A, V)$, sendo $F(F_1, F_2, \dots, F_f)$ o conjunto das faces, $A(A_1, A_2, \dots, A_a)$ o conjunto das arestas e $V(V_1, V_2, \dots, V_v)$ o conjunto dos vértices. Uma face F_i é formada por f_i vértices, isto é, $F_i(V_1^i, V_2^i, \dots, V_{f_i}^i)$, com $V_j^i \in V$, e a orientação dos vértices é adotada de modo que o vetor normal aponte para fora do poliedro.

Uma face F , formada por f vértices, pode ser decomposta sequencialmente em $f - 2$ triângulos, implicando em que uma face $F_i \{V_1^i, V_2^i, \dots, V_{f_i}^i\}$ possa ser decomposta em $f_i - 2$ triângulos, $\{T_j^i = (V_1^i, V_{j+1}^i, V_{j+2}^i)\}$, utilizando o vértice V_1^i como origem da projeção. Por outro lado, um triângulo T_j^i , com a origem no ponto O , forma um tetraedro $Q_j^i = (O, V_1^i, V_{j+1}^i, V_{j+2}^i)$. Portanto, em relação à origem O , uma face F_i expande um conjunto de tetraedros $\{Q_j^i\}$. Logo, uma integral ao longo de um cone Y_i , o qual é expandido, em relação à origem, por uma face F_i , corresponde ao somatório das integrais sobre todos os tetraedros $\{Q_j^i\}$. Supondo que a Equação (3.65) forneça as coordenadas dos vértices de $Q_j^i(O, V_1^i, V_{j+1}^i, V_{j+2}^i)$

$$\begin{aligned}
& O(0,0,0) \\
& V_1^i(\xi_1^i, \eta_1^i, \varsigma_1^i) \\
& V_{j+1}^i(\xi_{j+1}^i, \eta_{j+1}^i, \varsigma_{j+1}^i) , \\
& V_{j+2}^i(\xi_{j+2}^i, \eta_{j+2}^i, \varsigma_{j+2}^i)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

conforme descrito anteriormente, a Equação (3.66) representa uma transformação T_j^i

$$T_j^i = \begin{pmatrix} \xi_1^i & \xi_{j+1}^i & \xi_{j+2}^i \\ \eta_1^i & \eta_{j+1}^i & \eta_{j+2}^i \\ \varsigma_1^i & \varsigma_{j+1}^i & \varsigma_{j+2}^i \end{pmatrix}. \tag{3.66}$$

Assim sendo, uma integral ao longo de um cone Y_i , expandido pela face F_i , equivale a soma das integrais sobre todos os tetraedros $\{Q_j^i\}$, representado pela Equação (3.67)

$$I = \iiint_{Y_i} f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \sum_{Q_j^i} S(Q_j^i) \iiint_{Q_j^i} f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \sum_{w_j^i} |T_j^i| \iiint_{w_j^i} f(g_\xi, g_\eta, g_\varsigma) dV, \tag{3.67}$$

e $|T_j^i|$ é o determinante da correspondente matriz de transformação. Vale enfatizar novamente que, a função $S(Q_j^i)$ caracteriza a contribuição da integral sobre Q_j^i , em relação à integral sobre o cone, e que o determinante $|T_j^i|$ associa os efeitos tanto da função sinal quanto do Jacobiano.

Finalizando, constata-se que uma integral ao longo de um poliedro $Q(F, A, V)$ corresponde ao somatório das integrais sobre todos os cone $\{Y_i\}$, expandidos pelas faces do poliedro em relação a origem, resultando na Equação (3.68)

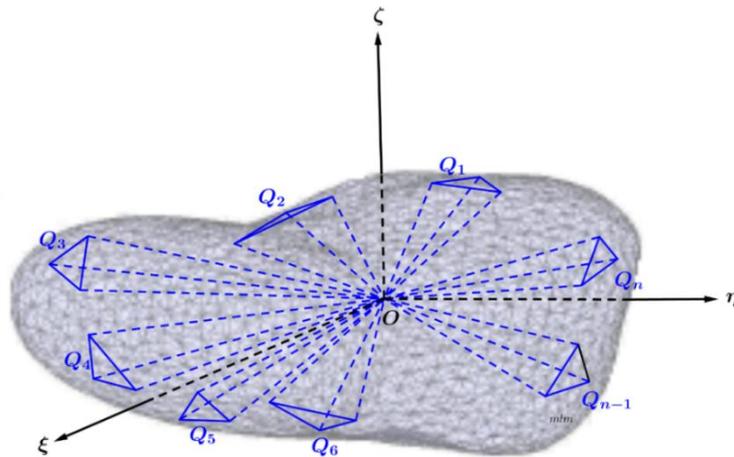
$$\begin{aligned}
I &= \iiint_Q f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \sum_{F_i} \iiint_{Y_i} f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \\
&= \sum_{F_i} \sum_{Q_j^i} \iiint_{Q_j^i} f(\xi, \eta, \varsigma) dv = \sum_{F_i} \sum_{w_j^i} |T_j^i| \iiint_{w_j^i} f(g_\xi, g_\eta, g_\varsigma) dV ,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

sabendo que as funções g_ξ , g_η e g_ζ são dependentes do tetraedro Q_j^i e definidas pela Equação (3.69)

$$\begin{aligned}\xi &= g_\xi(X, Y, Z) = \xi_1^i X + \xi_{j+1}^i Y + \xi_{j+2}^i Z \\ \eta &= g_\eta(X, Y, Z) = \eta_1^i X + \eta_{j+1}^i Y + \eta_{j+2}^i Z. \\ \zeta &= g_\zeta(X, Y, Z) = \zeta_1^i X + \zeta_{j+1}^i Y + \zeta_{j+2}^i Z\end{aligned}\quad (3.69)$$

Considere, agora, um sólido homogêneo com distribuição de massa irregular, cujo centro de massa esteja localizado na origem do sistema cartesiano de coordenadas ξ, η, ζ . Para aplicar o método poliedral (WERNER, 1994), deve-se modelar o formato do sólido por meio de um poliedro, resultado da união de elementos tetraédricos, ligando-se os vértices das bases triangulares, localizadas na sua superfície, ao seu centro de massa, como mostrado na Figura 3.9.

Figura 3.9 - Sólido com distribuição de massa irregular, decomposto em tetraedros.



Fonte: Produção do autor.

Seguindo o procedimento descrito para um tetraedro, assim como o exposto para a decomposição de um poliedro em vários tetraedros, utilizando a Equação (3.68), o potencial aproximado do sólido representado pela Figura 3.9, será a soma dos potenciais de todos os tetraedros utilizados em sua decomposição, dado pela Equação (3.70)

$$U = \iiint_Q \sum_{k=0}^n f_k(\xi, \eta, \zeta) dv + \varepsilon = \sum_{F_i} \iiint_{Y_i} \sum_{k=0}^n f_k(\xi, \eta, \zeta) dv + \varepsilon, \quad (3.70)$$

cujo desenvolvimento, resulta na Equação (3.71)

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{F_i} \sum_{Q_j^i} \iiint_{Q_j^i} \sum_{k=0}^n f_k(\xi, \eta, \zeta) dv + \varepsilon \\
 &= \sum_{F_i} \sum_{W_j^i} |T_j^i| \iiint_{W_j^i} \sum_{k=1}^n f_k(g_\xi, g_\eta, g_\zeta) dV + \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

definindo a função f_k pela Equação (3.72)

$$f_k(\xi, \eta, \zeta) = P_k(u) \frac{\rho'^k \rho^k}{\rho^{2k+1}}, \tag{3.72}$$

recordando que $P_k(u)$ é o polinômio de Legendre de ordem k , ρ e ρ' são dados pela Equação (3.37), bem como g_ξ, g_η e g_ζ , pela Equação (3.69).

Analisando a metodologia descrita, deduz-se que, quanto maior o número de tetraedros obtidos na decomposição do sólido, maior será a precisão do potencial final. Porém, empregando esse artifício, implicará, novamente, em uma ampliação do custo computacional. Portanto, deve-se buscar o equilíbrio entre esses dois elementos fundamentais na resolução do problema.

3.3 Método das concentrações de massa

De fato, para a aplicação da Lei da Gravitação Universal, supõe-se que os corpos sobre os quais a força atua são considerados puntiformes, isto é, gravitacionalmente comportam-se como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa. Considere dois corpos puntiformes A e B de massas m e M , respectivamente. A Equação (3.73) fornece a energia potencial gravitacional do corpo B sobre o corpo A

$$U(\mathbf{r}) = \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|}, \tag{3.73}$$

na qual, \mathbf{r} é o vetor posição do corpo A em relação ao corpo B e $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$. Caso o corpo B não possa ser considerado puntiforme, o

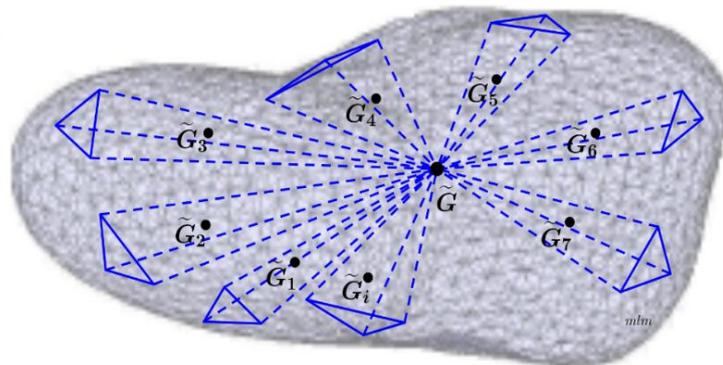
corpo A é atraído por uma distribuição de massa M , ou seja, deve-se avaliar a atração gerada por cada elemento dm da distribuição de massa do corpo B sobre A . Assim, sendo $dm = \sigma dv$, o potencial gravitacional total é expresso pela Equação (3.74)

$$U = G \iiint_Q \frac{\sigma}{\|r\|} dv, \quad (3.74)$$

sendo σ a densidade e dv um elemento de volume, ambos relativos ao corpo B .

Devido à complexidade do cálculo da Equação (3.74), para modelar o potencial gravitacional total de um sólido irregular Q , pode-se utilizar o método das concentrações de massa, associado ao método poliédrico (WERNER, 1994), tendo como objetivo definir os centros de atração secundários, e dessa maneira, encontrar uma aproximação para o cálculo do potencial gerado pelo sólido, da mesma forma como foi feito em Venditti (2013), Venditti et al. (2013a e 2013b), Rocco (2014), Mota (2014), Rocco et al. (2017). Neste sentido, divide-se a superfície do poliedro em vários triângulos, ligando seus vértices ao seu centro de massa, obtendo tetraedros, cada qual com seu respectivo baricentro G_i , como ilustrado na Figura 3.10.

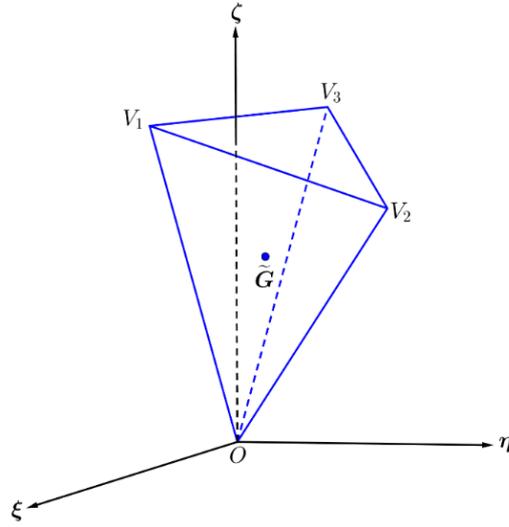
Figura 3.10 - Modelo do corpo irregular utilizando o método do poliedro.



Fonte: Produção do autor.

Para o caso de um único tetraedro homogêneo, suponha que os vértices deste sólido, ilustrado na Figura 3.11, sejam dados pelas coordenadas $O(0,0,0)$, $V_1(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1)$, $V_2(\xi_2, \eta_2, \varsigma_2)$ e $V_3(\xi_3, \eta_3, \varsigma_3)$, com centro de massa localizado no ponto G .

Figura 3.11 - Tetraedro $OV_1V_2V_3$ com centro de massa em G .



Fonte: Produção do autor.

Aplicando o método elaborado por Lien e Kajiya (1984), a Equação (3.75) representa o volume do tetraedro

$$V = \iiint_Q dv = \|T\| \iiint_W dV = \|T\| \frac{0!}{3!} = \frac{\|T\|}{6}, \quad (3.75)$$

e a Equação (3.76) fornece as coordenadas do seu baricentro $\tilde{G}(\xi_G, \eta_G, \varsigma_G)$:

$$\begin{aligned} \xi_G &= \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \, dv = \frac{\|T\|}{V} \iiint_W (\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 Z) \, dX \, dY \, dZ = \frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \\ \eta_G &= \frac{1}{V} \iiint_Q \eta \, dv = \frac{\|T\|}{V} \iiint_W (\eta_1 X + \eta_2 Y + \eta_3 Z) \, dX \, dY \, dZ = \frac{1}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \\ \varsigma_G &= \frac{1}{V} \iiint_Q \varsigma \, dv = \frac{\|T\|}{V} \iiint_W (\varsigma_1 X + \varsigma_2 Y + \varsigma_3 Z) \, dX \, dY \, dZ = \frac{1}{4}(\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Considerando constante a densidade do sólido, representado pela Figura 3.7, após a sua decomposição em N tetraedros, calculam-se, segundo as Equações (3.75) e (3.76), seus correspondentes volumes e centros de massa, concentrando a massa de cada tetraedro em seu respectivo baricentro, designado pelo ponto G_i , $i=1,2,\dots,N$, técnica esta, denominada de concentração de massa. Dessa forma, tais pontos passam a ser os centros

de atração secundários referentes ao corpo não esférico. Logo, a divisão do volume de um asteroide em vários tetraedros, permite estabelecer os elementos fundamentais para o cálculo aproximado da perturbação devido ao campo gravitacional não ser central. Portanto, a Equação (3.77) fornece o potencial de uma massa puntiforme m , localizada no ponto $P(x,y,z)$, em relação ao asteroide

$$U = Gm \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\sqrt{(x - \xi_{G_i})^2 + (y - \eta_{G_i})^2 + (z - \zeta_{G_i})^2}}, \quad (3.77)$$

assumindo que M_i é a massa do i -ésimo tetraedro, concentrada no correspondente centro de massa $G_i(\xi_{G_i}, \eta_{G_i}, \zeta_{G_i})$.

Mais uma vez, a precisão deste método depende do número de tetraedros obtidos na divisão da superfície do sólido irregular, ou seja, quanto maior o número de tetraedros, melhor será a aproximação.

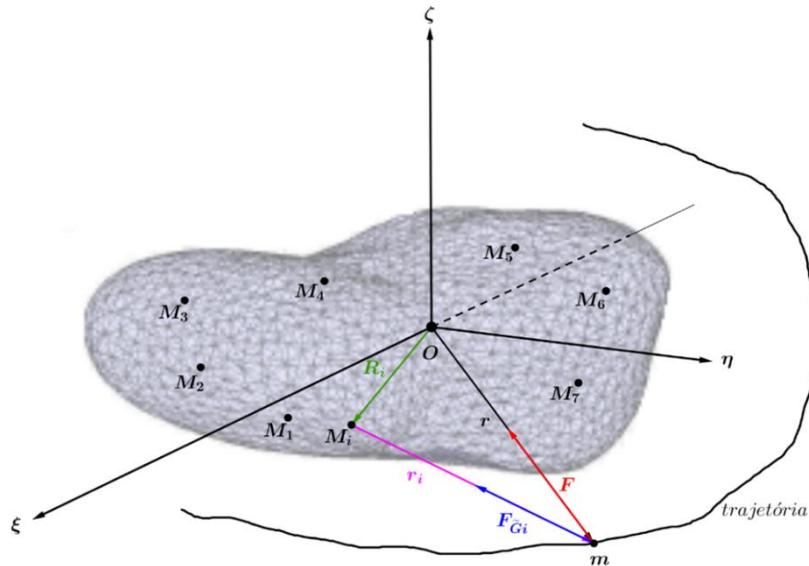
Outra forma de refinar este método, consiste em dividir cada tetraedro em sólidos, por meio de planos paralelos à base do tetraedro inicial, concentrando a massa de cada sólido gerado, em seus respectivos centros de massa. Dessa forma, obtém-se maior quantidade de centros de atração secundários, aumentando a precisão do modelo do campo gravitacional, como feito pela primeira vez por Venditti (2013).

Visando analisar as órbitas de um veículo espacial em torno de um asteroide, observa-se que seu campo gravitacional apresentará um comportamento diferente daquele com distribuição de massa esfericamente simétrico. Logo, a trajetória do satélite sofrerá perturbações em relação ao comportamento kepleriano, devido ao campo gravitacional não ser mais central, acrescentando a essa perturbação, a contribuição devido à rotação do asteroide.

Retomando à Figura 3.10, considere, agora, que o centro de massa do asteroide esteja localizado no ponto O , origem do sistema de coordenadas ξ, η, ζ . Seja M a massa total do corpo concentrada em seu baricentro, $M_i, i = 1, 2, \dots, n$, são as massas dos centros de

atração secundários, localizadas, respectivamente, nos baricentros dos tetraedros correspondentes, sendo n o número de divisões referentes às massas secundárias que compõem o modelo, m é a massa do satélite, \mathbf{R}_i é o vetor posição de M_i em relação ao baricentro O , \mathbf{r}_i é o vetor posição de m em relação à massa M_i e \mathbf{r} é o vetor posição de m em relação à O , conforme mostra a Figura 3.12.

Figura 3.12 - Modelo matemático da órbita perturbada devido ao campo gravitacional.



Fonte: Adaptada de Venditti (2013).

Estabelecendo \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} como os versores da base ortonormal, então os vetores \mathbf{r} , \mathbf{R}_i e \mathbf{r}_i , definidos anteriormente, são representados pelas Equações (3.78), (3.79) e (3.80)

$$\mathbf{r} = r_\xi \hat{i} + r_\eta \hat{j} + r_\zeta \hat{k}, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{R}_i = R_{i\xi} \hat{i} + R_{i\eta} \hat{j} + R_{i\zeta} \hat{k}, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{r}_i = r_{i\xi} \hat{i} + r_{i\eta} \hat{j} + r_{i\zeta} \hat{k}. \quad (3.80)$$

Da Figura 3.12, conclui-se que a Equação (3.81) estabelece a relação entre esses vetores

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{R}_i, \quad (3.81)$$

ou seja, das Equações (3.78), (3.79) e (3.80), tem-se a Equação (3.82)

$$\mathbf{r}_i = (r_\xi - R_{i\xi})\hat{\mathbf{i}} + (r_\eta - R_{i\eta})\hat{\mathbf{j}} + (r_\zeta - R_{i\zeta})\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.82)$$

e, conseqüentemente, o módulo de \mathbf{r}_i será expresso pela Equação (3.83)

$$\|\mathbf{r}_i\| = \sqrt{(r_\xi - R_{i\xi})^2 + (r_\eta - R_{i\eta})^2 + (r_\zeta - R_{i\zeta})^2} \quad (3.83)$$

Logo, a Equação (3.84) fornece a força gravitacional aplicada ao veículo espacial referente ao centro secundário de massa M_i , $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathbf{F}_{G_i} = -\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_i\|^2} \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} \quad (3.84)$$

para a qual, a Equação (3.85) exhibe os componentes dessa força

$$F_{G_{i\xi}}\hat{\mathbf{i}} + F_{G_{i\eta}}\hat{\mathbf{j}} + F_{G_{i\zeta}}\hat{\mathbf{k}} = \left(-\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\xi}\|^2}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\eta}\|^2}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(-\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\zeta}\|^2}\right)\hat{\mathbf{k}} \quad (3.85)$$

Portanto, a Equação (3.86) é a resultante da força gravitacional perturbadora, $\mathbf{F}_{\tilde{G}P}$, gerada no veículo espacial por um corpo irregular pode ser modelada como a diferença entre a força referente ao campo central e o somatório das forças gravitacionais decorrentes das concentrações de massas secundárias.

$$\mathbf{F}_{\tilde{G}P} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\xi}\|^2}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\eta}\|^2}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\zeta}\|^2}\right)\hat{\mathbf{k}} \right] \quad (3.86)$$

Na hipótese de analisar o efeito do termo perturbador, assim como o controle da trajetória, empregando o método das concentrações de massa, pode-se aplicar o STRS (Spacecraft Trajectory Simulator) (ROCCO, 2008 e 2012), cujos resultados, dessas simulações numéricas, tornam-se uma forte ferramenta a ser empregada na análise da missão.

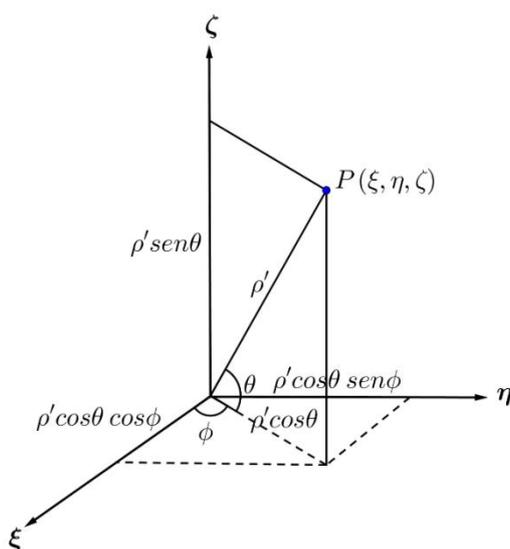
4. PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS

O primeiro procedimento desenvolvido neste capítulo para a determinação dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos a um asteroide, correlaciona o modelo de seu campo gravitacional, obtido pelo método da expansão do potencial em série, com aqueles coeficientes, por meio de um sistema lineares, possível e determinado, cujas incógnitas são os elementos a serem obtidos. A segunda forma apresentada, emprega a técnica da aplicação direta das integrais para se calcular esses coeficientes.

4.1 Relação entre o potencial gravitacional e coeficientes dos harmônicos esféricos

Abordando, novamente, as coordenadas esféricas, redefinem-se as variáveis de modo a adequá-las à latitude e à longitude, denotadas por θ e ϕ , respectivamente, como ilustra a Figura 4.1:

Figura 4.1 - Coordenadas esféricas envolvendo latitude e longitude.



Fonte: Produção do autor.

As relações entre as coordenadas cartesianas e as esféricas são expressas pela Equação (4.1).

$$\xi = \rho' \cos \phi \cos \theta, \quad \eta = \rho' \sin \phi \cos \theta \quad \text{e} \quad \zeta = \rho' \sin \theta. \quad (4.1)$$

Logo, utilizando as relações da Equação (4.1) obtém-se as relações inversas, isto é, as coordenadas polares esféricas em função das coordenadas cartesianas, apresentadas na Equação (4.2).

$$\rho' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}\right]. \quad (4.2)$$

O potencial gravitacional, solução da equação de Laplace, pode ser modelado pela função harmônica esférica, expressa pela Equação (4.3), segundo Kaula (1966), assim como por Casotto e Musotto (2000):

$$U = \frac{\mu}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n P_{nm}(\operatorname{sen} \theta) [C_{nm} \cos(m\phi) + S_{nm} \operatorname{sen}(m\phi)] \right\} + \varepsilon, \quad (4.3)$$

sendo μ a constante gravitacional do asteroide, isto é, o produto de sua massa pela constante gravitacional, ρ é a distância de um ponto qualquer do campo ao seu centro de massa, a é o raio normalizador do asteroide, $P_{nm}(\operatorname{sen} \theta)$ são os polinômios associados de Legendre, quando $m=0$, ele se degenera nos polinômios de Legendre, C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos e ε é o erro de truncamento.

Observando a Equação (4.3), percebe-se que a parcela μ/ρ representa o potencial gravitacional da esfera homogênea, enquanto que os demais termos exprimem as alterações no potencial gravitacional. Hipoteticamente, caso N tenda ao infinito, esta série aproximar-se-á assintoticamente do potencial gravitacional central do objeto. Porém, como essa série infinita não pode ser calculada, então, para a sua utilização em problemas práticos, os termos de alta ordem são geralmente desprezados durante os cálculos, de acordo com a precisão exigida pela missão. Ainda em relação à Equação (4.3), constata-se o estabelecimento de uma relação linear entre o potencial gravitacional e os coeficientes dos harmônicos esféricos, cujos termos dos coeficientes são dados por $P_{nm}(\operatorname{sen} \theta) \cos(m\phi)$ e $P_{nm}(\operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(m\phi)$. Portanto, conhecendo-se as condições de distribuição do potencial gravitacional, ocorre que os coeficientes dos harmônicos esféricos podem ser obtidos por meio da relação linear antes mencionada.

4.2 Estrutura do conjunto das equações lineares simultâneas

A partir da determinação do modelo do campo gravitacional, calcula-se o valor numérico da função potencial U em um ponto qualquer desse campo, $P_i(R_i, \theta_i, \phi_i)$, desde que satisfaça a condição de convergência, ou seja, exterior à esfera de raio a , obtendo-se a Equação (4.4) envolvendo as incógnitas C_{nm} e S_{nm} :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{\rho_i}\right) P_{10} C_{10} + \left(\frac{a}{\rho_i}\right) P_{11} (C_{11} \cos \phi_i + S_{11} \sin \phi_i) + \dots + \\ & + \dots + \left(\frac{a}{\rho_i}\right)^N P_{NN} (C_{NN} \cos(N\phi_i) + S_{NN} \sin(N\phi_i)) = \frac{\rho_i}{\mu} U - 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo, teoricamente, se forem escolhidos $N(N+2)$ pontos distintos do campo gravitacional do asteroide, da forma $P_i(\rho_i, \theta_i, \phi_i)$, com $i = 1, 2, \dots, N(N+2)$, pode-se estabelecer um conjunto de $N(N+2)$ equações lineares, dadas pela Equação (4.5)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho_1}\right)^n P_{nm}(\sin \theta_1) [C_{nm} \cos(m\phi_1) + S_{nm} \sin(m\phi_1)] = \frac{\rho_1}{\mu} U(P_1) - 1 \\ & \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho_2}\right)^n P_{nm}(\sin \theta_2) [C_{nm} \cos(m\phi_2) + S_{nm} \sin(m\phi_2)] = \frac{\rho_2}{\mu} U(P_2) - 1 \\ & \quad \vdots \\ & \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho_K}\right)^n P_{nm}(\sin \theta_K) [C_{nm} \cos(m\phi_K) + S_{nm} \sin(m\phi_K)] = \frac{\rho_K}{\mu} U(P_K) - 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo $K = N(N+2)$. O sistema de equações definido pela Equação (4.5) pode ser reescrito na forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuja solução permite encontrar os coeficientes C_{nm} e S_{nm} . Porém, se o método da expansão do potencial em série for aplicado, o modelo do campo gravitacional é escrito por meio da Equação (4.6)

$$U = \sum_{i=0}^N U_i. \quad (4.6)$$

Logo, conhecendo as parcelas U_i , pode-se aplicar o processo descrito para a obtenção dos coeficientes dos harmônicos esféricos para cada ordem i correspondente, reduzindo o número de incógnitas do sistema a ser resolvido.

4.3 Método de resolução do conjunto de equações lineares

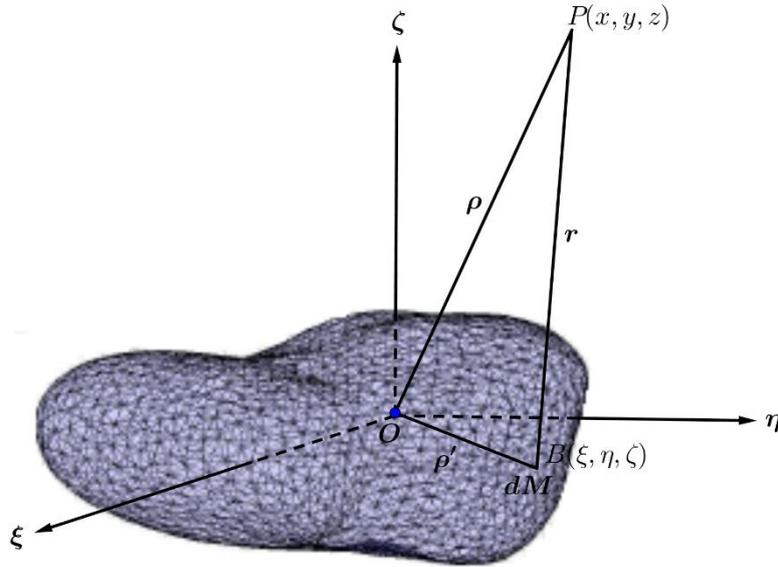
Uma vez que o sistema de equações simultâneas é construído, teoricamente os coeficientes dos harmônicos esféricos C_{nm} e S_{nm} , incógnitas procuradas, podem ser obtidos de forma única. Porém, na prática, devido à existência dos fatores $(a/\rho)^i P_{nm}(\sin\theta)$ envolvidos no cálculo do valor do potencial, mesmo para $N(N+2)$ pontos distintos do campo, as equações podem resultar em um sistema linearmente dependente, isto é, em um sistema indeterminado ou mesmo impossível.

Em relação ao sistema dado pela Equação (4.5), há dois caminhos para abordá-lo e determinar sua solução. O primeiro caminho é procurar pontos $P_i(\rho_i, \theta_i, \phi_i)$ do próprio campo de forma que a matriz dos coeficientes das incógnitas não seja singular, isto é, torne o sistema possível e determinado. O segundo caminho é aumentar a quantidade de equações a fim de transformar a Equação (4.5) em um sistema cujo número de equações seja maior que o número de incógnitas, passando, em seguida, a resolvê-lo com o mínimo normal deste conjunto de equações obtidas, determinando as melhores estimativas de C_{nm} e S_{nm} .

4.4 Integrais diretas para o cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos

Suponha que um sistema de coordenadas ξ, η, ζ tenha a origem localizada no centro de massa do sólido Q , representado pelo ponto O , e considere um elemento de massa dM posicionado no ponto $B(\xi, \eta, \zeta)$, como mostrado na Figura 4.2.

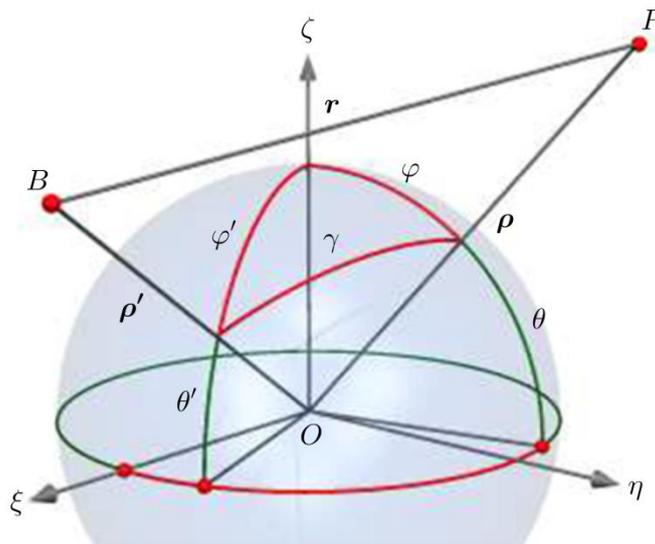
Figura 4.2 - Cálculo do potencial de um elemento de massa dM .



Fonte: Produção do autor.

Caso os pontos P e B sejam dados em coordenadas esféricas, isto é, $P(\rho, \varphi, \theta)$ e $B(\rho', \varphi', \theta')$, e definindo γ como o ângulo formado pelos vetores OP e OB , obtém-se a Figura 4.3:

Figura 4.3 - Distância entre os pontos P e B em coordenadas esféricas.



Fonte: adaptada de Carrara et al. (2000).

Determina-se o ângulo γ por meio do produto escalar dos vetores \mathbf{OP} e \mathbf{OB} , dado pela Equação (4.7)

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\phi' - \phi), \quad (4.7)$$

enquanto que a distância entre os pontos P e B é dada por $r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma}$. Logo, isolando $1/r$, obtém-se a Equação (4.8)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho\sqrt{1 - 2\frac{\rho'}{\rho}\cos\gamma + \frac{\rho'^2}{\rho^2}}} \quad (4.8)$$

Assumindo que $\rho' < \rho$, pode-se desenvolver o segundo membro da Equação (4.8) em uma série de potências em relação à $\frac{\rho'}{\rho}$, resultando na Equação (4.9)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left[P_0(\cos\gamma) + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right) P_1(\cos\gamma) + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 P_2(\cos\gamma) + \dots \right], \quad (4.9)$$

ou seja, expresso pela série dada pela Equação (4.10)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n P_n(\cos\gamma), \quad (4.10)$$

na qual, $P_n(\cos\gamma)$, $n=0,1,2,\dots$, são os polinômios de Legendre. Logo, o potencial do elemento de massa dM será expresso pela Equação (4.11)

$$U_{dM} = \frac{G dM}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n P_n(\cos\gamma). \quad (4.11)$$

Pelo teorema da adição de Legendre, Carrara et al. (2000), dado pela Equação (4.12)

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\varphi) P_{nm}(\cos\varphi') \cos[m(\phi - \phi')], \quad (4.12)$$

sendo δ_{m0} o delta de Kronecker e P_{nm} são os polinômios associados de Legendre, utilizando a Equação (4.12), com ângulos θ e θ' , complementares de φ e φ' , respectivamente, e definindo $E_{nm} = \frac{(2 - \delta_{m0})(n - m)!}{(n + m)!}$, a Equação (4.11) pode ser reescrita pela Equação (4.13):

$$U_{dM} = \frac{G dM}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n E_{nm} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) P_{nm}(\text{sen } \theta') \cos[m(\phi - \phi')]. \quad (4.13)$$

Lembrando que $\cos[m(\phi - \phi')] = \cos(m\phi)\cos(m\phi') + \text{sen}(m\phi)\text{sen}(m\phi')$, substituindo o cosseno da diferença entre dois ângulos na Equação (4.13), obtém-se de forma sequencial as Equações (4.14), (4.15) e (4.16)

$$U_{dM} = \frac{G dM}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left[E_{nm} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) P_{nm}(\text{sen } \theta') \cos(m\phi)\cos(m\phi') + E_{nm} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) P_{nm}(\text{sen } \theta') \text{sen}(m\phi)\text{sen}(m\phi') \right] \quad (4.14)$$

$$= \frac{G dM}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left[E_{nm} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) P_{nm}(\text{sen } \theta') \cos(m\phi)\cos(m\phi') + E_{nm} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) P_{nm}(\text{sen } \theta') \text{sen}(m\phi)\text{sen}(m\phi') \right] \quad (4.15)$$

$$= \frac{G dM}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \left[E_{nm} \left(\frac{\rho'}{a} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta') \cos(m\phi') P_{nm}(\text{sen } \theta) \cos(m\phi) + E_{nm} \left(\frac{\rho'}{a} \right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta') \text{sen}(m\phi') P_{nm}(\text{sen } \theta) \text{sen}(m\phi) \right]. \quad (4.16)$$

Integrando a Equação (4.16) em toda extensão do corpo Q , obtém-se a Equação (4.17), a qual fornece a expressão para o potencial:

$$U = \frac{GM}{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n [C_{nm}P_{nm}(\text{sen } \theta)\cos(m\phi) + S_{nm}P_{nm}(\text{sen } \theta)\text{sen}(m\phi)] \quad (4.17)$$

decorrendo, como consequência, que os fatores adimensionais C_{nm} e S_{nm} , denominados coeficientes dos harmônicos esféricos, também conhecidos como coeficientes de Stokes, são dados pelas equações (4.18) e (4.19):

$$C_{nm} = \frac{(2-\delta_{m0})(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint_Q \left(\frac{\rho'}{a}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta')\cos(m\phi') dM, \quad (4.18)$$

$$S_{nm} = \frac{(2-\delta_{m0})(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint_Q \left(\frac{\rho'}{a}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta')\text{sen}(m\phi') dM. \quad (4.19)$$

Considerando, mais uma vez, o sólido Q como um poliedro, pode-se decompô-lo em tetraedros, ligando-se os vértices das bases triangulares, localizadas na sua superfície, ao seu centro de massa. Dessa maneira, de modo análogo ao estabelecido para o cálculo do potencial gravitacional, o método desenvolvido por Lien e Kajiya (1984) permite calcular os coeficientes C_{nm} e S_{nm} por meio do somatório das integrais expostas pelas Equações (4.18) e (4.19), aplicadas sobre cada elemento tetraédrico.

Analisando os processos desenvolvidos nesse capítulo, conclui-se que os coeficientes dos harmônicos esféricos de um asteroide podem ser calculados a partir do modelo do potencial gravitacional estabelecido para o referido sólido, assim como, obtidos de forma direta, empregando as integrais correspondentes. Caso este segundo procedimento seja adotado, de posse dos coeficientes dos harmônicos esféricos, determina-se o modelo para o potencial gravitacional do asteroide estudado. Vale observar que neste trabalho, tais coeficientes foram calculados utilizando ambos os procedimentos, confrontando os resultados obtidos para os casos do cubo homogêneo unitário e dos asteroides Itokawa, Geographos e Eros, apresentando valores de mesma grandeza.

5. RESULTADOS PARA O CUBO HOMOGÊNEO UNITÁRIO

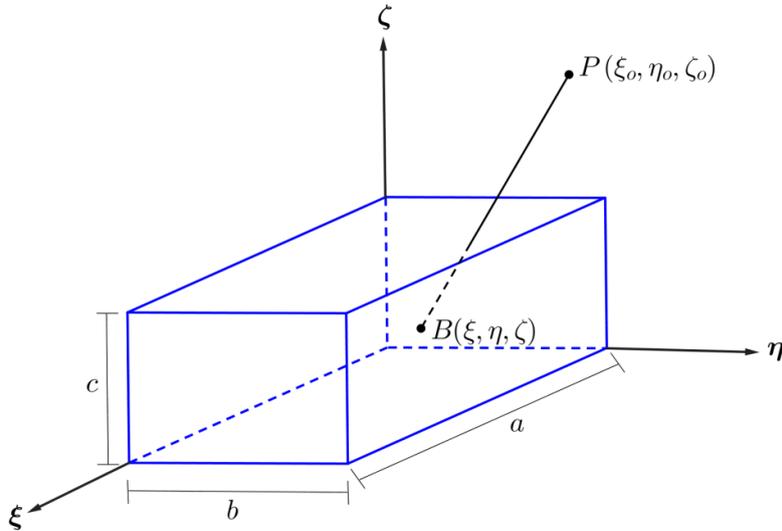
Neste capítulo o objetivo é apresentar um estudo conceitual sobre as propriedades de um modelo para o campo gravitacional de um asteroide com o formato de um cubo unitário homogêneo utilizando sua decomposição em tetraedros (WERNER, 1994), comparando os resultados com as soluções obtidas para este poliedro por meio do modelo exato desenvolvido por MacMillan (1958) e Waldvogel (1976), e pelo método das concentrações de massa, corroborando com a precisão do modelo concebido. De fato, o estudo apresentado aqui possibilita aplicar esta técnica em corpos com distribuições de massas irregulares, fornecendo subsídios às análises mais complexas, tais como o estudo de órbitas periódicas ao redor de corpos celestes não esféricos, verificações de suas estabilidades, assim como na trajetória de pouso suave. Em seguida, foram calculados os coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao cubo homogêneo, primeiramente, utilizando o modelo do potencial desenvolvido até o grau 22, confrontando-os com os valores obtidos por Broucke e Prado (2004, p. 3059), constatando-se a validade do método empregado, e, posteriormente, foram determinados de forma direta, concluindo que os resultados são de mesma grandeza.

5.1. O potencial Newtoniano exato de um cubo homogêneo

Nesta seção, deseja-se obter o potencial Newtoniano exato de um cubo homogêneo expresso por meio de funções elementares, partindo-se da modelagem de um paralelepípedo retangular homogêneo, e posteriormente, particularizando a congruência de suas arestas. Foram utilizadas como referências principais, os trabalhos de MacMillan (1958) e Waldvogel (1976).

Inicialmente, seja o paralelepípedo retangular homogêneo de arestas medindo a , b e c , localizado em um sistema de coordenadas ξ, η, ζ e um elemento de massa dM localizado em um ponto $B(\xi, \eta, \zeta)$ qualquer desse sólido, como ilustrado na Figura 5.1:

Figura 5.1 - Paralelepípedo retangular de arestas a , b e c .



Fonte: Produção do autor.

A fim de simplificar os cálculos, supõe-se que $G\sigma = 1$, sendo σ a densidade de massa uniforme desse poliedro e G a constante gravitacional universal, então, a Equação (5.1) fornece o potencial Newtoniano do ponto $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ relativo ao paralelepípedo

$$V(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \int_0^c \int_0^b \int_0^a \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2}}. \quad (5.1)$$

Transladando o sistema de coordenadas inicial de modo que a nova origem coincida com o ponto $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, mediante a transformação linear $\bar{\xi} = \xi - \xi_0$, $\bar{\eta} = \eta - \eta_0$ e $\bar{\zeta} = \zeta - \zeta_0$, o potencial dado pela Equação (5.1) passa a ser escrito pela Equação (5.2)

$$V(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \int_{-\zeta_0}^{c-\zeta_0} \int_{-\eta_0}^{b-\eta_0} \int_{-\xi_0}^{a-\xi_0} \frac{d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\bar{\zeta}}{\sqrt{\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2}}. \quad (5.2)$$

Definindo $\xi_1 = a - \xi_0$, $\eta_1 = b - \eta_0$, $\zeta_1 = c - \zeta_0$ e desprezando as barras na notação da Equação (5.2), obtém-se a Equação (5.3)

$$V(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \int_{-\zeta_0}^{\zeta_1} \int_{-\eta_0}^{\eta_1} \int_{-\xi_0}^{\xi_1} \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (5.3)$$

sendo $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2}$.

Uma vez que r é uma função par em relação às suas variáveis e, devido à Equação (5.4)

$$\int \frac{1}{r} d\xi = \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi}{r}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r+\xi}{r-\xi}\right) = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 + \varsigma^2}}\right), \quad (5.4)$$

escolhendo, convenientemente uma constante de integração, é concebível tornar a Equação (5.3) em uma função ímpar na variável ξ . Logo, substituindo o resultado da Equação (5.4) na Equação (5.2), resulta na Equação (5.5)

$$V(\xi_o, \eta_o, \varsigma_o) = \sum_{i=0}^1 \int_{-\varsigma_o}^{\varsigma_i} \int_{-\eta_o}^{\eta_i} \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) d\eta d\varsigma, \quad (5.5)$$

na qual

$$r_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta^2 + \varsigma^2}, \quad i = 0, 1. \quad (5.6)$$

Para calcular a integral da Equação (5.5) em relação à η , aplica-se, inicialmente, o método da integração por partes, dado pela Equação (5.7)

$$\int \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) d\eta = \eta \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) - \int \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) \right] d\eta. \quad (5.7)$$

Devido à $\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) \right] = -\frac{\eta \xi_i}{r_i(\eta^2 + \varsigma^2)}$ e $\frac{\xi_i \eta^2}{r_i(\eta^2 + \varsigma^2)} = \frac{\xi_i}{r_i} - \frac{\xi_i \varsigma^2}{r_i(\eta^2 + \varsigma^2)}$, então,

isolando a integral do segundo membro da Equação (5.7), obtém-se a Equação (5.8)

$$\begin{aligned} -\int \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) \right] d\eta &= \int \frac{\xi_i}{r_i} d\eta - \varsigma \int \frac{\xi_i \varsigma}{r_i(\eta^2 + \varsigma^2)} d\eta \\ &= \xi_i \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\eta}{r_i}\right) - \varsigma \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\xi_i \eta}{\varsigma r_i}\right) \end{aligned}, \quad (5.8)$$

e, conseqüentemente, o resultado da Equação (5.7) é dado pela Equação (5.9):

$$\int \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) d\eta = \eta \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) + \xi_i \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\eta}{r_i}\right) - \varsigma \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\xi_i \eta}{\varsigma r_i}\right). \quad (5.9)$$

Analisando o segundo membro da Equação (5.9), nota-se, de forma semelhante à Equação (5.4), que ela é uma função ímpar, agora em relação à variável η . Logo, a integral dada pela Equação (5.5) pode ser expressa pela Equação (5.10):

$$V(\xi_o, \eta_o, \varsigma_o) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \int_{-\varsigma_o}^{\varsigma_1} f_{ij}(\varsigma) d\varsigma, \quad (5.10)$$

sendo a função $f_{ij}(\varsigma)$ definida pela Equação (5.11)

$$f_{ij}(\varsigma) = \eta_j \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_{ij}}\right) + \xi_i \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\eta_j}{r_{ij}}\right) - \varsigma \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\xi_i \eta_j}{\varsigma r_{ij}}\right), \quad (5.11)$$

na qual r_{ij} é dado pela Equação (5.12)

$$r_{ij} = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_j^2 + z^2}, \quad i, j = 0, 1. \quad (5.12)$$

Levando em conta a Equação (5.11), constata-se que a função potencial V depende das variáveis $\xi_o, \xi_1, \eta_o, \eta_1, \varsigma_o, \varsigma_1$. Além disso, verifica-se que o integrando $f_{ij}(\varsigma)$ da Equação (5.11) é uma função homogênea de grau 1 em todas as suas variáveis, pois, a função $F(\xi_o, \xi_1, \eta_o, \eta_1, \varsigma)$, definida pela Equação (5.13), satisfaz essa mesma condição de homogeneidade, como segue:

$$\begin{aligned} F(\xi_o, \xi_1, \eta_o, \eta_1, \varsigma) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 f_{ij}(\varsigma) \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \left[\eta_j \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\xi_i}{r_{ij}}\right) + \xi_i \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{\eta_j}{r_{ij}}\right) - \varsigma \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\xi_i \eta_j}{\varsigma r_{ij}}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

tendo como consequência, a Equação (5.14)

$$F(\lambda\xi_o, \lambda\xi_1, \lambda\eta_o, \lambda\eta_1, \lambda\varsigma) = \lambda F(\xi_o, \xi_1, \eta_o, \eta_1, \varsigma). \quad (5.14)$$

Deste modo, retomando à Equação (5.10), pode-se concluir que o potencial é uma função homogênea de grau 2 em relação às suas variáveis. Logo, pelo teorema de Euler aplicado às funções homogêneas, passa a ser válida a Equação (5.15):

$$\xi_o \frac{\partial V}{\partial \xi_o} + \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \eta_o \frac{\partial V}{\partial \eta_o} + \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} + \varsigma_o \frac{\partial V}{\partial \varsigma_o} + \varsigma_1 \frac{\partial V}{\partial \varsigma_1} = 2V. \quad (5.15)$$

Da Equação (5.10), e devido à paridade da função $f_{ij}(z)$ em relação à ς , tem-se a Equação (5.16), intermediária à determinação da função potencial:

$$\varsigma_o \frac{\partial V}{\partial \varsigma_o} + \varsigma_1 \frac{\partial V}{\partial \varsigma_1} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \left[\left[\varsigma_o f_{ij}(-\varsigma_o) + \varsigma_1 f_{ij}(\varsigma_1) \right] \right] = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \varsigma_k f_{ij}(\varsigma_k) \quad (5.16)$$

Recorrendo à permutação cíclica de $\xi_i, \eta_j, \varsigma_k$, obtém-se expressões análogas em relação a ξ e η , as quais, substituídas na Equação (5.15), levando em conta a definição (5.11), resulta na função dada pela Equação (5.17):

$$\begin{aligned} V(\xi_o, \eta_o, \varsigma_o) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \left[\xi_i \eta_j \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\varsigma_k}{r_{ijk}} \right) + \eta_j \varsigma_k \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\xi_i}{r_{ijk}} \right) \right. \\ \left. + \xi_i \varsigma_k \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\eta_j}{r_{ijk}} \right) - \frac{\xi_i^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\eta_j \varsigma_k}{\xi_i r_{ijk}} \right), \right. \\ \left. - \frac{\eta_j^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\xi_i \varsigma_k}{\eta_j r_{ijk}} \right) - \frac{\varsigma_k^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\xi_i \eta_j}{\varsigma_k r_{ijk}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo $\xi_1 = a - \xi_o$, $\eta_1 = b - \eta_o$, $\varsigma_1 = c - \varsigma_o$ com $r_{ijk} = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_j^2 + \varsigma_k^2}$. Portanto, adotando o intervalo $-\pi/2 < \operatorname{tg}^{-1} \xi < \pi/2$, a função dada pela Equação (5.17) fornece o valor do potencial Newtoniano para todo ponto $(\xi_o, \eta_o, \varsigma_o)$, interior, na superfície e exterior ao paralelepípedo estudado. Além disso, segundo a Equação (5.4), visando facilitar o cálculo do potencial, pode-se agrupar, dois a dois, os termos envolvendo a função inversa da tangente hiperbólica, da forma expressa pela Equação (5.18)

$$\sum_{k=0}^1 \xi_i \eta_j \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\zeta_k}{r_{ijk}} \right) = \frac{1}{2} \xi_i \eta_j \ln \left[\frac{(r_{ijo} + \zeta_o)(r_{ij1} + \zeta_1)}{(r_{ijo} - \zeta_o)(r_{ij1} - \zeta_1)} \right]. \quad (5.18)$$

Finalmente, determinada a função potencial gravitacional, expressa pela Equação (5.17), pode-se analisar sua homogeneidade em relação às suas variáveis efetivas ξ_0 , η_0 e ζ_0 . Sabendo que o potencial Kepleriano GM/ρ é uma função homogênea de grau -1 nas variáveis ξ , η e ζ , espera-se um comportamento semelhante do potencial do paralelepípedo retangular. Logo, supondo-se que a função dada pela Equação (5.17) seja homogênea, então deverá satisfazer a condição:

$$V(\lambda \xi_0, \lambda \eta_0, \lambda \zeta_0) = \lambda^n V(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), \quad (5.19)$$

na qual, λ é uma constante positiva e n determina o grau de homogeneidade da função, salientando a independência de n das variáveis ξ_0 , η_0 e ζ_0 . Reescrevendo a Equação (5.19) na forma da Equação (5.20)

$$\ln \left[\frac{V(\lambda \xi_0, \lambda \eta_0, \lambda \zeta_0)}{V(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)} \right] = n \ln \lambda, \quad (5.20)$$

atribuindo valores a ξ_0, η_0 e ζ_0 , analisa-se o valor de n , conforma mostra a Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Estudo do grau da homogeneidade n do potencial do paralelepípedo.

Coordenadas dos pontos	Valor de n
(2,2,2) e (1,1,1)	-1,001608709156105
(10,10,10) e (1,1,1)	-1,000514215927072
(100,100,100) e (10,10,10)	-1,000000046952403
(60,60,60) e (30,30,30)	-1,000000001803972
(40,60,80) e (20,30,40)	-1,000000001056998
(60,80,100) e (30,40,50)	-1,000000000424486
(1000,1000,1000) e (100,100,100)	-1,000000000004691

Fonte: Produção do autor.

Além da condição expressa pela Equação (5.19), deve-se avaliar se o potencial gravitacional do paralelepípedo retangular satisfaz o teorema de Euler relativo às funções homogêneas, isto é, atenda à condição imposta pela Equação (5.21)

$$\xi_o \frac{\partial V}{\partial \xi_o} + \eta_o \frac{\partial V}{\partial \eta_o} + \zeta_o \frac{\partial V}{\partial \zeta_o} = \tilde{n} V(\xi_o, \eta_o, \zeta_o), \quad (5.21)$$

sendo \tilde{n} o grau de homogeneidade da função analisada, ressaltando, novamente, sua independência das variáveis de V . De modo similar ao procedimento realizado para a construção da Tabela 5.1, são atribuídos valores a ξ_o, η_o e ζ_o , viabilizando a obtenção do parâmetro \tilde{n} correspondente à função potencial obtida, exposto na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Estudo do grau da homogeneidade \tilde{n} do potencial do paralelepípedo.

Coordenadas do ponto	Valor de \tilde{n}
(1,1,1)	-1,004961685802306
(2,2,2)	-1,000279375835348
(3,4,5)	-1,000012631784362
(6,7,8)	-1,000001639637447
(10,12,14)	-1,000000183053996
(20,30,40)	-1,000000003126070
(100,120,140)	-1,000000000018290

Fonte: Produção do autor.

De acordo com os valores encontrados para os parâmetros n e \tilde{n} , respectivamente, nas Tabelas 5.1 e 5.2, pode-se concluir que o potencial V do paralelepípedo retângulo comporta-se aproximadamente como uma função homogênea de grau -1 nas variáveis ξ_o, η_o e ζ_o , evidenciando, de forma mais acentuada essa importante característica, conforme os pontos se distanciam da origem.

Outra peculiaridade imprescindível satisfeita pela Equação (5.17) e corroborada pela Equação (5.1), consiste em que essa função potencial tende a zero quando o ponto (ξ_o, η_o, ζ_o) tende ao infinito.

Particularizando o estudo feito até aqui, definindo $a=b=c=1$, o paralelepípedo retangular da Figura 5.1, transforma-se em um cubo homogêneo unitário. Como exemplos de aplicação da Eq. (5.17), são calculados os potenciais para alguns pontos, como mostra a Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Valores do potencial exato para o cubo calculado em alguns pontos.

Coordenadas do ponto	Valor numérico do potencial
(0,0,0)	1,190038681989777
(1/2,0,0)	1,427260179700358
(1/2,1/2,0)	1,792810243178775
(1/2,1/2,1/2)	2,380077363979554
(1,1,1)	1,190038681989777
(1,1,2)	0,602771561188998
(10,12,20)	0,040731593062390
(80,90,100)	0,006424163293770

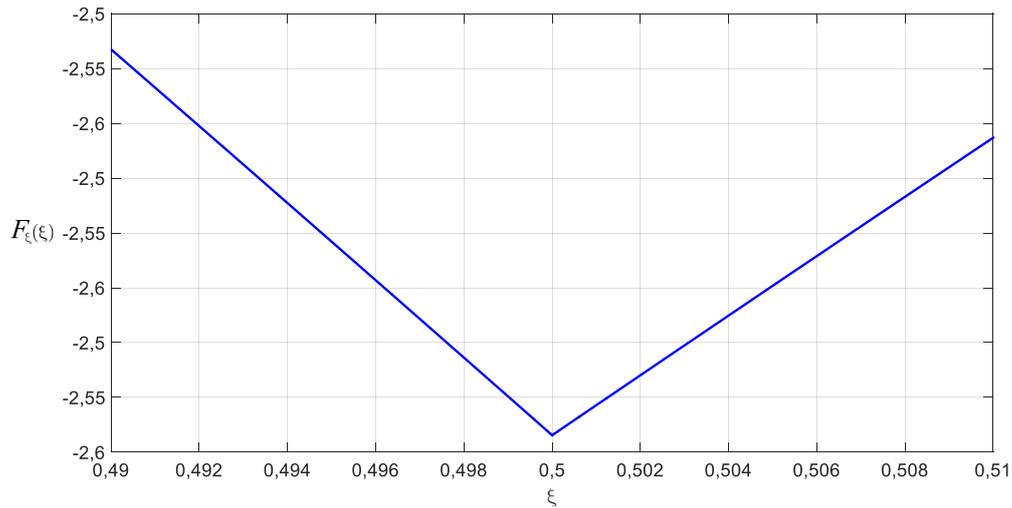
Fonte: Produção do autor.

Observando a Tabela 5.3, verifica-se que os quatro primeiros pontos correspondem ao vértice localizado na origem do sistema de coordenadas, ao ponto médio de uma de suas arestas, ao centro de uma das faces e ao centro do cubo estudado, respectivamente. Vale salientar a existência de singularidades para os pontos que apresentam pelo menos uma de suas coordenadas igual a $\pm 1/2$, devido a presença das funções inversas da tangente, problema este, contornado pela aplicação do conceito de limite. Percebe-se também, como previsto anteriormente, conforme o ponto se afasta da origem, o valor do potencial calculado nessas coordenadas, decresce, tendendo à zero.

Encontrada a função potencial V , os componentes da força são obtidos pelas derivadas parciais $F_\xi = \partial V / \partial \xi_o$, $F_\eta = \partial V / \partial \eta_o$ e $F_\zeta = \partial V / \partial \zeta_o$ nos pontos para os quais essas derivadas são definidas, possibilitando estudar o comportamento dessas funções nas proximidades das bordas do cubo. Para exemplificar esta investigação, foram consideradas as vizinhanças do centro de uma de suas faces e um dos seus vértices,

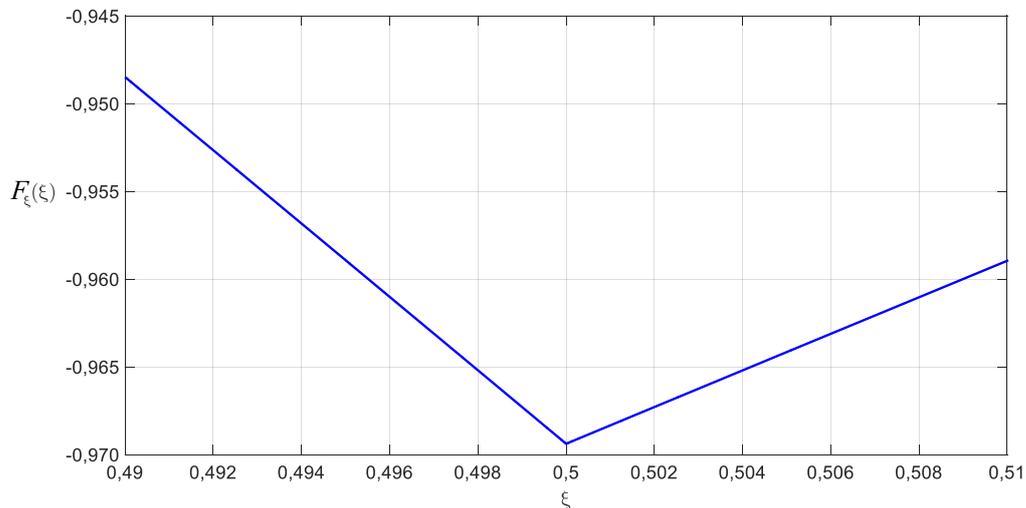
localizados nos pontos de coordenadas $(1/2,0,0)$ e $(1/2,1/2,1/2)$, respectivamente, e adotando o intervalo $0,49 \leq \xi \leq 0,51$, foram esboçados os gráficos da variação do componente da força F_ξ , ilustrados nas Figuras 5.2 e 5.3.

Figura 5.2 - Gráfico da variação de F_ξ nas proximidades do ponto $(1/2,0,0)$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 5.3 - Gráfico da variação de F_ξ nas proximidades do ponto $(1/2,1/2,1/2)$.



Fonte: Produção do autor.

Nota-se que, em ambos os casos, a variação do componente da força F_ξ , assim como a aceleração correspondente, apresentam gráficos com peculiaridade semelhante, ou seja, ambos têm a forma em V, exibindo um comportamento aproximadamente linear,

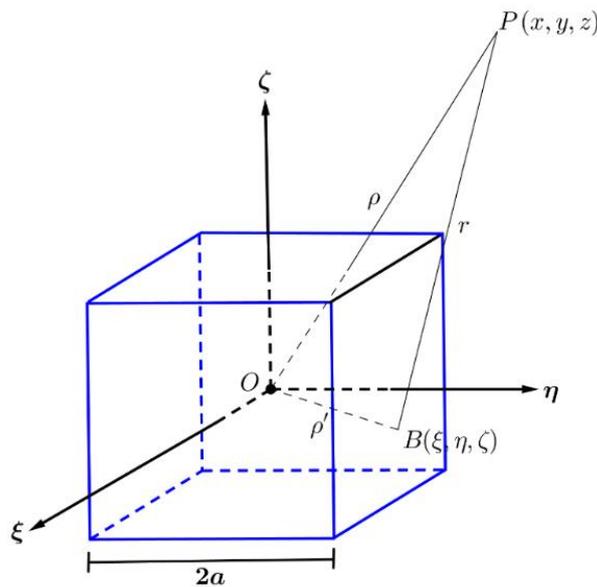
porém, com taxas de variações opostas no interior e no exterior do cubo, levando a concluir que a segunda derivada do potencial é descontínua em $\xi = 1/2$, valor para o qual, a força ou aceleração assume o máximo, em valor absoluto, de acordo com o resultado obtido por Broucke e Prado (2004, p. 3050).

5.2. Modelagem do potencial do cubo homogêneo utilizando a decomposição em tetraedros

Pretende-se, agora, tendo como ferramentas fundamentais os trabalhos desenvolvidos por Kellogg (2014) e MacMillan (1956), associados ao método da decomposição de um poliedro em tetraedros, elaborado por Werner (1994), apresentar uma metodologia para se calcular, de forma aproximada, o potencial de um cubo homogêneo, comparando os resultados obtidos com os do item anterior, validando esta técnica, permitindo aplicá-la na modelagem do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular.

Considere um cubo homogêneo de arestas medindo $2a$ e centrado na origem do sistema cartesiano de coordenadas ξ, η, ζ , cujos eixos são paralelos às suas arestas, como ilustrado na Figura 5.4.

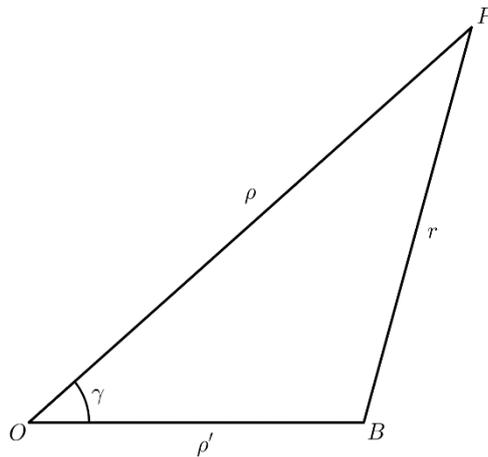
Figura 5.4 - Cubo homogêneo centrado na origem O e eixos paralelos às suas arestas.



Fonte: Produção do autor.

Seja dm um elemento de massa pertencente ao cubo, localizado no ponto $B(\xi, \eta, \zeta)$, e uma partícula unitária no ponto $P(x, y, z)$, resultando no triângulo de lados medindo ρ , ρ' e r , como mostrado na Figura 5.5:

Figura 5.5 - Triângulo formado pelos pontos O , P e B .



Fonte: Produção do autor.

Sendo M a massa do cubo, aplicando o método da expansão do potencial em série convergente, desenvolvido na seção 3.2, o seu potencial será expresso pela equação (5.22):

$$U = G \frac{M}{V} \left[\iiint_{\mathcal{Q}} P_0(u) \frac{1}{\rho} dV + \iiint_{\mathcal{Q}} P_1(u) \frac{\rho' \rho}{\rho^3} dV + \iiint_{\mathcal{Q}} P_2(u) \frac{\rho'^2 \rho^2}{\rho^5} dV + \dots \right], \quad (5.22)$$

lembrando que a relação entre $\cos \gamma = u$, ρ e ρ' é estabelecida pela Equação (5.23)

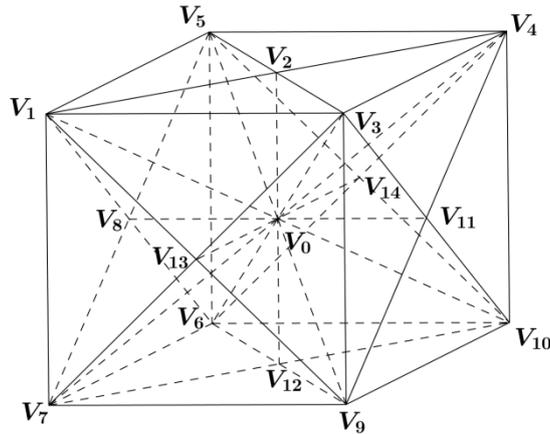
$$u \rho \rho' = \xi x + \eta y + \zeta z, \quad (5.23)$$

assim como, a Equação (5.24) define as distâncias ρ e ρ'

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{e} \quad \rho' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (5.24)$$

Considerando novamente o cubo homogêneo da Figura 5.4, pode-se decompô-lo em 24 tetraedros retangulares congruentes, ilustrado na Figura 5.6.

Figura 5.6 - Decomposição final do cubo homogêneo em 24 tetraedros congruentes.



Fonte: Produção do autor.

Objetivando determinar a função potencial do cubo, expressa pela Equação (5.22), devido a sua simetria, poder-se-ia calcular as integrais triplas de forma direta, pois, em relação ao sistema de coordenadas ξ, η, ζ , os limites de integração para o referido sólido geométrico são $-a \leq \xi \leq a$, $-a \leq \eta \leq a$ e $-a \leq \zeta \leq a$. Porém, tendo em vista a determinação de modelos matemáticos para corpos com distribuições de massas irregulares, aplicou-se, termo a termo, o método para o cálculo das integrais desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), utilizando o método dos poliedros, comparando esses resultados com os obtidos pelo método direto, ratificando sua validade.

Para implementar as integrais da Equação (5.22) até a ordem desejada, foram utilizadas as Tabelas 5.4 e 5.5 como dados de entrada, fornecendo as coordenadas dos vértices e a relação entre a face triangular formada e seus respectivos vértices. Para simplificar os cálculos, adotou-se a medida da aresta do cubo igual a 2 unidades de comprimento

Tabela 5.4 - Coordenadas dos vértices dos tetraedros.

Vértice	Abcissa	Ordenada	Cota
1	1	-1	1
2	0	0	1
3	1	1	1
4	-1	1	1
5	-1	-1	1

(Continua)

Tabela 5.4 - Conclusão

Vértice	Abscissa	Ordenada	Cota
6	-1	-1	-1
7	1	-1	-1
8	0	-1	0
9	1	1	-1
10	-1	1	-1
11	0	1	0
12	0	0	-1
13	1	0	0
14	-1	0	0

Fonte: Produção do autor.

Tabela 5.5 - Relação entre a face triangular formada e seus respectivos vértices.

Face	Vértice1	Vértice 2	Vértice 3
1	1	2	3
2	2	3	4
3	2	4	5
4	2	1	5
5	8	1	5
6	8	1	7
7	8	7	6
8	8	5	6
9	12	6	7
10	12	7	9
11	12	9	10
12	12	6	10
13	11	3	9
14	11	9	10
15	11	4	10
16	11	3	4
17	13	1	3
18	13	1	7
19	13	7	9
20	13	3	9
21	14	4	5
22	14	5	6
23	14	6	10
24	14	4	10

Fonte: Produção do autor.

Devido ao fato da Equação (5.19) ser uma série infinita de potências negativas na variável ρ , pode-se reescrevê-la da forma da Equação (5.25)

$$U = \frac{\mu}{\rho} \left[1 + \frac{I}{V} \sum_{k=1}^N \iiint_V P_k(u) \frac{\rho'^k \rho^k}{\rho^{2k}} dV \right] + \varepsilon, \quad (5.25)$$

sendo μ a constante gravitacional do cubo, ρ e ρ' são dados pela Equação (5.24), $P_k(u)$ são os polinômios de Legendre, $dV = d\xi d\eta d\zeta$ e ε é o erro de truncamento. Nota-se na Equação (5.25) que a parcela μ/r representa o potencial gravitacional da esfera homogênea, enquanto que os demais termos representam as perturbações do potencial gravitacional. Em teoria, esta série infinita converge uniformemente para o potencial gravitacional central do objeto com formato qualquer. Porém, como essa série infinita não pode ser calculada, então, para utilizá-la em problemas práticos, os termos de alta ordem são geralmente desprezados durante os cálculos, de acordo com a precisão exigida pela missão.

De acordo com os dados de entrada, Tabelas 5.4 e 5.5, aplicando o método da expansão em série do potencial, associado ao método poliédrico, e utilizando o procedimento para os cálculos das integrais, desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), devido à simetria do cubo e à paridade dos integrandos, constata-se que as parcelas correspondentes às ordens ímpares são todas nulas, isto é, $U_{2n+1} = 0$, com $n \in \mathbb{N}$, assim como $U_2 = 0$.

O potencial gravitacional Kepleriano, ou seja, termo de ordem zero da expansão em série do potencial, é obtido como segue na Equação (5.26):

$$U_0 = \sum_{i=1}^{24} U_i' = \sum_{i=1}^{24} \frac{G m_i}{\rho} = \frac{24Gm}{\rho} = \frac{GM}{\rho}, \quad (5.26)$$

sendo m_i a massa do i -ésimo tetraedro e U_i' seu correspondente potencial. Como todos os tetraedros são congruentes, $M = 24m$, lembrando que M é a massa total do cubo homogêneo.

Análoga à obtenção do termo Kepleriano, determina-se o termo de ordem 4, obtido na sequência das Equações (5.27), (5.28) e (5.29):

$$U_4 = \sum_{i=1}^{24} U'_i = -\frac{28Gm_i(x^4 - 3x^2y^2 + y^4 - 3x^2z^2 - 3y^2z^2 + z^4)}{5\rho^9}, \quad (5.27)$$

$$U_4 = -\frac{28}{5}G\frac{M}{24\rho^9}(x^4 - 3x^2y^2 + y^4 - 3x^2z^2 - 3y^2z^2 + z^4), \quad (5.28)$$

$$U_4 = -\frac{7}{30}\frac{GM}{\rho^9}\left[(x^4 + y^4 + z^4) - 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\right]. \quad (5.29)$$

A fim de tornar a função U_4 homogênea de grau -1 em relação à distância, isto é, em relação à unidade de comprimento, introduz-se o fator a^4 , resultando na Equação (5.30):

$$U_4 = -\frac{7}{30}\frac{GMa^4}{\rho^9}\left[(x^4 + y^4 + z^4) - 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\right], \quad (5.30)$$

de acordo com a expressão apresentada por Kellogg (2014), assim como em Broucke e Prado (2004).

A Equação (5.31) representa o termo de ordem 6 da expansão em série do potencial gravitacional relativo ao cubo homogêneo:

$$U_6 = \frac{GMa^6}{21\rho^{13}}\left[2(x^6 + y^6 + z^6) - 15(x^4y^2 + x^2y^4 + x^4z^2 + x^2z^4 + y^4z^2 + y^2z^4) + 180x^2y^2z^2\right] \quad (5.31)$$

enquanto que a Equação (5.32) corresponde ao termo de ordem 8 da mesma expansão

$$U_8 = \frac{11GMa^8}{40\rho^{17}}\left[(x^8 + y^8 + z^8) - 14(x^6y^2 + x^2y^6 + x^6z^2 + x^2z^6 + y^6z^2 + y^2z^6) + 35(x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4)\right] \quad (5.32)$$

Já a Equação (5.33) exhibe o termo de ordem 10 do desenvolvimento da série

$$\begin{aligned}
U_{10} = -\frac{13GMa^{10}}{66\rho^{21}} & \left[2\left(x^{10} + y^{10} + z^{10}\right) \right. \\
& -45\left(x^8y^2 + x^2y^8 + x^8z^2 + x^2z^8 + y^8z^2 + y^2z^8\right) \\
& +42\left(x^6y^4 + x^4y^6 + x^6z^4 + x^4z^6 + y^6z^4 + y^4z^6\right) \quad (5.33) \\
& +1008\left(x^6y^2z^2 + x^2y^6z^2 + x^2y^2z^6\right) \\
& \left. -1260\left(x^4y^4z^2 + x^4y^2z^4 + x^2y^4z^4\right) \right]
\end{aligned}$$

bem como, a Equação (5.34) mostra o termo de ordem 12 da expansão

$$\begin{aligned}
U_{12} = -\frac{GMa^{12}}{7280\rho^{25}} & \left[1999\left(x^{12} + y^{12} + z^{12}\right) -19413625x^4y^4z^4 \right. \\
& -65967\left(x^{10}y^2 + x^2y^{10} + x^{10}z^2 + x^2z^{10} + y^{10}z^2 + y^2z^{10}\right) \\
& +772090\left(x^8y^4 + x^4y^8 + x^8z^4 + x^4z^8 + y^8z^4 + y^4z^8\right) \quad (5.34) \\
& -1700083\left(x^6y^6 + x^6z^6 + y^6z^6\right) -1664025\left(x^8y^2z^2 + x^2y^8z^2 + x^2y^2z^8\right) \\
& \left. +3882725\left(x^6y^4z^2 + x^6y^2z^4 + x^4y^6z^2 + x^4y^2z^6 + x^2y^6z^4 + x^2y^4z^6\right) \right]
\end{aligned}$$

Portanto, considerando os pontos exteriores à esfera centrada na origem do sistema de coordenadas ξ, η, ζ , conforme a condição de convergência uniforme da série dada pela Equação (5.25), o potencial gravitacional do cubo homogêneo desenvolvido até a ordem 22 é dado pela Equação (5.35)

$$U = \sum_{j=0}^{22} U_j . \quad (5.35)$$

Analisando as parcelas relativas à perturbação do campo gravitacional do cubo homogêneo, verifica-se que cada parcela de ordem par é uma função homogênea, implicando, conseqüentemente, na homogeneidade do potencial gravitacional total. Logo, estudando, de forma análoga ao modelo exato, conclui-se que a Equação (5.35)

comporta-se de forma semelhante, ou seja, mostra-se aproximadamente como uma função homogênea de grau -1 nas variáveis x , y e z .

Deseja-se, agora, estimar a contribuição de cada parcela presente na perturbação do campo gravitacional do cubo em relação à parcela Kepleriana. Com efeito, considerando o ponto $P_1(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$, seu potencial Kepleriano e de quarta ordem são dados, respectivamente, pelas Equações (5.36) e (5.37):

$$U_0 = \frac{GM}{3a}, \quad (5.36)$$

$$U_4 = \frac{7}{5.3^6} \frac{GM}{\rho}. \quad (5.37)$$

Conclui-se, então, que a parcela correspondente à perturbação de quarta ordem representa $0,1920438957\%$ do termo Kepleriano. De forma análoga, para as mesmas coordenadas, as parcelas até a ordem 22, assumem os valores correspondentes a Equação (5.38) até a Equação (5.46):

$$U_6(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{32}{137781} \frac{GM}{\rho}, \quad (5.38)$$

$$U_8(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{11}{885735} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.38)$$

$$U_{10}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{1664}{157837977} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.40)$$

$$U_{12}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{122929}{176276322495} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.41)$$

$$U_{14}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{1088}{3486784401} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.42)$$

$$U_{16}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{142595}{1600434040059} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.43)$$

$$U_{18}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{2695808}{338068155167757} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.44)$$

$$U_{20}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{516419}{83881572334857} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.45)$$

$$U_{22}(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}) = \frac{33980960}{42619464343592343} \frac{MG}{\rho}, \quad (5.46)$$

De uma forma geral, pode-se colocar esses valores em uma tabela, visando avaliar a contribuição de cada parcela da perturbação do campo gravitacional, relativamente ao potencial Kepleriano, como ilustra a Tabela 5.6.

Tabela 5.6 - Valores dos potenciais obtidos no ponto $P_1(a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$.

Ordem do potencial	Valor do potencial	Porcentagem em relação ao potencial Kepleriano
4	7/3645	0,1920438957 %
6	32/137781	0,0232252633 %
8	11/885735	0,0012419064 %
10	1664/157837977	0,0010542456 %
12	122929/176276322495	$6,973653538 \times 10^{-5}$ %
14	1088/3486784401	$3,120353526 \times 10^{-5}$ %
16	142595/1600434040059	$8,909770502 \times 10^{-6}$ %
18	2695808/338068155167757	$7,974155385 \times 10^{-7}$ %
20	516419/83881572334857	$6,156525034 \times 10^{-7}$ %
22	33980960/42619464343592343	$7,973108185 \times 10^{-8}$ %

Fonte: Produção do autor.

Neste exemplo, o ponto adotado corresponde a um dos vértices do cubo homogêneo de aresta medindo $2a$, inscrito na esfera de raio $a\sqrt{3}$. Analisando os valores apresentados na terceira coluna da Tabela 5.6, constata-se que, ao adotar a expansão em série do potencial gravitacional associado ao hexaedro, as contribuições dos termos subsequentes da perturbação do campo gravitacional tendem a influenciar cada vez menos no valor final. Logo, para um ponto pertencente à esfera circunscrita ao cubo, a série representada pela Equação (5.22) converge uniformemente.

Analogamente, adotando-se, agora, o ponto $P_2(2a, 2a, 2a)$, a contribuição de cada parcela presente na perturbação do campo gravitacional do poliedro homogêneo examinado, em relação à parcela Kepleriana, é apresentada na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 - Valores dos potenciais obtidos no ponto $P_2(2a, 2a, 2a)$.

Ordem do potencial	Valor do potencial	Porcentagem em relação ao potencial Kepleriano
4	$7/6480$	$0,1080246913\%$
6	$1/10206$	$0,009798157946\%$
8	$11/2799360$	$3,9294695930 \times 10^{-4}\%$
10	$13/5196312$	$2,5017743353 \times 10^{-4}\%$
12	$122929/990435962880$	$1,2411605051 \times 10^{-5}\%$
14	$17/408146688$	$4,1651691658 \times 10^{-6}\%$
16	$142595/15986289475584$	$8,9198309735 \times 10^{-7}\%$
18	$21061/35175714158592$	$5,9873695542 \times 10^{-8}\%$
20	$516419/1489546031136768$	$3,4669556308 \times 10^{-8}\%$
22	$1061905/31534366545543168$	$3,3674530879 \times 10^{-9}\%$

Fonte: Produção do autor.

Neste caso, devido ao ponto P_2 estar mais afastado da origem, em comparação à P_1 , nota-se que a contribuição de cada termo da perturbação, relativo ao termo Kepleriano, em porcentagem, diminui mais rapidamente.

5.3. Modelagem do potencial do cubo homogêneo utilizando o método das concentrações de massa

Retomando à Figura 5.6, a partir da decomposição do cubo homogêneo unitário em 24 tetraedros reto-retângulos congruentes, determina-se o centro de massa de cada elemento tetraédrico da decomposição, concentrando em seus respectivos baricentros, a massa do tetraedro correspondente. Dessa forma, a Tabela 5.8 apresenta as coordenadas dos vértices e a Tabela 5.9 indica a face triangular formada por seus respectivos vértices e os correspondentes baricentros.

Tabela 5.8 - Coordenadas dos vértices dos tetraedros.

Vértice	Abscissa x	Ordenada y	Cota z
1	1/2	-1/2	1/2
2	0	0	1/2
3	1/2	1/2	1/2
4	-1/2	1/2	1/2
5	-1/2	-1/2	1/2
6	-1/2	-1/2	-1/2
7	1/2	-1/2	-1/2
8	0	-1/2	0
9	1/2	1/2	-1/2
10	-1/2	1/2	-1/2
11	0	1/2	0
12	0	0	-1/2
13	1/2	0	0
14	-1/2	0	0

Fonte: Produção do autor.

Tabela 5.9 - Face triangular formada por seus respectivos vértices e os correspondentes baricentros.

Face	Vértice1	Vértice 2	Vértice 3	Coordenadas do baricentro
1	1	2	3	$\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{8}\right)$
2	2	3	4	$\left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$
3	2	4	5	$\left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{8}\right)$
4	2	1	5	$\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$
5	8	1	5	$\left(0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$
6	8	1	7	$\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, 0\right)$
7	8	7	6	$\left(0, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right)$
8	8	5	6	$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, 0\right)$
9	12	6	7	$\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$
10	12	7	9	$\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{8}\right)$
11	12	9	10	$\left(0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$
12	12	6	10	$\left(-\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{8}\right)$
13	11	3	9	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0\right)$
14	11	9	10	$\left(0, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right)$
15	11	4	10	$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0\right)$
16	11	3	4	$\left(0, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$
17	13	1	3	$\left(\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{4}\right)$

(Continua)

Tabela 5.9 - Conclusão

Face	Vértice1	Vértice 2	Vértice 3	Coordenadas do baricentro
18	13	1	7	$\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, 0\right)$
19	13	7	9	$\left(\frac{3}{8}, 0, -\frac{1}{4}\right)$
20	13	3	9	$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0\right)$
21	14	4	5	$\left(-\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{4}\right)$
22	14	5	6	$\left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, 0\right)$
23	14	6	10	$\left(-\frac{3}{8}, 0, -\frac{1}{4}\right)$
24	14	4	10	$\left(-\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0\right)$

Fonte: Produção do autor.

A partir dessa construção, a energia potencial gravitacional de uma massa m localizada no ponto $P(x, y, z)$, em relação aos baricentros, é expressa pela Equação (5.44)

$$U = \sum_{i=1}^{24} \frac{GmM_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \quad (5.44)$$

sendo G a constante universal gravitacional. Novamente, objetivando simplificar os cálculos, definindo $G\sigma = 1$, devido às massas M_i serem congruentes, para $i = 1, 2, \dots, 24$, então, $\sigma = 24M_i$, e, sendo $m = 1$, portanto, a Equação (5.44) torna-se a Equação (5.45)

$$U = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}. \quad (5.45)$$

De posse dos modelos dos potenciais gravitacionais do cubo homogêneo unitário obtidos pelo método exato, pela expansão em série, truncada na parcela U_{22} , e pela concentrações de massa, empregando o método dos poliedros nesses dois últimos,

transladando o sistema de coordenadas adotado na primeira modelagem, pode-se confrontá-los analisando os valores numéricos encontrados por esses potenciais aplicados a pontos do espaço, como ilustrado na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 - Valores dos potenciais obtidos pelos modelos apresentados.

(x, y, z)	Exato	Expansão em série	Concentrações de Massa (24 massas)
(0, 4, 0)	0,249985853294846	0,249985853294846	0,249998391449579
(0, 0, 5)	0,199995352923021	0,199995352923021	0,199999482165693
(-5, 0, 0)	0,199995352923021	0,199995352923021	0,199999482165693
(2, 1, 0)	0,447157686993166	0,447157686993167	0,447211132373499
(-1, -2, 0)	0,447157686993166	0,447157686993167	0,447211132373499
(1, 1, 2)	0,408290928580439	0,408290928580439	0,408251459200483
(1, 1, 1)	0,578034334235131	0,578034334228869	0,577368366041726
(2, 2, 2)	0,288695071717785	0,288695071717786	0,28867684396177
(3, 2, 2)	0,242542106998717	0,242542106998717	0,242536235978676
(1, 5, 2)	0,182573346745486	0,182573346745486	0,182574096459871
(-3, 5, 2)	0,162221831870284	0,162221831870284	0,162221464094305
(6, 9, 3)	0,089087101088502	0,089087101088502	0,089087082841473
(7, 4, 8)	0,088045128127420	0,088045128127420	0,088045094625699
(12, 5, 4)	0,073521459735354	0,073521459735354	0,073521461941645
(-13, 7, 10)	0,056077219352484	0,056077219352484	0,056077215830639
(20, 17, 3)	0,037850558488255	0,037850558488255	0,037850558235833
(19, 13, 17)	0,034942828344053	0,0349428283440534	0,034942827939302
(1/2, 0, 1/2)	1,427260179700358	1,430407114383513	1,441406865684501
(1/2, 0, 0)	1,792810243178775	-	1,843181509887135
(1/2, 1/2, 1/2)	1,190038681989777	1,188833066798587	1,150936052582899
(0, 0, 0)	2,380077363979554	2,377666133597174	2,301872105165798

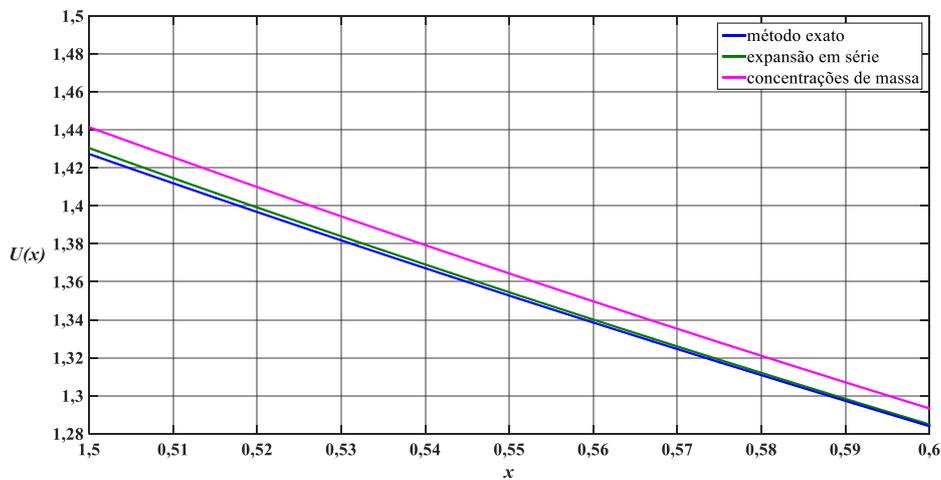
Fonte: Produção do autor.

Confrontando os resultados obtidos pelos três métodos expostos, Tabela 5.10, percebe-se que, considerando os pontos exteriores à esfera circunscrita ao cubo, os valores do potencial encontrados segundo o modelo da expansão em série apresentam resultados

mais próximos aos obtidos pelo método exato, comparado ao método das concentrações de massa. Inclusive, essa afirmação continua válida para os pontos médios das arestas, assim como para os vértices do cubo, apesar de localizarem-se no interior e na superfície da referida esfera, respectivamente. Vale ressaltar que aumentando o número dos centros de atração secundários, o valor do potencial obtido pelo método das concentrações de massa elevará a sua precisão em relação ao valor determinado pelo método exato.

Os gráficos da Figura 5.7 foram concebidos atribuindo os valores $y=0$ e $z=1/2$ para os correspondentes modelos dos potenciais, enfatizando que no caso do modelo exato calculou-se o limite do potencial para z tendendo a $1/2$, resultando em funções dependentes somente da variável x , as quais, analisadas no intervalo considerado, exhibe melhor precisão do modelo da expansão em série em relação ao método das concentrações de massa.

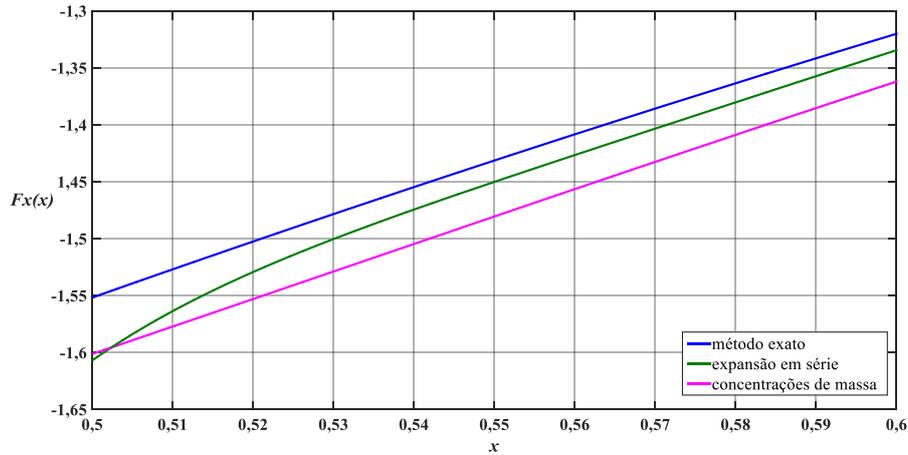
Figura 5.7 - Gráficos dos modelos dos potenciais próximos ao ponto $(1/2,0,1/2)$.



Fonte: Produção do autor.

No que se refere às forças associadas aos modelos dos potenciais na direção x , verifica-se que nas proximidades do ponto $(1/2,0,1/2)$, novamente, o método da expansão em série converge mais rapidamente para o método exato, comparado ao método das concentrações de massa, como pode ser observado na Figura 5.8.

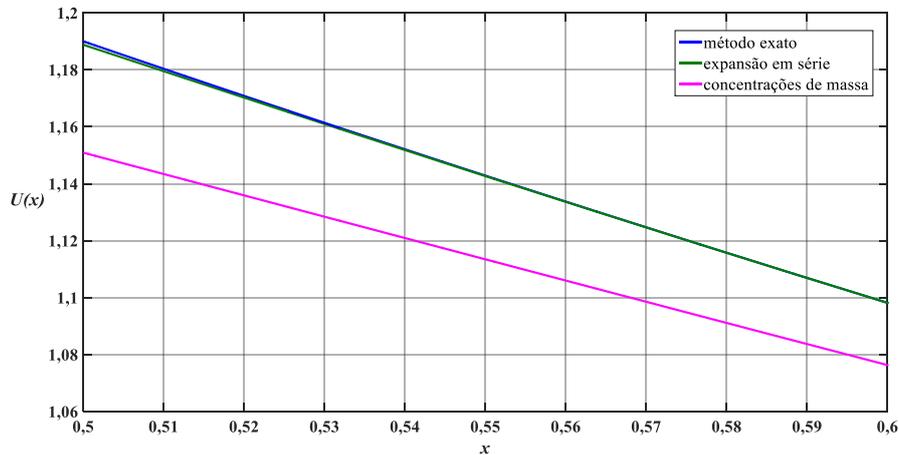
Figura 5.8 - Gráficos das forças correspondentes próximas ao ponto $(1/2,0,1/2)$.



Fonte: Produção do autor.

A construção dos gráficos da Figura 5.9 requereu elaboração maior, pois, como o modelo exato do potencial apresenta singularidade nos pontos de coordenadas $(x, 1/2, 1/2)$, optou-se em contornar essa dificuldade atribuindo os valores $y = z = 0,500001$. Dessa maneira, conclui-se o mesmo comportamento do modelo da expansão em série ocorrido no caso dos gráficos da Figura 5.7.

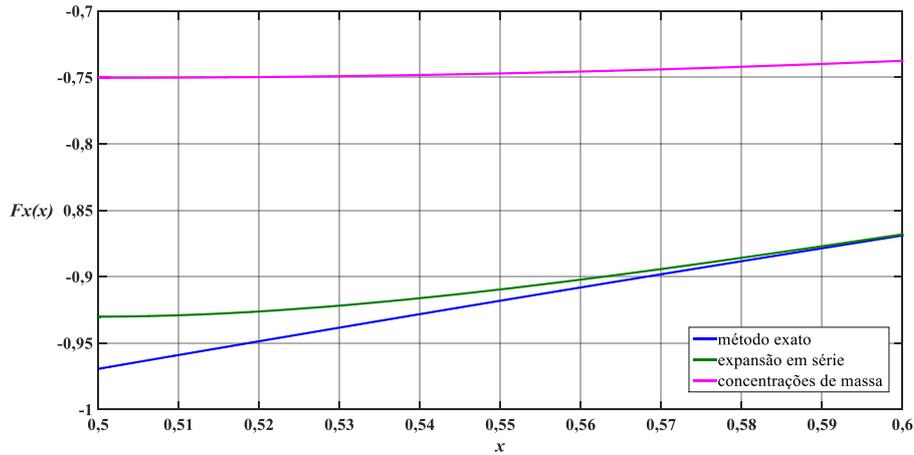
Figura 5.9 - Gráficos dos modelos dos potenciais próximos ao vértice $(1/2, 1/2, 1/2)$.



Fonte: Produção do autor.

Para verificar o comportamento da força relativa ao modelo exato do potencial na direção da abscissa, calculou-se o limite dessa força quando y e z tendem a zero. Dessa forma, constata-se, mais uma vez, que o método da expansão em série produz resultados muito mais próximos aos valores exatos, comparado ao das concentrações de massa.

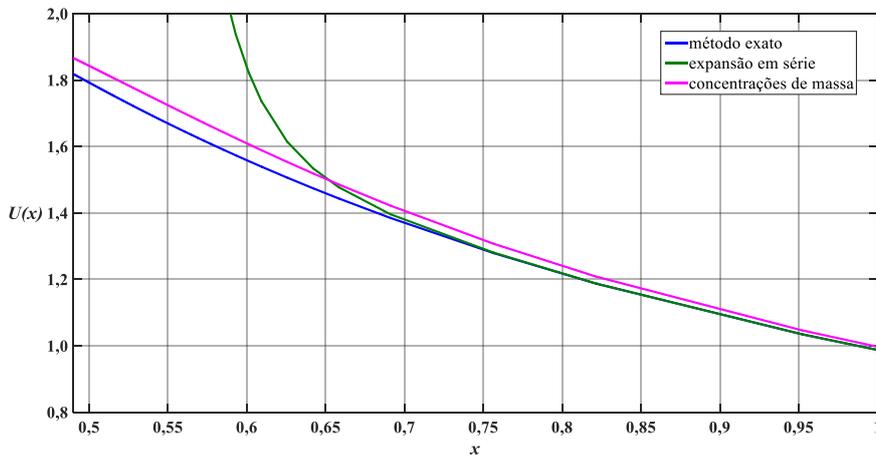
Figura 5.10 - Gráficos dos modelos das forças próximas ao vértice $(1/2, 1/2, 1/2)$.



Fonte: Produção do autor.

Devido ao centro da face do cubo localizar-se no interior da esfera circunscrita a ele, ao definir $y = z = 0$, nota-se a divergência do modelo da expansão em série ao aproximar-se do referido ponto, indicando que, nesta situação, o método das concentrações de massa, torna-se mais adequado. Porém, para $x > 0,65133$, a expansão em série volta a apresentar resultados mais precisos, como mostram os gráficos da Figura 5.11.

Figura 5.11 - Gráficos dos modelos dos potenciais próximos ao ponto $(1/2, 0, 0)$.

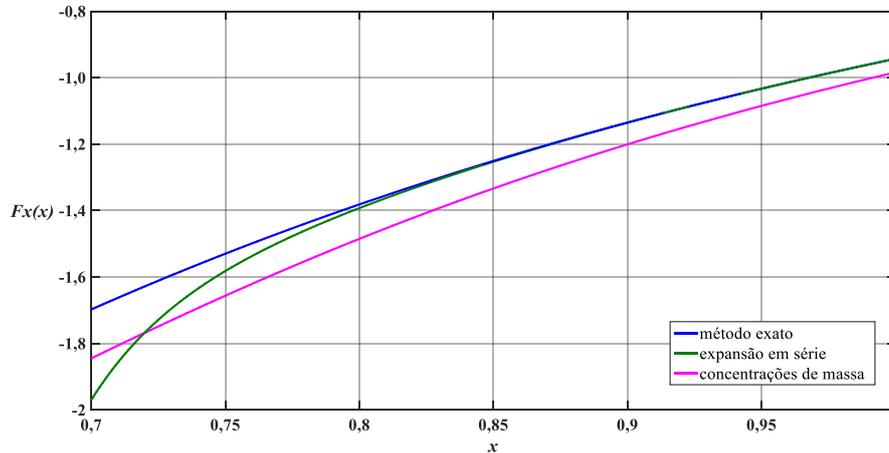


Fonte: Produção do autor.

Em relação às forças nas vizinhanças do ponto $(1/2, 0, 0)$, devido à sua localização, o modelo da expansão em série não satisfaz a condição de convergência, e conseqüentemente, o método das concentrações de massa apresenta melhor desempenho, tendo como referência o método exato. Contudo, para $x > 0,71985$, a

força associada ao modelo da expansão em série passa a apresentar melhor desempenho, convergindo mais rapidamente à curva da força correspondente ao modelo exato, ilustrado na Figura (5.12).

Figura 5.12 - Gráficos das forças correspondentes próximos ao vértice (1/2,0,0).



Fonte: Produção do autor.

5.4. Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao cubo

Para ilustrar a metodologia aplicada nos cálculos dos coeficientes dos harmônicos esféricos associados ao potencial do cubo homogêneo estudado neste capítulo, considera-se o desenvolvimento da série até o termo de quarta ordem, que em função das coordenadas cartesianas é expresso pela Equação (5.46):

$$U(x, y, z) = \frac{GM}{\rho} - \frac{7GMa^4}{30\rho^9} \left[x^4 + y^4 + z^4 - 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \right]. \quad (5.46)$$

Porém, o mesmo potencial, considerando a mesma precisão, pode ser escrito em função dos harmônicos esféricos e de seus correspondentes coeficientes pela Equação (5.47):

$$U = \frac{GM}{\rho} + \frac{GM}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \right)^4 \sum_{m=0}^4 \left[C_{4m} P_{4m}(\cos\theta) \cos(m\phi) + S_{4m} P_{4m}(\cos\theta) \sin(m\phi) \right] \quad (5.47)$$

lembrando que $P_n(\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre, $P_{nm}(\cos\theta)$ são os polinômios associados de Legendre e que R é um parâmetro conhecido como raio normalizador. Para os cálculos a seguir, adotou-se um cubo homogêneo de aresta

unitária, assim como arbitrou-se $R = a = 0,5$, implicando em que o cubo não estará totalmente contido na esfera adotada. Vale observar que a condição de convergência da série representada pela Equação (5.22) estará satisfeita para pontos exteriores à esfera de raio $\sqrt{3}/2$, situação na qual conterà totalmente o cubo. Além disso, devido a orientação estabelecida em relação ao cubo, todos os coeficientes S_{nm} serão nulos.

Igualando a função potencial expandida em série até o grau 4, em coordenadas cartesianas e em série dos harmônicos esféricos, obtém-se a Equação (5.48):

$$\sum_{m=0}^4 C_{4m} P_{4m}(\cos \theta) \cos(m\phi) = -\frac{7}{30} \frac{I}{\rho^4} \left[(x^4 + y^4 + z^4 - 3(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2)) \right] \quad (5.48)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos $A_1(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $A_2(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2)$, $A_3(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, $A_4(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$ e $A_5(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ na Equação (5.48), obtém-se o sistema linear dado pela Equação (5.49) nas incógnitas $C_{40}, C_{41}, C_{42}, C_{43}$ e C_{44} :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^4 C_{4m} P_{4m}(\cos \theta_1) \cos(m\phi_1) &= 0,155555555555 \\ \sum_{m=0}^4 C_{4m} P_{4m}(\cos \theta_2) \cos(m\phi_2) &= 0,141152263374 \\ \sum_{m=0}^4 C_{4m} P_{4m}(\cos \theta_3) \cos(m\phi_3) &= 0,141152263374 \\ \sum_{m=0}^4 C_{4m} P_{4m}(\cos \theta_4) \cos(m\phi_4) &= 0,141152263374 \\ \sum_{m=0}^4 C_{4m} P_{4m}(\cos \theta_5) \cos(m\phi_5) &= 0,141152263374 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Resolvendo esse sistema linear, determina-se a solução expressa pela Equação (5.50):

$$\begin{aligned} C_{40} &= -0,2333333333, C_{41} = -5,94821661 \times 10^{-18}, C_{42} = -2,28906809 \times 10^{-17}, \\ C_{43} &= -4,81581209 \times 10^{-18}, C_{44} = -0,001388888888 \end{aligned} \quad (5.50)$$

ou seja, como $C_{41} = C_{42} = C_{43} \cong 0$, tem-se $C_{40} = -\frac{7}{30}$ e $C_{44} = -\frac{1}{720}$.

Portanto, o potencial do cubo homogêneo escrito em função dos harmônicos esféricos até a quarta ordem é expresso pela Equação (5.51):

$$U(\rho, \theta, \phi) = \frac{GM}{\rho} + \frac{GM}{\rho} \left(\frac{0,5}{\rho} \right)^4 \left[-\frac{7}{30} \left(\frac{35}{8} \text{sen}^4 \theta - \frac{30}{8} \text{sen}^2 \theta + \frac{3}{8} \right) - \frac{7}{48} \text{cos}^4 \theta \text{cos}(4\phi) \right]. \quad (5.51)$$

Aplicando o procedimento análogo às demais ordens dos potenciais calculados, obtêm-se os coeficientes dos harmônicos esféricos correspondentes até o grau 22, os quais são comparados aos valores determinados por Broucke e Prado (2004) até o grau 20, como mostra a Tabela 5.11.

Tabela 5.11 - Valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos calculados.

Grau	Ordem	Autor	Broucke e Prado
4	0	$-0,2333333333333333 \times 10^0$	$-0,2333333333333332 \times 10^0$
4	4	$-0,1388888888888888 \times 10^{-2}$	$-0,1388888888888888 \times 10^{-2}$
6	0	$0,9523809523809656 \times 10^{-1}$	$0,9523809523809518 \times 10^{-1}$
6	4	$-0,2645502645502604 \times 10^{-3}$	$-0,2645502645502645 \times 10^{-3}$
8	0	$0,2749999999999999 \times 10^0$	$0,2749999999999999 \times 10^0$
8	4	$0,4629629629629627 \times 10^{-4}$	$0,4629629629629626 \times 10^{-4}$
8	8	$0,6889329805996472 \times 10^{-7}$	$0,6889329805996471 \times 10^{-7}$
10	0	$-0,3939393939393939 \times 10^0$	$-0,3939393939393938 \times 10^0$
10	4	$0,7215007215007215 \times 10^{-4}$	$0,7215007215007210 \times 10^{-4}$
10	8	$0,1670140559029447 \times 10^{-7}$	$0,1670140559029447 \times 10^{-7}$
12	0	$-0,2745879120879120 \times 10^0$	$-0,2745879120879120 \times 10^0$
12	4	$-0,4076363451363451 \times 10^{-4}$	$-0,4076363451363449 \times 10^{-4}$

(Continua)

Tabela 5.11 - Continuação.

Grau	Ordem	Autor	Broucke e Prado
12	8	$0,2801156074965598 \times 10^{-8}$	$0,2801156074965597 \times 10^{-8}$
12	12	$-0,7169215998581077 \times 10^{-12}$	$-0,7169215998581074 \times 10^{-12}$
14	0	$0,1416666666666666 \times 10$	$0,1416666666666666 \times 10$
14	4	$-0,4960317460317460 \times 10^{-4}$	$-0,4960317460317456 \times 10^{-4}$
14	8	$-0,1789436313245837 \times 10^{-8}$	$-0,1789436313245836 \times 10^{-8}$
14	12	$-0,1911790932954954 \times 10^{-12}$	$-0,1911790932954953 \times 10^{-12}$
16	0	$-0,9459252450980392 \times 10^0$	$-0,9459252450980392 \times 10^0$
16	4	$0,7168332076420311 \times 10^{-4}$	$0,7168332076420311 \times 10^{-4}$
16	8	$-0,8915130953529646 \times 10^{-9}$	$-0,8915130953529647 \times 10^{-9}$
16	12	$-0,5669772129596800 \times 10^{-13}$	$-0,5669772129596797 \times 10^{-13}$
16	16	$0,2440501088841597 \times 10^{-17}$	$0,2440501088841596 \times 10^{-17}$
18	0	$-0,3943295739348370 \times 10$	$-0,3943295739348368 \times 10$
18	4	$0,3074816671307899 \times 10^{-4}$	$0,3074816671307899 \times 10^{-4}$
18	8	$0,9587128425892001 \times 10^{-9}$	$0,9587128425891985 \times 10^{-9}$
18	12	$-0,9582911944636361 \times 10^{-15}$	$-0,9582911944636318 \times 10^{-15}$
18	16	$0,6850529372186941 \times 10^{-18}$	$0,6850529372186937 \times 10^{-18}$
20	0	$0,1003799715909090 \times 10^2$	$0,1003799715909090 \times 10^2$
20	4	$-0,1484199266827943 \times 10^{-3}$	$-0,1484199266827941 \times 10^{-3}$
20	8	$0,4243332433983694 \times 10^{-9}$	$0,4243332433983651 \times 10^{-9}$
20	12	$0,1005575194096878 \times 10^{-13}$	$0,1005575194096879 \times 10^{-13}$
20	16	$0,2503890727512808 \times 10^{-18}$	$0,2503890727512806 \times 10^{-18}$
20	20	$-0,3475309137676005 \times 10^{-23}$	$-0,3475309137676002 \times 10^{-23}$
22	0	$0,2281476449275362 \times 10$	-
22	4	$0,5809953696824406 \times 10^{-4}$	-
22	8	$-0,9996479175540960 \times 10^{-9}$	-

(Continua)

Tabela 5.11 - Conclusão.

Grau	Ordem	Autor	Broucke e Prado
22	12	$0,1040698304961735 \times 10^{-14}$	-
22	16	$0,5468625578729129 \times 10^{-19}$	-
22	20	$-0,1007335981935073 \times 10^{-23}$	-

Fonte: Produção do autor.

Comparando os resultados obtidos pela aplicação do método dos poliedros para o cálculo aproximado do potencial Newtoniano do cubo homogêneo com os valores encontrados por Broucke e Prado (2004), verifica-se a eficácia desse método, permitindo empregá-lo na modelagem do campo gravitacional de corpos com distribuições de massas irregulares, ou seja, possibilita a sua utilização na modelagem e no estudo da perturbação do campo gravitacional de um asteroide.

5.5 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos

Outra forma para se determinar os coeficientes de Stokes, desenvolvido anteriormente, nos itens 3.1 e 4.4, utiliza o cálculo direto das integrais expressas pelas Equações (5.52) e (5.53).

$$C_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n - m)!}{(n + m)! M} \iiint_Q \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) \cos(m\phi) dM \quad (5.52)$$

$$S_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n - m)!}{(n + m)! M} \iiint_Q \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) \text{sen}(m\phi) dM \quad (5.53)$$

sendo δ_{0m} o delta de Kronecker, M é a massa total do cubo, ρ é definido pela Equação (5.21), R é o raio normalizador, C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes de Stokes a serem determinados. Logo, os coeficientes obtidos de forma direta, utilizando as Equações (5.52) e (5.53), relativos ao cubo unitário homogêneo, apresentados na segunda coluna da Tabela 5.12, podem ser comparados aos valores correspondentes encontrados por meio da expansão em série do potencial, dados pela terceira coluna da Tabela 5.11, permitindo, inclusive, o cálculo das respectivas diferenças, exibidas na

terceira coluna da Tabela 5.12. Observa-se que as integrais utilizadas para os cálculos diretos dos coeficientes dos harmônicos esféricos são apresentados no Apêndice E.

Tabela 5.12 - Valores dos coeficientes de Stokes calculados diretamente pelas integrais e as correspondentes diferenças entre os valores obtidos pela expansão do potencial em série.

	Valor direto teórico	Diferença
C_{00}	1	0
C_{40}	$-7/30$	0
C_{44}	$-1/720$	0
C_{60}	$2/21$	0
C_{64}	$-1/3780$	0
C_{80}	$11/40$	0
C_{84}	$1/21600$	0
C_{88}	$8589934592/124684618589798355$	$2,49 \times 10^{-23}$
C_{100}	$-13/33$	0
C_{104}	$70368744177664/975310794302422545$	0
C_{108}	$17179869184/1028648103365836305$	0
C_{120}	$-1999/7280$	0
C_{124}	$-352393476702208/8644800222226018305$	$-1,93 \times 10^{-20}$
C_{128}	$9932111872/3545718841147390635$	$1,08 \times 10^{-24}$
C_{1212}	$-131072/182826127746662309$	$-3,57 \times 10^{-28}$
C_{140}	$17/12$	0
C_{144}	$-35184372088832/709316941310852805$	$-2,20 \times 10^{-20}$
C_{148}	$-1073741824/600044726963404485$	$-9,39 \times 10^{-25}$
C_{1412}	$-131072/685597979049983685$	$-8,78 \times 10^{-29}$
C_{160}	$-6175/6528$	0
C_{164}	$100330436034560/1399634321693736297$	$3,40 \times 10^{-20}$
C_{168}	$-1266679808/1420820192774061417$	$-4,14 \times 10^{-25}$

(Continua)

Tabela 5.12 – Conclusão

	Valor direto teórico	Diferença
C_{1612}	$-247808 / 4370687116443645705$	$-6,31 \times 10^{-29}$
C_{1616}	$1 / 409751917166591847$	$2,70 \times 10^{-33}$
C_{180}	$-12587 / 3192$	0
C_{184}	$233096465088512 / 7580824810259739129$	$2,03 \times 10^{-20}$
C_{188}	$106568876032 / 111158285669970685335$	$2,07 \times 10^{-24}$
C_{1812}	$-32768 / 34194199205117934045$	$-4,93 \times 10^{-30}$
C_{1816}	$2 / 2919482409811966461$	$7,70 \times 10^{-34}$
C_{200}	$28267 / 2816$	0
C_{204}	$-3937351139065856 / 26528453605025894907$	$-2,98 \times 10^{-19}$
C_{208}	$18756927488 / 44203294886304133965$	$4,55 \times 10^{-24}$
C_{2012}	$1289216 / 128206822082346949095$	$-6,31 \times 10^{-30}$
C_{2016}	$79 / 315508976218275692160$	$3,37 \times 10^{-34}$
C_{2020}	$-1 / 287744186311067444969472$	$-5,14 \times 10^{-39}$
C_{220}	$10075 / 4416$	0
C_{224}	$12381325562478592 / 213105408555079333293$	$2,75 \times 10^{-20}$
C_{228}	$-12482248704 / 12486645032524180793$	$-3,85 \times 10^{-25}$
C_{2212}	$242944 / 233443255208273409453$	$4,50 \times 10^{-31}$
C_{2216}	$377 / 6893871130369324383744$	$3,70 \times 10^{-24}$
C_{2220}	$-5 / 4963587213865913127272448$	$-4,85 \times 10^{-40}$

Fonte: Produção do autor.

5.6 Conclusão

Neste capítulo, o método da expansão em série do potencial, associado à decomposição em elementos tetraédricos, foi utilizado para modelar o campo gravitacional de um cubo homogêneo, pois, devido a existência do modelo exato para esse hexaedro, os resultados podem ser confrontados. Logo, analisando a Tabela 5.10, segunda e terceira colunas,

constata-se a mesma grandeza entre os resultados obtidos empregando o modelo desenvolvido pela expansão, sempre observando o intervalo de convergência da série dada pela Equação (5.25). Além disso, as Figuras (5.7) e (5.9) exibem os gráficos do potencial modelado pela expansão, muito próximos aos referentes do modelo exato, enquanto que o mesmo ocorre com os gráficos da Figura (5.11), a partir do intervalo de convergência. Verifica-se também a confiabilidade no modelo do potencial obtido pela expansão em série, por meio da Tabela (5.11), a qual apresenta a comparação entre os coeficientes dos harmônicos esféricos determinados pelos termos da série e os determinados por Broucke e Prado (2004). Portanto, baseado nessas constatações, confirma-se a validação desse modelo para o campo gravitacional do cubo homogêneo. Esta ratificação é de extrema importância, tendo em vista, sua aplicação para modelar o potencial de corpos com distribuição irregular de massa.

6. RESULTADOS PARA O ASTEROIDE 25143 ITOKAWA

O asteroide 25143 Itokawa foi descoberto no dia 26 setembro de 1998 pelos pesquisadores do projeto Lincoln Near-Earth Asteroid Research (LINEAR), programa de cooperação entre a Força Aérea dos Estados Unidos, a NASA e o Laboratório Lincoln do MIT, e recebeu esse nome em homenagem à Hideo Itokawa, principal pioneiro na pesquisa e desenvolvimento de foguetes e do programa espacial Japonês.

Dos asteroides conhecidos e próximos à Terra (NEAs), o Itokawa foi escolhido pela Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA), para o envio de uma sonda não tripulada, denominada Hayabusa, com o objetivo de estudar este asteroide, e principalmente, recolher amostras e retornar à Terra.

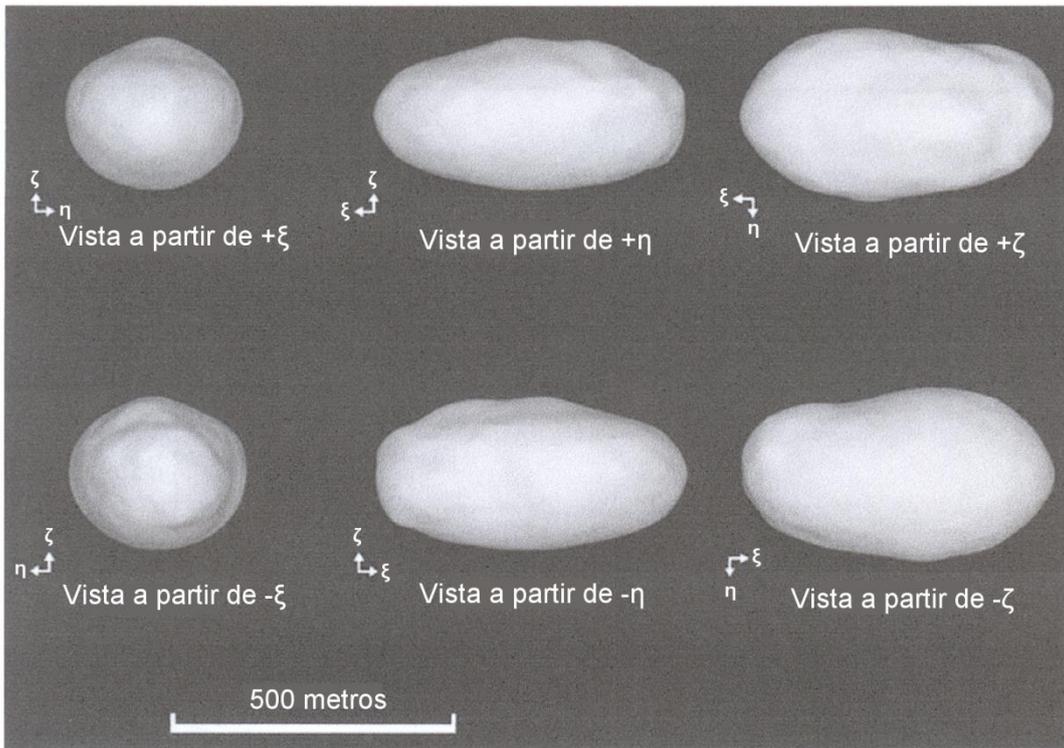
6.1 Modelo poliédrico inicial para o asteroide Itokawa

Segundo os dados coletados pelo rádio telescópio de Arecibo, Ostro et al. (2004), o Itokawa possui dimensões de $(0,5481 \times 0,3122 \times 0,2751)$ km $\pm 10\%$, massa de $6,025 \times 10^{10}$ kg, volume de $2,41 \times 10^{-2}$ km³ $\pm 30\%$, densidade uniforme de $2,5$ g.cm⁻³, área total de $0,4374$ km² $\pm 20\%$ e período de rotação de 12,132 horas, valores assumidos para todos os cálculos e simulações. Ao volume do asteroide, associa-se o raio médio $R_M = 0,1791$ km, correspondente ao raio da esfera de volume equivalente.

Vale observar que os dados descritos acima e utilizados nos cálculos e simulações contidas neste capítulo, também foram empregados por Scheeres et al. (2004), porém, são anteriores à atualização feita pela sonda Hayabusa. Apesar dessa ressalva, convém salientar que o principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia que possa ser aplicada na modelagem do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular, bastando, para isso, ter acesso a seus dados.

A Figura 6.1 mostra as vistas parciais do modelo ao longo de eixos principais ξ, η e ζ , cujos momentos de inércia $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$ e $I_{\zeta\zeta}$, correspondem ao menor, intermediário e ao maior, respectivamente.

Figura 6.1 Formato do modelo do asteroide Itokawa, Ostro et al. (2004).



Fonte: adaptada de Ostro et al. (2004).

A partir da técnica de decomposição do asteroide Itokawa em tetraedros, foram utilizando como elementos para implementações de cálculos e simulações, os dados coletados pelo radio telescópio de Arecibo e disponibilizados pelo JPL/NASA, (OSTRO et al., 2004), cujo modelo poliédrico adotado, apresenta 6098 vértices e 12192 faces, fornecidos por duas tabelas, uma contendo as coordenadas dos vértices, e a outra, as relações entre as faces triangulares formadas e seus respectivos vértices, ilustradas pelas Tabelas 6.1 e 6.2, respectivamente.

Tabela 6.1 - Coordenadas dos vértices do asteroide Itokawa.

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$7,600000 \times 10^{-5}$	$1,580000 \times 10^{-4}$	$1,384140 \times 10^{-1}$
2	$4,566700 \times 10^{-2}$	$1,530000 \times 10^{-4}$	$1,374210 \times 10^{-1}$
3	$2,238700 \times 10^{-2}$	$3,871300 \times 10^{-2}$	$1,339930 \times 10^{-1}$
4	$-2,231400 \times 10^{-2}$	$3,835000 \times 10^{-2}$	$1,313520 \times 10^{-1}$

(Continua)

Tabela 6.1 - Conclusão

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
5	$-4,551300 \times 10^{-2}$	$2,350000 \times 10^{-4}$	$1,327370 \times 10^{-1}$
6	$-2,207500 \times 10^{-2}$	$-3,697500 \times 10^{-2}$	$1,261490 \times 10^{-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮
6098	$2,260300 \times 10^{-1}$	$2,525900 \times 10^{-2}$	$7,634100 \times 10^{-2}$

Fonte: adaptação JPL/NASA.

Tabela 6.2 - Vértices correspondentes a cada face triangular do asteroide Itokawa.

Face	Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3
1	1528	1527	260
2	1531	260	1527
3	1533	1532	263
4	1535	263	1532
5	1537	1536	266
6	1539	266	1536
⋮	⋮	⋮	⋮
12192	3812	1526	6098

Fonte: adaptação JPL/NASA.

Em função dos dados da Tabela 6.1, as dimensões do asteroide, em km, nas direções principais são $-0,2713 \leq \xi \leq 0,2769$, $-0,1564 \leq \eta \leq 0,1562$ e $-0,1356 \leq \zeta \leq 0,1399$.

6.2 Modelo poliédrico final para o asteroide Itokawa

Utilizando os dados fornecidos pelas Tabelas 6.1 e 6.2 e o método para o cálculo de integrais desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), pode-se calcular o volume aproximado do asteroide Itokawa, mediante à soma dos volumes dos tetraedros gerados pela sua decomposição, segundo o método poliédrico. Logo, a Equação (6.1) fornece o volume

$$V_{total} = \iiint_Q dv = \sum_{i=1}^{12192} |T_i| \iiint_{W_i} dV_i = \sum_{i=1}^{12192} \frac{|T_i|}{6} = 0,024059752096680 \text{ km}^3 \quad (6.1)$$

De modo semelhante, a área total do Itokawa será a soma das áreas de todos os elementos triangulares obtidos na partição de sua superfície, fornecidos pela Tabela 6.2, lembrando que a área de um triângulo formado pelos vértices V_i , V_j e V_k é dado por $A_p = |\mathbf{V}_i\mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_i\mathbf{V}_k|/2$. Então, utilizando os correspondentes vértices, dados pela Tabela 6.1, a área total do asteroide é expressa pela Equação (6.2):

$$A_{total} = \sum_{p=1}^{12192} A_p = 0,437403687195469 \text{ km}^2 \quad (6.2)$$

A abscissa do centro de massa é dada pelas Equações (6.3) e (6.4)

$$\xi_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \xi dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{12192} /T_i / \iiint_{W_i} (\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 Z) dXdYdZ , \quad (6.3)$$

$$\xi_0 = 1,5585891247020280 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (6.4)$$

A ordenada do centro de massa é dada pelas Equações (6.5) e (6.6):

$$\eta_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \eta dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{12192} /T_i / \iiint_{W_i} (\eta_1 X + \eta_2 Y + \eta_3 Z) dXdYdZ , \quad (6.5)$$

$$\eta_0 = -1,0373035913518581 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (6.6)$$

A cota do centro de massa é dada pelas Equações (6.7) e (6.8):

$$\zeta_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \zeta dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{12192} /T_i / \iiint_{W_i} (\zeta_1 X + \zeta_2 Y + \zeta_3 Z) dXdYdZ \quad (6.7)$$

$$\zeta_0 = -4,4029074540630208 \times 10^{-4} \text{ km} \quad (6.8)$$

Logo, segundo os dados fornecidos, o centro de massa do asteroide está localizado no ponto O' , cujas coordenadas, medidas em km, são dadas pela Equação (6.9)

$$(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = (1,558589125 \times 10^{-3}; -1,037303591 \times 10^{-3}; -4,402907454 \times 10^{-4}) \quad (6.9)$$

Visando refinar a localização de seu baricentro, após realizar a translação das coordenadas dos vértices fornecidas pela Tabela 6.1, em relação ao ponto O' , o novo centro de massa O , passa a ter as coordenadas fornecidas pela Equação (6.10)

$$(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0) = (2,308733068 \times 10^{-17}; 1,193776498 \times 10^{-16}; -1,723953696 \times 10^{-16}) \quad (6.10)$$

medidas em km, evidenciando sua maior proximidade da origem. Além disso, verifica-se que o volume do asteroide foi preservado após a translação, justificando o refinamento da posição do centro de massa.

De posse das coordenadas dos vértices transladados, os momentos e produtos de inércia normalizados em relação à massa, são dados pelas Equações de (6.11) até (6.16):

$$\frac{I_{\xi\xi}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\eta^2 + \zeta^2) dv = 0,008294385586750 \text{ km}^2 \quad (6.11)$$

$$\frac{I_{\xi\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \eta dv = -0,000023877993151 \text{ km}^2 \quad (6.12)$$

$$\frac{I_{\xi\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \zeta dv = -0,000011910192252 \text{ km}^2 \quad (6.13)$$

$$\frac{I_{\eta\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \zeta^2) dv = 0,019485317224529 \text{ km}^2 \quad (6.14)$$

$$\frac{I_{\eta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \eta \cdot \zeta dv = 0,000047275044548 \text{ km}^2 \quad (6.15)$$

$$\frac{I_{\zeta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \eta^2) dv = 0,020499862751715 \text{ km}^2 \quad (6.16)$$

dando origem ao tensor de inércia normalizado, em relação à massa, em km^2 , dado pela Equação (6.17)

$$I = \begin{bmatrix} 0,008294385586750 & 0,000023877993151 & 0,000011910192252 \\ 0,000023877993151 & 0,019485317224529 & -0,000047275044548 \\ 0,000011910192252 & -0,000047275044548 & 0,020499862751715 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

notando que $I_{\xi\xi} < I_{\eta\eta} < I_{\zeta\zeta}$. A seguir, os autovalores e os correspondentes autovetores, associados ao tensor de inércia, são expressos pelas Equações (6.18), (6.19) e (6.20):

$$\lambda_1 = 0,008294322818894 \quad \text{e} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0,999997230629963 \\ -0,002137830524509 \\ -0,000984079800417 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$\lambda_2 = 0,019483172332801 \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0,002181210697933 \\ 0,998919482398835 \\ 0,046423162364639 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\lambda_3 = 0,020502070411299 \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0,000883771631325 \\ -0,046425180287112 \\ 0,998921379079962 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Verifica-se que os autovetores v_1 , v_2 e v_3 formam, nessa ordem, uma base ortonormal destrógira, isto é, seus módulos são iguais a 1, o produto escalar de um dos vetores pelos outros dois é nulo, e $v_1 \times v_2 = v_3$, $v_2 \times v_3 = v_1$ e $v_3 \times v_1 = v_2$. Logo, a matriz, cujas colunas são compostas por esses vetores, assume o papel da matriz de rotação. Portanto, a matriz obtida pela translação das coordenadas dos vértices fornecidas pela Tabela 6.1, em relação ao centro de massa original O' , multiplicada pela matriz de rotação, $(v_1 \ v_2 \ v_3)$, resulta nas coordenadas dos vértices finais, indicadas pela tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Coordenadas finais dos vértices do asteroide Itokawa.

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$-1,621784 \times 10^{-3}$	$7,636833 \times 10^{-3}$	$1,386477 \times 10^{-1}$

(Continua)

Tabela 6.3 - Conclusão

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
2	$4,397007 \times 10^{-2}$	$7,685184 \times 10^{-3}$	$1,376963 \times 10^{-1}$
3	$2,061108 \times 10^{-2}$	$4,599360 \times 10^{-2}$	$1,324612 \times 10^{-1}$
4	$-2,408642 \times 10^{-2}$	$4,541088 \times 10^{-2}$	$1,298004 \times 10^{-1}$
5	$-4,720522 \times 10^{-2}$	$7,350302 \times 10^{-3}$	$1,329229 \times 10^{-1}$
6	$-2,368126 \times 10^{-2}$	$-3,007373 \times 10^{-2}$	$1,281002 \times 10^{-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮
6098	$2,243390 \times 10^{-1}$	$3,032193 \times 10^{-2}$	$7,567604 \times 10^{-2}$

Fonte: Produção do autor.

Após a translação e a rotação descritas, as dimensões do asteroide, medidas em km, nas direções principais passam a ser, $-0,2728 \leq \xi \leq 0,2753$, $-0,1550 \leq \eta \leq 0,1572$ e $-0,1352 \leq \zeta \leq 0,1399$, e o centro de massa final, medido em km, está localizado no ponto de coordenadas dado pela Equação (6.21)

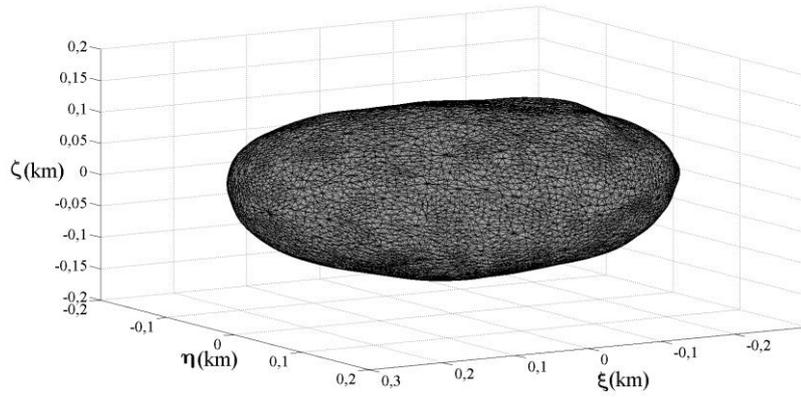
$$(\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{\zeta}_0) = (-1,5317401 \times 10^{-17}; 1,2966103 \times 10^{-17}; -2,9387920 \times 10^{-18}) \quad (6.21)$$

o volume final do asteroide é igual ao volume inicial, e a Equação (6.22) fornece o tensor de inércia normalizado final, expresso em km^2 :

$$I_F = \begin{bmatrix} 0,00829432281 & -2,552594 \times 10^{-18} & -7,888224 \times 10^{-18} \\ -2,552594 \times 10^{-18} & 0,01948317233 & -2,224886 \times 10^{-18} \\ -7,888224 \times 10^{-18} & -2,224886 \times 10^{-18} & 0,02050207041 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

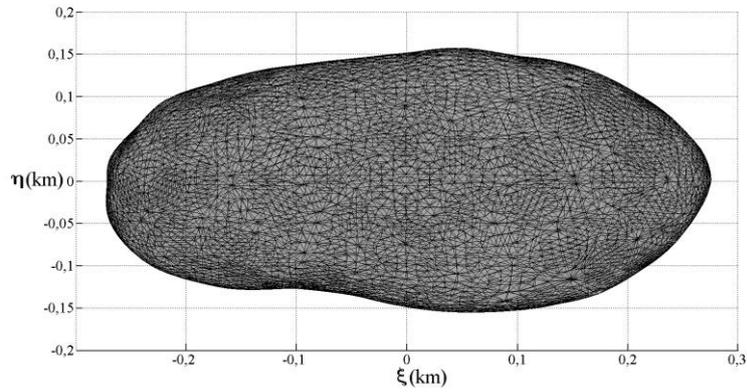
constatando-se que os produtos de inércia estão próximos de zero, e, conseqüentemente, o novo sistema de coordenadas se aproxima dos eixos principais de inércia. Além disso, observa-se, mais uma vez, que $I_{\xi\xi} < I_{\eta\eta} < I_{\zeta\zeta}$, ou seja, o maior momento de inércia é em relação ao eixo ζ , o intermediário, em relação ao eixo η , enquanto, que o menor, é em relação ao eixo ξ . Portanto, baseado nas Tabelas 6.2 e 6.3, o modelo poliédrico para o asteroide Itokawa tendo 6098 vértices e 12192 faces é ilustrado na Figura 6.2, enquanto que as Figuras 6.3, 6.4 e 6.5 representam as três vistas do asteroide.

Figura 6.2 - Modelo poliédrico para o Itokawa, após translação e rotação.



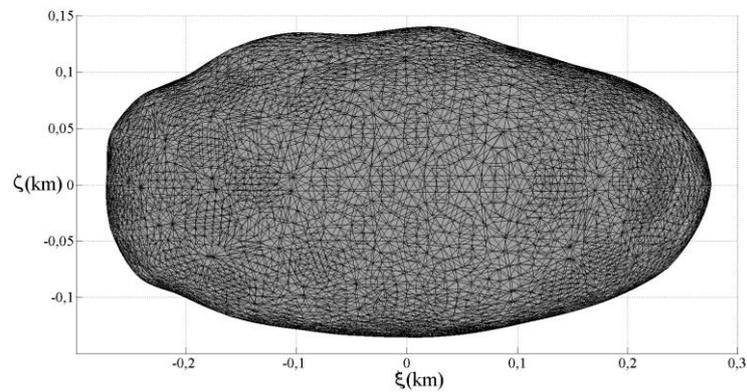
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.3 - Vista ξ - η do asteroide Itokawa.



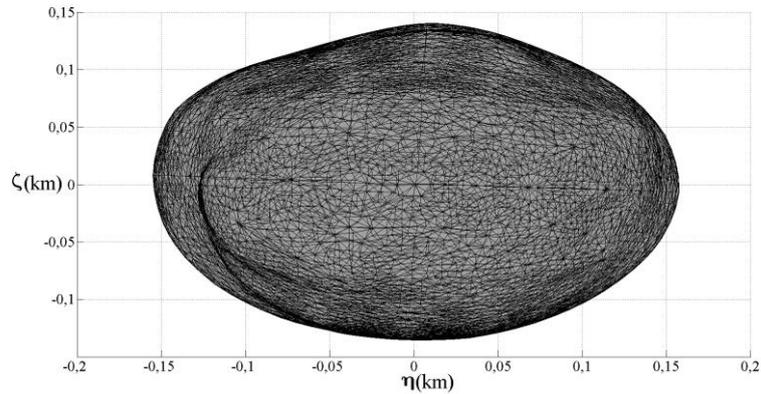
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.4 - Vista ξ - ζ do asteroide Itokawa.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.5 - Vista η - ζ do asteroide Itokawa.



Fonte: Produção do autor.

Notam-se as conformidades das Figuras 6.3, 6.4 e 6.5 às correspondentes da Figura 6.1.

6.3 Modelo do campo gravitacional do asteroide (25143) Itokawa utilizando o método da expansão do potencial em série

O modelo poliédrico que servirá de referência para o estudo do asteroide (25143) Itokawa, apresenta 6098 vértices e 12192 faces, levando em consideração, que os vértices finais foram obtidos, a partir de uma translação e de uma rotação dos vértices iniciais, os quais foram fornecidos por Ostro et al. (2004), conforme os procedimentos descritos na seção 6.2. Para o desenvolvimento do modelo do campo gravitacional desse asteroide, estabelece-se até o grau 6 para a expansão da série de seu potencial. Assim, de acordo com os dados de entrada, Tabelas 6.2 e 6.3, aplicando o método da expansão em série do potencial gravitacional e utilizando o procedimento desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), para os cálculos das integrais correspondentes, considerando (x, y, z) as coordenadas de um ponto P , exterior à esfera de volume equivalente ao asteroide, a Equação (6.23) representa o termo Kepleriano do campo gravitacional

$$U_0 = \frac{GM}{\rho} \quad (6.23)$$

A Equação (6.24) expressa o termo de grau 1 da expansão do potencial em série relativo ao asteroide Itokawa:

$$U_1 = \frac{GM}{\rho^3} \left[-1,52507 \times 10^{-17} x + 1,28922 \times 10^{-17} y - 2,90437 \times 10^{-18} z \right] \quad (6.24)$$

cujo valor está muito próximo de zero.

A Equação (6.25) corresponde ao termo de grau 2 da mesma expansão

$$U_2 = \frac{GM}{\rho^5} \left[0,011698298553x^2 + 7,64575 \times 10^{-18} xy - 0,005084975717y^2 \right. \\ \left. + 2,36652 \times 10^{-17} xz + 6,66737 \times 10^{-18} yz - 0,006613322835z^2 \right], \quad (6.25)$$

enquanto que a Equação (6.26) corresponde ao termo de grau 3 da mesma expansão

$$U_3 = \frac{GM}{\rho^7} \left[-0,000149221592217x^3 - 0,000243357313963x^2y \right. \\ + 0,000438477803610xy^2 + 0,000057300118896y^3 \\ - 0,000052693148227x^2z - 0,000282075442862xyz \\ + 0,000060754049293y^2z + 0,000009186973040xz^2 \\ \left. + 0,000071456957274yz^2 - 0,000002686967022z^3 \right] \quad (6.26)$$

Já a Equação (6.27) exhibe o termo de grau 4 do desenvolvimento da referida série

$$U_4 = \frac{GM}{\rho^9} \left[0,000274287706105x^4 + 0,000061445712353x^3y \right. \\ - 0,000714888852864x^2y^2 - 0,000045301583467xy^3 \\ + 0,000086597267791y^4 + 0,000017865430551x^3z \\ + 0,000027968391505x^2yz + 0,0000004034839002xy^2z \\ - 0,000007620484874y^3z - 0,000930837383769x^2z^2 \\ - 0,000048432386659xyz^2 + 0,000195305246117y^2z^2 \\ - 0,000017999925185xz^3 - 0,000001702312295yz^3 \\ \left. + 0,000122588689609z^4 \right] \quad (6.27)$$

bem como, a Equação (6.28) mostra o termo de grau 5 da expansão que contribui na perturbação do campo gravitacional desse asteroide

$$\begin{aligned}
U_5 = \frac{GM}{\rho^{11}} & \left[-0,000004294747999x^5 - 0,000021500926570x^4y \right. \\
& + 0,000033148842335x^3y^2 + 0,000029651520370x^2y^3 \\
& - 0,000013096448889xy^4 - 0,000002235469516y^5 \\
& - 0,000003184394492x^4z - 0,000038535426728x^3yz \\
& + 0,000014208530794x^2y^2z + 0,000015012451278xy^3z \\
& - 0,000000344198042y^4z + 0,000009798637656x^3z^2 \\
& + 0,000040050998340x^2yz^2 - 0,000020867833669xy^2z^2 \\
& - 0,000007296825205y^3z^2 + 0,000001632612052x^2z^3 \\
& + 0,000023522975450xyz^3 - 0,000004047780846y^2z^3 \\
& - 0,000001421346550xz^4 - 0,000003026753782yz^4 \\
& \left. + 0,000000241516879z^5 \right] \tag{6.28}
\end{aligned}$$

Por fim, a Equação (6.29) apresenta o termo de grau 6 na expansão em série do potencial

$$\begin{aligned}
U_6 = \frac{GM}{\rho^{13}} & \left[0,000007850045835x^6 + 0,000005721182034x^5y \right. \\
& - 0,000050429384915x^4y^2 - 0,000013885113897x^3y^3 \\
& + 0,000036424222832x^2y^4 + 0,000003423336405xy^5 \\
& - 0,000002006035049y^6 + 0,000000805475462x^5z \\
& + 0,000006752466545x^4yz + 0,000003805315649x^3y^2z \\
& - 0,000006294565821x^2y^3z - 0,000001465811308xy^4z \\
& + 0,000000428588889y^5z - 0,000067321302607x^4z^2 \\
& - 0,000015556478648x^3yz^2 + 0,000084030972493x^2y^2z^2 \\
& + 0,000007421977646xy^3z^2 - 0,000006333697091y^4z^2 \\
& - 0,000003953356756x^3z^3 - 0,000007210367270x^2yz^3 \\
& - 0,000000873693034xy^2z^3 + 0,000000669558975y^3z^3 \\
& + 0,000053316140524x^2z^4 + 0,000004067250501xyz^4 \\
& - 0,000007671464991y^2z^4 + 0,000001273376330xz^5 \\
& \left. + 0,000000520169034yz^5 - 0,000003042978369z^6 \right] \tag{6.29}
\end{aligned}$$

Portanto, o modelo para o campo gravitacional do asteroide Itokawa, desenvolvido até o grau 6, adotando a técnica da decomposição poliédrica, associada ao método da

expansão do potencial em uma série convergente, tem como resultado, o somatório das funções expressas da Equação (6.23) até Equação (6.29), resultando na Equação (6.30):

$$U = \sum_{i=0}^6 U_i . \quad (6.30)$$

Devido ao potencial Kepleriano ser uma função homogênea de grau -1 nas variáveis x , y e z , espera-se um comportamento semelhante do modelo do potencial do asteroide Itokawa. Logo, supondo que a função dada pela Eq. (6.30) seja homogênea, então deverá satisfazer a condição expressa pela Equação (6.31)

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n U(x, y, z) \quad (6.31)$$

na qual, λ é uma constante positiva e n determina o grau da homogeneidade da função, salientando a independência de n das variáveis x , y e z . Reescrevendo a Equação (6.31), obtém-se a Equação (6.32)

$$\ln \left[\frac{U(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{U(x, y, z)} \right] = n \ln \lambda \quad (6.32)$$

e, atribuindo valores a x , y e z , possibilita analisar o valor de n , conforme mostra a Tabela 6.4.

Tabela 6.4 - Estudo do grau da homogeneidade n do potencial do asteroide Itokawa.

Coordenadas dos pontos (km)	Valor de n
(2,2,2) e (1,1,1)	-0,999979621122147
(10,10,10) e (1,1,1)	-0,999993355083578
(40,60,80) e (20,30,40)	-0,999998652024487
(60,80,100) e (30,40,50)	-0,999999388021451
(20,20,20) e (5,5,5)	-0,999999966596259
(400,420,440) e (200,210,220)	-0,9999999952910222
(100,100,100) e (10,10,10)	-0,999999997983169
(60,60,60) e (30,30,30)	-0,999999999819006

(Continua)

Tabela 6.4 - Conclusão

Coordenadas dos pontos (km)	Valor de n
(1000,1000,1000) e (20,20,20)	-0,999999999870789
(1000,1000,1000) e (50,50,50)	-0,99999999990171
(1000,1000,1000) e (100,100,100)	-0,99999999998455

Fonte: Produção do autor.

Além da condição expressa pela Equação (6.31), deve-se avaliar se o modelo do potencial gravitacional do asteroide Itokawa satisfaz o teorema de Euler relativo às funções homogêneas, dada pela Equação (6.33):

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = \tilde{n} U(x, y, z), \quad (6.33)$$

sendo \tilde{n} o grau de homogeneidade da função, ressaltando, novamente, sua independência das variáveis de U . Análogo ao procedimento feito para a construção da Tabela 6.4, são atribuídos valores a x , y e z , viabilizando a obtenção do parâmetro \tilde{n} , exposto na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 - Estudo do grau da homogeneidade \tilde{n} do potencial do asteroide Itokawa.

Coordenadas do ponto (km)	Valor de \tilde{n}
(3,4,5)	-0,999886902949569
(6,7,8)	-0,999971727691854
(1,1,1)	-0,999942496972302
(2,2,2)	-0,999995719017166
(10,12,14)	-0,999991129850342
(20,30,40)	-0,999997508500830
(100,120,140)	-0,999999911301141
(250,250,250)	-0,999999999999327
(500,500,500)	-0,999999999999917
(220,210,200)	-1,0000000008817773

Fonte: Produção do autor.

De acordo com os valores obtidos para os parâmetros n e \tilde{n} , respectivamente, nas Tabelas 6.4 e 6.5, conclui-se que o modelo do potencial U do asteroide Itokawa comporta-se aproximadamente como uma função homogênea de grau -1 nas variáveis x , y e z .

Analisando, exclusivamente, a perturbação relativa ao potencial gravitacional, devido à distribuição irregular de massa do asteroide, a partir da obtenção do seu modelo matemático, o seu gradiente representará a resultante do vetor força gerada em um veículo espacial pelo asteroide, possibilitando estudar o comportamento dinâmico de um satélite imerso nesse campo gravitacional. Logo, de acordo com a Equação (6.30), a resultante da referida força é expressa pela equação (6.34)

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\sum_{i=0}^6 U_i \right) = \nabla U_0 + \sum_{i=1}^6 \nabla U_i, \quad (6.34)$$

e, levando em conta que ∇U_0 configura a força relativa ao campo central, conclui-se que $\sum_{i=1}^6 \nabla U_i$ caracteriza a perturbação dessa força devido a não esfericidade do asteroide.

6.4 Modelagem do potencial do asteroide 25143 Itokawa utilizando o método das concentrações de massa

Segundo o método poliédrico, decompõe-se a superfície do asteroide em vários triângulos, ligando seus vértices ao seu centro de massa, obtendo tetraedros, cada qual com seu respectivo baricentro \tilde{G}_i . Utilizando, novamente, os dados coletados pelo rádio telescópio de Arecibo e disponibilizados pelo JPL/NASA, (OSTRO et al., 2004), refinados pela translação e rotação descritos na seção 6.2, adota-se o mesmo modelo assumido na aplicação do método da expansão em série do potencial, ou seja, 12192 faces e 6098 vértices, apresentados pelas Tabelas 6.2 e 6.3, respectivamente.

Segundo o método das concentrações de massa, apresentado na seção 3.3, inicialmente, calculam-se os volumes de cada elemento tetraédrico da decomposição, dado pela Equação (6.35)

$$V_i = \iiint_{Q_i} dv_i = |T_i| / \iiint_{W_i} dV_i = \frac{|T_i|}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 12192 \quad (6.35)$$

Sendo Q_i o i -ésimo elemento tetraédrico, cujos vértices são $O(0,0,0)$, $V_m(\xi_m, \eta_m, \varsigma_m)$, $V_j(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)$ e $V_k(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$, W_i o tetraedro reto retângulo unitário, resultado da transformação de Q_i , e $|T_i|$ o determinante da matriz de transformação correspondente, dado pela Equação (6.36)

$$T_i = \begin{pmatrix} \xi_m & \xi_j & \xi_k \\ \eta_m & \eta_j & \eta_k \\ \varsigma_m & \varsigma_j & \varsigma_k \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Em seguida, determinam-se as coordenadas de seus respectivos baricentros $G_i(\xi_{G_i}, \eta_{G_i}, \varsigma_{G_i})$, dado pela Equação (6.37)

$$\begin{aligned} \xi_{G_i} &= \frac{1}{V_i} \iiint_{Q_i} \xi dv = \frac{|T_i|}{V_i} \iiint_{W_i} (\xi_m X + \xi_j Y + \xi_k Z) dX dY dZ = \frac{1}{4}(\xi_m + \xi_j + \xi_k) \\ \eta_{G_i} &= \frac{1}{V_i} \iiint_{Q_i} \eta dv = \frac{|T_i|}{V_i} \iiint_{W_i} (\eta_m X + \eta_j Y + \eta_k Z) dX dY dZ = \frac{1}{4}(\eta_m + \eta_j + \eta_k) \\ \varsigma_{G_i} &= \frac{1}{V_i} \iiint_{Q_i} \varsigma dv = \frac{|T_i|}{V_i} \iiint_{W_i} (\varsigma_m X + \varsigma_j Y + \varsigma_k Z) dX dY dZ = \frac{1}{4}(\varsigma_m + \varsigma_j + \varsigma_k) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Assumindo que o asteroide tenha densidade constante, após calcular seus correspondentes volumes e centros de massa, segundo as Equações (6.36) e (6.37), concentra-se a massa de cada tetraedro, M_i , em seu respectivo baricentro, o qual passa a ser o centro de atração secundário referente ao corpo não esférico. Logo, a divisão do volume do asteroide em vários tetraedros, permite estabelecer os elementos fundamentais para o cálculo aproximado da perturbação devido ao campo gravitacional não ser central. Portanto, a Equação (6.38) fornece o potencial de uma massa puntiforme m , localizada no ponto $P(x,y,z)$, em relação ao asteroide de massa total M

$$U = Gm \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\sqrt{(x - \xi_{G_i})^2 + (y - \eta_{G_i})^2 + (z - \zeta_{G_i})^2}} \quad (6.38)$$

Segundo a teoria desenvolvida sobre o método das concentrações de massa, seção 3.3, a Equação (6.39) representa a força gravitacional relativa ao centro de atração secundário, localizado no baricentro G_i , com massa M_i , lembrando que $i = 1, 2, \dots, 12192$,

$$F_{G_{i\xi}} \hat{\mathbf{i}} + F_{G_{i\eta}} \hat{\mathbf{j}} + F_{G_{i\zeta}} \hat{\mathbf{k}} = \left(-\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\xi}\|^2} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\eta}\|^2} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(-\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\zeta}\|^2} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (6.39)$$

Portanto, a Equação (6.40) é a resultante da força gravitacional perturbadora, \mathbf{F}_{GP} , gerada no veículo espacial por um corpo irregular pode ser modelada como a diferença entre a força referente ao campo central e o somatório das forças gravitacionais decorrentes das concentrações de massas secundárias

$$\mathbf{F}_{GP} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\xi}\|^2} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\eta}\|^2} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{GmM_i}{\|\mathbf{r}_{i\zeta}\|^2} \right) \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (6.40)$$

Logo, a determinação dos componentes da força nas direções correspondentes, permite aplica-los ao ambiente de simulação STRS, possibilitando simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, pois, analisando a força perturbadora, pode-se determinar a variação da velocidade, denominado ΔV , permitindo implementar manobras, assim como corrigi-las.

Em relação aos eixos coordenados ξ, η, ζ , as variações das velocidades são expressas pelas Equações (6.41), (6.42) e (6.43)

$$\Delta V_{\xi} = -\frac{F_{\tilde{G}P_{\xi}} \text{ passo}}{m}, \quad (6.41)$$

$$\Delta V_{\eta} = -\frac{F_{\tilde{G}P_{\eta}} \text{ passo}}{m}, \quad (6.42)$$

$$\Delta V_{\zeta} = -\frac{F_{\tilde{G}P_{\zeta}} \text{passo}}{m}, \quad (6.43)$$

nas quais, $F_{\tilde{G}P_{\zeta}}$, $F_{\tilde{G}P_{\eta}}$ e $F_{\tilde{G}P_{\xi}}$ correspondem aos componentes da força perturbadora, e *passo* é a taxa de amostragem empregada pelo simulador STRS, equivalendo ao passo da integração da órbita utilizada na simulação.

6.5. Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Itokawa utilizando a expansão do potencial em série

Análoga à metodologia aplica nos cálculos dos coeficientes dos harmônicos esféricos associados ao potencial do cubo homogêneo, desenvolvida na seção 5.4, considera-se o potencial de ordem 1, relativo ao asteroide Itokawa, que em função das coordenadas cartesianas é expresso pela Equação (6.44)

$$U_1 = \frac{GM}{\rho^3} \left[-1,5250770 \times 10^{-17} x + 1,2892291 \times 10^{-17} y - 2,9043784 \times 10^{-18} z \right]. \quad (6.44)$$

Porém, o potencial de mesma ordem, escrito em função dos harmônicos esféricos e de seus correspondentes coeficientes, é dado pela Equação (6.45)

$$U_1 = \frac{GM}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \right) \left[C_{10} + C_{11} P_{11}(\text{sen } \theta) \cos \phi + S_{11} P_{11}(\text{sen } \theta) \text{sen } \phi \right] \quad (6.45)$$

na qual, θ é a latitude, ϕ é a longitude, $P_{nm}(\text{sen } \theta)$ são os polinômios associados de Legendre, $P_n(\text{sen } \theta)$ é o polinômio de Legendre, R é o raio normalizador, C_{10} , C_{11} e S_{11} são os coeficientes a serem determinados.

Igualando as funções potenciais de primeiro grau, em coordenadas cartesianas e nos harmônicos esféricos, obtém-se a Equação (6.46):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R\rho)} \left[-1,525077 \times 10^{-17} x + 1,289229 \times 10^{-17} y - 2,904378 \times 10^{-18} z \right] = \\ = C_{10} + C_{11} P_{11}(\text{sen } \theta) \cos \phi + S_{11} P_{11}(\text{sen } \theta) \text{sen } \phi \end{aligned} \quad (6.46)$$

Considerando os pontos $A_1(8,5,5)$, $A_2(6,7,8)$ e $A_3(4,6,5)$, coordenadas em km, e adotando $R = 0,179088423314965$ km, isto é, o raio da esfera de volume equivalente ao volume do Itokawa, obtém-se o sistema linear de equações dado pela Equação (6.47):

$$\begin{cases} 0,4682929 C_{10} - 0,7492686 C_{11} - 0,4682929 S_{11} = -3,7688955004 \times 10^{-17} \\ 0,6553855 C_{10} - 0,4915391 C_{11} - 0,5734623 S_{11} = -1,1204492165 \times 10^{-17} \\ 0,5698028 C_{10} - 0,4558423 C_{11} - 0,6837634 S_{11} = 1,1637162517 \times 10^{-18} \end{cases} \quad (6.47)$$

cuja solução é formada pelos coeficientes dos harmônicos esféricos não normalizados, expressos pela Equação (6.48)

$$\begin{aligned} C_{10} &= -1,6217566669 \times 10^{-17} \\ C_{11} &= -8,5157769316 \times 10^{-17} \quad S_{11} = 7,1988413212 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Como $C_{10} = C_{11} = S_{11} \cong 0$, devido a esses coeficientes serem expressos pelas Equações (6.49), (6.50) e (6.51)

$$C_{10} = \frac{1}{RV} \iiint_{\mathcal{Q}} \zeta dv = \frac{1}{RM} \iiint_{\mathcal{Q}} \zeta dm, \quad (6.49)$$

$$C_{11} = \frac{1}{RV} \iiint_{\mathcal{Q}} \xi dv = \frac{1}{RM} \iiint_{\mathcal{Q}} \xi dm, \quad (6.50)$$

$$S_{11} = \frac{1}{RV} \iiint_{\mathcal{Q}} \eta dv = \frac{1}{RM} \iiint_{\mathcal{Q}} \eta dm, \quad (6.51)$$

em razão do centro de massa do asteroide ser determinado pela Equação (6.52),

$$\left(\frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{Q}} \xi dm, \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{Q}} \eta dm, \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{Q}} \zeta dm, \right), \quad (6.52)$$

então, conclui-se que o seu baricentro coincide com a origem do sistema de coordenadas.

O potencial de grau 2, relativo ao asteroide Itokawa, em função das coordenadas cartesianas é expresso pela Equação (6.53):

$$U_2 = \frac{GM}{\rho^5} \left[0,011698298553x^2 + 7,6457526 \times 10^{-18} xy - 0,005084975717y^2 \right. \\ \left. + 2,3665229 \times 10^{-17} xz + 6,6673704 \times 10^{-18} yz - 0,006613322835z^2 \right] \quad (6.53)$$

e o mesmo potencial de grau 2, escrito em função dos harmônicos esféricos e de seus correspondentes coeficientes, é dado pela Equação (6.54):

$$U_2 = \frac{GM}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \left[C_{20}P_2(\text{sen } \theta) + C_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\cos \phi + S_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\text{sen } \phi \right. \\ \left. + C_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\cos(2\phi) + S_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\text{sen}(2\phi) \right] \quad (6.54)$$

Novamente, igualando as funções potenciais de grau 2, em coordenadas cartesianas e nos harmônicos esféricos, tem-se a Equação (6.55):

$$\frac{1}{(R\rho)^2} \left[0,011698298553156x^2 + 7,6457526765 \times 10^{-18} xy \right. \\ \left. - 0,005084975717704y^2 + 2,3665229695 \times 10^{-17} xz \right. \\ \left. + 6,6673704094 \times 10^{-18} yz - 0,006613322835452z^2 \right] = \quad , \quad (6.55) \\ = C_{20}P_2(\text{sen } \theta) + C_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\cos \phi + S_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\text{sen } \phi \\ + C_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\cos(2\phi) + S_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\text{sen}(2\phi)$$

Considerando os pontos $A_1(8,5,5)$, $A_2(6,7,8)$, $A_3(4,6,5)$, $A_4(9,5,7)$ e $A_5(10,9,4)$, coordenadas em km, obtém-se o sistema linear dado pela Equação (6.56):

$$\begin{cases} -0,1710C_{20} - 1,0526C_{21} + 1,0263C_{22} - 0,6578S_{21} + 2,1052S_{22} = 0,124781 \\ 0,1442C_{20} - 0,9664C_{21} - 0,2617C_{22} - 1,1275S_{21} + 1,6912S_{22} = -0,052581 \\ -0,0129C_{20} - 0,7792C_{21} - 0,7792C_{22} - 1,1688S_{21} + 1,8701S_{22} = -0,065282 \\ -0,0258C_{20} - 1,2193C_{21} + 1,0838C_{22} - 0,6774S_{21} + 1,7419S_{22} = 0,099851 \\ -0,3781C_{20} - 0,6091C_{21} + 0,2893C_{22} - 0,5482S_{21} + 2,7411S_{22} = 0,103213 \end{cases} \quad (6.56)$$

resultando nos coeficientes não normalizados expressos pela Equação (6.57)

$$\begin{aligned} C_{20} = -0,206198118, \quad C_{21} = 2,459543134 \times 10^{-16}, \quad S_{21} = 6,929442615 \times 10^{-17} \\ C_{22} = 0,087214845, \quad S_{22} = 3,973140921 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Lembrando que, segundo Kaula (1966), a normalização dos coeficientes é obtida pela Equação (6.58)

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix}, \quad (6.58)$$

então, os coeficientes normalizados são expressos pela Equação (6.59):

$$\begin{aligned} \bar{C}_{20} = -0,09221460188 \\ \bar{C}_{21} = 1,90515391981 \times 10^{-16} \quad \bar{S}_{21} = 5,36752316960 \times 10^{-17} \\ \bar{C}_{22} = 0,13511265758 \quad \bar{S}_{22} = 6,15516344828 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Como $C_{21} = S_{21} = S_{22} \cong 0$, devido a esses coeficientes serem expressos, respectivamente, pelas Equações (6.60), (6.61) e (6.62)

$$C_{21} = \frac{1}{R^2 V} \iiint_Q \xi \zeta dv = \frac{1}{R^2 M} \iiint_Q \xi \zeta dm, \quad (6.60)$$

$$S_{21} = \frac{1}{R^2 V} \iiint_Q \eta \zeta dv = \frac{1}{R^2 M} \iiint_Q \eta \zeta dm, \quad (6.61)$$

$$S_{22} = \frac{1}{R^2 V} \iiint_Q \xi \eta dv = \frac{1}{R^2 M} \iiint_Q \xi \eta dm, \quad (6.62)$$

conclui-se que os eixos coordenados estão alinhados e orientados com os eixos principais de inércia, pois os produtos de inércia normalizados, relativos ao asteroide,

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{M} \iiint_Q \xi \eta dm, \quad I_{\xi\zeta} = \frac{1}{M} \iiint_Q \xi \zeta dm \quad \text{e} \quad I_{\eta\zeta} = \frac{1}{M} \iiint_Q \eta \zeta dm, \quad \text{são nulos. Além disso, uma}$$

vez que os momentos de inércia normalizados do asteroide são dados por

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{M} \iiint_Q (\eta^2 + \zeta^2) dm, \quad I_{\eta\eta} = \frac{1}{M} \iiint_Q (\xi^2 + \zeta^2) dm \quad \text{e} \quad I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{M} \iiint_Q (\xi^2 + \eta^2) dm, \quad \text{então,}$$

os coeficientes C_{20} e C_{22} podem ser reescritos em função dos momentos de inércia, resultando nas Equações (6.63) e (6.64):

$$C_{20} = \frac{1}{2R^2V} \iiint_{\mathcal{Q}} (2\zeta^2 - \eta^2 - \xi^2) dv = \frac{1}{2R^2} (I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} - 2I_{\zeta\zeta}), \quad (6.63)$$

$$C_{22} = \frac{1}{4R^2V} \iiint_{\mathcal{Q}} (\xi^2 - \eta^2) dv = \frac{1}{4R^2} (I_{\eta\eta} - I_{\xi\xi}). \quad (6.64)$$

Vale ressaltar que o coeficiente C_{20} , também denotado por $-J_2$, sempre será negativo e informa quanto o asteroide é achatado nos polos, em relação a uma esfera, enquanto que C_{22} revela a elipsidade do corpo.

Aplicando o procedimento análogo às demais ordens dos potenciais calculados, obtêm-se os coeficientes dos harmônicos esféricos correspondentes até o grau 6 para o asteroide Itokawa, os quais são comparados aos valores determinados por Scheeres et al. (2004) até o grau 4, como mostra a Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Comparação entre os coeficientes dos harmônicos esféricos do Itokawa.

	Scheeres	Autor
\bar{C}_{00}	1	1
\bar{C}_{10}	0,0	$-9,36321648189 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{11}	0,0	$-4,91658610381 \times 10^{-17}$
\bar{S}_{11}	0,0	$4,15625297466 \times 10^{-17}$
\bar{C}_{20}	$-9,22215 \times 10^{-2}$	$-9,22146018790 \times 10^{-2}$
\bar{C}_{21}	0,0	$1,90515391981 \times 10^{-16}$
\bar{S}_{21}	0,0	$5,36752316960 \times 10^{-17}$
\bar{C}_{22}	$1,351127 \times 10^{-1}$	$1,35112657583 \times 10^{-1}$
\bar{S}_{22}	0,0	$6,15516344828 \times 10^{-17}$
\bar{C}_{30}	$-1,768 \times 10^{-4}$	$-1,76811609421 \times 10^{-4}$
\bar{C}_{31}	$2,468 \times 10^{-4}$	$2,46800058203 \times 10^{-4}$
\bar{S}_{31}	$1,9196 \times 10^{-3}$	$1,91962914641 \times 10^{-3}$

(Continua)

Tabela 6.6 – Continuação

	Scheeres	Autor
\bar{C}_{32}	$-1,9275 \times 10^{-3}$	$-1,92750975011 \times 10^{-3}$
\bar{S}_{32}	$-4,7926 \times 10^{-3}$	$-4,79256586558 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{33}	$-1,22294 \times 10^{-2}$	$-1,22293587517 \times 10^{-2}$
\bar{S}_{33}	$-6,2563 \times 10^{-3}$	$-6,25634062906 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{40}	$3,97246 \times 10^{-2}$	$3,97245600562 \times 10^{-2}$
\bar{C}_{41}	$-1,8445 \times 10^{-3}$	$-1,84450311670 \times 10^{-3}$
\bar{S}_{41}	$-1,744 \times 10^{-4}$	$-1,74440743578 \times 10^{-4}$
\bar{C}_{42}	$-5,43996 \times 10^{-2}$	$-5,43996161688 \times 10^{-2}$
\bar{S}_{42}	$-2,3396 \times 10^{-3}$	$-2,33958219363 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{43}	$6,763 \times 10^{-4}$	$6,76320155674 \times 10^{-4}$
\bar{S}_{43}	$1,3784 \times 10^{-3}$	$1,37839582801 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{44}	$5,89245 \times 10^{-2}$	$5,89244645910 \times 10^{-2}$
\bar{S}_{44}	$5,8470 \times 10^{-3}$	$5,84697925925 \times 10^{-3}$

Fonte: Produção do autor.

Analisando a Tabela 6.6, conclui-se que os coeficientes dos harmônicos esféricos obtidos, utilizando os graus dos potenciais correspondentes, têm os valores muito próximos aos determinados por Scheeres et al. (2004), apesar de podê-los comparar somente até o grau 4.

6.6 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos do asteroide Itokawa

Outra forma para se determinar os coeficientes de Stokes utiliza o cálculo direto por meio das integrais expressas pelas Equações (6.65) e (6.66)

$$C_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n - m)!}{(n + m)! M} \iiint_Q \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) \cos(m\phi) dM \quad (6.65)$$

$$S_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n - m)!}{(n + m)! M} \iiint_Q \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta) \text{sen}(m\phi) dM \quad (6.66)$$

sendo δ_{0m} o delta de Kronecker, M é a massa total do asteroide Itokawa, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, R é o raio normalizador, C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes de Stokes a serem determinados. Aplicando as Equações (6.65) e (6.66) para o Itokawa, pode-se comparar os valores da terceira coluna da Tabela 6.6 com os respectivos valores obtidos de forma direta, calculando as diferenças correspondentes, exibidas na Tabela 6.7. Observa-se que as integrais utilizadas para os cálculos dos coeficientes dos harmônicos esféricos são apresentados no Apêndice L.

Tabela 6.7 - Comparação entre os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados, calculados a partir do potencial e de forma direta.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$7,40750641165 \times 10^{-16}$
\bar{C}_{10}	$-9,36321648189 \times 10^{-18}$	$-9,40248282491 \times 10^{-18}$	$3,92663430235 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{11}	$-4,91658610381 \times 10^{-17}$	$-4,95814519751 \times 10^{-17}$	$-4,15590936993 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{11}	$4,15625297466 \times 10^{-17}$	$4,17900131608 \times 10^{-17}$	$2,27483414239 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-9,22146018790 \times 10^{-2}$	$-9,22146018790 \times 10^{-2}$	$-8,76193061405 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{21}	$1,90515391981 \times 10^{-16}$	$1,90563289254 \times 10^{-16}$	$4,78972729616 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{21}	$5,36752316960 \times 10^{-17}$	$5,37041803195 \times 10^{-17}$	$2,89486235433 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$1,35112657583 \times 10^{-1}$	$1,35112657583 \times 10^{-1}$	$1,34974997591 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{22}	$6,15516344828 \times 10^{-17}$	$6,15961704557 \times 10^{-17}$	$-4,45359728391 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{30}	$-1,76811609421 \times 10^{-4}$	$-1,76811609421 \times 10^{-4}$	$1,06861210564 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{31}	$2,46800058203 \times 10^{-4}$	$2,46800058203 \times 10^{-4}$	$5,05199868468 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{31}	$1,91962914641 \times 10^{-3}$	$1,91962914641 \times 10^{-3}$	$-1,21800834831 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$1,92750975011 \times 10^{-3}$	$1,92750975011 \times 10^{-3}$	$-1,13533875113 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{32}	$-4,79256586558 \times 10^{-3}$	$-4,79256586558 \times 10^{-3}$	$-2,77057225261 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{33}	$1,22293587517 \times 10^{-2}$	$1,22293587517 \times 10^{-2}$	$1,35605464812 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{33}	$-6,25634062906 \times 10^{-3}$	$-6,25634062906 \times 10^{-3}$	$7,77406376029 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{40}	$3,97245600562 \times 10^{-2}$	$3,97245600562 \times 10^{-2}$	$3,49033504867 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{41}	$-1,84450311670 \times 10^{-3}$	$-1,84450311670 \times 10^{-3}$	$1,15880459364 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{41}	$-1,74440743578 \times 10^{-4}$	$-1,74440743578 \times 10^{-4}$	$2,17565578850 \times 10^{-20}$

(Continua)

Tabela 6.7 - Conclusão

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{42}	$-5,43996161688 \times 10^{-2}$	$-5,43996161688 \times 10^{-2}$	$-7,35976586472 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{42}	$-2,33958219363 \times 10^{-3}$	$-2,33958219363 \times 10^{-3}$	$-3,74054001775 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{43}	$6,76320155673 \times 10^{-4}$	$6,76320155673 \times 10^{-4}$	$-6,54618546662 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{43}	$1,37839582801 \times 10^{-3}$	$1,37839582801 \times 10^{-3}$	$-2,43746730313 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{44}	$5,89244645910 \times 10^{-2}$	$5,89244645910 \times 10^{-2}$	$7,88027968168 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{44}	$5,84697925925 \times 10^{-3}$	$5,84697925925 \times 10^{-3}$	$8,4637652881 \times 10^{-19}$

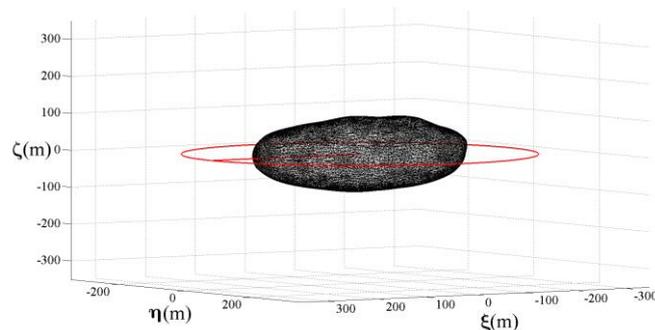
Fonte: Produção do autor.

6.7 Simulações de trajetórias em torno do asteroide Itokawa

Devido a seu formato irregular, o campo gravitacional do Itokawa apresenta perturbação em relação ao campo central. Logo, para simular órbitas de um veículo espacial em torno desse corpo, considerando apenas essa perturbação, conhecendo a função potencial desenvolvida neste trabalho, calculando seu gradiente, determinam-se os componentes da força nas direções correspondentes, as quais, aplicadas ao ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), (ROCCO, 2008 e 2012), permite simular trajetórias de um satélite imerso nesse campo gravitacional.

Com o intuito de exemplificar essas simulações, levando em conta, exclusivamente, a perturbação mencionada anteriormente, a Figura 6.6 apresenta uma órbita equatorial em torno do asteroide Itokawa, adotando-se o semieixo maior igual a 300 metros e os demais elementos keplerianos iguais a zero.

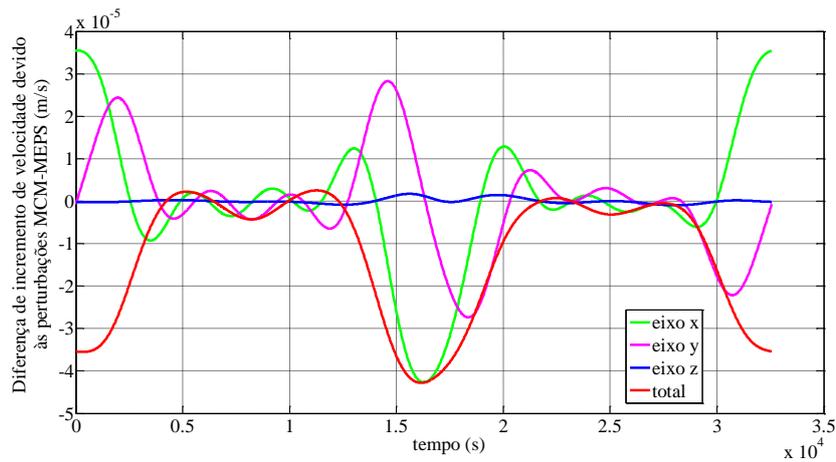
Figura 6.6 - Órbita equatorial em torno do asteroide Itokawa.



Fonte: Produção do autor.

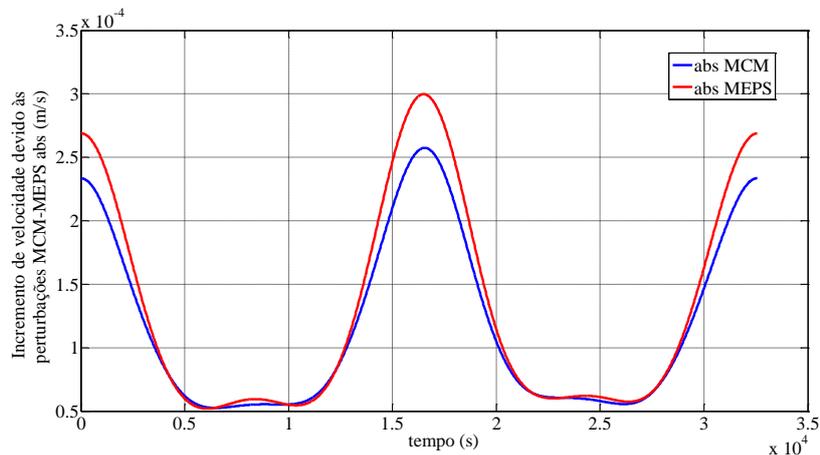
A Figura 6.7 apresenta os gráficos das diferenças entre os incrementos das velocidades devido às perturbações, calculadas pela expansão do potencial em série e pelas concentrações de massa, em relação a cada eixo e total, e a Figura 6.8, exibe o incremento de velocidade absoluta devido às perturbações, evidenciando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos na Figura 6.8.

Figura 6.7 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

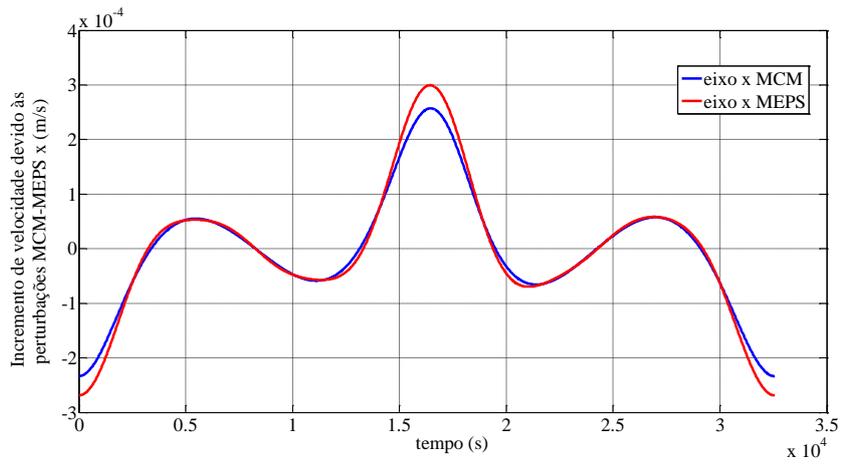
Figura 6.8 – Incremento de velocidade absoluta, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

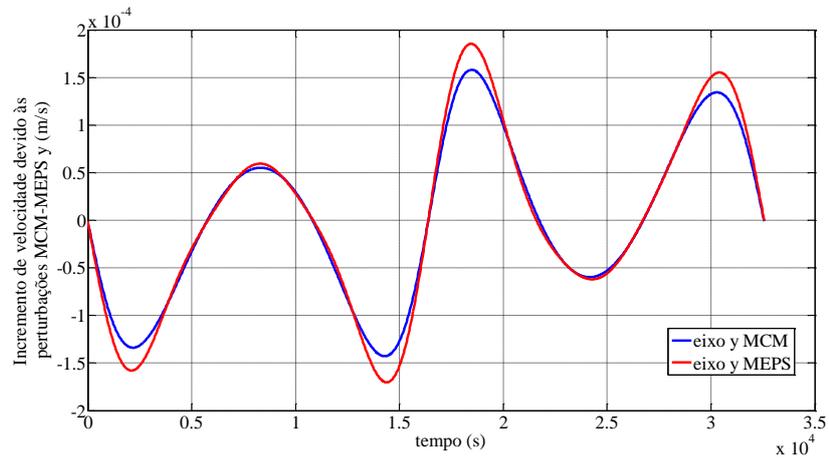
As Figuras 6.9, 6.10 e 6.11 apresentam os gráficos dos incrementos de velocidade, devido às perturbações, relativas a cada um dos eixos coordenados, também apresentando diferenças muito pequenas.

Figura 6.9 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x .



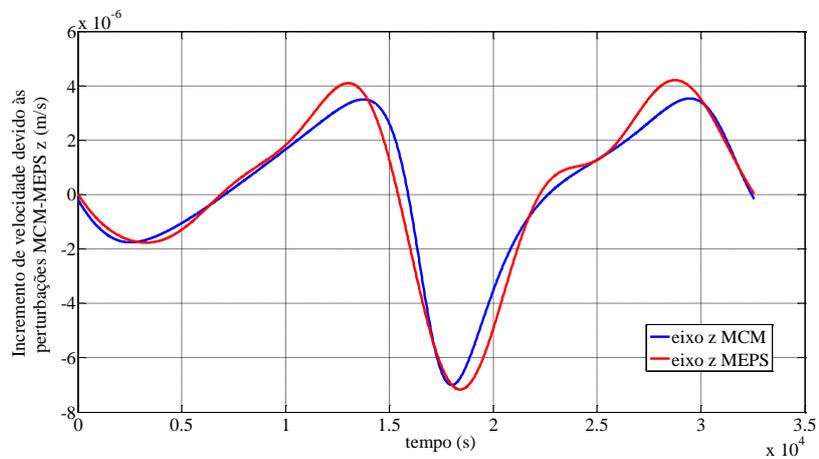
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.10 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y .



Fonte: Produção do autor.

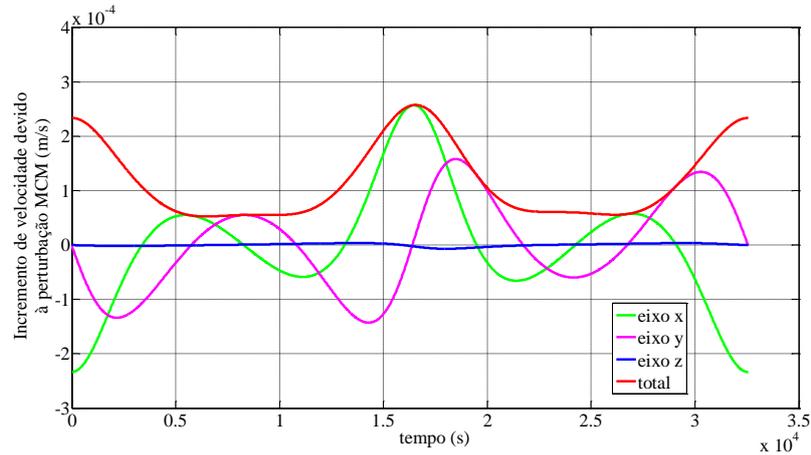
Figura 6.11 – Incremento das velocidades, devido às perturbações, relativas ao eixo z .



Fonte: Produção do autor.

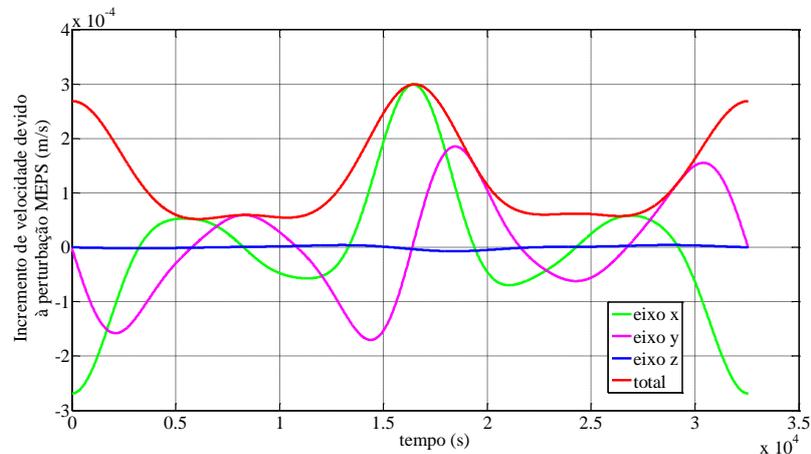
As Figuras 6.12 e 6.13 mostram os incrementos da velocidade devido às perturbações obtidas por meio dos modelos das concentrações de massa e da expansão em série, em cada eixo e total.

Figura 6.12 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas às concentrações de massa em cada eixo e total.



Fonte: Produção do autor.

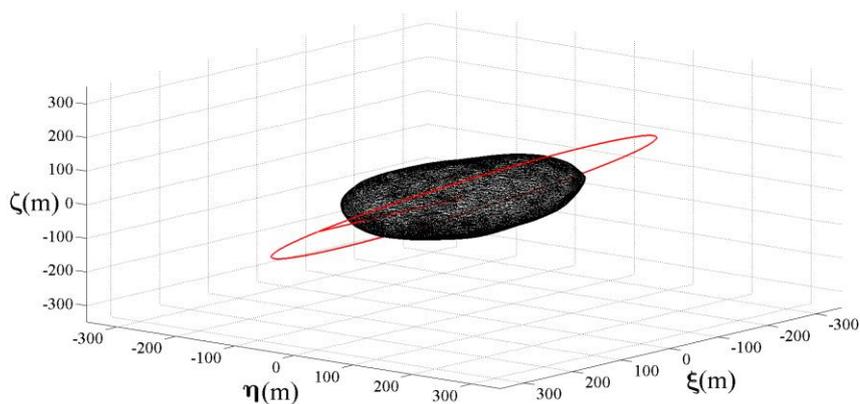
Figura 6.13 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas à expansão em cada eixo e total.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 6.14 apresenta uma órbita em torno do asteroide Itokawa, adotando o semi eixo maior igual a 300 metros, ângulo de inclinação igual a 45° e os demais elementos keplerianos nulos.

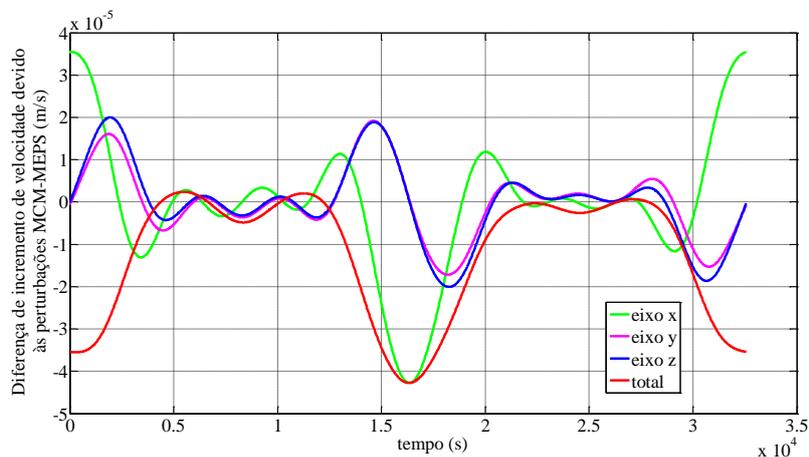
Figura 6.14 - Órbita com inclinação de 45° em torno do asteroide Itokawa.



Fonte: Produção do autor.

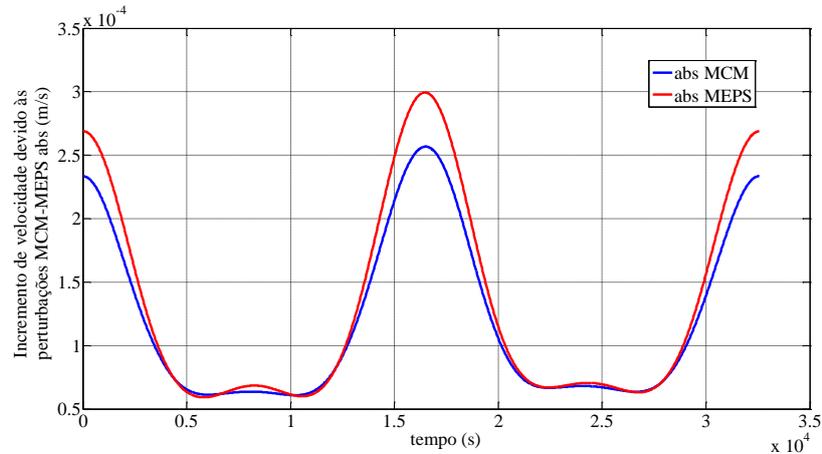
Devido à semelhança dos gráficos das diferenças, assim como os incrementos de velocidade, em razão das perturbações referentes às concentrações de massa e à expansão do potencial em série, em cada um dos eixos coordenados e total, somente os gráficos que apresentam as diferenças relativas e absolutas entre as velocidades foram colocados, como ilustram as Figuras 6.15 e 6.16.

Figura 6.15 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão do potencial em série e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.16 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.

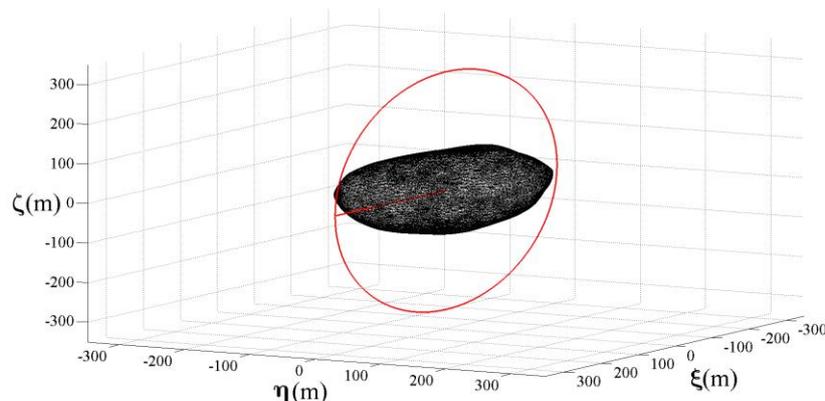


Fonte: Produção do autor.

Analisando os gráficos das diferenças relativas das velocidades em cada eixo coordenado, assim como a total, e a diferença absoluta das velocidades devido às perturbações, calculadas pela expansão em série e pelas concentrações de massa, verifica-se, novamente, que, em ambos os casos, essas diferenças são muito pequenas. Além disso, vale observar, mais uma vez, a conformidade dos gráficos no caso da diferença absoluta das velocidades, levando a concluir que os dois modelos apresentam comportamentos semelhantes.

A Figura 6.17 apresenta uma órbita em torno do asteroide Itokawa, adotando-se semieixo maior igual a 300 metros, ângulo de inclinação igual a 90° e os demais elementos keplerianos nulos.

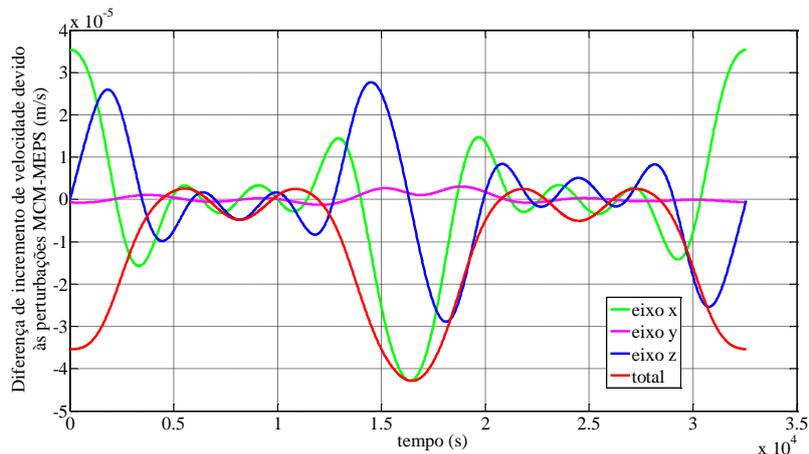
Figura 6.17 – Órbita com inclinação de 90° em torno do asteroide Itokawa.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 6.18 apresenta os gráficos das diferenças entre as velocidades, em relação a cada eixo e total, devido às perturbações, calculadas por meio dos modelos obtidos pela expansão em série e pelas concentrações de massa.

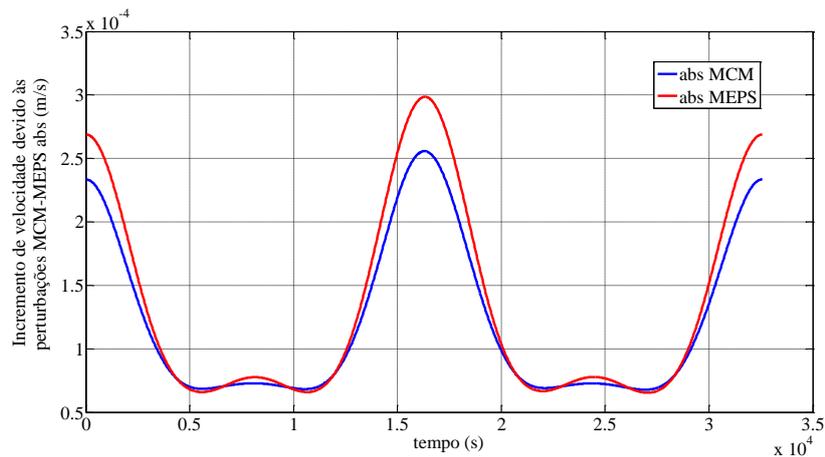
Figura 6.18 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 6.19, exibe a diferença absoluta entre as velocidades, constatando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos no caso da diferença absoluta das velocidades.

Figura 6.19 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

Comparando as Figuras 6.7, 6.15 e 6.18, correspondentes aos gráficos das diferenças relativas das velocidades em cada eixo coordenado e ao valor total, referentes às três

simulações de uma órbita de um veículo espacial em torno do asteroide Itokawa, adotando o mesmo valor para o semi-eixo maior, 300 metros, e variando somente os ângulos de inclinação, isto é, 0° , 45° e 90° , respectivamente, verifica-se um comportamento semelhante em todos os casos, além de indicar que essas diferenças são quase nulas.

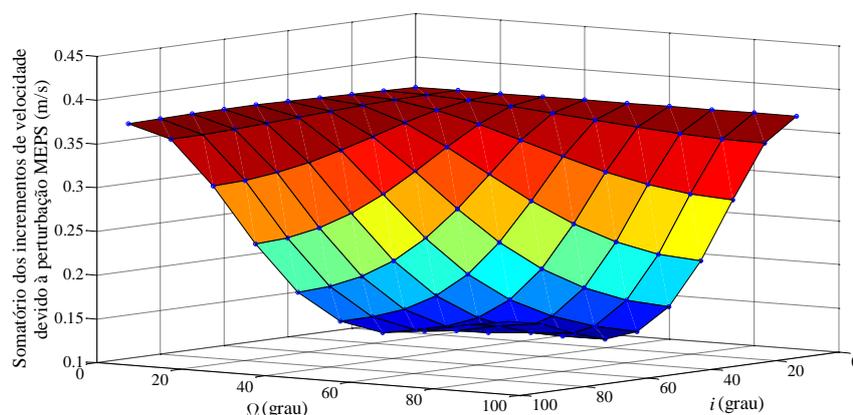
Em relação aos gráficos que apresentam as diferenças absolutas das velocidades devido às perturbações determinadas pelos dois modelos empregados, referentes às três simulações de órbitas em torno do asteroide Itokawa, as Figuras 6.8, 6.16 e 6.19, mostram uma similaridade entre os resultados obtidos por ambos.

6.8 Estudo da perturbação gravitacional do asteroide Itokawa utilizando o modelo da expansão do potencial em série

De posse do modelo do campo gravitacional obtido pela expansão do potencial em série, seu gradiente fornecerá os componentes da resultante da força gerada no veículo espacial, permitindo aplicá-los ao ambiente de simulação STRS, possibilitando simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, avaliando as alterações do potencial. Para exemplificar uma aplicação que utiliza esta forma de estudo, pretende-se analisar a variação dos valores do modelo obtido para o potencial do asteroide Itokawa, em função do ângulo de inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente para alguns valores do semi-eixo maior, considerando nulos os demais elementos keplerianos.

Para investigar as alterações dos somatórios dos incrementos de velocidades devido à perturbação referente ao método da expansão do potencial em série, adota-se inicialmente o valor de 250 metros para o semi-eixo maior da órbita e estabelece-se uma variação de 10° , tanto para o ângulo de inclinação quanto para a ascensão reta do nodo ascendente, ambos iniciando em 0° e terminando em 90° . Dessa forma, a Figura 6.20 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

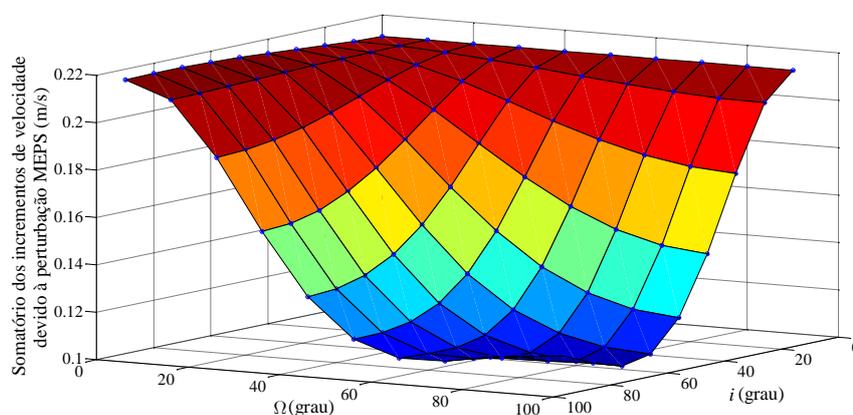
Figura 6.20 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 250 metros.



Fonte: Produção do autor.

Adotando-se, agora, o valor de 300 metros para o semi-eixo maior da órbita e procedendo da mesma forma em relação às variações dos ângulos de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente, a Figura 6.21 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

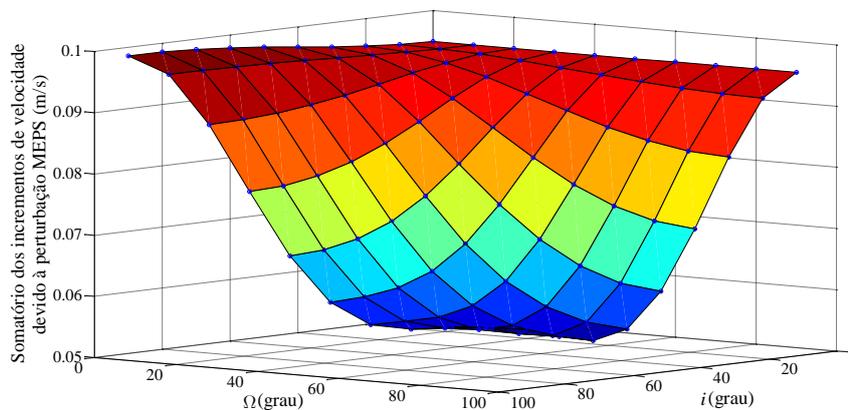
Figura 6.21 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 300 metros.



Fonte: Produção do autor.

Adotando-se, agora, o valor de 400 metros para o semi-eixo maior da órbita e procedendo da mesma forma em relação às variações dos ângulos de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente, a Figura 6.22 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

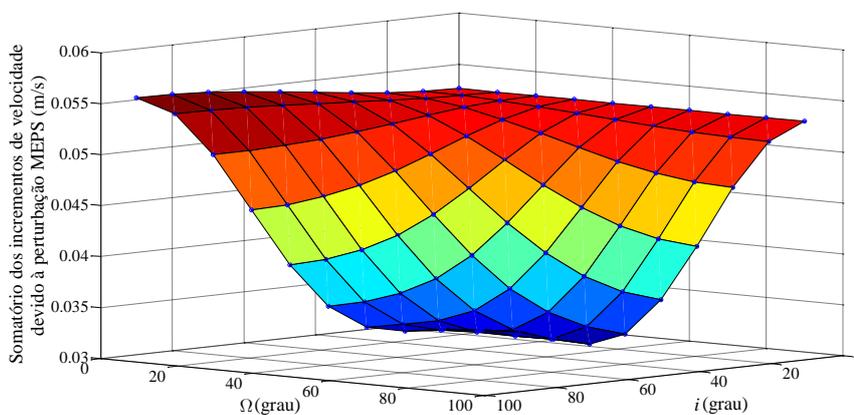
Figura 6.22 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 400 metros.



Fonte: Produção do autor.

Adotando-se, agora, o valor de 500 metros para o semi-eixo maior da órbita e procedendo da mesma forma em relação às variações dos ângulos de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente, a Figura 6.23 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

Figura 6.23 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 500 metros.



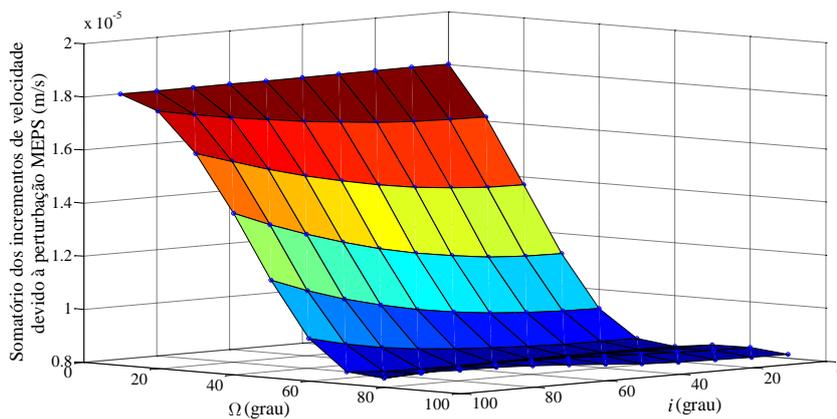
Fonte: Produção do autor.

Analisando as Figuras 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23, constata-se que, devido ao aumento do semi-eixo maior, o valor do somatório dos incrementos de velocidade decresce, ou seja, a influência da perturbação do campo gravitacional diminui com o aumento da altitude. Verifica-se, também que, apesar de não se ter a função explícita dessas superfícies, todas apresentam um comportamento gráfico semelhante no intervalo considerado,

assim como possuem um valor mínimo, na vizinhança do ponto $(60^\circ, 80^\circ)$, no caso da Figura 6.20, e, na vizinhança do ponto $(60^\circ, 90^\circ)$, nos demais casos, isto é, existem ângulos de inclinação e de ascensão reta do nodo ascendente, para os quais o efeito da perturbação do potencial é mínimo, conclusão de fundamental importância, tendo em vista, obter uma trajetória que otimize o consumo de combustível.

Adotando-se, agora, o valor de 5000 metros para o semi-eixo maior da órbita e procedendo da mesma forma em relação às variações dos ângulos de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente, a Figura 6.24 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

Figura 6.24 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 5000 metros.



Fonte: Produção do autor.

Neste caso, devido à altitude adotada ser muito maior do que àquelas adotadas nos casos anteriores, percebe-se um comportamento gráfico diferente, pois a influência do campo gravitacional é bem menor. Mesmo assim, essa superfície apresenta um ponto de mínimo estimado nas coordenadas $(90^\circ, 70^\circ)$.

6.9 Conclusão

O objetivo deste capítulo foi determinar o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide 25143 Itokawa, adotando a mesma metodologia utilizada para o cubo homogêneo, isto é, decompondo-o em elementos tetraédricos, neste caso, por meio da utilização dos dados fornecidos pelo JPL/NASA, aplicando, em seguida, o método da

expansão do potencial em série. Também foi desenvolvido o modelo baseado nas concentrações de massa, tendo em vista, a confrontação dos resultados obtidos por ambos. Logo, após realizar as três simulações apresentadas, analisando os gráficos das Figuras 6.7, 6.12 e 6.15, verifica-se a diferença entre os incrementos das velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos dois modelos, mesma constatação, relativa à diferença absoluta das velocidades, dadas pelos gráficos das Figuras 6.8, 6.16 e 6.19, ressaltando a conformidade entre os dois modelos, também verificada pelo incremento da velocidade, devido às perturbações, mostradas nas Figuras 6.12 e 6.13.

Apesar de ambos os modelos utilizarem a decomposição do asteroide em tetraedros, o modelo obtido pelo método da expansão do potencial em série apresenta a vantagem de expressar o potencial na forma de uma função polinomial simples, permitindo manipulá-la algebricamente, além de possibilitar sua participação em interações numéricas, enquanto que o método das concentrações de massa apresenta a vantagem da simplicidade em sua modelagem, pois, para determinar os centros de atração secundários, basta encontrar o volume e o centro de massa de cada tetraedro, e acumular toda sua massa em seu respectivo baricentro.

Posteriormente à obtenção dos dois modelos, foram determinados os coeficientes dos harmônicos esféricos, com o auxílio do primeiro modelo, assim como, diretamente, por meio das integrais correspondentes, verificando a proximidade dos valores encontrados.

Por fim, para exemplificar uma utilização do modelo obtido pela expansão do potencial em série, realizou-se um estudo da variação dos valores do potencial em função da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente, estabelecendo uma variação de 10° para os dois ângulos, ambos iniciando em 0° e terminando em 90° , adotando cinco valores para o semi-eixo maior, e considerando nulos os demais elementos keplerianos. Dessa forma, foram obtidas cinco superfícies, concluindo que todas apresentam um ponto de mínimo. Verificou-se, também que, quanto mais distante do centro de massa do asteroide, menor é a influência do campo gravitacional.

7. RESULTADOS PARA O ASTEROIDE 1620 GEOGRAPHOS

O asteroide 1620 Geographos foi descoberto em 14 de setembro de 1951 por Wilson, A. G. e Minkowski, R. no observatório do Monte Palomar, localizado na cidade de San Diego, California, e administrado pelo California Institute of Technology - Caltech. Denominado, inicialmente, RA 1951, recebeu o nome de Geographos, cujo significado é geógrafos, para homenagear a National Geographic Society.

Dos asteroides conhecidos e próximos à Terra (NEAs), o Geographos pertence ao grupo dos asteroides potencialmente perigosos, ou PHAs, sigla em inglês.

7.1 Modelo poliédrico inicial para o asteroide Geographos

Segundo os dados coletados pelo rádio telescópio de Arecibo, Ostro et al. (2004), o Geographos possui dimensões de $5 \times 2 \times 2,1 \pm 0,15$ km, massa de $2,6 \pm 0,02 \times 10^{13}$ kg, volume de $8,8 \pm 1,6$ km³, densidade $2,5$ g.cm⁻³ e período de rotação 5,222 horas, valores assumidos para os cálculos e simulações. Ao volume do asteroide, associa-se o raio médio $R_M = 1,2988$ km, correspondente ao raio da esfera de volume equivalente.

Por meio da técnica de decomposição do asteroide Geographos em tetraedros, foram utilizados os dados coletados pelo rádio telescópio de Arecibo e disponibilizados pelo JPL/NASA, (OSTRO E HUDSON, 2004), como elementos para implementações de cálculos e simulações, cujo modelo poliédrico adotado apresenta 8192 vértices e 16380 faces triangulares, fornecidos por duas tabelas, uma contendo as coordenadas dos vértices e a outra, as relações entre as faces triangulares formadas e seus respectivos vértices, ilustradas pelas tabelas 7.1 e 7.2, respectivamente.

Tabela 7.1 - Coordenadas dos vértices do asteroide Geographos.

Vértice	Abcissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$0,000000 \times 10^0$	$0,000000 \times 10^0$	$1,119516 \times 10^0$
2	$3,125070 \times 10^{-1}$	$0,000000 \times 10^0$	$1,051697 \times 10^0$
3	$1,499870 \times 10^{-1}$	$2,737170 \times 10^{-1}$	$9,713170 \times 10^{-1}$

(Continua)

Tabela 7.1 - Conclusão

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
4	$-1,519550 \times 10^{-1}$	$2,923050 \times 10^{-1}$	$1,040906 \times 10^0$
5	$-3,213750 \times 10^{-1}$	$0,000000 \times 10^0$	$1,207780 \times 10^0$
⋮	⋮	⋮	⋮
8192	$-2,352887 \times 10^{-1}$	$-7,961862 \times 10^{-1}$	$7,844230 \times 10^{-1}$

Fonte: adaptação JPL/NASA.

Tabela 7.2 - Vértices correspondentes a cada face triangular do Geographos.

Face	Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3
1	1055	4232	2929
2	1030	830	3364
3	2694	676	992
4	3762	2843	2285
5	4090	2684	1019
6	688	3216	4143
⋮	⋮	⋮	⋮
12192	8192	1613	6448

Fonte: adaptação JPL/NASA.

Em função dos dados da Tabela 7.1, as dimensões do asteroide, em km, nas direções principais são $-2,4141 \leq \xi \leq 2,6980$, $-0,9724 \leq \eta \leq 1,0274$ e $-1,2027 \leq \zeta \leq 1,2078$.

7.2 Modelo poliédrico final para o asteroide Geographos

Utilizando os dados fornecidos pelas Tabelas 7.1 e 7.2 e o método para o cálculo de integrais desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), pode-se calcular o volume aproximado do asteroide Itokawa, mediante à soma dos volumes dos tetraedros gerados pela sua decomposição, segundo o método poliédrico. Logo, a Equação (7.1) fornece o volume

$$V_{total} = \iiint_Q dv = \sum_{i=1}^{16380} |T_i| \iiint_{W_i} dV_i = \sum_{i=1}^{16380} \frac{|T_i|}{6} = 9,177124115088919 \text{ km}^3 \quad (7.1)$$

De modo semelhante, a área total do Geographos será a soma das áreas de todos os elementos triangulares obtidos na partição de sua superfície, fornecidos pela Tabela 6.2, lembrando que a área de um triângulo formado pelos vértices V_i , V_j e V_k é dado por $A_p = |\mathbf{V}_i\mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_i\mathbf{V}_k|/2$. Então, utilizando os correspondentes vértices, dados pela Tabela 7.1, a área total do asteroide é expressa pela Equação (7.2):

$$A_{total} = \sum_{p=1}^{16380} A_p = 25,698293075295215 \text{ km}^2 \quad (7.2)$$

A abscissa do centro de massa é dada pelas Equações (7.3) e (7.4)

$$\xi_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \xi dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{16380} /T_i/ \iiint_{W_i} (\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 Z) dX dY dZ \quad (7.3)$$

$$\xi_0 = 3,5953992007675059 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (7.4)$$

A ordenada do centro de massa é dada pelas Equações (7.5) e (7.6)

$$\eta_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \eta dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{16380} /T_i/ \iiint_{W_i} (\eta_1 X + \eta_2 Y + \eta_3 Z) dX dY dZ \quad (7.5)$$

$$\eta_0 = -1,6794185005282702 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (7.6)$$

A cota do centro de massa é dada pelas Equações (7.7) e (7.8)

$$\varsigma_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \varsigma dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{16380} /T_i/ \iiint_{W_i} (\varsigma_1 X + \varsigma_2 Y + \varsigma_3 Z) dX dY dZ \quad (7.7)$$

$$\varsigma_0 = 1,8044123507790955 \times 10^{-4} \text{ km} \quad (7.8)$$

Logo, segundo os dados fornecidos, o centro de massa do asteroide está localizado no ponto O' , cujas coordenadas, medidas em km, são dadas pela Equação (7.9)

$$(\xi_0, \eta_0, \varsigma_0) = (3,5953992008 \times 10^{-3}; -1,6794185005 \times 10^{-3}; 1,8044123508 \times 10^{-4}) \quad (7.9)$$

Visando refinar a localização de seu baricentro, após realizar a translação das coordenadas dos vértices fornecidos pela Tabela 7.1, em relação ao ponto O' , o novo centro de massa O , passa a ter as coordenadas fornecidas pela Equação (7.10)

$$(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0) = (-2,34457241 \times 10^{-15}; -1,56799233 \times 10^{-16}; -4,09108395 \times 10^{-16}) \quad (7.10)$$

medidas em quilômetros, evidenciando sua maior proximidade da origem. Além disso, verifica-se que o volume do asteroide foi preservado após a translação, justificando o refinamento do centro de massa.

De posse das coordenadas dos vértices transladados, os momentos e produtos de inércia normalizados em relação à massa, são dados pelas Equações de (7.11) à (7.16)

$$\frac{I_{\xi\xi}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\eta^2 + \zeta^2) dv = 0,388946223733961 \text{ km}^2 \quad (7.11)$$

$$\frac{I_{\xi\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \eta dv = -0,018358769691854 \text{ km}^2 \quad (7.12)$$

$$\frac{I_{\xi\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \zeta dv = -0,001670843675520 \text{ km}^2 \quad (7.13)$$

$$\frac{I_{\eta\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \zeta^2) dv = 1,380444714660523 \text{ km}^2 \quad (7.14)$$

$$\frac{I_{\eta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \eta \cdot \zeta dv = -0,005844477208171 \text{ km}^2 \quad (7.15)$$

$$\frac{I_{\zeta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \eta^2) dv = 1,324925363526155 \text{ km}^2 \quad (7.16)$$

dando origem ao tensor de inércia normalizado, em relação à massa, em km^2 , dado pela Equação (7.17)

$$I = \begin{bmatrix} 0,388946223733961 & 0,018358769691854 & 0,001670843675520 \\ 0,018358769691854 & 1,380444714660523 & 0,005844477208171 \\ 0,001670843675520 & 0,005844477208171 & 1,324925363526155 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

notando que $I_{\xi\xi} < I_{\zeta\zeta} < I_{\eta\eta}$. A seguir, os autovalores e os correspondentes autovetores, associados ao tensor de inércia, são expressos pelas Equações (7.18), (7.19) e (7.20):

$$\lambda_1 = 0,388603798627519 \text{ e } v_1 = \begin{bmatrix} 0,999827527626731 \\ -0,018496767235676 \\ -0,001668712571809 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$\lambda_2 = 1,324316851916142 \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 0,000254440141729 \\ 0,103485617242520 \\ -0,994630917619269 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$\lambda_3 = 1,381395651376977 \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} 0,018570144319105 \\ 0,994458946676917 \\ 0,103472475152592 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Verifica-se que os autovetores v_1, v_2 e v_3 formam, nessa ordem, uma base ortonormal destrógrá, isto é, seus módulos são iguais a 1, o produto escalar de um dos vetores pelos outros dois é nulo, e $v_1 \times v_2 = v_3$, $v_2 \times v_3 = v_1$ e $v_3 \times v_1 = v_2$. Logo, a matriz, cujas colunas são compostas por esses vetores, assume o papel da matriz de rotação. Portanto, a matriz obtida pela translação das coordenadas dos vértices, fornecida pela Tabela 7.1, em relação ao centro de massa inicial O' , multiplicada pela matriz de rotação, (v_1, v_2, v_3) , resulta nas coordenadas dos vértices finais, indicadas pela Tabela 7.3.

Tabela 7.3 - Coordenadas finais dos vértices do asteroide Geographos.

Vértice	Abcissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$-5,4936922258 \times 10^{-3}$	$-1,1131528731 \times 10^0$	$1,1742376646 \times 10^{-1}$
2	$3,0707257937 \times 10^{-1}$	$-1,0456184846 \times 10^0$	$1,1620966676 \times 10^{-1}$
3	$1,3965186106 \times 10^{-1}$	$-9,3738563032 \times 10^{-1}$	$3,7707484886 \times 10^{-1}$

(Continua)

Tabela 7.3 - Conclusão

Vértice	Abcissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
4	$-1,6269800424 \times 10^{-1}$	$-1,0047542368 \times 10^0$	$3,9715329132 \times 10^{-1}$
5	$-3,2696055116 \times 10^{-1}$	$-1,2010247471 \times 10^0$	$1,2058868088 \times 10^{-1}$
6	$-1,5288962807 \times 10^{-1}$	$-1,1066473635 \times 10^0$	$-1,9162828241 \times 10^{-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮
8192	$-2,2545576671 \times 10^{-1}$	$-8,6231270225 \times 10^{-1}$	$-7,1339297058 \times 10^{-1}$

Fonte: Produção do autor.

Após a translação e a rotação descritas, as dimensões do asteroide, em km, nas direções principais passam a ser $-2,4252 \leq \xi \leq 2,6925$, $-1,2010 \leq \eta \leq 1,1967$ e $-0,9698 \leq \zeta \leq 1,0106$, o centro de massa final está localizado no ponto de coordenadas dadas pela Equação (7.21)

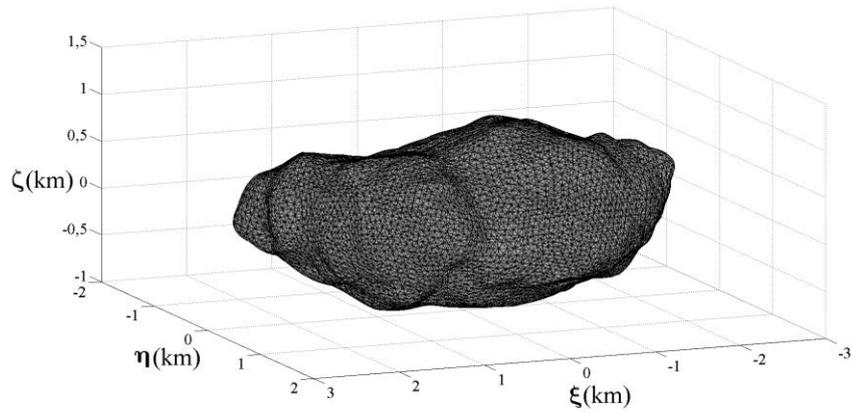
$$(\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{\zeta}_0) = (3,013074712 \times 10^{-17}; -4,336746987 \times 10^{-17}; -2,219684470 \times 10^{-17}) \quad (7.21)$$

o volume final do asteroide é igual ao volume inicial, e a Equação (7.22) fornece o tensor de inércia final, expresso em km²:

$$I_F = \begin{bmatrix} 0,3886037986275 & 1,253018408 \times 10^{-16} & -4,774674946 \times 10^{-16} \\ 1,253018408 \times 10^{-16} & 1,3243168519161 & -7,451247232 \times 10^{-17} \\ -4,774674946 \times 10^{-16} & -7,451247232 \times 10^{-17} & 1,3813956513770 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

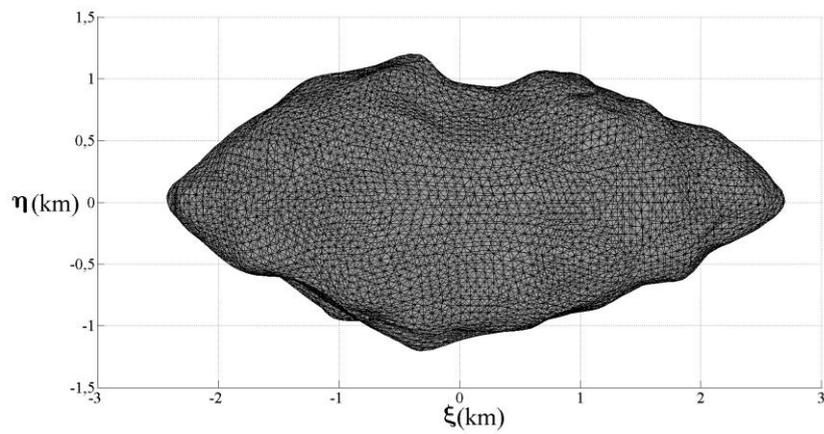
constatando-se que os produtos de inércia estão próximos de zero, e, conseqüentemente, o novo sistema de coordenadas se aproxima dos eixos principais de inércia. Além disso, observa-se, mais uma vez, que $I_{\xi\xi} < I_{\eta\eta} < I_{\zeta\zeta}$, ou seja, o maior momento de inércia é em relação ao eixo ζ , o intermediário, em relação ao eixo η , enquanto, que o menor, é em relação ao eixo ξ . Portanto, baseado nas Tabelas 7.2 e 7.3, o modelo poliédrico para o asteroide Geographos, tendo 8192 vértices e 16380 faces, é ilustrado na Figura 7.2, enquanto que as Figuras 7.3, 7.4 e 7.5 representam as três vistas do asteroide.

Figura 7.1 - Modelo poliédrico do Geographos após translação e rotação.



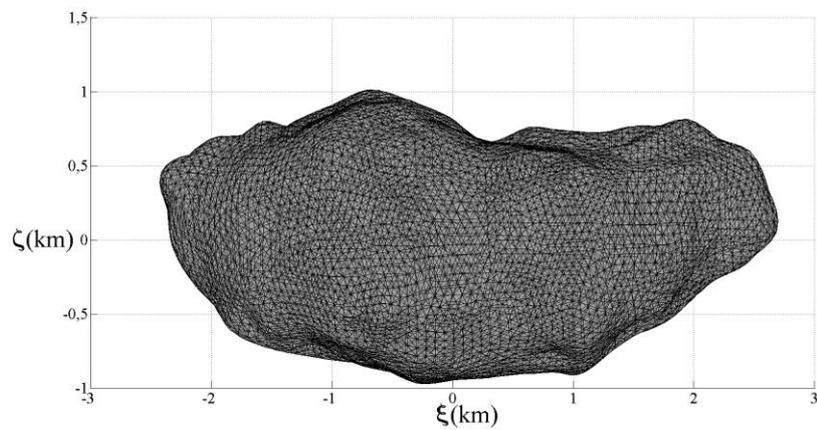
Fonte: Produção do autor.

Figura 7.2 - Vista $\xi - \eta$ do asteroide Geographos.



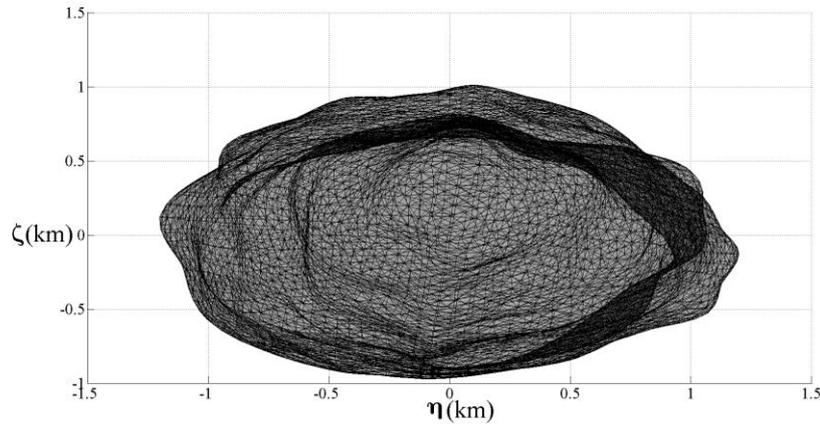
Fonte: Produção do autor.

Figura 7.3 - Vista $\xi - \zeta$ do asteroide Geographos.



Fonte: Produção do autor.

Figura 7.4 - Vista η - ζ do asteroide Geographos.



Fonte: Produção do autor.

7.3 Modelo do campo gravitacional do asteroide 1620 Geographos utilizando o método da expansão do potencial em série

O modelo poliédrico que servirá de referência para o estudo do asteroide 1620 Geographos, apresenta 8192 vértices e 16380 faces, levando em consideração, que os vértices finais foram obtidos, a partir de uma translação e de uma rotação dos vértices iniciais, os quais foram fornecidos por Ostro e Hudson (2004), conforme os procedimentos descritos no item 7.2. Para o desenvolvimento do modelo do campo gravitacional desse asteroide, estabelece-se até o grau 6 para a expansão da série de seu potencial. Assim, de acordo com os dados de entrada, Tabelas 7.2 e 7.3, aplicando o método da expansão em série do potencial gravitacional e utilizando o procedimento desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), para os cálculos das integrais correspondentes, considerando (x, y, z) as coordenadas de um ponto P , exterior à esfera de volume equivalente ao asteroide, a Equação (7.23) representa o termo Kepleriano do campo gravitacional

$$U_0 = \frac{GM}{\rho} \quad (7.23)$$

A Equação (7.24) expressa o termo de grau 1 da expansão do potencial em série relativo ao asteroide Geographos:

$$U_1 = \frac{GM}{\rho^3} \left[2,92650 \times 10^{-17} x - 4,32710 \times 10^{-17} y - 2,20720 \times 10^{-17} z \right] \quad (7.24)$$

cujo valor está muito próximo de zero.

A Equação (7.25) corresponde ao termo de grau 2 da mesma expansão

$$U_2 = \frac{GM}{\rho^5} \left[0,964252453019x^2 - 3,75262 \times 10^{-16} xy - 0,439317126914y^2 \right. \\ \left. + 1,43270 \times 10^{-15} xz + 2,23023 \times 10^{-16} yz - 0,524935326105z^2 \right], \quad (7.25)$$

enquanto que a Equação (7.26) corresponde ao termo de grau 3 da mesma expansão

$$U_3 = \frac{GM}{\rho^7} \left[0,235758077925046x^3 + 0,281789724557831x^2y \right. \\ - 0,363936701965148xy^2 - 0,065446903933773y^3 \\ + 0,536895751825302x^2z + 0,025088982769865xyz \quad (7.26) \\ - 0,147412233903735y^2z - 0,343337531809989xz^2 \\ \left. - 0,085449012756511yz^2 - 0,129827839307189z^3 \right]$$

Já a Equação (7.27) exhibe o termo de grau 4 do desenvolvimento da referida série

$$U_4 = \frac{GM}{\rho^9} \left[2,137362677135403x^4 + 0,107625649330784x^3y \right. \\ - 6,362671008012771x^2y^2 - 0,107991581761213xy^3 \\ + 0,798577053753107y^4 + 0,716744235680366x^3z \\ + 0,093585202344604x^2yz - 0,456683160522754xy^2z \quad (7.27) \\ - 0,028254411599839y^3z - 6,461505054799647x^2z^2 \\ + 0,001097797291285xyz^2 + 1,571208685494131y^2z^2 \\ - 0,564516515506115xz^3 - 0,002940655848362yz^3 \\ \left. + 0,815049394884253z^4 \right]$$

bem como, a Equação (7.28) mostra o termo de grau 5 da expansão que contribui na perturbação do campo gravitacional desse asteroide

$$\begin{aligned}
U_5 = \frac{GM}{\rho^{11}} & \left[1,024198293373584x^5 + 1,317881769901093x^4y \right. \\
& - 5,311814632195827x^3y^2 - 1,843862639469319x^2y^3 \\
& + 2,037730199541497xy^4 + 0,152273905707668y^5 \\
& + 4,784311811345959x^4z + 0,213460934265896x^3yz \\
& - 6,991467739240960x^2y^2z + 0,095153651524860xy^3z \\
& + 0,565829101881577y^4z - 4,930168301540015x^3z^2 \\
& - 2,375702700998599x^2yz^2 + 3,709062699338498xy^2z^2 \\
& + 0,321123582392642y^3z^2 - 7,238134376278265x^2z^3 \\
& - 0,308614585790757xyz^3 + 1,198831042650499y^2z^3 \\
& + 1,846907034213591xz^4 + 0,235388658970112yz^4 \\
& \left. + 0,603930333362777z^5 \right] \tag{7.28}
\end{aligned}$$

Por fim, a Equação (7.29) apresenta o termo de grau 6 na expansão do potencial

$$\begin{aligned}
U_6 = \frac{GM}{\rho^{13}} & \left[6,512431757849049x^6 + 1,704482398604403x^5y \right. \\
& - 52,153342164119415x^4y^2 - 4,544459023742196x^3y^3 \\
& + 39,966867555091057x^2y^4 + 1,145780999826854xy^5 \\
& - 2,244643701086451y^6 + 6,980757481962977x^5z \\
& + 2,889070162751763x^4yz - 17,458524447747031x^3y^2z \\
& - 3,068281094983093x^2y^3z + 4,549576059924042xy^4z \\
& + 0,181432953252802y^5z - 45,5331342036163121x^4z^2 \\
& - 3,411446914817442x^3yz^2 + 73,118847654170151x^2y^2z^2 \\
& + 2,175567072958049xy^3z^2 - 6,297212038794298y^4z^2 \\
& - 17,449683457294245x^3z^3 - 2,709859230520433x^2yz^3 \\
& + 8,359372327898947xy^2z^3 + 0,417983854151692y^3z^3 \\
& + 33,346659594587954x^2z^4 + 0,617939920929697xyz^4 \\
& - 5,889262570234060y^2z^4 + 4,398967804398379xz^5 \\
& \left. + 0,145590766806536yz^5 - 1,830493134956926z^6 \right] \tag{7.29}
\end{aligned}$$

Portanto, o modelo para o campo gravitacional do asteroide Geographos, desenvolvido até o grau 6, adotando a técnica da decomposição poliédrica, associada ao método da expansão do potencial em uma série convergente, tem como resultado, o somatório das funções expressas da Equação (7.23) até a Equação (7.29), resultando na Equação (7.30):

$$U = \sum_{i=0}^6 U_i . \quad (7.30)$$

Quanto à homogeneidade da função dada pela Equação (7.30), utilizando as Equações (6.31), (6.32) e (6.33), empregadas, anteriormente, no estudo do asteroide Itokawa, obtém-se as Tabelas 7.4 e 7.5, nas quais, n e \tilde{n} representam o grau da homogeneidade da função potencial gravitacional.

Tabela 7.4 - Estudo do grau de homogeneidade n do potencial do Geographos.

Coordenadas dos pontos (km)	Valor de n
(10,10,10) e (2,2,2)	-0,995566692710110
(10,10,10) e (5,5,5)	-0,999755134314205
(20,20,20) e (10,10,10)	-0,999983877768924
(100,100,100) e (10,10,10)	-0,999994770348825
(60,60,60) e (30,30,30)	-0,999999741100445
(100,100,100) e (50,50,50)	-0,999999958214964
(1000,1000,1000) e (100,100,100)	-0,999999998685046
(1000,1000,1000) e (200,200,200)	-0,999999999803400
(1000,1000,1000) e (500,500,500)	-0,99999999997702
(10000,10000,10000) e (1000,1000,1000)	-0,99999999999061
(10000,10000,10000) e (5000,5000,5000)	-0,99999999999979

Fonte: Produção do autor.

Tabela 7.5 - Estudo do grau de homogeneidade \tilde{n} do potencial do Geographos.

Coordenada do ponto (km)	Valor de \tilde{n}
(3,4,5)	-0,989109037709088
(3,3,3)	-0,994389046098404
(5,5,5)	-0,999279255133213
(10,10,10)	-0,999953507614113
(100,200,300)	-0,999994359794729
(150,150,160)	-0,999999343049989
(100,100,100)	-0,999999989945292
(200,200,200)	-0,999999998984233
(400,400,400)	-0,999999999888031
(500,500,500)	-0,999999999944206
(1000,1000,1000)	-0,999999999993409

Fonte: Produção do autor.

De acordo com os valores encontrados para os parâmetros n e \tilde{n} , respectivamente, nas Tabelas 7.4 e 7.5, conclui-se que o modelo do potencial U do asteroide Geographos comporta-se aproximadamente como uma função homogênea de grau -1 nas variáveis x , y e z .

Novamente, analisando, exclusivamente, a perturbação relativa ao potencial gravitacional, devido à distribuição irregular de massa do asteroide, a partir da obtenção do seu modelo matemático, o seu gradiente representará a resultante do vetor força gerada em um veículo espacial pelo asteroide, possibilitando estudar o comportamento dinâmico de um satélite imerso nesse campo gravitacional. Logo, de acordo com a Equação (7.30), a resultante da referida força é expressa pela Equação (7.31)

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\sum_{i=0}^6 U_i \right) = \nabla U_0 + \sum_{i=1}^6 \nabla U_i \quad (7.31)$$

e, levando em conta que ∇U_0 configura a força relativa ao campo central, conclui-se que $\sum_{i=1}^6 \nabla U_i$ caracteriza a perturbação dessa força em virtude da não esfericidade do asteroide.

7.4 Modelagem do potencial do asteroide 1620 Geographos utilizando o método das concentrações de massa

Segundo o método poliédrico, decompõe-se a superfície do asteroide em vários triângulos, ligando seus vértices ao seu centro de massa, obtendo tetraedros, cada qual com seu respectivo baricentro G_i . Utilizando, novamente, os dados coletados pelo rádio telescópio de Arecibo e disponibilizados pelo JPL/NASA, Ostro et al. (2004), refinados pela translação e rotação descritos no item 6.2, adota-se o mesmo modelo assumido na aplicação do método da expansão em série do potencial, ou seja, 16380 faces e 8192 vértices, apresentados pelas Tabelas 7.2 e 7.3, respectivamente.

De forma análoga ao procedimento apresentado no estudo do Itokawa, assumindo que o Geographos tenha densidade constante, após calcular seus correspondentes volumes e centros de massa, segundo as Equações (6.36) e (6.37), concentra-se a massa de cada tetraedro, M_i , em seu respectivo baricentro, o qual passa a ser o centro de atração secundário referente ao corpo não esférico. Logo, a divisão do volume do asteroide em vários tetraedros, permite estabelecer os elementos fundamentais para o cálculo aproximado da perturbação devido ao campo gravitacional não ser central. Portanto, a Equação (7.32) fornece o potencial de uma massa puntiforme m , localizada no ponto $P(x, y, z)$, em relação ao asteroide de massa total M

$$U = Gm \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\sqrt{\left(x - \xi_{G_i}\right)^2 + \left(y - \eta_{G_i}\right)^2 + \left(z - \zeta_{G_i}\right)^2}}. \quad (7.32)$$

Lembrando que a Equação (6.40) é a resultante da força gravitacional perturbadora, F_{GP} , gerada no veículo espacial pelo corpo irregular, a determinação dos componentes da força nas direções correspondentes permite aplicá-los ao ambiente de simulação

STRS, viabiliza simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, visto que, pela análise da força perturbadora, determina-se a variação da velocidade, ΔV , possibilitando implementar manobras, assim com corrigi-las.

7.5 Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Geographos utilizando a expansão do potencial em série

Análoga à metodologia aplica nos cálculos dos coeficientes dos harmônicos esféricos associados ao potencial do cubo homogêneo e do asteroide Itokawa, considera-se o potencial de grau 1, relativo ao asteroide Geographos, dado pela Equação (7.24), e o potencial de mesmo grau, escrito em função dos harmônicos esféricos e de seus correspondentes coeficientes, dado pela Equação (6.45), na qual C_{10} , C_{11} e S_{11} são os coeficientes a serem determinados, e os demais elementos que constam na equação, são os mesmos descritos anteriormente.

Igualando as funções potenciais de primeiro grau, em coordenadas cartesianas e nos harmônicos esféricos, obtém-se a Equação (7.33):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R\rho)} \left[2,92650 \times 10^{-17} x - 4,32710 \times 10^{-17} y - 2,20720 \times 10^{-17} z \right] = \\ = C_{10} + C_{11} P_{11}(\sin \theta) \cos \phi + S_{11} P_{11}(\sin \theta) \sin \phi \end{aligned} \quad (7.33)$$

Considerando os pontos $A_1(8,5,5)$, $A_2(6,7,8)$ e $A_3(4,6,5)$, coordenadas em km, e adotando $R_M = 1,2988$ km, isto é, o raio da esfera de volume equivalente ao volume do Itokawa, obtém-se o sistema linear de equações dado pela Equação (7.34):

$$\begin{cases} 0,4682929C_{10} - 0,7492686C_{11} - 0,4682929S_{11} = -6,6772314 \times 10^{-18} \\ 0,6553855C_{10} - 0,4915392C_{11} - 0,5734623S_{11} = -1,9167890 \times 10^{-17} \\ 0,5698029C_{10} - 0,4558423C_{11} - 0,6837635S_{11} = -2,2192648 \times 10^{-17} \end{cases} \quad (7.34)$$

cuja solução é formada pelos coeficientes dos harmônicos esféricos não normalizados, expressos pela Equação (7.35)

$$\begin{aligned} C_{10} &= -1,6994275874 \times 10^{-17} \\ C_{11} &= -2,2532497108 \times 10^{-17} \quad S_{11} = 3,3316383898 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Como $C_{10} = C_{11} = S_{11} \cong 0$, pelos mesmos motivos apresentados para o caso do asteroide Itokawa, conclui-se que o centro de massa do Geographos coincide com a origem do sistema de coordenadas.

Visto que o potencial de grau 2, relativo ao asteroide Geographos, escrito em função das coordenadas cartesianas, é dado pela Equação (7.25), e o potencial de mesma ordem, escrito em coordenadas esféricas, é dado pela Equação (6.54), igualando-os, obtém-se a Equação (7.36).

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R\rho)^2} & \left[0,964252453019x^2 - 3,75262 \times 10^{-16} xy - 0,439317126914y^2 \right. \\ & \left. + 1,43270 \times 10^{-15} xz + 2,23023 \times 10^{-16} yz - 0,524935326105z^2 \right] = \quad (7.36) \\ & = C_{20}P_2(\text{sen } \theta) + C_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\cos \phi + S_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\text{sen } \phi \\ & + C_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\cos(2\phi) + S_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\text{sen}(2\phi) \end{aligned}$$

Considerando os pontos $A_1(8,5,5)$, $A_2(6,7,8)$, $A_3(4,6,5)$, $A_4(9,5,7)$ e $A_5(10,9,4)$, coordenadas em km, obtém-se o sistema linear dado pela Equação (7.37):

$$\begin{cases} -0,1710C_{20} - 1,0526C_{21} + 1,0263C_{22} - 0,6578S_{21} + 2,1052S_{22} = 0,195556 \\ 0,1442C_{20} - 0,9664C_{21} - 0,2617C_{22} - 1,1275S_{21} + 1,6912S_{22} = -0,081201 \\ -0,0129C_{20} - 0,7792C_{21} - 0,7792C_{22} - 1,1688S_{21} + 1,8701S_{22} = -0,104018 \\ -0,0258C_{20} - 1,2193C_{21} + 1,0838C_{22} - 0,6774S_{21} + 1,7419S_{22} = 0,158339 \\ -0,3781C_{20} - 0,6091C_{21} + 0,2893C_{22} - 0,5482S_{21} + 2,7411S_{22} = 0,157809 \end{cases} \quad (7.37)$$

resultando nos coeficientes não normalizados expressos pela Equação (7.38)

$$\begin{aligned} C_{20} & = -0,3111910772, C_{21} = -2,831040430 \times 10^{-16}, S_{21} = -4,407070648 \times 10^{-17} \\ C_{22} & = 0,1386768706 \text{ e } S_{22} = -3,707698816 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Lembrando que, segundo Kaula (1966), a normalização dos coeficientes é obtida pela Equação (6.58), então, os coeficientes normalizados são expressos pela Equação (7.39):

$$\begin{aligned} \bar{C}_{20} & = -0,13916888056 \\ \bar{C}_{21} & = -2,19291448742 \times 10^{-16} & \bar{S}_{21} & = -3,41370224513 \times 10^{-17} \\ \bar{C}_{22} & = 0,21483728407 & \bar{S}_{22} & = -5,74394230747 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Devido a $C_{21} = S_{21} = S_{22} \cong 0$, assim como o ocorrido com o asteroide Itokawa, conclui-se que os eixos coordenados do Geographos estão alinhados e orientados com os eixos principais de inércia.

Aplicando o procedimento análogo às demais graus dos potenciais calculados, obtém-se os coeficientes dos harmônicos esféricos correspondentes até o grau 4 para o asteroide Geographos, mostrado na Tabela 7.6.

Tabela 7.6 - Coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados do Geographos.

n	m	\bar{C}_{nm}	\bar{S}_{nm}
0	0	$1,00000000000 \times 10^0$	-
1	0	$-9,81164975033 \times 10^{-18}$	-
1	1	$1,30091432708 \times 10^{-17}$	$-1,92352232121 \times 10^{-17}$
2	0	$-1,39168880563 \times 10^{-1}$	-
2	1	$2,19291448742 \times 10^{-16}$	$3,41370224513 \times 10^{-17}$
2	2	$2,14837284077 \times 10^{-1}$	$-5,7439423075 \times 10^{-17}$
3	0	$-2,23975653944 \times 10^{-2}$	-
3	1	$-2,41812440132 \times 10^{-2}$	$-6,01816940099 \times 10^{-3}$
3	2	$3,04816844290 \times 10^{-2}$	$1,11755886441 \times 10^{-3}$
3	3	$3,27162299837 \times 10^{-2}$	$1,89434255182 \times 10^{-2}$
4	0	$9,54784470416 \times 10^{-2}$	-
4	1	$-2,09121203410 \times 10^{-2}$	$-1,08934543620 \times 10^{-4}$
4	2	$-1,40274087025 \times 10^{-1}$	$1,91706710524 \times 10^{-5}$
4	3	$1,64296616904 \times 10^{-2}$	$1,70592884065 \times 10^{-3}$
4	4	$1,84121906267 \times 10^{-1}$	$4,26943946008 \times 10^{-3}$

Fonte: Produção do autor.

7.6 Determinação direta dos coeficientes de Stokes para o asteroide (1680) Geographos

Aplicando as integrais apresentadas pelas Equações (6.65) e (6.66), obtém-se diretamente os coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao asteroide Geographos, os quais, são comparados com aqueles que foram determinados utilizando o modelo do potencial, calculando, inclusive, a diferença entre os coeficientes correspondentes até o grau 4, exibidos na Tabela 7.7.

Tabela 7.7 - Comparação entre os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados, calculados a partir do potencial e de forma direta.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000 \times 10^0$	$-4,80655738650 \times 10^{-15}$
\bar{C}_{10}	$-9,79601454348 \times 10^{-18}$	$-9,81164975033 \times 10^{-18}$	$-1,56352068454 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{11}	$1,30091432708 \times 10^{-17}$	$1,33774268917 \times 10^{-17}$	$3,68283620983 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{11}	$-1,92352232121 \times 10^{-17}$	$-1,92306176503 \times 10^{-17}$	$4,60556179763 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{20}	$-1,39168880563 \times 10^{-1}$	$-1,39168880563 \times 10^{-1}$	$1,59908644366 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$2,19291448742 \times 10^{-16}$	$2,19244611638 \times 10^{-16}$	$-4,68371035607 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{21}	$3,41370224513 \times 10^{-17}$	$3,41972149218 \times 10^{-17}$	$6,01924705451 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$2,14837284077 \times 10^{-1}$	$2,14837284077 \times 10^{-1}$	$-2,54817696169 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{22}	$-5,7439423075 \times 10^{-17}$	$-5,75682236650 \times 10^{-17}$	$1,28800590216 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$-2,23975653944 \times 10^{-2}$	$-2,23975653944 \times 10^{-2}$	$2,44398426272 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{31}	$-2,41812440132 \times 10^{-2}$	$-2,41812440132 \times 10^{-2}$	$-2,94213938070 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{31}	$-6,01816940099 \times 10^{-3}$	$-6,01816940099 \times 10^{-3}$	$-4,57774336166 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{32}	$3,04816844290 \times 10^{-2}$	$3,04816844290 \times 10^{-2}$	$-3,64069053832 \times 10^{-2}$
\bar{S}_{32}	$1,11755886441 \times 10^{-3}$	$1,11755886441 \times 10^{-3}$	$6,18260023408 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{33}	$3,27162299837 \times 10^{-2}$	$3,27162299837 \times 10^{-2}$	$2,59464772752 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{33}	$1,89434255182 \times 10^{-2}$	$1,89434255182 \times 10^{-2}$	$1,35986181825 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{40}	$9,54784470416 \times 10^{-2}$	$9,54784470416 \times 10^{-2}$	$-1,25459197462 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{41}	$-2,09121203410 \times 10^{-2}$	$-2,09121203410 \times 10^{-2}$	$-2,67384542548 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{41}	$-1,08934543620 \times 10^{-4}$	$-1,08934543620 \times 10^{-4}$	$-6,56402443707 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{42}	$-1,40274087025 \times 10^{-1}$	$-1,40274087025 \times 10^{-1}$	$1,09468810012 \times 10^{-17}$
\bar{S}_{42}	$1,91706710524 \times 10^{-5}$	$1,91706710524 \times 10^{-5}$	$-2,96074933058 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{43}	$1,64296616904 \times 10^{-2}$	$1,64296616904 \times 10^{-2}$	$1,25075304495 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{43}	$1,70592884065 \times 10^{-3}$	$1,70592884065 \times 10^{-3}$	$1,69972191681 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{44}	$1,84121906267 \times 10^{-1}$	$1,84121906267 \times 10^{-1}$	$-1,44281996774 \times 10^{-17}$
\bar{S}_{44}	$4,26943946008 \times 10^{-3}$	$4,26943946008 \times 10^{-3}$	$-2,45259252387 \times 10^{-19}$

Fonte: Produção do autor.

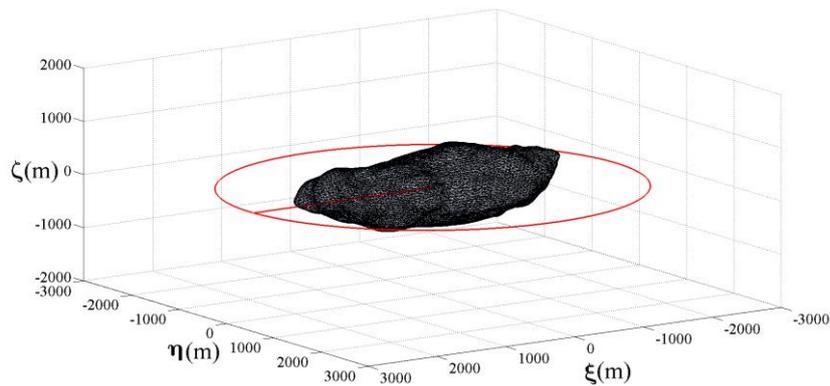
7.7 Simulações de trajetórias em torno do asteroide (1680) Geographos

Utilizando novamente o ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), (ROCCO, 2008 e 2012), de modo semelhante adotado ao asteroide Itokawa, são realizadas simulações de órbitas de um veículo espacial em torno do asteroide

Geographos, considerando apenas a perturbação do campo gravitacional em relação ao campo central, devido a seu formato irregular.

A Figura 7.5 apresenta uma órbita equatorial em torno do asteroide Geographos, adotando-se o semieixo maior igual a 2600 metros e os demais elementos keplerianos iguais a zero.

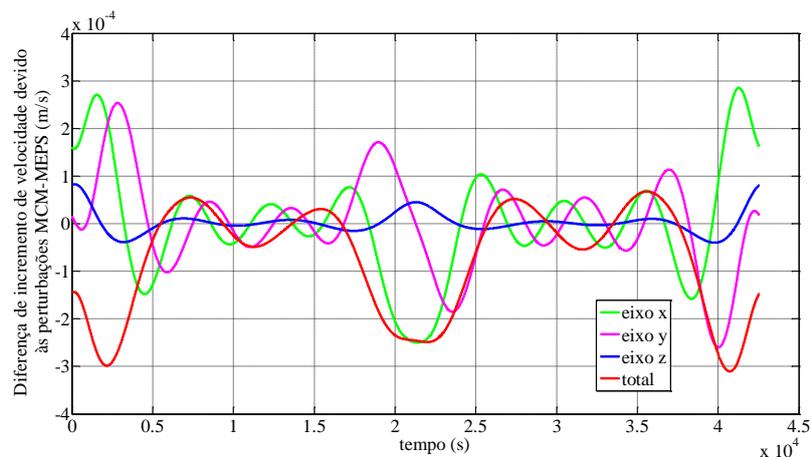
Figura 7.5 - Órbita equatorial em torno do asteroide Geographos.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 7.6 apresenta os gráficos das diferenças entre os incrementos das velocidades devido às perturbações, calculadas pela expansão do potencial em série e pelas concentrações de massa, em relação a cada eixo e total.

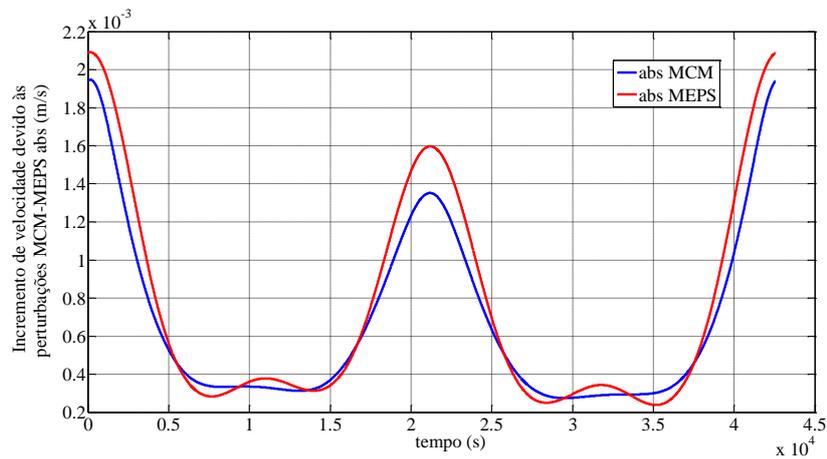
Figura 7.6 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 7.7, exibe o incremento de velocidade absoluta devido às perturbações, evidenciando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos na Figura 7.7.

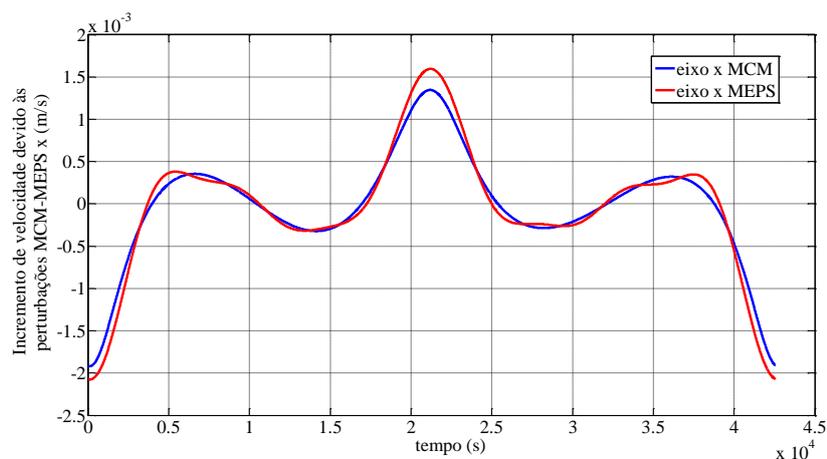
Figura 7.7 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

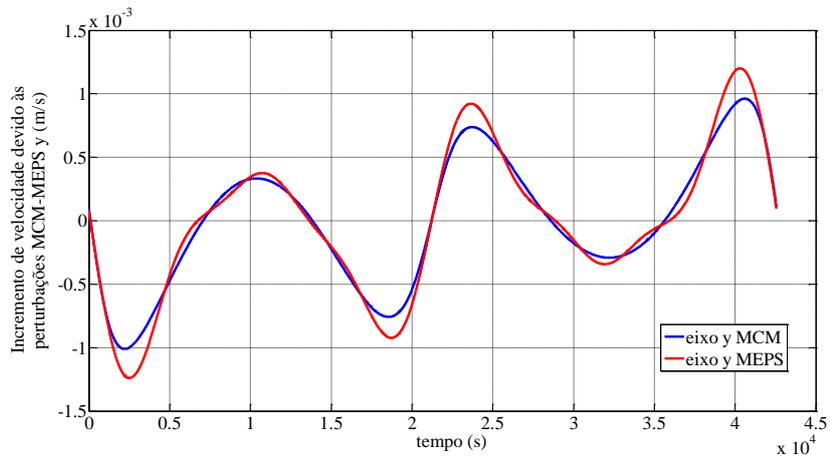
As Figuras 7.8, 7.9 e 7.10 apresentam os gráficos dos incrementos de velocidade, devido às perturbações, relativas a cada um dos eixos coordenados, também apresentando pequenas diferenças, enquanto que as Figuras 7.11 e 7.12 mostram os incrementos da velocidade devido às perturbações obtidas por meio dos modelos das concentrações de massa e da expansão em série, em cada eixo e total.

Figura 7.8 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x .



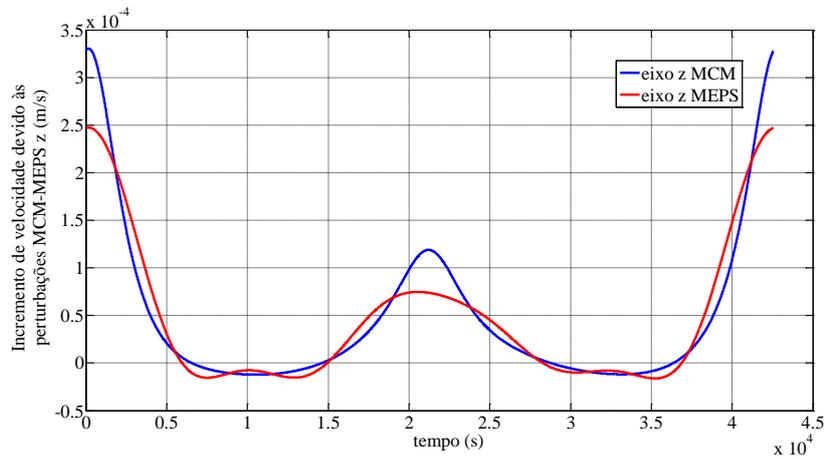
Fonte: Produção do autor.

Figura 7.9 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y.



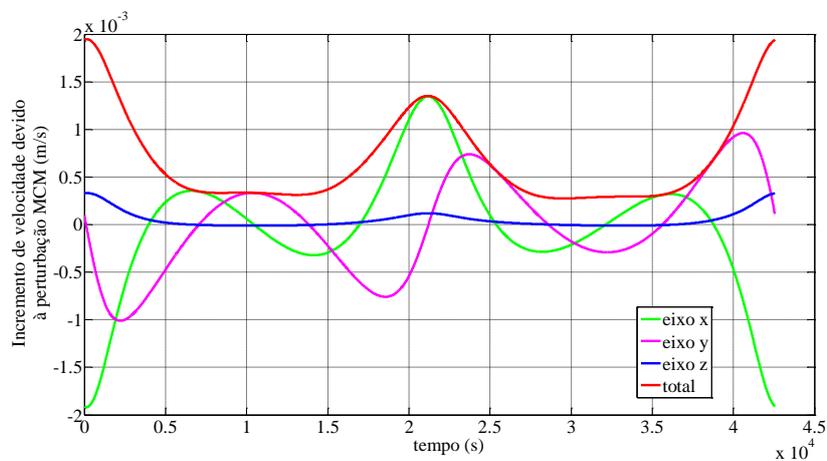
Fonte: Produção do autor.

Figura 7.10 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo z.



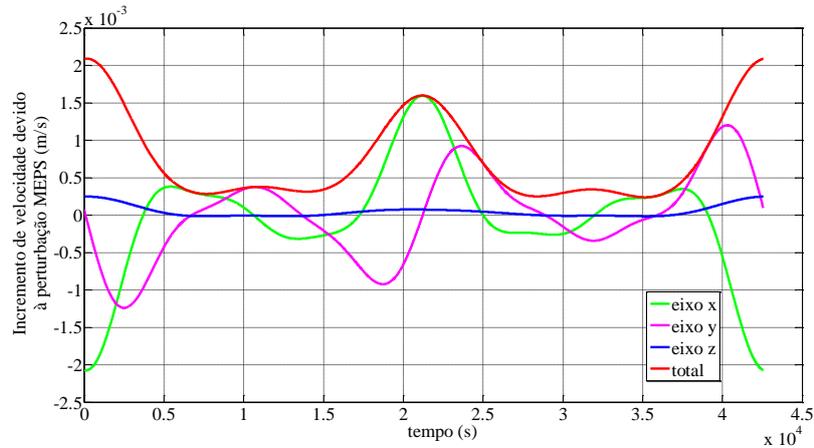
Fonte: Produção do autor.

Figura 7.11 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas às concentrações de massa em cada eixo e total.



Fonte: Produção do autor.

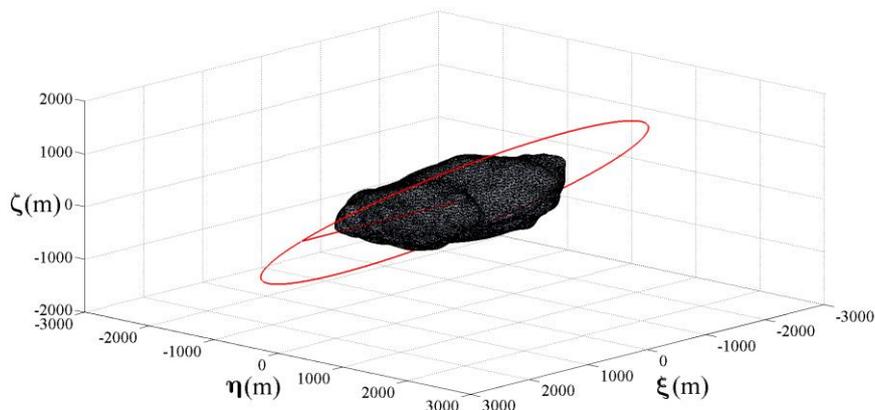
Figura 7.12 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas ao método da expansão do potencial em cada eixo e total.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 7.13 apresenta uma órbita em torno do asteroide Geographos, adotando o semi eixo maior igual a 2600 metros, ângulo de inclinação igual a 45° e os demais elementos keplerianos nulos.

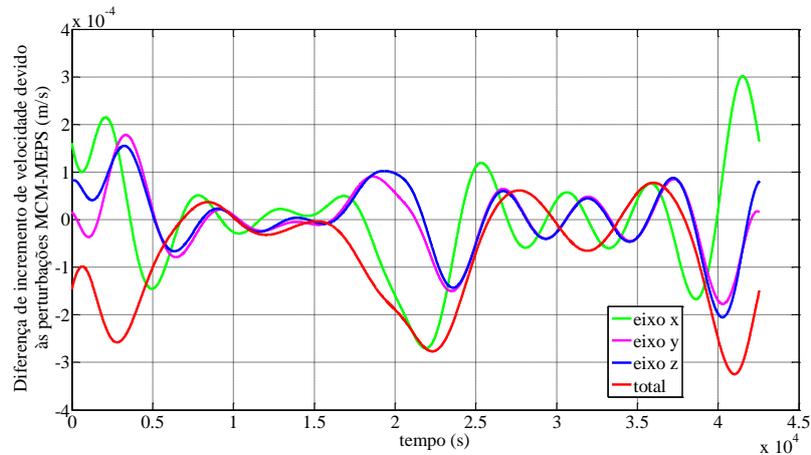
Figura 7.13 - Órbita com inclinação de 45° em torno do asteroide Geographos.



Fonte: Produção do autor.

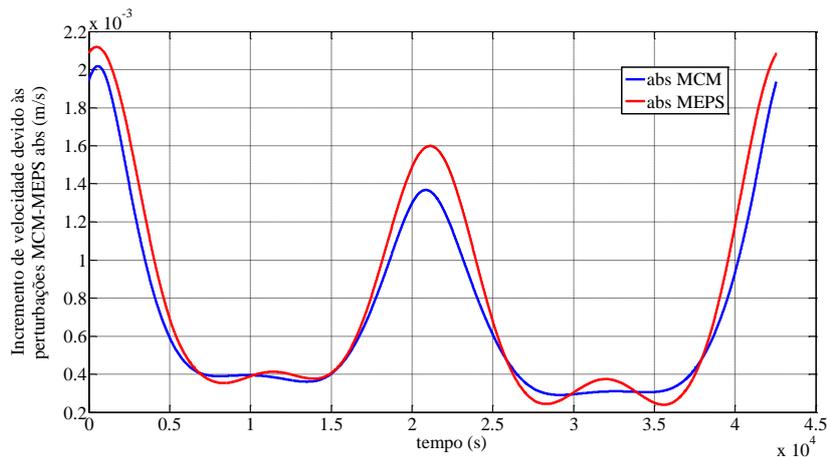
Devido à semelhança dos gráficos das diferenças, assim como os incrementos de velocidade, em razão das perturbações referentes às concentrações de massa e à expansão do potencial em série, em cada um dos eixos coordenados e total, somente os gráficos que apresentam as diferenças relativas e absolutas entre as velocidades foram colocados, como ilustram as Figuras 7.14 e 7.15.

Figura 7.14 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão do potencial em série e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

Figura 7.15 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.

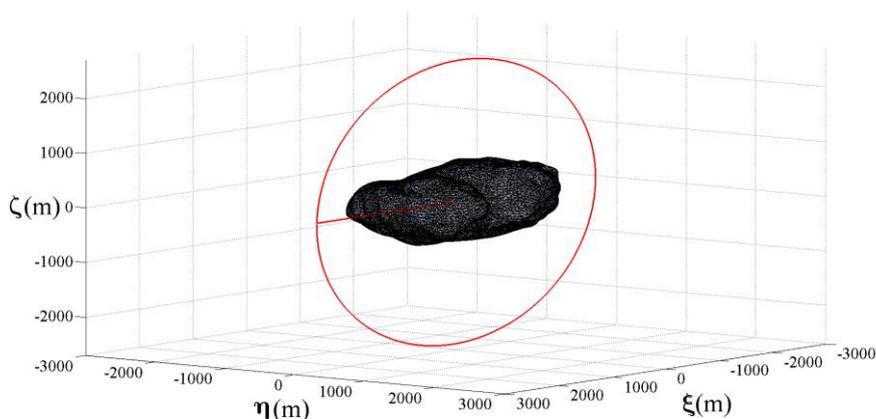


Fonte: Produção do autor.

Analisando as Figuras 7.14 e 7.15, verifica-se, novamente, que, em ambos os casos, essas diferenças são muito pequenas. Além disso, vale observar, mais uma vez, a conformidade entre os gráficos no caso da diferença absoluta das velocidades, levando a concluir que os dois modelos apresentam comportamentos semelhantes.

A Figura 7.16 apresenta uma órbita em torno do asteroide Geographos, adotando-se semieixo maior igual a 18000 metros, ângulo de inclinação igual a 90° e os demais elementos keplerianos nulos.

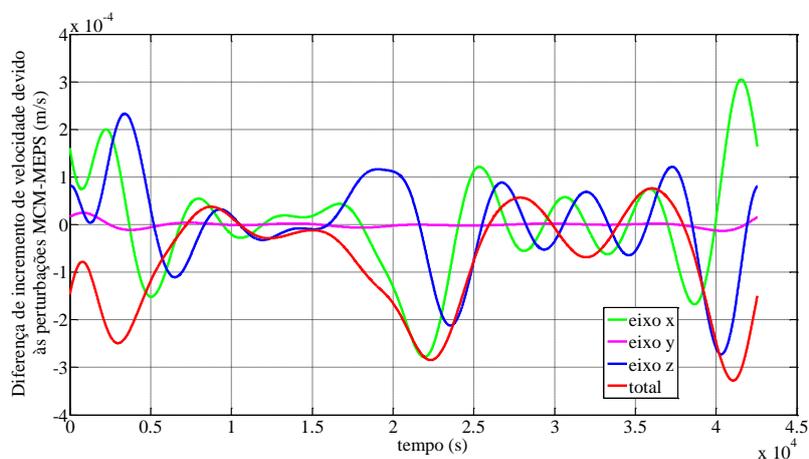
Figura 7.16 - Órbita com inclinação de 45° em torno do asteroide Geographos.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 7.17 apresenta os gráficos das diferenças entre as velocidades, em relação a cada eixo e total, devido às perturbações, calculadas por meio dos modelos obtidos pela expansão em série e pelas concentrações de massa.

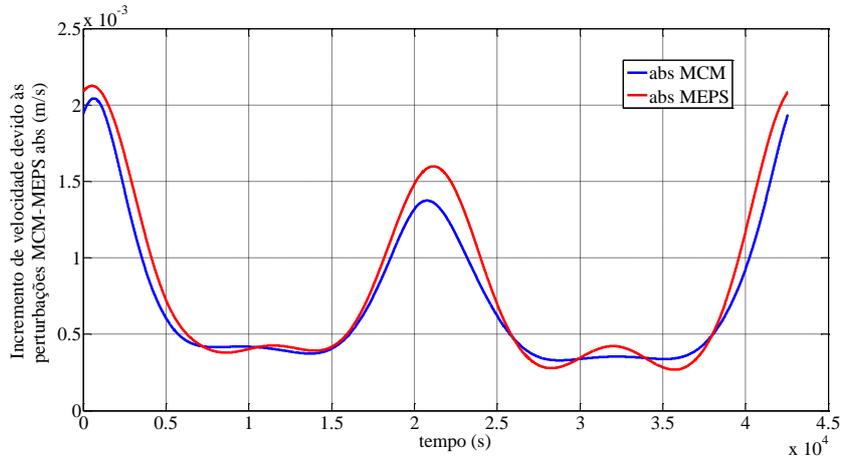
Figura 7.17 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 7.18, exibe a diferença absoluta entre as velocidades, constatando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos no caso da diferença absoluta das velocidades.

Figura 7.18 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

Comparando as Figuras 7.6, 7.14 e 7.17, correspondentes aos gráficos das diferenças relativas das velocidades em cada eixo coordenado e ao valor total, referentes às três simulações de uma órbita de um veículo espacial em torno do asteroide Itokawa, adotando o mesmo valor para o semieixo maior, 300 metros, e variando somente os ângulos de inclinação, isto é, 0° , 45° e 90° , respectivamente, verifica-se um comportamento semelhante em todos os casos, além de indicar que essas diferenças são quase nulas.

Em relação aos gráficos que apresentam os incrementos de velocidades absolutas devido às perturbações determinadas pelos dois modelos empregados, referentes às três simulações de órbitas em torno do asteroide Geographos, as Figuras 7.7, 7.15 e 7.18, mostram uma similaridade entre os resultados obtidos por ambos.

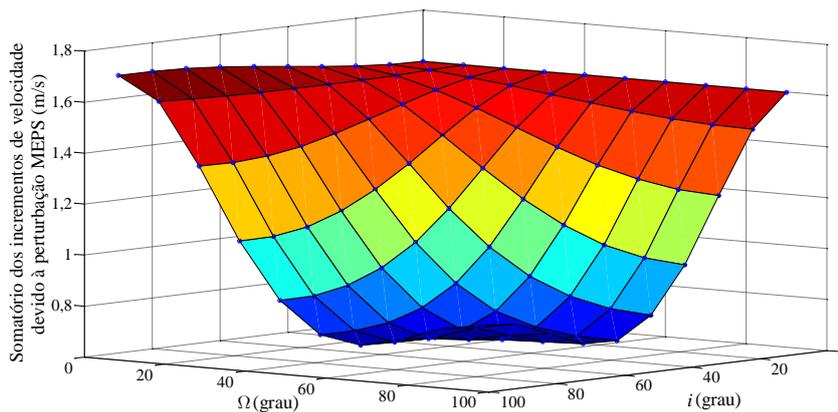
7.8 Estudo da perturbação gravitacional do asteroide Itokawa utilizando o modelo da expansão do potencial em série

De posse do modelo do campo gravitacional obtido pela expansão do potencial em série, seu gradiente fornecerá os componentes da resultante da força gerada no veículo espacial, permitindo aplicá-los ao ambiente de simulação STRS, possibilitando simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, avaliando as alterações do potencial. Para exemplificar uma aplicação que utiliza esta forma de estudo, pretende-se analisar a variação dos valores do modelo obtido para o potencial do

asteroide Geographos, em função do ângulo de inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente para alguns valores do semi-eixo maior, considerando nulos os demais elementos keplerianos.

Para investigar as alterações dos valores dos somatórios dos incrementos de velocidades devido à perturbação relativas ao método da expansão do potencial em série, adota-se inicialmente o valor de 2600 metros para o semieixo maior da órbita e estabelece-se uma variação de 10° , tanto para o ângulo de inclinação quanto para a ascensão reta do nodo ascendente, ambos iniciando em 0° e terminando em 90° . Dessa forma, a Figura 7.19 mostra o somatório do incremento de velocidade, também conhecido como integral do incremento de velocidade, em relação àqueles ângulos.

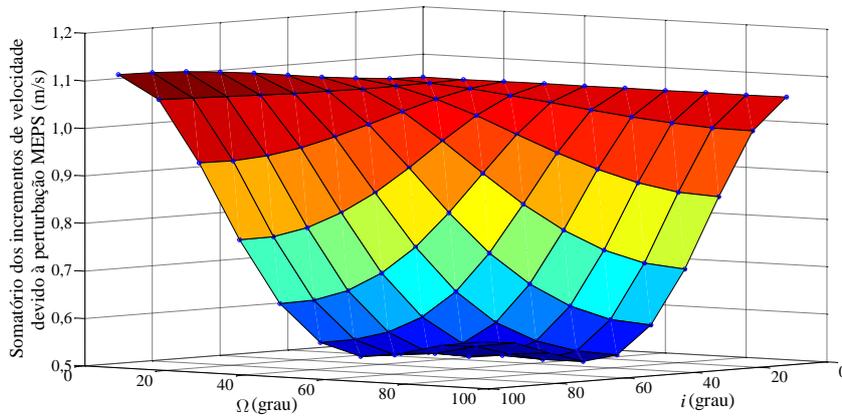
Figura 7.19 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 2600 metros.



Fonte: Produção do autor.

Adotando-se, agora, o valor de 3000 metros para o semi-eixo maior da órbita e procedendo da mesma forma em relação às variações dos ângulos de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente, a Figura 7.20 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

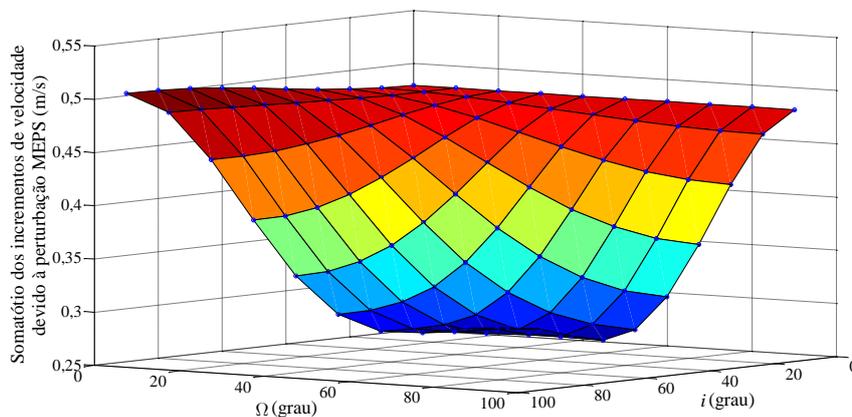
Figura 7.20 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 3000 metros.



Fonte: Produção do autor.

Adotando-se, agora, o valor de 4000 metros para o semi-eixo maior da órbita e procedendo da mesma forma em relação às variações dos ângulos de inclinação e ascensão reta do nodo ascendente, a Figura 7.21 mostra a variação do potencial em relação àqueles ângulos.

Figura 7.21 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 4000 metros.



Fonte: Produção do autor.

Analisando as Figuras 7.19, 7.20 e 7.21, constata-se que, devido ao aumento do semi-eixo maior, o valor do somatório dos incrementos de velocidade decresce, ou seja, a influência da perturbação do campo gravitacional diminui com o aumento da altitude. Verifica-se, também que, apesar de não se ter a função explícita dessas superfícies,

todas apresentam um comportamento gráfico semelhante no intervalo considerado, assim como possuem um valor mínimo, na vizinhança do ponto $(60^\circ, 70^\circ)$, no caso da Figura 7.19, na vizinhança do ponto $(60^\circ, 80^\circ)$, no caso da Figura 7.20, e $(60^\circ, 90^\circ)$, no caso da Figura 7.21, isto é, existem ângulos de inclinação e de ascensão reta do nodo ascendente, para os quais o efeito da perturbação do potencial é mínimo, conclusão de fundamental importância, tendo em vista, obter uma trajetória que otimize o consumo de combustível.

7.9 Conclusão

O objetivo deste capítulo foi determinar o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide 1620 Geographos, adotando a mesma metodologia utilizada para o cubo homogêneo, isto é, decompondo-o em elementos tetraédricos, neste caso, por meio da utilização dos dados fornecidos pelo JPL/NASA, aplicando, em seguida, o método da expansão do potencial em série. Também foi desenvolvido o modelo baseado nas concentrações de massa, tendo em vista, a confrontação dos resultados obtidos por ambos. Logo após realizar as três simulações apresentadas, analisando os gráficos das Figuras 7.5, 7.13 e 7.16, verifica-se a diferença entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos dois modelos, mesma constatação, relativa à diferença absoluta das velocidades, dadas pelos gráficos das Figuras 7.7, 7.15 e 7.18, ressaltando a conformidade entre os dois modelos, também verificada pelo incremento da velocidade, devido às perturbações, mostradas nas Figuras 7.11 e 7.12.

Apesar de ambos os modelos utilizarem a decomposição do asteroide em tetraedros, o modelo obtido pelo método da expansão do potencial em série apresenta a vantagem de expressar o potencial na forma de uma função polinomial simples, permitindo manipulá-la algebricamente, além de possibilitar sua participação em interações numéricas, enquanto que o método das concentrações de massa apresenta a vantagem da simplicidade em sua modelagem, pois, para determinar os centros de atrações secundários, basta encontrar o volume e o centro de massa de cada tetraedro, e acumular toda sua massa em seu respectivo baricentro.

Posteriormente à obtenção dos dois modelos, foram determinados os coeficientes dos harmônicos esféricos, com o auxílio do primeiro modelo, assim como, diretamente, por meio das integrais correspondentes, verificando a proximidade dos valores encontrados.

Por fim, para exemplificar uma utilização do modelo obtido pela expansão do potencial em série, realizou-se um estudo da variação dos valores do potencial em função da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente, estabelecendo uma variação de 10° para os dois ângulos, ambos iniciando em 0° e terminando em 90° , adotando cinco valores para o semi-eixo maior, e considerando nulos os demais elementos keplerianos. Dessa forma, foram obtidas três superfícies, concluindo que todas apresentam um ponto de mínimo. Verificou-se, também que, quanto mais distante do centro de massa do asteroide, menor é a influência do campo gravitacional.

8. RESULTADOS PARA O ASTEROIDE (433) EROS

O asteroide (433) Eros foi descoberto em 13 de agosto de 1898, concomitantemente e de forma independente, por Gustav Witt, diretor do Observatório Urania em Berlim, e por Auguste H.P. Charlois em Nice, França. Quebrando a tradição vigente, o asteroide recebeu um nome masculino: Eros, o deus grego do amor, filho de Mercúrio e Vênus.

No caso do asteroide (433) Eros, foram desenvolvidos dois estudos para a obtenção do modelo do campo gravitacional aplicando o método da expansão do potencial em série, assim como a determinação dos coeficientes dos harmônicos esféricos: o primeiro, considerando o formato poliédrico com 56644 faces e 28324 vértices, não levando em conta o refinamento dos dados, enquanto que o segundo, com 7790 faces e 3897 vértices, realizando o refinamento dos dados, de forma semelhante àqueles aplicados aos asteroides Itokawa e Geographos. Justifica-se a primeira abordagem, pois, apesar do número elevado de faces do modelo, e, conseqüentemente, exigindo um alto custo computacional, (MILLER et al., 2002), adotaram esse procedimento, permitindo confronta-los com os resultados obtidos pelo método desenvolvido neste trabalho, valida-o mais uma vez. O segundo estudo faz-se necessário, uma vez que, o objetivo central deste trabalho é apresentar uma metodologia na modelagem do campo gravitacional de um asteroide. Vale observar que, em ambos os casos, os dados utilizados foram coletados pela sonda NEAR e disponibilizados pela NASA (2001).

8.1 Modelo poliédrico para asteroide (433) Eros com 56644 faces sem correções

Segundo os dados coletados pela sonda NEAR (2001), o Eros possui dimensões de $33 \times 13 \times 13$ km, massa de $6,7237 \times 10^{15}$ kg, volume de $2,5182 \times 10^3$ km³, densidade $2,67$ g.cm⁻³ e período de rotação 5,270 horas, valores assumidos para os cálculos e simulações. Ao volume do asteroide, associa-se o raio médio $R_M = 16$ km.

A partir da técnica de decomposição do asteroide Eros em tetraedros, foram utilizando como elementos para implementações de cálculos e simulações, os dados coletados pela NEAR e disponibilizados pelo NASA, cujo modelo poliédrico adotado, apresenta 28324 vértices e 56644 faces, fornecidos por duas tabelas, uma contendo as coordenadas dos

vértices, e a outra, as relações entre as faces triangulares formadas e seus respectivos vértices, ilustradas pelas Tabelas 8.1 e 8.2, respectivamente.

Tabela 8.1 - Coordenadas dos vértices do asteroide Eros com 56644 faces.

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$4,216751751 \times 10^{-3}$	$4,216751751 \times 10^{-3}$	$-5,963385571 \times 10^0$
2	$1,082731400 \times 10^{-1}$	$1,082731400 \times 10^{-1}$	$-5,972927014 \times 10^0$
3	$-2,608977793 \times 10^{-2}$	$1,509652039 \times 10^{-1}$	$-5,976113671 \times 10^0$
4	$-1,372389908 \times 10^{-1}$	$6,465525462 \times 10^{-2}$	$-5,917734597 \times 10^0$
5	$-1,319846605 \times 10^{-1}$	$-7,605722917 \times 10^{-2}$	$-5,942086556 \times 10^0$
⋮	⋮	⋮	⋮
28324	$3,775170590 \times 10^{-3}$	$3,775170590 \times 10^{-3}$	$5,338895517 \times 10^0$

Fonte: Adaptação NEAR/NASA.

Tabela 8.2 - Vértices correspondentes a cada face triangular do asteroide Eros.

Face	Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3
1	14429	14430	14814
2	14429	14814	14813
3	14429	14813	14428
4	14429	14428	14044
5	14429	14044	14045
6	14429	14045	14430
⋮	⋮	⋮	⋮
56644	13462	13844	13461

Fonte: Adaptação NEAR/NASA.

Em função dos dados da Tabela 8.1, as dimensões do asteroide, em km, nas direções principais são $-17,6195 \leq \xi \leq 15,1196$, $-8,3388 \leq \eta \leq 8,6168$ e $-6,0744 \leq \zeta \leq 5,9854$.

Utilizando os dados fornecidos pelas Tabelas 8.1 e 8.2 e o método para o cálculo de integrais desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), pode-se calcular o volume aproximado do asteroide Eros, mediante à soma dos volumes dos tetraedros gerados pela sua decomposição, segundo o método poliédrico. Logo, a Equação (8.1) fornece o volume

$$V_{total} = \iiint_Q dv = \sum_{i=1}^{56644} /T_i/ \iiint_{W_i} dV_i = \sum_{i=1}^{56644} \frac{/T_i/}{6} = 2,51822657737 \times 10^3 \text{ km}^3 \quad (8.1)$$

A abscissa do centro de massa é dada pelas Equações (8.2) e (8.3)

$$\xi_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \xi dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{56644} /T_i/ \iiint_{W_i} (\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 Z) dX dY dZ \quad (8.2)$$

$$\xi_0 = -9,62882265158 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (8.3)$$

A ordenada do centro de massa é dada pelas Equações (8.4) e (8.5)

$$\eta_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \eta dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{56644} /T_i/ \iiint_{W_i} (\eta_1 X + \eta_2 Y + \eta_3 Z) dX dY dZ \quad (8.4)$$

$$\eta_0 = 2,44870004469 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (8.5)$$

A cota do centro de massa é dada pelas Equações (8.6) e (8.7)

$$\zeta_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \zeta dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{56644} /T_i/ \iiint_{W_i} (\zeta_1 X + \zeta_2 Y + \zeta_3 Z) dX dY dZ \quad (8.6)$$

$$\zeta_0 = 3,255844816906509 \times 10^{-2} \text{ km} \quad (8.7)$$

Logo, segundo os dados fornecidos, o centro de massa do asteroide está localizado no ponto O' , cujas coordenadas, medidas em km, são dadas pela Equação (8.8)

$$(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \left(-9,628822651 \times 10^{-3}; 2,4487000447 \times 10^{-3}; 3,2558448169 \times 10^{-2} \right) \quad (8.8)$$

De posse das coordenadas dos vértices, os momentos e produtos de inércia normalizados em relação à massa, são dados pelas Equações de (8.9) à (8.14)

$$\frac{I_{\xi\xi}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\eta^2 + \zeta^2) dv = 16,709338731343929 \text{ km}^2 \quad (8.9)$$

$$\frac{I_{\xi\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \eta \, dv = -9,320194169472239 \text{ km}^2 \quad (8.10)$$

$$\frac{I_{\xi\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \zeta \, dv = 0,033855022925441 \text{ km}^2 \quad (8.11)$$

$$\frac{I_{\eta\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \zeta^2) \, dv = 71,670483307697368 \text{ km}^2 \quad (8.12)$$

$$\frac{I_{\eta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \eta \cdot \zeta \, dv = 0,004096612334166 \text{ km}^2 \quad (8.13)$$

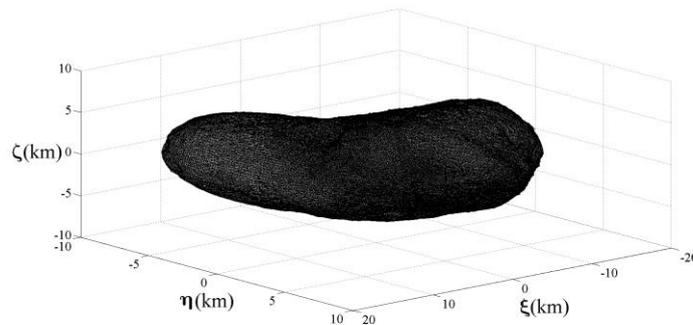
$$\frac{I_{\zeta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \eta^2) \, dv = 74,444582684759857 \text{ km}^2 \quad (8.14)$$

gerando o tensor de inércia normalizado, em km^2 , expresso pela Equação (8.15)

$$I = \begin{bmatrix} 16,709338731343929 & 9,320194169472239 & -0,033855022925441 \\ 9,320194169472239 & 71,670483307697368 & -0,004096612334166 \\ -0,033855022925441 & -0,004096612334166 & 74,444582684759857 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

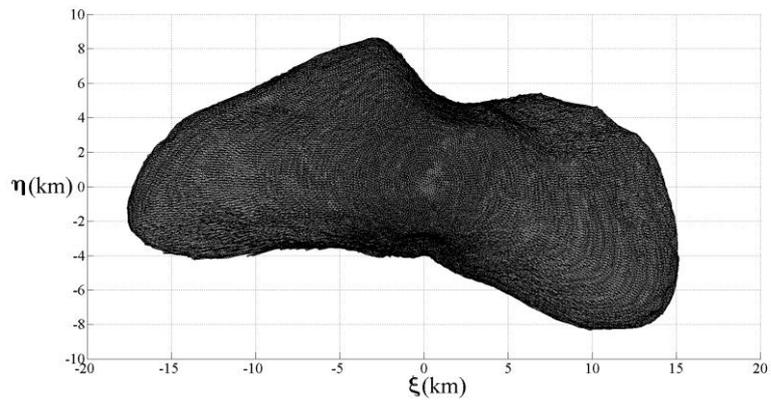
notando que $I_{\xi\xi} < I_{\eta\eta} < I_{\zeta\zeta}$. Portanto, baseado nas Tabelas 8.1 e 8.2, o modelo poliédrico para o asteroide Eros, é ilustrado na Figura 8.1, enquanto que as Figuras 8.2, 8.3 e 8.4 representam as três vistas do asteroide.

Figura 8.1 - Modelo poliédrico do asteroide Eros.



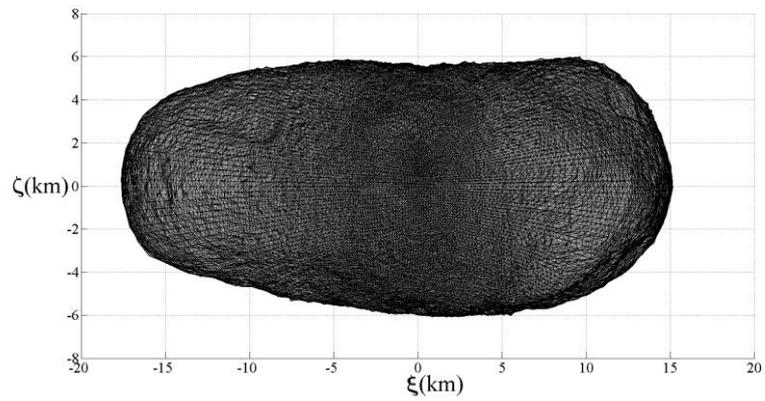
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.2 - Vista ξ - η do asteroide Eros.



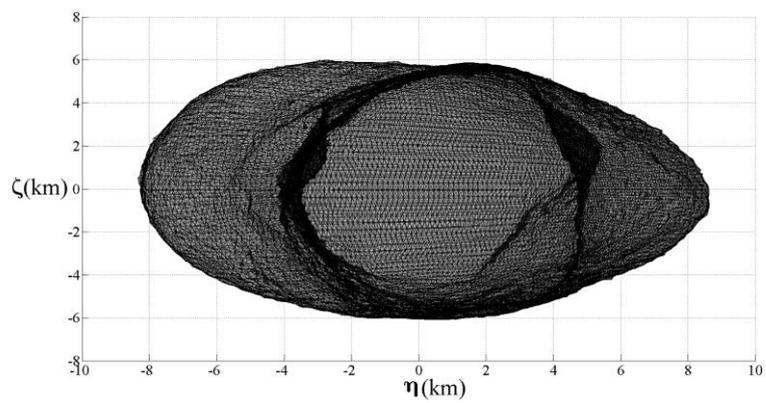
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.3 - Vista ξ - ζ do asteroide Eros.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.4 - Vista η - ζ do asteroide Eros.



Fonte: Produção do autor.

8.1.2 Modelo do campo gravitacional do asteroide (433) Eros com 56644 faces, sem correção, utilizando o método da expansão do potencial em série

O modelo poliédrico que servirá de referência para o estudo do asteroide (433) Eros, apresenta 28324 vértices e 56644 faces, os quais foram fornecidos pela NASA (2001). Devido ao número elevado de faces, o desenvolvimento do modelo do campo gravitacional desse asteroide, estabelece-se até a grau 4 para a expansão da série de seu potencial. Assim, de acordo com os dados de entrada, Tabelas 8.1 e 8.2, aplicando o método da expansão do potencial em série e utilizando o procedimento desenvolvido por Lien e Kajjia (1984), para os cálculos das integrais correspondentes, considerando (x, y, z) as coordenadas de um ponto P , exterior à esfera de volume equivalente ao asteroide, a Equação (8.16) representa o termo Kepleriano do campo gravitacional

$$U_0 = \frac{GM}{\rho} \quad (8.16)$$

A Equação (8.17) expressa o termo de grau 1 da expansão do potencial em série relativo ao asteroide Eros:

$$U_1 = \frac{GM}{\rho^3} [-0,009628822651x + 0,002448700044y + 0,032558448169z] \quad (8.17)$$

A Equação (8.18) corresponde ao termo de grau 2 da mesma expansão

$$U_2 = \frac{GM}{\rho^5} \left[56,348194264884680x^2 - 27,960582508416714xy \right. \\ \left. - 26,093522599645474y^2 + 0,101565068776322xz \right. \\ \left. + 0,012289837002498yz - 30,254671665239207z^2 \right] \quad (8.18)$$

enquanto que a Equação (8.19) corresponde ao termo de grau 3 da mesma expansão

$$\begin{aligned}
U_3 = \frac{GM}{\rho^7} & \left[-117,013021889968587x^3 - 336,507556280060625x^2y \right. \\
& + 242,572553428939636xy^2 + 82,082605337378864y^3 \\
& + 73,026077143738527x^2z - 35,220114872368971xyz \quad (8.19) \\
& - 16,261066494678727y^2z + 108,466512240966126xz^2 \\
& \left. + 90,259740267924032yz^2 - 18,921670216353267z^3 \right]
\end{aligned}$$

Por fim, a Equação (8.20) exhibe o termo de grau 4 do desenvolvimento da referida série

$$\begin{aligned}
U_4 = \frac{GM}{\rho^9} & \left[5476,386702387269636x^4 - 6321,328062504921435x^3y \right. \\
& - 13507,208008921209729x^2y^2 + 4288,028908764094457xy^3 \\
& + 1597,137692140289206y^4 - 60,858571304638458x^3z \\
& - 315,684382972727992x^2yz + 452,434430233887115xy^2z \quad (8.20) \\
& + 3,105410190887448y^3z - 19351,112205402408084x^2z^2 \\
& + 6099,897461222480935xyz^2 + 3924,381856079474494y^2z^2 \\
& - 89,952905439990580xz^3 + 102,122717466688550yz^3 \\
& \left. + 2571,121724887155598z^4 \right]
\end{aligned}$$

Portanto, o modelo para o campo gravitacional do asteroide Eros, desenvolvido até o grau 4, adotando a técnica da decomposição poliédrica, associada ao método da expansão do potencial em uma série convergente, tem como resultado, o somatório das funções expressas da Equação (8.16) à Equação (8.20), resultando na Equação (8.21):

$$U = \sum_{i=0}^4 U_i \quad (8.21)$$

Quanto à homogeneidade da função dada pela Equação (8.21), utilizando as Equações (6.31), (6.32) e (6.33), empregadas, anteriormente, no estudo do asteroide Itokawa, obtém-se as Tabelas 8.3 e 8.4, nas quais, n e \tilde{n} representam o grau da homogeneidade da função potencial gravitacional.

Tabela 8.3 - Estudo do grau de homogeneidade n do potencial do Eros.

Coordenadas dos pontos (km)	Valor de n
(180,180,180) e (18,18,18)	-0.99548111831970
(2000,2000,2000) e (200,200,200)	-0,99998336950992
(18000,18000,180000) e (180,180,180)	-0,99998942956809
(18000,9000,7000) e (18,9,7)	-1,00454768081093
(18000,9000,7000) e (180,90,70)	-1,00010798972006
(18000,9000,7000) e (1800,900,700)	-1,00000277118304

Fonte: Produção do autor.

Tabela 8.4 - Estudo do grau de homogeneidade \tilde{n} do potencial do Eros.

Coordenada do ponto (km)	Valor de \tilde{n}
(18,18,18)	-0,97537746254020
(180,180,180)	-0,99985666649177
(1800,1800,1800)	-1,00000279106280
(180,90,70)	-1,00096586208950
(1800,900,700)	-1,00001149899679
(18000,9000,7000)	-1,00000026719020

Fonte: Produção do autor.

De acordo com os valores encontrados para os parâmetros n e \tilde{n} , respectivamente, nas Tabelas 8.3 e 8.4, conclui-se que o modelo do potencial U do asteroide Eros comporta-se aproximadamente como uma função homogênea de grau -1 nas variáveis x , y e z .

Analisando, exclusivamente, a perturbação relativa ao potencial gravitacional, devido à distribuição irregular de massa do asteroide, a partir da obtenção do seu modelo matemático, o seu gradiente representará a resultante do vetor força gerada em um veículo espacial pelo asteroide, possibilitando estudar o comportamento dinâmico de

um satélite imerso nesse campo gravitacional. Logo, de acordo com a Equação (8.21), a resultante da referida força é expressa pela equação (8.22)

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\sum_{i=0}^4 U_i \right) = \nabla U_0 + \sum_{i=1}^4 \nabla U_i , \quad (8.22)$$

e, levando em conta que ∇U_0 configura a força relativa ao campo central, conclui-se que $\sum_{i=1}^4 \nabla U_i$ caracteriza a perturbação dessa força devido a não esfericidade do asteroide.

8.1.3 Modelagem do potencial do asteroide 433 Eros com 56644 faces, sem correção, utilizando o método das concentrações de massa

Segundo o método poliédrico, decompõe-se a superfície do asteroide em vários triângulos, ligando seus vértices ao seu centro de massa, obtendo tetraedros, cada qual com seu respectivo baricentro G_i . Utilizando, novamente, os dados coletados pela sonda NEAR e disponibilizados pela NASA, adota-se o mesmo modelo assumido na aplicação do método da expansão em série do potencial, ou seja, 28324 vértices e 56644 faces, apresentados pelas Tabelas 8.1 e 8.2, respectivamente.

De forma análoga ao procedimento apresentado no estudo dos asteroides Itokawa e Geographos, assumindo que o Eros tenha densidade constante, após calcular seus correspondentes volumes e centros de massa, segundo as Equações (6.36) e (6.37), concentra-se a massa de cada tetraedro, M_i , em seu respectivo baricentro, o qual passa a ser o centro de atração secundário referente ao corpo não esférico. Logo, a divisão do volume do asteroide em vários tetraedros, permite estabelecer os elementos fundamentais para o cálculo aproximado da perturbação devido ao campo gravitacional não ser central. Portanto, a Equação (8.23) fornece o potencial de uma massa puntiforme m , localizada no ponto $P(x, y, z)$, em relação ao asteroide de massa total M

$$U = Gm \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\sqrt{(x - \xi_{G_i})^2 + (y - \eta_{G_i})^2 + (z - \zeta_{G_i})^2}} . \quad (8.23)$$

Lembrando que a Equação (6.40) é a resultante da força gravitacional perturbadora, F_{GP} , gerada no veículo espacial pelo corpo irregular, a determinação dos componentes da força nas direções correspondentes permite aplicá-los ao ambiente de simulação STRS, viabiliza simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, visto que, pela análise da força perturbadora, determina-se a variação da velocidade, ΔV , possibilitando implementar manobras, assim com corrigi-las.

8.1.4 Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Eros com 56644 faces, sem correção, utilizando a expansão do potencial em série

Análoga à metodologia aplica nos cálculos dos coeficientes dos harmônicos esféricos associados ao potencial do cubo homogêneo e dos asteroides Itokawa e Geographos, considera-se o potencial de grau 1, relativo ao asteroide Eros, dado pela Equação (8.17), e o potencial de mesmo grau, escrito em função dos harmônicos esféricos e de seus correspondentes coeficientes, dado pela Equação (6.45), na qual C_{10} , C_{11} e S_{11} são os coeficientes a serem determinados, e os demais elementos que constam na equação, são os mesmos descritos anteriormente.

Igualando as funções potenciais de primeiro grau, em coordenadas cartesianas e nos harmônicos esféricos, obtém-se a Equação (8.24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R\rho)} [-0,0096288226x + 0,0024487000y + 0,0325584481z] = \\ = C_{10} + C_{11}P_{11}(\text{sen } \theta) \cos \phi + S_{11}P_{11}(\text{sen } \theta) \text{sen } \phi \end{aligned} \quad (8.24)$$

Considerando os pontos $A_1(18,19,20)$, $A_2(26,27,28)$ e $A_3(24,25,26)$, em km, e adotando $R_M = 16\text{km}$, obtém-se o sistema linear de equações dado pela Equação (8.25):

$$\begin{aligned} 0,6071767C_{10} - 0,5464591C_{11} - 0,5768179S_{11} &= 0,00099496 \\ 0,5984600C_{10} - 0,5557129C_{11} - 0,5770865S_{11} &= 0,00097170 \\ 0,5770430C_{10} - 0,5539609C_{11} - 0,6001243S_{11} &= 0,00093270 \end{aligned} \quad (8.25)$$

cuja solução é formada pelos coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados, expressos pela Equação (8.26)

$$\begin{aligned}\bar{C}_{10} &= 0,00117485180 \\ \bar{C}_{11} &= -0,00034745021 \quad \bar{S}_{11} = 0,00008835985\end{aligned}\quad (8.26)$$

Diferentemente do ocorrido nos casos dos asteroides Itokawa e Geographos, os coeficientes C_{10} , C_{11} e S_{11} não são nulos, caracterizando o fato, do centro de massa do asteroide não coincidir com a origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo, devido ao não refinamento deste modelo.

Visto que o potencial de grau 2, relativo ao asteroide Geographos, escrito em função das coordenadas cartesianas, é dado pela Equação (8.18), e o potencial de mesma ordem, escrito em coordenadas esféricas, é dado pela Equação (6.54), igualando-os, obtém-se a Equação (8.27).

$$\begin{aligned}\frac{1}{(R\rho)^2} & \left[56,348194264884680x^2 - 27,960582508416714xy \right. \\ & \quad - 26,093522599645474y^2 + 0,101565068776322xz \\ & \quad \left. + 0,012289837002498yz - 30,254671665239207z^2 \right] = \\ & = C_{20}P_2(\text{sen } \theta) + C_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\cos \phi + S_{21}P_{21}(\text{sen } \theta)\text{sen } \phi \\ & + C_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\cos(2\phi) + S_{22}P_{22}(\text{sen } \theta)\text{sen}(2\phi)\end{aligned}\quad (8.27)$$

Considerando os pontos $A_1(18,19,20)$, $A_2(26,27,28)$, $A_3(24,25,26)$, $A_4(19,23,21)$ e $A_5(20,25,27)$, coordenadas em km, obtém-se o sistema linear dado pela Equação (8.28):

$$\begin{aligned}0,0530C_{20} - 0,9954C_{21} - 0,1023C_{22} - 1,0506S_{21} + 1,8912S_{22} &= -0,04603 \\ 0,0372C_{20} - 0,9977C_{21} - 0,0726C_{22} - 1,0361S_{21} + 1,9242S_{22} &= -0,04318 \\ -0,0005C_{20} - 0,9590C_{21} - 0,1598C_{22} - 1,0389S_{21} + 1,9947S_{22} &= -0,04468 \\ -0,0030C_{20} - 0,8993C_{21} - 0,3787C_{22} - 1,0887S_{21} + 1,9699S_{22} &= -0,05569 \\ 0,1234C_{20} - 0,9236C_{21} - 0,3848C_{22} - 1,1545S_{21} + 1,7104S_{22} &= -0,06624\end{aligned}\quad (8.28)$$

resultando nos coeficientes normalizados, expressos pela Equação (8.29)

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{20} &= -0.05285273631 \\
\bar{C}_{21} &= 0,00010243745 & \bar{S}_{21} &= 0,00001239540 \\
\bar{C}_{22} &= 0,08314984283 & \bar{S}_{22} &= -0,02820074750
\end{aligned}
\tag{8.29}$$

Devido ao não refinamento deste modelo, percebe-se que os coeficientes C_{21} , S_{21} e S_{22} não são nulos, implicando em que os eixos do sistema não coincidem com os eixos principais de inércia.

Aplicando o procedimento análogo às demais graus dos potenciais calculados, obtém-se os coeficientes dos harmônicos esféricos correspondentes até o grau 4 para o asteroide Eros, os quais são confrontados com aqueles obtidos pela NEAR, Miller et al. (2002) e Zhenjiang et al. (2012), mostrado na Tabela 8.5.

Tabela 8.5 – Comparação entre os coeficientes dos harmônicos esféricos do Eros.

	NEAR	Miller et al.	Autor	Zhenjiang et al.
\bar{C}_{10}	0	0,001175	0,0011749	0
\bar{C}_{11}	0	-0,000348	-0,0003475	0
\bar{S}_{11}	0	0,000088	0,0000884	0
\bar{C}_{20}	-0,052478	-0,052851	-0.052852	-0,052357
\bar{C}_{21}	0	0,000102	0.0001024	-0,000036
\bar{S}_{21}	0	0,000012	0,0000124	-0,000069
\bar{C}_{22}	0,082538	0,083203	0.083149	0,083125
\bar{S}_{22}	-0,027745	-0,028033	-0.028200	-0,026080
\bar{C}_{30}	-0,001400	-0,001747	-0.001746	-0,001215
\bar{C}_{31}	0,004055	0,004083	0.004086	0,004040
\bar{S}_{31}	0,003379	0,003404	0.003400	0,002353
\bar{C}_{32}	0,001792	0,002129	0.002127	0,001458
\bar{S}_{32}	-0,000686	-0,000836	-0.000839	-0,000593
\bar{C}_{33}	-0,010337	-0,010456	-0.010492	-0,009789
\bar{S}_{33}	-0,012134	-0,012247	-0.012214	-0,012287
\bar{C}_{40}	0,012900	0,013077	0.013077	0,012542
\bar{C}_{41}	-0,000106	-0,000145	-0.000145	-0,000099
\bar{S}_{41}	0,000136	0,000165	0.000164	0,000158

(Continua)

Tabela 8.5 - Conclusão

	NEAR	Miller et al.	Autor	Zhenjiang et al.
\bar{S}_{41}	0,000136	0,000165	0.000164	0,000158
\bar{C}_{42}	-0,017495	-0,017656	-0,017649	-0,018089
\bar{S}_{42}	0,004542	0,004589	0.004625	0,004119
\bar{C}_{43}	-0,000319	-0,000312	-0.000312	-0,000339
\bar{S}_{43}	-0,000141	-0,000195	-0,000194	-0,000588
\bar{C}_{44}	0,017587	0,017729	0,017694	0,018054
\bar{S}_{44}	-0,008939	-0,009048	-0.009121	-0,008725

Fonte: Produção do autor.

Analisando os resultados apresentados na Tabela 8.5, quarta coluna, conclui-se que os coeficientes dos harmônicos esféricos obtidos, aplicando os potenciais correspondentes, têm os valores muito próximos aos determinados por Miller et al. (2002), terceira coluna, ratificando mais uma vez, a validade do método da expansão do potencial em série, apesar do não refinamento deste modelo. Observa-se, também, que os dados fornecidos pela NEAR estabelecem o centro de massa do asteroide localizado na origem do sistema de coordenadas fixo no corpo, além de que os eixos coordenados coincidem com os eixos principais inércia do asteroide, verificado pela nulidade dos coeficientes C_{10} , C_{11} , S_{11} , C_{21} e S_{21} .

8.1.5 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos do asteroide Eros com 56644 faces, sem correções

Aplicando as integrais apresentadas pelas Equações (6.65) e (6.66), obtém-se diretamente os coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao asteroide Eros, os quais, são comparados com aqueles que foram determinados utilizando o modelo do potencial, calculando, inclusive, a diferença entre os coeficientes correspondentes até o grau 4, exibidos na Tabela 8.6.

Tabela 8.6 - Comparação entre os valores dos coeficientes de Stokes normalizados para o Eros com 56644 faces, sem correções, calculados a partir do potencial e de forma direta.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,000000000000 \times 10^0$	$1,000000000000 \times 10^0$	$-1,21581572289 \times 10^{-14}$
\bar{C}_{10}	$1,17485180093 \times 10^{-3}$	$1,17485180093 \times 10^{-3}$	$2,09492269969 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{11}	$-3,47450209367 \times 10^{-4}$	$-3,47450209367 \times 10^{-4}$	$-1,42138084405 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{11}	$8,83598518730 \times 10^{-5}$	$8,83598518730 \times 10^{-5}$	$-6,06603965728 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{20}	$-5,28527363128 \times 10^{-2}$	$-5,28527363128 \times 10^{-2}$	$1,71622352464 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$1,02437453106 \times 10^{-4}$	$1,02437453106 \times 10^{-4}$	$-3,67449160365 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{21}	$1,23953994891 \times 10^{-5}$	$1,23953994891 \times 10^{-5}$	$1,72600201460 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$8,31498428253 \times 10^{-2}$	$8,31498428253 \times 10^{-2}$	$-2,69939612410 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{22}	$-2,82007475014 \times 10^{-2}$	$-2,82007475014 \times 10^{-2}$	$8,65959851671 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$-1,74602517377 \times 10^{-3}$	$-1,74602517377 \times 10^{-3}$	$3,83359937587 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{31}	$4,08611967712 \times 10^{-3}$	$4,08611967712 \times 10^{-3}$	$1,76209934099 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{31}	$3,40023932863 \times 10^{-3}$	$3,40023932863 \times 10^{-3}$	$1,19807706091 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$2,12732739234 \times 10^{-3}$	$2,12732739234 \times 10^{-3}$	$-5,09496083167 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{32}	$-8,39143375811 \times 10^{-4}$	$-8,39143375811 \times 10^{-4}$	$2,13797548520 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{33}	$-1,04928458771 \times 10^{-2}$	$-1,04928458771 \times 10^{-2}$	$-1,04539595849 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{33}	$-1,22146224793 \times 10^{-2}$	$-1,22146224793 \times 10^{-2}$	$-1,16368096265 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{40}	$1,30774013514 \times 10^{-2}$	$1,30774013514 \times 10^{-2}$	$-4,41900508870 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{41}	$-1,44681835602 \times 10^{-4}$	$-1,44681835602 \times 10^{-4}$	$2,01125423786 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{41}	$1,64255975362 \times 10^{-4}$	$1,64255975362 \times 10^{-4}$	$-4,42376281868 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{42}	$-1,76478362804 \times 10^{-2}$	$-1,76478362804 \times 10^{-2}$	$1,65820566868 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{42}	$4,62503573238 \times 10^{-3}$	$4,62503573238 \times 10^{-3}$	$-4,20429039409 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{43}	$-3,12043497930 \times 10^{-4}$	$-3,12043497930 \times 10^{-4}$	$-3,94015796660 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{43}	$-1,93800191830 \times 10^{-4}$	$-1,93800191830 \times 10^{-4}$	$3,21619421827 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{44}	$1,76939835166 \times 10^{-2}$	$1,76939835166 \times 10^{-2}$	$-1,66890951842 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{44}	$-9,12123940450 \times 10^{-3}$	$-9,12123940450 \times 10^{-3}$	$8,11953767107 \times 10^{-19}$

Fonte: Produção do autor.

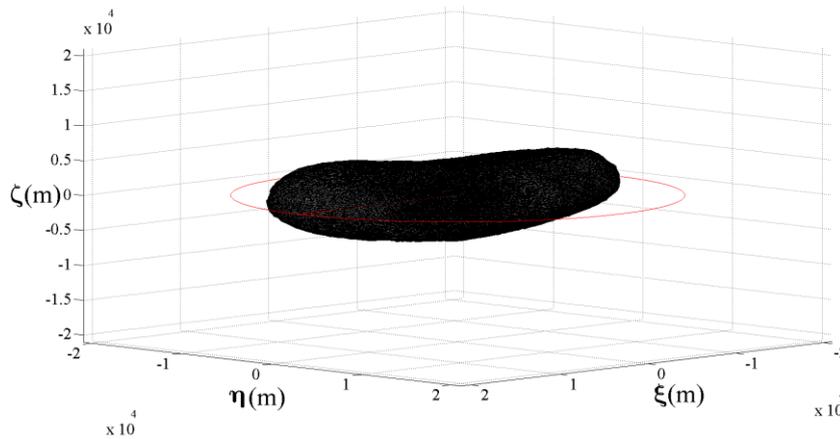
8.1.6 Simulações de trajetórias em torno do asteroide (433) Eros com 56644 faces, sem correções

Utilizando novamente o ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), (ROCCO, 2012), de modo semelhante adotado aos asteroides Itokawa e

Geographos, são realizadas simulações de órbitas de um veículo espacial em torno do asteroide Eros, considerando apenas a perturbação do campo gravitacional em relação ao campo central, devido a seu formato irregular.

A Figura 8.5 apresenta uma órbita equatorial em torno do asteroide Eros, adotando-se o semieixo maior igual a 18000 metros e os demais elementos keplerianos iguais a zero.

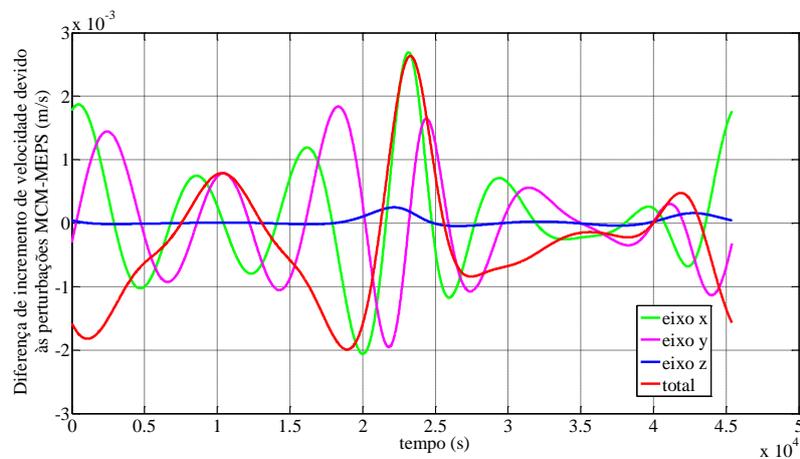
Figura 8.5 - Órbita equatorial em torno do asteroide Eros, sem correções dos dados.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.6 apresenta os gráficos das diferenças entre os incrementos das velocidades devido às perturbações, calculadas pela expansão do potencial em série e pelas concentrações de massa, em relação a cada eixo e total.

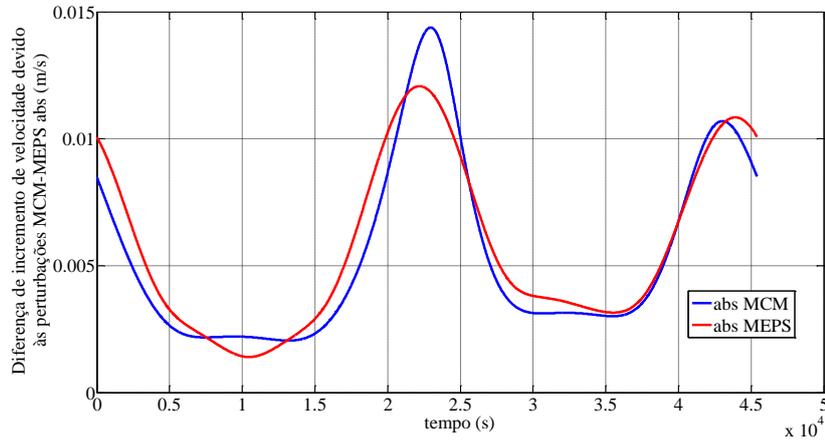
Figura 8.6 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

e a Figura 8.7, exibe o incremento de velocidade absoluta devido às perturbações, evidenciando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos na Figura 8.7.

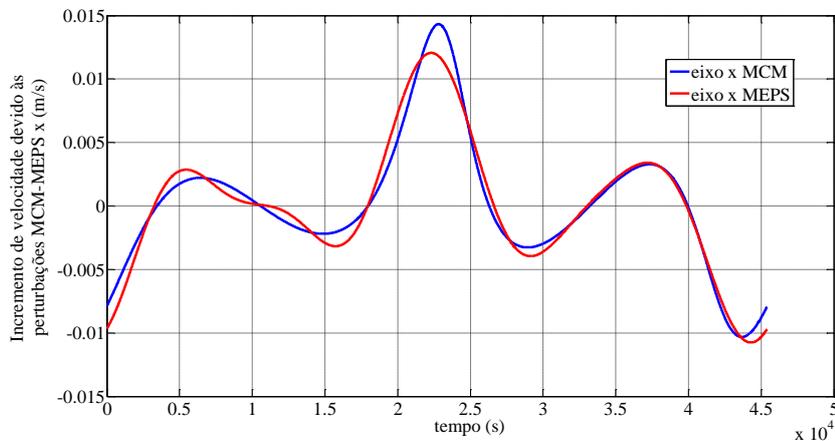
Figura 8.7 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

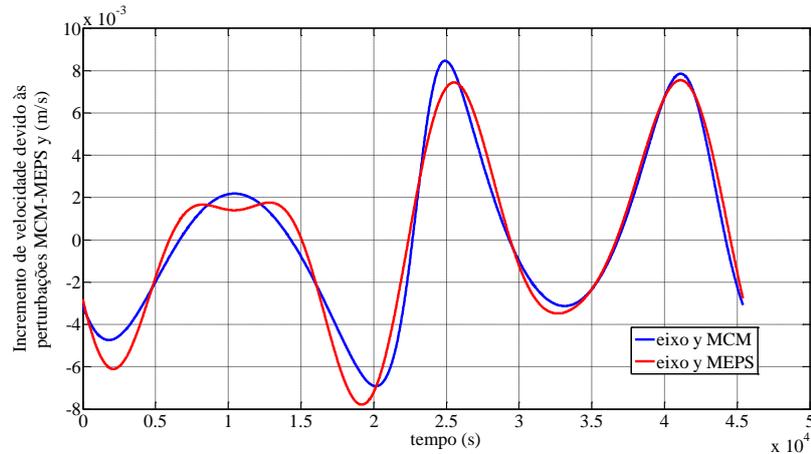
As Figuras 8.8, 8.9 e 8.10 apresentam os gráficos dos incrementos de velocidade, devido às perturbações, relativas a cada um dos eixos coordenados. Analisando esses gráficos, constata-se uma conformidade entre as curvas que representam os incrementos de velocidade em relação a cada um dos modelos, salientando que, no caso do método da expansão do potencial em série, o potencial gravitacional foi expandido até o grau 4, devido ao custo computacional.

Figura 8.8 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x .



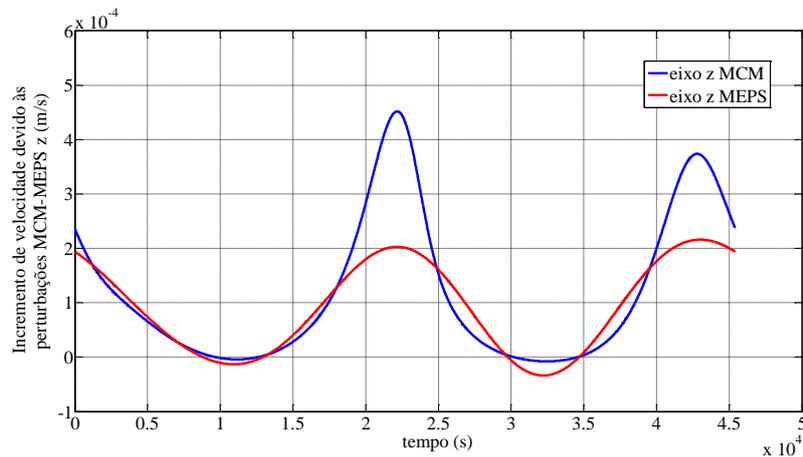
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.9 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.10 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo z.



Fonte: Produção do autor.

Foram realizadas mais duas simulações de órbitas em torno do asteroide Eros, adotando o mesmo semieixo maior, com ângulos de inclinação 45° e 90°, resultando em gráficos semelhantes aos apresentados pelas Figuras de (8.6) à (8.10), ou seja, confirmando a conformidade das curvas geradas em relação aos dois modelos apresentados. Tais gráficos foram omitidos aqui, pois, o objetivo central deste primeiro estudo do asteroide Eros foi determinar, por meio dos dados disponibilizados pela NEAR, contendo 56644 faces e 28324 vértices, sem refinamento, o modelo para o seu campo gravitacional, e utilizá-lo nos cálculos de seus coeficientes dos harmônicos esféricos, assim como compará-los aos valores encontrados na literatura, ratificando, mais uma vez, a consistência do método da expansão do potencial em série.

8.2 Modelo poliédrico para o asteroide (433) Eros com 7790 faces refinado

Neste segundo estudo do asteroide Eros, foram adotados os dados coletados pela sonda NEAR (2001), com 7790 faces e 3897 vértices, resultando em um volume de $2,526 \times 10^3 \text{ km}^3$, e considerando a densidade $2,67 \text{ g.cm}^{-3}$, obtém-se a massa de $6,7444 \times 10^{15} \text{ kg}$, e período de rotação 5,270 horas, valores assumidos para os cálculos e simulações. Ao volume do asteroide, associa-se o raio médio $R_M = 16 \text{ km}$.

8.2.1 Modelo poliédrico inicial para o asteroide Eros com 7790 faces refinado

Por meio da técnica de decomposição do asteroide Eros em tetraedros, foram utilizados os dados coletados pela sonda NEAR e disponibilizados pelo NASA (2001), como elementos para implementações de cálculos e simulações, cujo modelo poliédrico adotado apresenta 3897 vértices e 7790 faces triangulares, fornecidos por duas tabelas, uma contendo as coordenadas dos vértices e a outra, as relações entre as faces triangulares formadas e seus respectivos vértices, ilustradas pelas tabelas 8.7 e 8.8, respectivamente.

Tabela 8.7 - Coordenadas dos vértices do asteroide Eros com 7790 faces.

Vértice	Abscissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$-1,75999 \times 10^1$	$-1,08636 \times 10^0$	$4,65573 \times 10^{-1}$
2	$1,03270 \times 10^1$	$-8,24888 \times 10^0$	$-4,19076 \times 10^{-2}$
3	$1,50774 \times 10^1$	$-4,60098 \times 10^0$	$-4,00270 \times 10^{-2}$
4	$-2,81070 \times 10^0$	$8,54855 \times 10^0$	$-4,75411 \times 10^{-2}$
5	$5,70917 \times 10^0$	$-3,61826 \times 10^0$	$-5,07337 \times 10^0$
⋮	⋮	⋮	⋮
3897	$-1,17009 \times 10^1$	$1,82663 \times 10^0$	$4,81375 \times 10^0$

Fonte: Adaptação NEAR/NASA.

Tabela 8.8 - Vértices correspondentes a cada face triangular do asteroide Eros.

Face	Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3
1	1	99	101

(Continua)

Tabela 8.8 - Conclusão

Face	Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3
2	100	1	101
3	99	1	98
4	1	100	98
5	2	110	105
6	2	108	109
⋮	⋮	⋮	⋮
7790	3895	3896	3897

Fonte: Adaptação NEAR/NASA.

Em função dos dados da Tabela 7.1, as dimensões do asteroide, em km, nas direções principais são $-17,1697 \leq \xi \leq 15,6746$, $-6,5141 \leq \eta \leq 7,9889$ e $-6,0711 \leq \zeta \leq 5,8675$.

8.2.2 Modelo poliédrico final para o asteroide Eros com 7790 faces refinado

Utilizando os dados fornecidos pelas Tabelas 8.7 e 8.8 e o método para o cálculo de integrais desenvolvido por Lien e Kajiya (1984), pode-se calcular o volume aproximado do asteroide Eros, mediante à soma dos volumes dos tetraedros gerados pela sua decomposição, segundo o método poliédrico. Logo, a Equação (8.30) fornece o volume

$$V_{total} = \iiint_Q dv = \sum_{i=1}^{7790} |T_i| \iiint_{W_i} dV_i = \sum_{i=1}^{7790} \frac{|T_i|}{6} = 2,52599460318316 \times 10^3 \text{ km}^3 \quad (8.30)$$

A abscissa do centro de massa é dada pelas Equações (8.31) e (8.32)

$$\xi_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \xi dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{7790} |T_i| \iiint_{W_i} (\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 Z) dXdYdZ \quad (8.31)$$

$$\xi_0 = -2,1632069364332407 \times 10^{-2} \text{ km} \quad (8.32)$$

A ordenada do centro de massa é dada pelas Equações (8.33) e (8.34)

$$\eta_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \eta dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{7790} /T_i / \iiint_{W_i} (\eta_1 X + \eta_2 Y + \eta_3 Z) dX dY dZ \quad (8.33)$$

$$\eta_0 = 2,368233103539632 \times 10^{-3} \text{ km} \quad (8.34)$$

A cota do centro de massa é dada pelas Equações (8.35) e (8.36)

$$\varsigma_0 = \frac{1}{V_{total}} \iiint_Q \varsigma dv = \frac{1}{V_{total}} \sum_{i=1}^{7790} /T_i / \iiint_{W_i} (\varsigma_1 X + \varsigma_2 Y + \varsigma_3 Z) dX dY dZ \quad (8.35)$$

$$\varsigma_0 = 4,747677425371728 \times 10^{-2} \text{ km} \quad (8.36)$$

Logo, segundo os dados fornecidos, o centro de massa do asteroide está localizado no ponto O' , cujas coordenadas, medidas em km, são dadas pela Equação (8.37)

$$(\xi_0, \eta_0, \varsigma_0) = \left(-2,163206936 \times 10^{-2}; 2,368233103 \times 10^{-3}; 4,747677425 \times 10^{-2} \right) \quad (8.37)$$

Visando refinar a localização de seu baricentro, após realizar a translação das coordenadas dos vértices fornecidas pela Tabela 8.7, em relação ao ponto O' , o novo centro de massa O , passa a ter as coordenadas fornecidas pela Equação (8.38)

$$(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\varsigma}_0) = \left(-3,02395454 \times 10^{-14}; 3,12172879 \times 10^{-15}; -2,95665179 \times 10^{-15} \right) \quad (8.38)$$

medidas em quilômetros, evidenciando sua maior proximidade da origem. Além disso, verifica-se que o volume do asteroide foi preservado após a translação, justificando o refinamento do centro de massa.

De posse das coordenadas dos vértices transladados, os momentos e produtos de inércia normalizados em relação à massa, são dados pelas Equações de (8.29) até (8.44)

$$\frac{I_{\xi\xi}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\eta^2 + \varsigma^2) dv = 16,706311338669163 \text{ km}^2 \quad (8.39)$$

$$\frac{I_{\xi\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \eta \, dv = -9,301490752250731 \text{ km}^2 \quad (8.40)$$

$$\frac{I_{\xi\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \xi \cdot \zeta \, dv = 0,036720349238245 \text{ km}^2 \quad (3.41)$$

$$\frac{I_{\eta\eta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \zeta^2) \, dv = 71,858754108197789 \text{ km}^2 \quad (8.42)$$

$$\frac{I_{\eta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q \eta \cdot \zeta \, dv = -0,008685742514356 \text{ km}^2 \quad (8.43)$$

$$\frac{I_{\zeta\zeta}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_Q (\xi^2 + \eta^2) \, dv = 74,625073704926533 \text{ km}^2 \quad (8.44)$$

dando origem ao tensor de inércia normalizado, em relação à massa, em km^2 , dado pela Equação (8.45)

$$I = \begin{bmatrix} 16,706311338669166 & 9,301490752250731 & -0,036720349238245 \\ 9,301490752250731 & 71,858754108197789 & 0,008685742514356 \\ -0,036720349238245 & 0,008685742514356 & 74,625073704926533 \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

notando que $I_{\xi\xi} < I_{\zeta\zeta} < I_{\eta\eta}$. A seguir, os autovalores e os correspondentes autovetores, associados ao tensor de inércia, são expressos pelas Equações (8.46), (8.47) e (8.48)

$$\lambda_1 = 15,179833476449900 \text{ e } v_1 = \begin{bmatrix} 0,986800019823732 \\ -0,161942335112182 \\ 0,000633225311842 \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

$$\lambda_2 = 73,385202579030306 \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 0,161943327454881 \\ 0,986797789926110 \\ -0,002116716746823 \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

$$\lambda_3 = 74.625103096313225 \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} -0.000282079285499 \\ 0.002191322741755 \\ 0.999997559264980 \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

Verifica-se que os autovetores v_1, v_2 e v_3 formam, nessa ordem, uma base ortonormal destrógrá, isto é, seus módulos são iguais a 1, o produto escalar de um dos vetores pelos outros dois é nulo, e $v_1 \times v_2 = v_3$, $v_2 \times v_3 = v_1$ e $v_3 \times v_1 = v_2$. Logo, a matriz, cujas colunas são compostas por esses vetores, assume o papel da matriz de rotação. Portanto, a matriz obtida pela translação das coordenadas dos vértices, fornecida pela Tabela 8.7, em relação ao centro de massa inicial O' , multiplicada pela matriz de rotação, (v_1, v_2, v_3) , resulta nas coordenadas dos vértices finais, dadas pela Tabela 8.9.

Tabela 8.9 - Coordenadas finais dos vértices do asteroide Eros com 7790 faces.

Vértice	Abcissa (km)	Ordenada (km)	Cota (km)
1	$-1,7169659201 \times 10^1$	$-3,9219228051 \times 10^0$	$4,2066791561 \times 10^{-1}$
2	$1,1548200137 \times 10^1$	$-6,4662324072 \times 10^0$	$-1,1038443873 \times 10^{-1}$
3	$1,5645146698 \times 10^1$	$-2,0972011473 \times 10^0$	$-1,0185010653 \times 10^{-1}$
4	$-4,1363010886 \times 10^0$	$7,9818834646 \times 10^0$	$-7,5503461590 \times 10^{-2}$
5	$6,2382459365 \times 10^0$	$-2,6339234003 \times 10^0$	$-5,1303847812 \times 10^0$
⋮	⋮	⋮	⋮
3897	$-1,1817508911 \times 10^1$	$-1,0129088146 \times 10^{-1}$	$4,7735536184 \times 10^0$

Fonte: Produção do autor.

Após a translação e a rotação descritas, as dimensões do asteroide nas direções principais passam a ser $-17,1697 \leq \xi \leq 15,6746$, $-6,5141 \leq \eta \leq 7,9889$ e $-6,0711 \leq \zeta \leq 5,8675$, em quilômetros, o baricentro final está localizado no ponto de coordenadas dadas pela Equação (8.49)

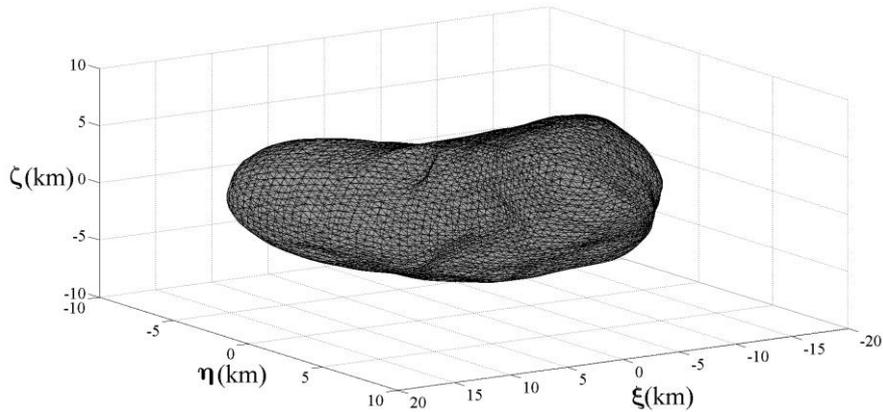
$$(\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{\zeta}_0) = (-5,78201407 \times 10^{-16}; -3,41495008 \times 10^{-17}; 7,38068212 \times 10^{-16}) \quad (8.49)$$

o volume final do asteroide é igual ao volume inicial, e a Equação (8.50) fornece o tensor de inércia final, expresso em km^2

$$I_F = \begin{bmatrix} 15,179833476 & 2,0561639332 \times 10^{-14} & 1,946240048 \times 10^{-14} \\ 2,056163933 \times 10^{-14} & 73,3852025790 & 3,0277610413 \times 10^{-15} \\ 1,946240048 \times 10^{-14} & 3,0277610413 \times 10^{-15} & 74,625103096 \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

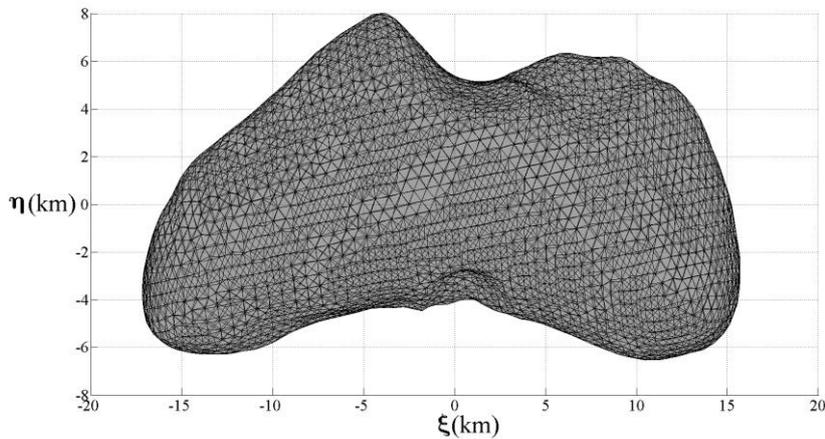
indicando que os produtos de inércia estão próximos de zero, e, conseqüentemente, o novo sistema de coordenadas se aproxima dos eixos principais de inércia. Além disso, tem-se, mais uma vez, que $I_{\xi\xi} < I_{\eta\eta} < I_{\zeta\zeta}$. Logo, baseado nas Tabelas 8.7 e 8.9, o modelo poliédrico para o asteroide Eros com 3897 vértices e 7790 faces é ilustrado na Figura 8.11, enquanto que as Figuras 8.12, 8.13 e 8.14 exibem as três vistas do asteroide.

Figura 8.11 - Modelo poliédrico do asteroide Eros com 7790 faces.



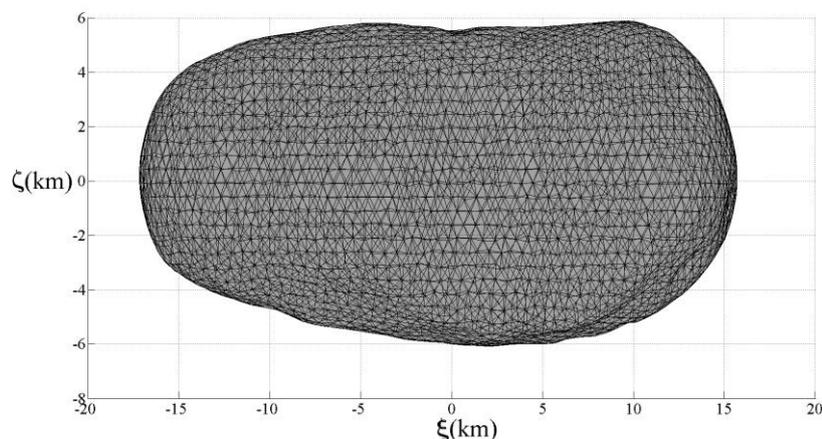
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.12 - Vista ξ - η do asteroide Eros com 7790 faces.



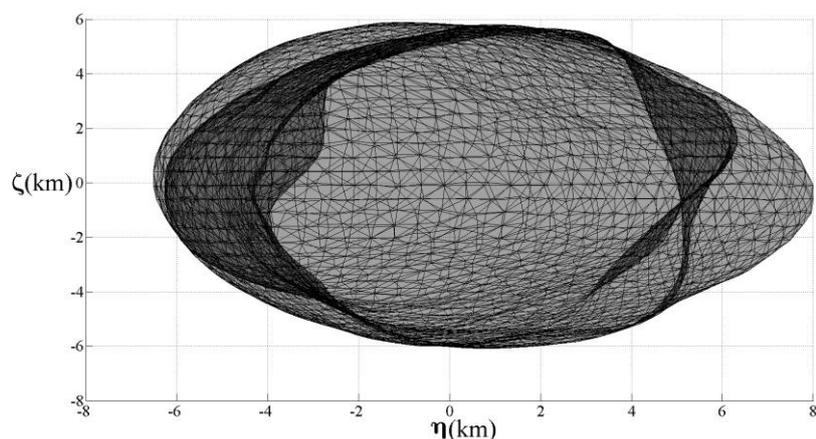
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.13 - Vista ξ - ζ do asteroide Eros com 7790 faces.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.14 - Vista η - ζ do asteroide Eros com 7790 faces.



Fonte: Produção do autor.

8.2.3 Modelo do campo gravitacional do asteroide 433 Eros com 7790 faces utilizando o método da expansão do potencial em série

O modelo poliédrico que servirá de referência para este segundo estudo do asteroide 433 Eros, apresenta 3897 vértices e 7790 faces, levando em conta, que os vértices finais foram obtidos, a partir de uma translação e de uma rotação dos vértices iniciais, conforme os procedimentos descritos no item 8.2.2. O modelo do campo gravitacional para este asteroide foi desenvolvido até o grau 6 utilizando a expansão do potencial em série. Assim, de acordo com os dados de entrada, Tabelas 8.8 e 8.9, utilizando o procedimento desenvolvido por Lien e Kajiya (1984) para os cálculos das integrais

correspondentes, considerando (x, y, z) as coordenadas de um ponto P , exterior à esfera de volume equivalente ao asteroide, a Equação (8.51) representa o termo Kepleriano do campo gravitacional

$$U_0 = \frac{GM}{\rho} \quad (8.51)$$

As Equações de (8.52) até (8.57) expressam os termos de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente, da expansão do potencial em série, relativos ao asteroide Eros

$$U_1 = \frac{GM}{\rho^3} \left[-5,83216 \times 10^{-16} x - 3,26833 \times 10^{-17} y + 7,37866 \times 10^{-16} z \right] \quad (8.52)$$

$$U_2 = \frac{GM}{\rho^5} \left[58,825319361222x^2 + 6,184291052430 \times 10^{-14} xy \right. \\ \left. - 28,482734292649y^2 + 5,835497774036 \times 10^{-14} xz \right. \\ \left. + 9,080398778069 \times 10^{-15} yz - 30,342585068573z^2 \right] \quad (8.53)$$

$$U_3 = \frac{GM}{\rho^7} \left[-51,017606002516x^3 - 432,848422524840x^2y \right. \\ \left. + 63,248762822983xy^2 + 108,458419923607y^3 \right. \\ \left. + 62,634765990382x^2z - 4,111918270672xyz \right. \\ \left. - 16,742613243091y^2z + 89,804055184565xz^2 \right. \\ \left. + 107,473162754019yz^2 - 15,297384249097z^3 \right] \quad (8.54)$$

$$U_4 = \frac{GM}{\rho^9} \left[5846,006318046613x^4 + 2304,962274131192x^3y \right. \\ \left. - 15255,544763015785x^2y^2 - 1743,538492867907xy^3 \right. \\ \left. + 1823,465294149404y^4 - 2,357904420992x^3z \right. \\ \left. - 356,066090549817x^2yz + 294,816927793000xy^2z \right. \\ \left. + 48,140799510823y^3z - 19820,493145263896x^2z^2 \right. \\ \left. - 1684,271343789855xyz^2 + 4314,752998119360y^2z^2 \right. \\ \left. - 95,914404843341xz^3 + 70,547897339116yz^3 \right. \\ \left. + 2584,290024524089z^4 \right] \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned}
U_5 = \frac{GM}{\rho^{11}} & \left[-14955,600007431182x^5 - 174758,127676084434x^4y \right. \\
& + 64486,743431499421x^3y^2 + 259777,469754411499x^2y^3 \\
& - 23569,310415591465xy^4 - 21525,521932300267y^5 \\
& + 18355,802943379959x^4z - 9769,309674456073x^3yz \\
& - 28491,663166014832x^2y^2z + 6043,026339500438xy^3z \\
& + 2396,655742271937y^4z + 85069,256642812400x^3z^2 \\
& + 269216,356793272111x^2yz^2 - 52044,367800949473xy^2z^2 \\
& - 44522,250431408831y^3z^2 - 27214,384831421640x^2z^3 \\
& + 3726,283334955635xyz^3 + 4703,909570794402y^2z^3 \\
& - 33860,567021247955xz^4 - 22608,267583174270yz^4 \\
& \left. + 2251,047526062724z^5 \right] \quad (8.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_6 = \frac{GM}{\rho^{13}} & \left[617434,809446201894x^6 + 1117825,981203483193x^5y \right. \\
& - 2955291,048608214503x^4y^2 - 2646285,134845088042x^3y^3 \\
& + 1832615,720739987310x^2y^4 + 641749,706113796941xy^5 \\
& - 91515,143659367480y^6 - 66888,977660040694x^5z \\
& - 416151,739454236014x^4yz + 425955,998597587706x^3y^2z \\
& + 468447,142475373752x^2y^3z - 124868,927640116962xy^4z \\
& - 30948,580881421831y^5z - 6306231,093084813906x^4z^2 \\
& - 3239404,407499567804x^3yz^2 + 6736051,967209363157x^2y^2z^2 \\
& + 1521358,343397294713xy^3z^2 - 459888,565849475116y^4z^2 \\
& + 80977,926000939746x^3z^3 + 363856,336433098276x^2yz^3 \\
& - 176218,143317353781xy^2z^3 - 52987,111220385147y^3z^3 \\
& + 5183555,765216586714x^2z^4 + 859023,032051136545xyz^4 \\
& - 662786,762018752077y^2z^4 - 6671,563468546546xz^5 \\
& \left. - 20489,500277194283yz^5 - 301384,600213188976z^6 \right] \quad (8.57)
\end{aligned}$$

Portanto, o modelo para o campo gravitacional do asteroide Eros, desenvolvido até o grau 6, adotando a técnica da decomposição poliédrica, associada ao método da expansão do potencial em uma série convergente, tem como resultado, o somatório das funções expressas da Equação (8.51) até a Equação (8.57), resultando na Equação (8.58)

$$U = \sum_{i=0}^6 U_i \quad (8.58)$$

Quanto à homogeneidade da função dada pela Equação (8.58), utilizando as Equações (6.31), (6.32) e (6.33), empregadas, anteriormente, no estudo do asteroide Itokawa, obtém-se as Tabelas 8.10 e 8.11, nas quais, n e \tilde{n} representam o grau da homogeneidade da função potencial gravitacional.

Tabela 8.10 - Estudo do grau de homogeneidade n do potencial do Eros.

Coordenadas dos pontos (km)	Valor de n
(180,180,180) e (18,18,18)	-0,99893698633253
(2000,2000,2000) e (200,200,200)	-0,99999975131587
(18000,18000,180000) e (180,180,180)	-0,99999982401518
(18000,9000,7000) e (18,9,7)	-1,00808987746197
(18000,9000,7000) e (180,90,70)	-1,00015810944382
(18000,9000,7000) e (1800,900,700)	-1,00000317904656

Fonte: Produção do autor.

Tabela 8.11 - Estudo do grau de homogeneidade \tilde{n} do potencial do asteroide Eros.

Coordenada do ponto (km)	Valor de \tilde{n}
(18,18,18)	-0,99151558706719
(180,180,180)	-0,99999732553322
(1800,1800,1800)	-0,99999999821417
(180,90,70)	-1,00144367878395
(1800,900,700)	-1,00001477592913
(18000,9000,7000)	-1,00000014808895

Fonte: Produção do autor.

De acordo com os valores encontrados para os parâmetros n e \tilde{n} , respectivamente, nas Tabelas 8.10 e 8.11, conclui-se que o modelo do potencial U do asteroide Eros comporta-se aproximadamente como uma função homogênea de grau -1 nas variáveis x , y e z .

Analisando, exclusivamente, a perturbação relativa ao potencial gravitacional, devido à distribuição irregular de massa do asteroide, a partir da obtenção do seu modelo matemático, o seu gradiente representará a resultante do vetor força gerada em um veículo espacial pelo asteroide, possibilitando estudar o comportamento dinâmico de um satélite imerso nesse campo gravitacional. Logo, de acordo com a Equação (8.58), a resultante da referida força é expressa pela equação (8.59)

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\sum_{i=0}^6 U_i \right) = \nabla U_0 + \sum_{i=1}^6 \nabla U_i \quad (8.59)$$

e, levando em conta que ∇U_0 configura a força relativa ao campo central, conclui-se que $\sum_{i=1}^6 \nabla U_i$ caracteriza a perturbação dessa força devido a não esfericidade do asteroide.

8.2.4 Modelagem do potencial do asteroide 433 Eros com 7790 faces, com correção, utilizando o método das concentrações de massa

Segundo o método poliédrico, decompõe-se a superfície do asteroide em vários triângulos, ligando seus vértices ao seu centro de massa, obtendo tetraedros, cada qual com seu respectivo baricentro G_i . Utilizando, novamente, os dados coletados pela sonda NEAR e disponibilizados pela NASA, adota-se o mesmo modelo assumido na aplicação do método da expansão em série do potencial, ou seja, 3897 vértices e 7790 faces, apresentados pelas Tabelas 8.8 e 8.9, respectivamente.

De forma análoga ao procedimento apresentado no estudo dos asteroides Itokawa e Geographos, assumindo que o Eros tenha densidade constante, após calcular seus correspondentes volumes e centros de massa, segundo as Equações (6.36) e (6.37), concentra-se a massa de cada tetraedro, M_i , em seu respectivo baricentro, o qual passa

a ser o centro de atração secundário referente ao corpo não esférico. Logo, a divisão do volume do asteroide em vários tetraedros, permite estabelecer os elementos fundamentais para o cálculo aproximado da perturbação devido ao campo gravitacional não ser central. Portanto, a Equação (8.60) fornece o potencial de uma massa puntiforme m , localizada no ponto $P(x, y, z)$, em relação ao asteroide de massa total M

$$U = Gm \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\sqrt{(x - \xi_{G_i})^2 + (y - \eta_{G_i})^2 + (z - \zeta_{G_i})^2}} \quad (8.60)$$

Lembrando que a Equação (6.40) é a resultante da força gravitacional perturbadora, F_{GP} , gerada no veículo espacial pelo corpo irregular, a determinação dos componentes da força nas direções correspondentes permite aplicá-los ao ambiente de simulação STRS, viabiliza simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, visto que, pela análise da força perturbadora, determina-se a variação da velocidade, ΔV , possibilitando implementar manobras, assim com corrigi-las.

8.2.5 Cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao Eros com 7790 faces, com correção, utilizando a expansão do potencial em série

Adotando a mesma metodologia aplica nos cálculos dos coeficientes dos harmônicos esféricos associados ao potencial do cubo homogêneo e dos asteroides Itokawa, Geographos e Eros, com 56644 faces, sem correção, permite obter os coeficientes de Stokes até o grau 6, ilustrado na Tabela 8.12 até o grau 4.

Tabela 8.12 - Coeficientes de Stokes normalizados do asteroide Eros com 7790 faces.

n	m	\bar{C}_{nm}	\bar{S}_{nm}
0	0	$1,000000000000 \times 10^0$	-
1	0	$2,66254510615 \times 10^{-17}$	-
1	1	$-2,10449846834 \times 10^{-17}$	$-1,17935720804 \times 10^{-18}$
2	0	$-5,30063147081 \times 10^{-2}$	-
2	1	$5,88562127491 \times 10^{-17}$	$9,15839407406 \times 10^{-18}$
2	2	$8,80579785915 \times 10^{-2}$	$6,23741048285 \times 10^{-17}$
3	0	$-1,41158881253 \times 10^{-3}$	-

(Continua)

Tabela 8.12 - Conclusão.

n	m	\bar{C}_{nm}	\bar{S}_{nm}
3	1	$3,38307288944 \times 10^{-3}$	$4,04869849706 \times 10^{-3}$
3	2	$1,89122046349 \times 10^{-3}$	$-9,79692710036 \times 10^{-5}$
3	3	$-3,33433674573 \times 10^{-3}$	$-1,57955425909 \times 10^{-2}$
4	0	$1,31443787868 \times 10^{-2}$	-
4	1	$-1,54270416120 \times 10^{-4}$	$1,13470479191 \times 10^{-4}$
4	2	$-1,82997134841 \times 10^{-2}$	$-1,27704034331 \times 10^{-3}$
4	3	$-1,80659923012 \times 10^{-4}$	$-2,45727355494 \times 10^{-4}$
4	4	$1,97094473564 \times 10^{-2}$	$3,48063929087 \times 10^{-3}$

Fonte: Produção do autor.

Analisando a Tabela 8.12, verifica-se que os coeficientes C_{10} , C_{11} e S_{11} podem ser considerados nulos, indicando que o centro de massa do asteroide coincide com a origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo. Além disso, devido aos coeficientes C_{21} , S_{21} e S_{22} também serem muito próximos de zero, constata-se que os eixos do referido sistema de coordenadas coincide com os eixos principais de inércia.

8.2.6 Determinação direta dos coeficientes dos harmônicos esféricos do asteroide Eros

Aplicando as integrais apresentadas pelas Equações (6.65) e (6.66), obtém-se diretamente os coeficientes dos harmônicos esféricos relativos ao asteroide Eros com 7790 faces, os quais, são comparados com aqueles que foram determinados utilizando o modelo do potencial, calculando, inclusive, a diferença entre os coeficientes correspondentes até o grau 4, exibidos na Tabela 8.13.

Tabela 8.13 - Comparação entre os valores dos coeficientes de Stokes normalizados para o Eros com 7790 faces, com correções, calculados a partir do potencial e de forma direta.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$7,36982953912 \times 10^{-15}$
\bar{C}_{10}	$2,66254510615 \times 10^{-17}$	$2,68086711240 \times 10^{-17}$	$-1,83220062496 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{11}	$-2,10449846834 \times 10^{-17}$	$-2,00117248959 \times 10^{-17}$	$1,03325978751 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{11}	$-1,17935720804 \times 10^{-18}$	$-1,03436790563 \times 10^{-18}$	$1,44989302411 \times 10^{-19}$

(Continua)

Tabela 8.13 – Conclusão.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{20}	$-5,30063147081 \times 10^{-2}$	$-5,30063147081 \times 10^{-2}$	$5,74051115095 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$5,88562127491 \times 10^{-17}$	$5,89735688068 \times 10^{-17}$	$1,17356057635 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{21}	$9,15839407406 \times 10^{-18}$	$9,11689308260 \times 10^{-18}$	$-4,15009914544 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$8,80579785915 \times 10^{-2}$	$8,80579785915 \times 10^{-2}$	$-9,42030447553 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{22}	$6,23741048285 \times 10^{-17}$	$6,23841028256 \times 10^{-17}$	$-9,99799709520 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{30}	$-1,41158881253 \times 10^{-3}$	$-1,41158881253 \times 10^{-3}$	$1,79654971666 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{31}	$3,38307288944 \times 10^{-3}$	$3,38307288944 \times 10^{-3}$	$2,48829656685 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{31}	$4,04869849706 \times 10^{-3}$	$4,04869849706 \times 10^{-3}$	$3,92990695436 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$1,89122046349 \times 10^{-3}$	$1,89122046349 \times 10^{-3}$	$-2,45565205491 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{32}	$-9,79692710036 \times 10^{-5}$	$-9,79692710036 \times 10^{-5}$	$3,52463010445 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{33}	$-3,33433674573 \times 10^{-3}$	$-3,33433674573 \times 10^{-3}$	$-2,77589402232 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{33}	$-1,57955425909 \times 10^{-2}$	$-1,57955425909 \times 10^{-2}$	$1,60125829462 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{40}	$1,31443787868 \times 10^{-2}$	$1,31443787868 \times 10^{-2}$	$-1,39521102718 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{41}	$-1,54270416120 \times 10^{-4}$	$-1,54270416120 \times 10^{-4}$	$-2,54351319279 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{41}	$1,13470479191 \times 10^{-4}$	$1,13470479191 \times 10^{-4}$	$1,42929734858 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-1,82997134841 \times 10^{-2}$	$-1,82997134841 \times 10^{-2}$	$1,92976143056 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{42}	$-1,27704034331 \times 10^{-3}$	$-1,27704034331 \times 10^{-3}$	$1,43157295050 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{43}	$-1,80659923012 \times 10^{-4}$	$-1,80659923012 \times 10^{-4}$	$-5,20168615769 \times 10^{-21}$
\bar{S}_{43}	$-2,45727355494 \times 10^{-4}$	$-2,45727355494 \times 10^{-4}$	$-3,26204118246 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{44}	$1,97094473564 \times 10^{-2}$	$1,97094473564 \times 10^{-2}$	$-2,03957035197 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{44}	$3,48063929087 \times 10^{-3}$	$3,48063929087 \times 10^{-3}$	$-3,43306381312 \times 10^{-19}$

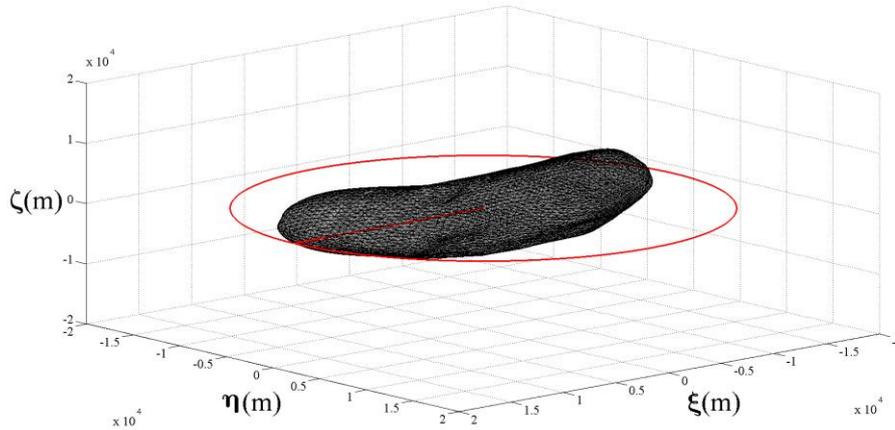
Fonte: Produção do autor.

8.2.7 Simulações de trajetórias em torno do asteroide (433) Eros, com 7790 faces, com correções

Utilizando novamente o ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), (ROCCO, 2012), de modo semelhante adotado aos asteroides Itokawa e Geographos, são realizadas simulações de órbitas de um veículo espacial em torno do asteroide Eros, considerando apenas a perturbação do campo gravitacional em relação ao campo central, devido a seu formato irregular.

A Figura 8.5 apresenta uma órbita equatorial em torno do asteroide Eros, adotando-se o semi-eixo maior igual a 18000 metros e os demais elementos keplerianos iguais a zero.

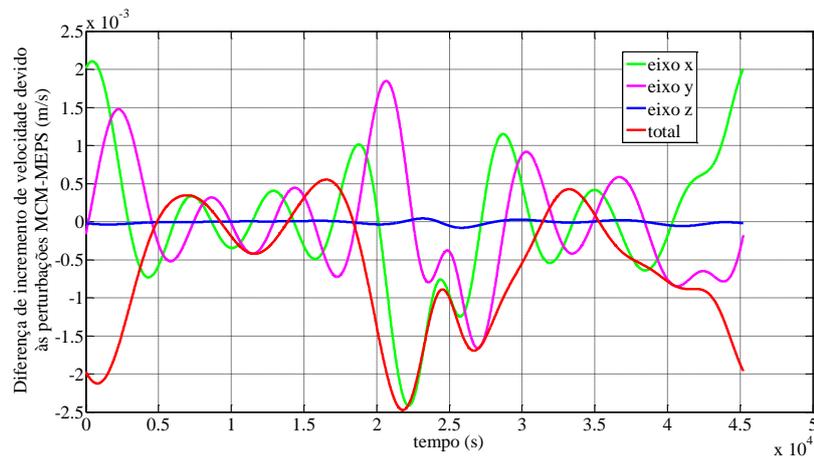
Figura 8.15 - Órbita equatorial em torno do asteroide Eros, com correções dos dados.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.16 apresenta os gráficos das diferenças entre os incrementos das velocidades devido às perturbações, calculadas pela expansão do potencial em série e pelas concentrações de massa, em relação a cada eixo e total.

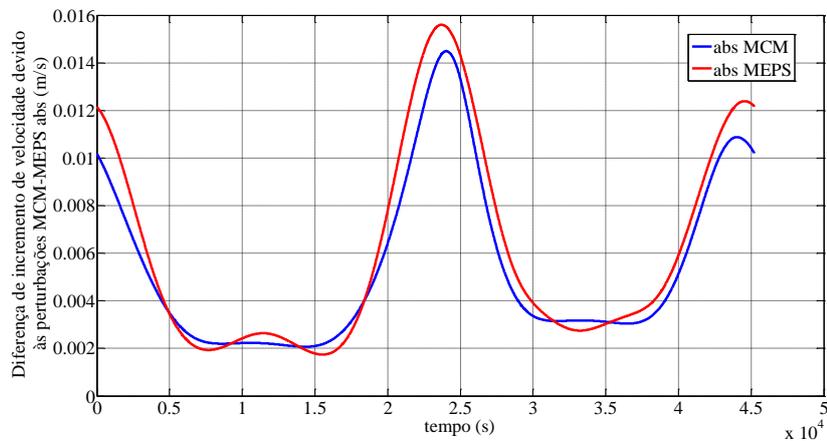
Figura 8.16 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

e a Figura 8.17, exibe o incremento de velocidade absoluta devido às perturbações, evidenciando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos na Figura 8.17.

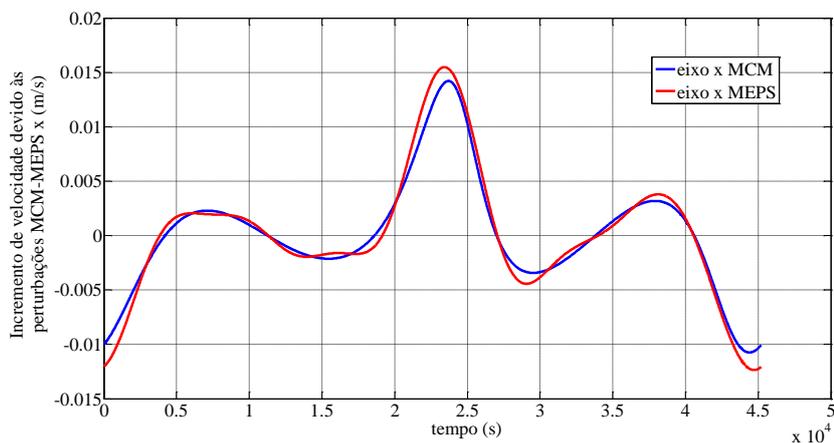
Figura 8.17 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

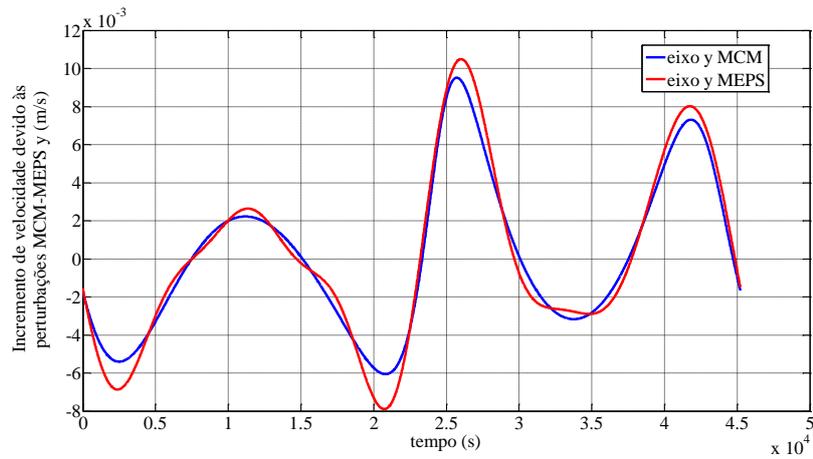
As Figuras 8.18, 8.19 e 8.20 apresentam os gráficos dos incrementos de velocidade, devido às perturbações, relativas a cada um dos eixos coordenados, também apresentando pequenas diferenças, enquanto que as Figuras 8.21 e 8.22 mostram os incrementos da velocidade devido às perturbações obtidas por meio dos modelos das concentrações de massa e da expansão em série, em cada eixo e total.

Figura 8.18 – Incremento de velocidade, devido às perturbações, relativas ao eixo x .



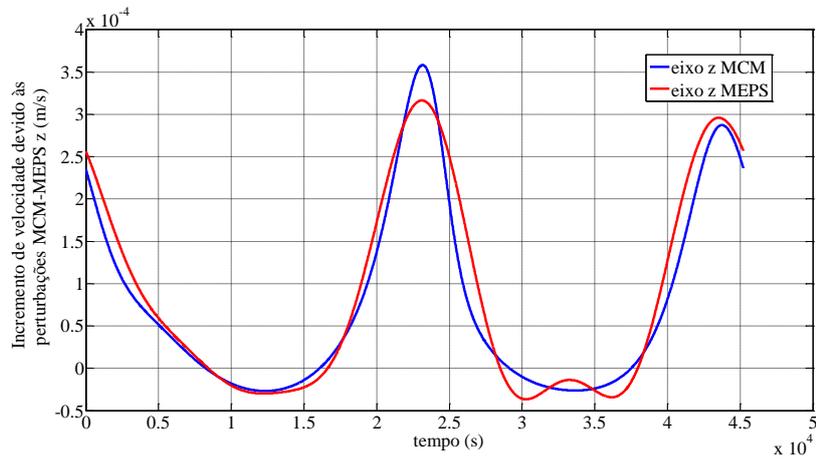
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.19 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo y.



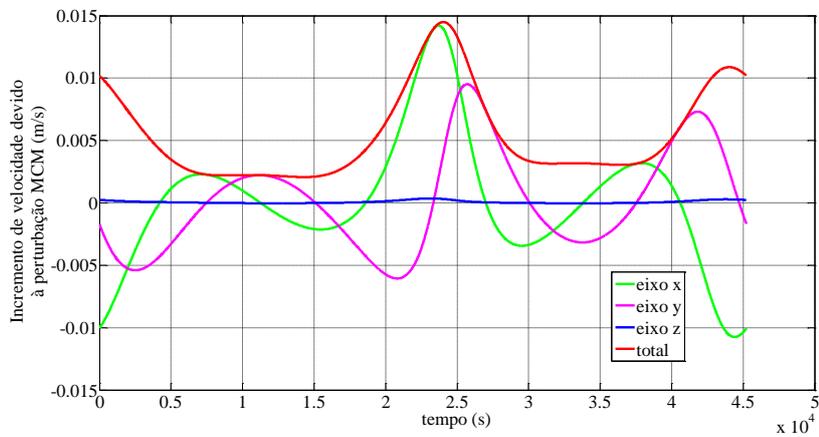
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.20 – Incremento de velocidade, devido às perturbações relativas ao eixo z.



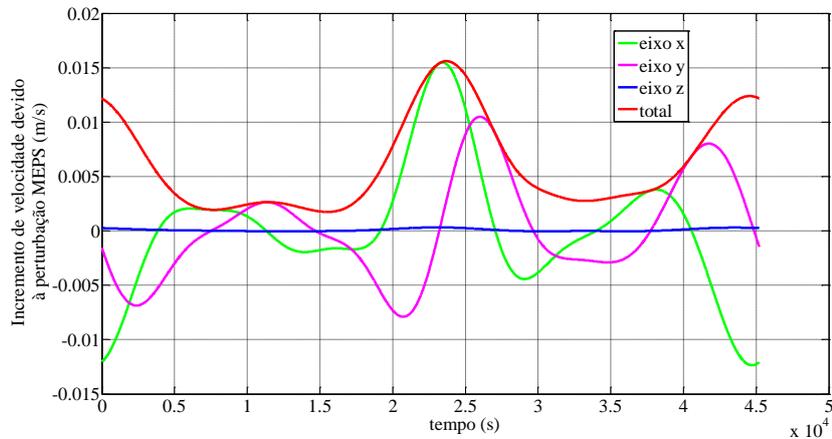
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.21 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas às concentrações de massa em cada eixo e total.



Fonte: Produção do autor.

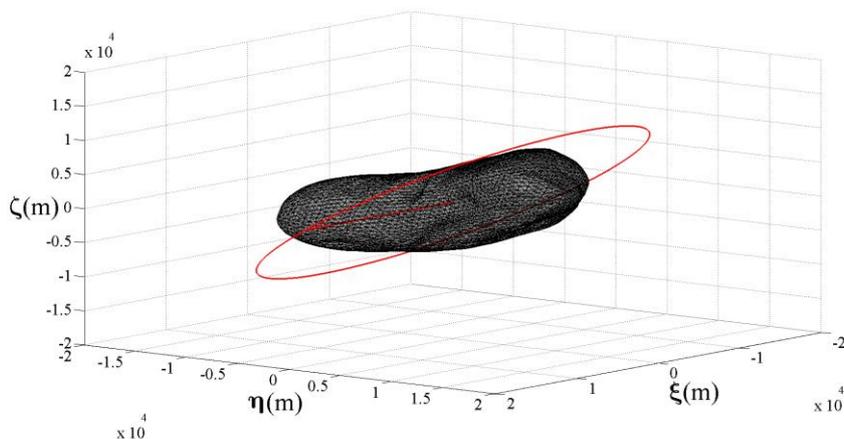
Figura 8.22 – Incremento da velocidade, devido às perturbações, relativas ao método da expansão do potencial em cada eixo e total.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.23 apresenta uma órbita em torno do asteroide Eros, adotando o semi-eixo maior igual a 18000 metros, ângulo de inclinação igual a 45° e os demais elementos keplerianos nulos.

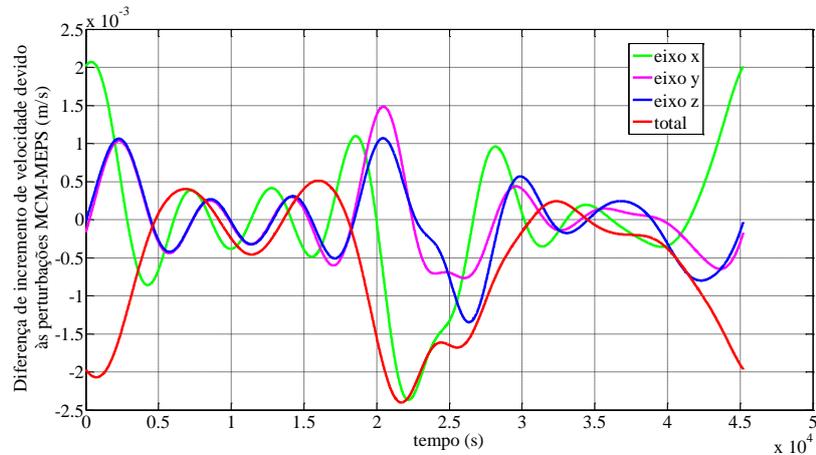
Figura 8.23 - Órbita com inclinação de 45° em torno do Eros, com correções de dados.



Fonte: Produção do autor.

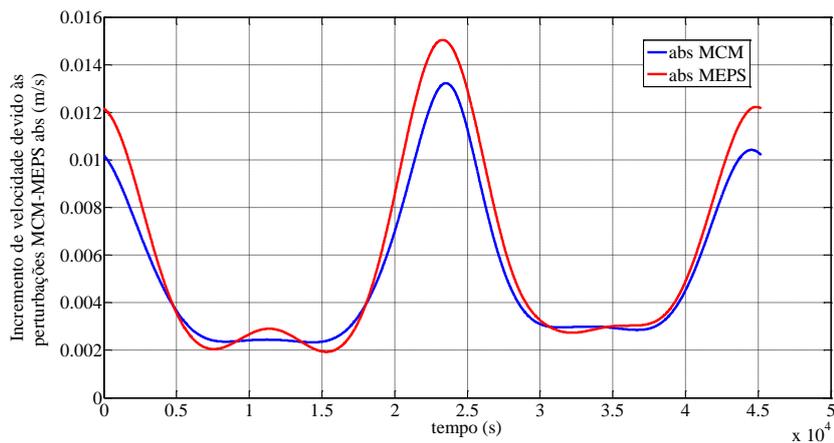
Devido à semelhança dos gráficos das diferenças, assim como os incrementos de velocidade, em razão das perturbações referentes às concentrações de massa e à expansão do potencial em série, em cada um dos eixos coordenados e total, somente os gráficos que apresentam as diferenças relativas e absolutas entre as velocidades foram colocados, como ilustram as Figuras 8.24 e 8.25.

Figura 8.24 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão do potencial em série e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.25 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.

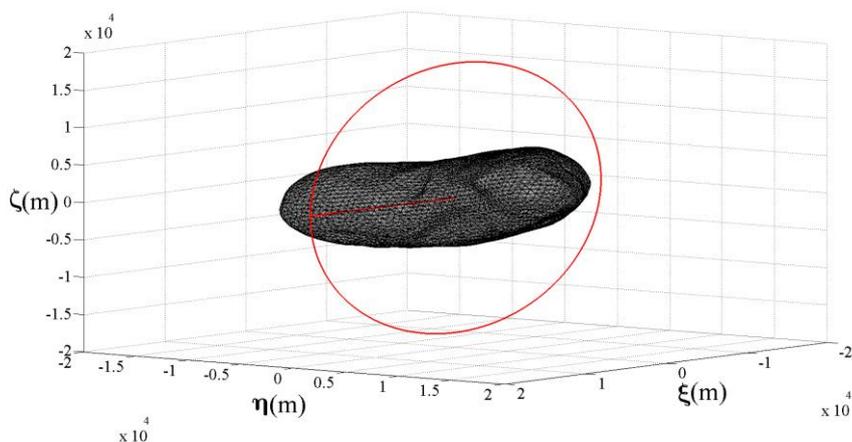


Fonte: Produção do autor.

Analisando as Figuras 8.24 e 8.25, verifica-se, novamente, que, em ambos os casos, essas diferenças são muito pequenas. Além disso, vale observar, mais uma vez, a conformidade entre os gráficos no caso da diferença absoluta das velocidades, levando a concluir que os dois modelos apresentam comportamentos semelhantes.

A Figura 8.26 apresenta uma órbita em torno do asteroide Eros, adotando-se semi-eixo maior igual a 18000 metros, ângulo de inclinação igual a 90° e os demais elementos keplerianos nulos.

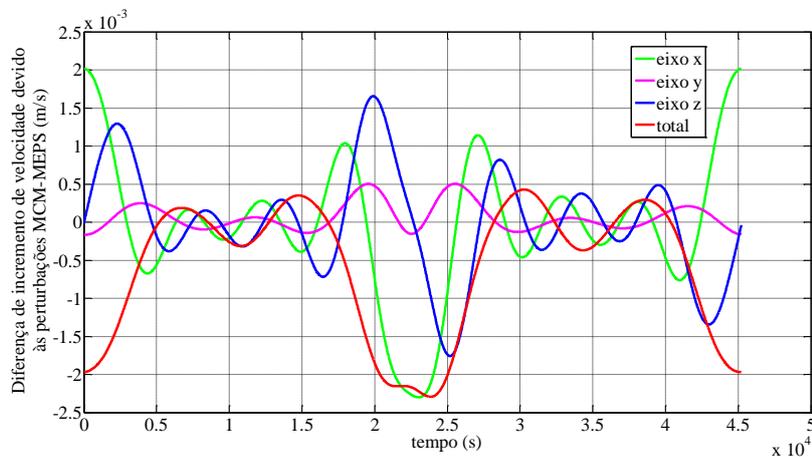
Figura 8.26 - Órbita com inclinação de 45° em torno do Eros, com correção de dados.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.27 apresenta os gráficos das diferenças entre as velocidades, em relação a cada eixo e total, devido às perturbações, calculadas por meio dos modelos obtidos pela expansão em série e pelas concentrações de massa.

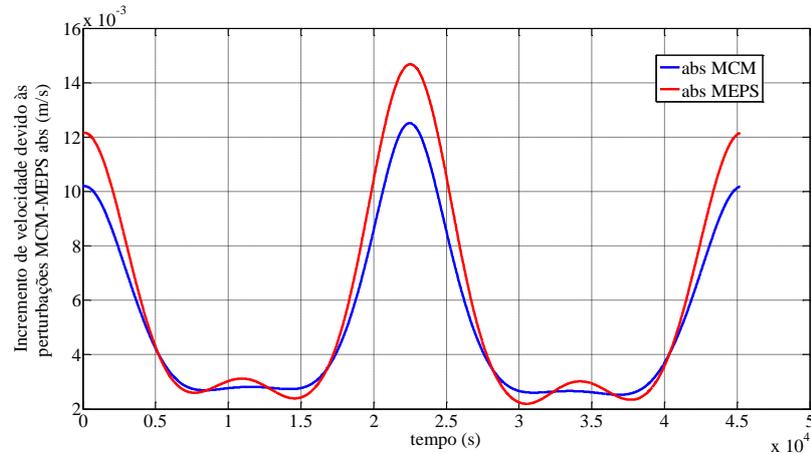
Figura 8.27 – Diferença de incremento entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 8.28, exibe a diferença absoluta entre as velocidades, constatando, em ambos os casos, diferenças muito reduzidas, ressaltando a semelhança dos gráficos no caso da diferença absoluta das velocidades.

Figura 8.28 – Incremento das velocidades absolutas, devido às perturbações, obtidas pelos modelos da expansão e concentrações de massa.



Fonte: Produção do autor.

Comparando as Figuras 8.16, 8.24 e 8.27, correspondentes aos gráficos das diferenças relativas das velocidades em cada eixo coordenado e ao valor total, referentes às três simulações de uma órbita de um veículo espacial em torno do asteroide Eros, com 7790 faces, com correções dos dados, adotando o mesmo valor para o semieixo maior, 18000 metros, e variando somente os ângulos de inclinação, isto é, 0°, 45° e 90°, respectivamente, verifica-se um comportamento semelhante em todos os casos, além de indicar que essas diferenças são quase nulas.

Em relação aos gráficos que apresentam os incrementos de velocidades absolutas devido às perturbações determinadas pelos dois modelos empregados, referentes às três simulações de órbitas em torno do asteroide Eros, as Figuras 8.17, 8.25 e 8.28, mostram uma similaridade entre os resultados obtidos por ambos.

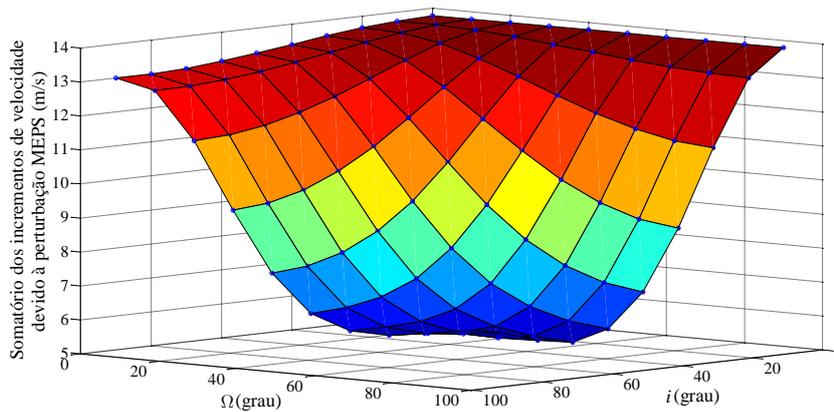
8.2.8 Estudo da perturbação gravitacional do asteroide Eros utilizando o modelo da expansão do potencial em série

De posse do modelo do campo gravitacional obtido pela expansão do potencial em série, seu gradiente fornecerá os componentes da resultante da força gerada no veículo espacial, permitindo aplicá-los ao ambiente de simulação STRS, possibilitando simular trajetórias de um veículo espacial imerso nesse campo gravitacional, avaliando as alterações do potencial. Para exemplificar uma aplicação que utiliza esta forma de estudo, pretende-se analisar a variação dos valores do modelo obtido para o potencial do

asteroide Eros, com 7790 faces, com correções dos dados, em função do ângulo de inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente para alguns valores do semi-eixo maior, considerando nulos os demais elementos keplerianos.

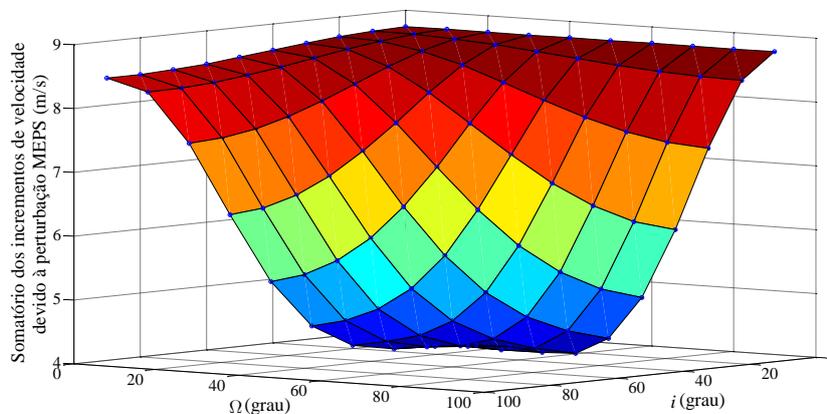
Para investigar as alterações dos valores do somatório do incremento de velocidade devido à perturbação relativa ao método da expansão do potencial em série, foram adotados os valores de 18000 metros, 2100 metros e 25000 metros para o semi-eixo maior da órbita, e estabelece-se uma variação de 10° , tanto para o ângulo de inclinação quanto para a ascensão reta do nodo ascendente, ambos iniciando em 0° e terminando em 90° , gerando os gráficos ilustrados na Figura 8.29, Figura 8.30 e Figura 8.31.

Figura 8.29 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 18000 metros.



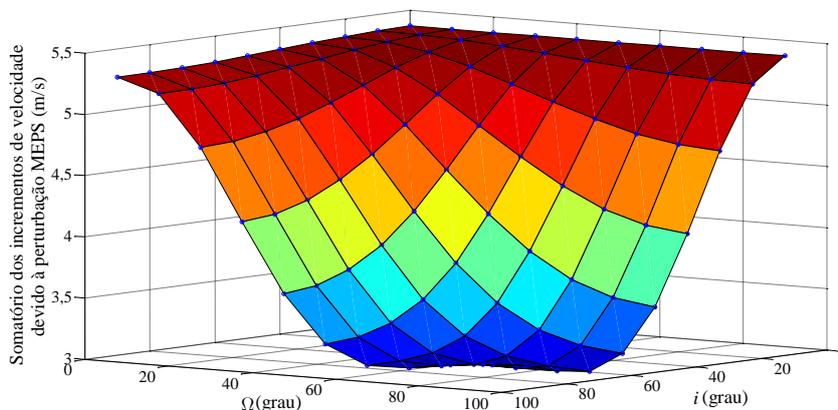
Fonte: Produção do autor.

Figura 8.30 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 21000 metros.



Fonte: Produção do autor.

Figura 8.31 – Somatório do incremento de velocidade devido à perturbação, para o semi-eixo maior igual a 25000 metros.



Fonte: Produção do autor.

Analisando as Figuras 8.29, 8.30 e 6.31, constata-se que, devido ao aumento do semi-eixo maior, o valor do somatório dos incrementos de velocidade decresce, ou seja, a influência da perturbação do campo gravitacional diminui com o aumento da altitude. Verifica-se, também que, apesar de não se ter a função explícita dessas superfícies, todas apresentam um comportamento gráfico semelhante no intervalo considerado, assim como possuem um valor mínimo, na vizinhança do ponto (60° , 90°), em todos os casos, isto é, existem ângulos de inclinação e de ascensão reta do nodo ascendente, para os quais o efeito da perturbação do potencial é mínimo, conclusão de fundamental importância, tendo em vista, obter uma trajetória que otimize o consumo de combustível.

8.3 Conclusão

O objetivo deste capítulo foi determinar o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide 433 Eros adotando duas configurações de dados: a primeira, com 56644 faces e 28324 vértices, não corrigindo esses dados, e a segunda, com 7790 faces e 3897 vértices, corrigindo esses dados, de modo que o centro de massa coincida com a origem do sistema de coordenadas fixa no corpo, assim como, os eixos desse sistema também coincida com os eixos principais de inércia, seguindo a mesma metodologia utilizada na modelagem dos corpos anteriores, isto é, decompondo-o em elementos tetraédricos, neste caso, por meio da utilização dos dados fornecidos pela NEAR/NASA, aplicando,

em seguida, o método da expansão do potencial em série. Para ambas configurações, também foram desenvolvidos os modelos baseados nas concentrações de massa, tendo em vista, comparar os resultados obtidos, ressaltando que o intuito do estudo com a primeira configuração, foi determinar os coeficientes dos harmônicos esféricos e confrontá-los com aqueles existentes na literatura, validando, mais uma vez, o método aplicado. Já, a modelagem do asteroide Eros utilizando a segunda configuração, tem como finalidade, priorizar o mesmo procedimento empregado nos asteroides Itokawa e Geographos, determinando seus coeficientes de Stokes, além de comparar os gráficos gerados pelas simulações utilizando os modelos obtidos pelo método da expansão do potencial em série e das concentrações de massa. Logo após realizar as três simulações apresentadas, analisando os gráficos das Figuras 8.16, 8.24 e 8.27, verifica-se a diferença entre as velocidades, devido às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos dois modelos, mesma constatação, relativa ao incremento de velocidade absoluta, dadas pelos gráficos das Figuras 8.17, 8.25 e 8.28, ressaltando a conformidade entre os dois modelos, também verificada pelo incremento da velocidade, devido às perturbações, mostradas nas Figuras 8.21 e 8.22.

Apesar de ambos os modelos utilizarem a decomposição do asteroide em tetraedros, o modelo obtido pelo método da expansão do potencial em série apresenta a vantagem de expressar o potencial na forma de uma função polinomial simples, permitindo manipulá-la algebricamente, além de possibilitar sua participação em interações numéricas, enquanto que o método das concentrações de massa apresenta a vantagem da simplicidade em sua modelagem, pois, para determinar os centros de atração secundários, basta encontrar o volume e o centro de massa de cada tetraedro, e acumular toda sua massa em seu respectivo baricentro.

Posteriormente à obtenção dos dois modelos, foram determinados os coeficientes dos harmônicos esféricos, com o auxílio do primeiro modelo, assim como, diretamente, por meio das integrais correspondentes, verificando a proximidade dos valores encontrados.

Por fim, para exemplificar uma utilização do modelo obtido pela expansão do potencial em série, realizou-se um estudo da variação dos valores do potencial em função da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente, estabelecendo uma variação de 10° para os dois ângulos, ambos iniciando em 0° e terminando em 90° , adotando cinco

valores para o semieixo maior, e considerando nulos os demais elementos keplerianos. Dessa forma, foram obtidas três superfícies, concluindo que todas apresentam um mínimo na vizinhança do ponto $(60^\circ, 90^\circ)$. Verificou-se, também que, quanto mais distante do centro de massa do asteroide, menor é a influência do campo gravitacional.

Observa-se também, que os coeficientes dos harmônicos esféricos obtidos pelas duas configurações do asteroide Eros não podem ser comparados, pois, como descrito anteriormente, devido ao custo computacional da primeira configuração, somente no segundo estudo, houve correções dos dados fornecidos pela NEAR/NASA. Vale observar que o objetivo do primeiro estudo, concentrou-se na determinação, confrontação e validação dos resultados relativos aos coeficientes dos harmônicos esféricos, com aqueles obtidos por Miller et al. (2002), também calculados sem correções. Apesar disso, verificou-se que, em ambos os casos, os cálculos desses coeficientes, seja utilizando o potencial ou a integração direta, são coincidentes, como mostram as Tabelas 8.6 e 8.13.

9. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma metodologia para modelar o potencial em torno de um corpo com distribuição de massa irregular, pois a estimativa do campo gravitacional é a chave para o planejamento de uma missão bem-sucedida, tanto em termos de segurança do veículo espacial, quanto na qualidade da coleta de dados.

Tendo em vista atingir o objetivo geral desta pesquisa, primeiramente, fez-se um estudo teórico envolvendo a equação de Laplace, origem da função potencial, desde a sua dedução em coordenadas esféricas, até a sua resolução, utilizando o método de separação de variáveis, resultando na solução dada pela série dos harmônicos esféricos. Em seguida, foram estudados dois outros procedimentos para modelar o campo gravitacional, ou seja, os métodos da expansão do potencial em série e o das concentrações de massa. Vale ressaltar que, a expansão do potencial em série, apesar de utilizar a mesma técnica da decomposição de um sólido em elementos tetraédricos, apresenta uma abordagem diferente nos cálculos das integrais, em relação à utilizada por Werner (1996). Logo, esse diferencial pode ser caracterizado como uma das contribuições deste trabalho.

Após o desenvolvimento dos métodos citados, ambos foram aplicados na modelagem do campo gravitacional de um cubo homogêneo unitário, pois, como esse poliedro possui um modelo exato, isso possibilitou comparar os resultados obtidos. Ao realizar essa confrontação, verificou-se a consistência e robustez do modelo obtido pelo método da expansão do potencial em série, tanto para o valor do potencial, quanto para os coeficientes de Stokes, validando sua concepção para este primeiro estudo.

A validação do método para o cubo possibilitou investigar sua aplicação em um corpo com maior irregularidade em sua distribuição de massa, ou seja, permitiu a análise de seu emprego na modelagem do campo gravitacional em torno de um asteroide.

O primeiro asteroide modelado foi o 25143 Itokawa, utilizando seus dados, obtidos por Ostro (2004) e disponibilizados pelo JPL/NASA, contendo 6098 vértices e 12192 faces.

Verificou-se, inicialmente, que a localização do centro de massa do asteroide poderia ser refinada por meio de uma translação, não alterando o valor de seu volume. Posteriormente, foi calculado o tensor de inércia, apresentando os momentos e os

produtos de inércia, por meio dos quais, foram calculados os autovalores e os correspondentes autovetores. De posse desses autovetores, aferiu-se a formação de uma base ortonormal destrógiara, com a qual, fez-se uma rotação dos vértices intermediários, obtendo as coordenadas dos vértices finais.

A partir da obtenção dos vértices finais, utilizando o método da expansão do potencial em série, foram calculados os termos relativos à perturbação do campo gravitacional até o grau 6, com os quais, foram determinados os coeficientes dos harmônicos esféricos correspondentes, além de calculá-los diretamente, empregando as integrais desenvolvidas na seção 4.4. Ao comparar os resultados obtidos, com aqueles apresentados por Scheeres (2004), concluiu-se, novamente, a validade do método.

Tendo em vista realizar simulações em torno do asteroide Itokawa, para utilizar o ambiente STRS, considerando somente o efeito da perturbação do campo gravitacional, foi calculado o gradiente do seu potencial, fornecendo, desse modo, os componentes da resultante do vetor força, os quais, foram incorporados ao simulador. Ao mesmo tempo, também foi considerado o modelo para esse asteroide, empregando o método das concentrações de massa, objetivando comparar as simulações realizadas. Com este propósito, foram feitas três simulações, correspondentes aos ângulos de inclinação iguais a 0° , 45° e 90° , adotando o semieixo maior de magnitude igual a 300 metros e demais elementos keplerianos nulos. Verificou-se a diferença entre os incrementos de velocidade devidos às perturbações, em cada eixo e total, obtidas pelos dois modelos, mesma constatação, relativa à diferença absoluta dos incrementos de velocidade, observando, inclusive, a conformidade gráfica entre os dois modelos, também verificada pelo incremento da velocidade, devido às perturbações.

Com o intuito de exemplificar uma aplicação do modelo construído pela expansão do potencial em série, relativo ao asteroide Itokawa, foi realizado um estudo da variação dos valores do somatório dos incrementos de velocidade devido à perturbação, em função da inclinação e da ascensão reta do nodo ascendente, obtendo, dessa forma, cinco superfícies, as quais apresentam um ponto de mínimo.

Após a modelagem do asteroide Itokawa, foram realizados estudos análogos envolvendo a modelagem dos asteroides Geographos e Eros, também utilizando o

método da expansão do potencial em série, sendo que no caso do Eros, foram analisadas duas configurações: a primeira, com 56644 faces e 28324 vértices, não corrigindo esses dados, e a segunda, com 7790 faces e 3897 vértices, corrigindo esses dados, de modo que o centro de massa coincida com a origem do sistema de coordenadas fixa no corpo, assim como, os eixos desse sistema também coincida com os eixos principais de inércia. Tanto para o Geographos, quanto para o Eros, os resultados obtidos ratificaram a validade do método empregado para modelar seus campos gravitacionais.

Portanto, mediante os resultados apresentados para o cubo homogêneo unitário, assim como para os asteroides Itokawa, Geographos e Eros, comprovou-se a eficácia do método da expansão do potencial em série na modelagem do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular, demonstrando, inclusive, que a metodologia desenvolvida neste trabalho tem caráter geral e pode ser aplicada no mapeamento do potencial ao redor de qualquer asteroide, desde que se conheça o formato desse corpo.

Constatou-se também que o método da expansão do potencial em série permitiu expressar o modelo do campo gravitacional na forma de uma função analítica homogênea, simplificando sua manipulação algébrica, caracterizando uma vantagem sobre o método das concentrações de massa. Logo, utilizando essa vantagem, a partir da obtenção do modelo do potencial, o cálculo do seu gradiente forneceu os componentes da resultante do vetor força gerada pelo asteroide em um veículo espacial, possibilitando estudar a dinâmica de um satélite imerso nesse campo gravitacional, ou seja, introduzindo esses componentes analíticos da força perturbadora no ambiente de simulação Spacecraft Trajectory Simulator (STRS), desenvolvido por Rocco (2008 e 2012), reduziu o custo computacional das simulações, requerendo menos memória, em comparação com o método das concentrações de massa.

Além dos asteroides Itokawa, Geographos e Eros, também foram obtidos os modelos dos potenciais para os asteroides (2063) Bacchus, (101955) Bennu, (1580) Betulia, (4769) Castalia, (21) Lutetia e (4660) Nereus, cujos coeficientes dos harmônicos esféricos constam dos apêndices F, G, H, I, J e K, respectivamente.

Finalmente, vale observar que, de posse do modelo do campo gravitacional desenvolvido pelo método da expansão do potencial em série, pode-se empregá-lo em

vários estudos referentes ao corpo a ser estudo, tais como, a determinação dos pontos de equilíbrio, também chamados de pontos estacionários, assim como a análise de suas correspondentes estabilidades, tanto no sentido de estabilidade orbital, quanto no sentido de Liapunov.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy**, v. 60, n. 3, p.331-364, nov. 1994. Springer Nature.
- BANERJEE, B.; GUPTA, S. P. D. Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped. **Geophysics**, v. 42, n. 5, p.1053-1055, ago. 1977. Society of Exploration Geophysicists.
- BATE, R. R.; MULLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of astrodynamics**. New York: Dover Publications Inc., 1971. 480 p. (Dover Books on Aeronautical Engineering).
- BATTIN, R. H. **An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics**. Reston, VA: AIAA, 1999. 796 p. (AIAA Education Series).
- BLESA, F. Periodic orbits around simple shape bodies. **Monografias del Seminario Matemático Garcia de Galdeano** v. 33, p. 67-74, 2006.
- BENNER, L. A. M.; HUDSON, S. H.; OSTRO, S. J.; ROSEMA, K. D.; GIORGINI, J. D.; YEOMANS, D. K.; JURGENS, R. F.; MITCHELL, D. L.; WINKLER, R.; ROSE, R.; SLADE, M. A.; THOMAS, M. L. Radar observations of asteroid 2063 Bacchus. **Icarus**, v.139, p. 309-327, 1999.
- BOND, V.R.; ALLMAN, M.C. **Modern astrodynamics – fundamentals and perturbation methods**. New Jersey: Princeton University Press, 1996. 624 p.
- BOYCE, W. Comment on a Formula for the Gravitational Harmonic Coefficients of a Triaxial Ellipsoid. **Celestial mechanics and dynamical astronomy**, v. 67, n. 2, p.107-110, 1997. Springer Nature.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. New York: Academic Press, 1961. 598 p.
- BROUCKE, R. A. Closed form expressions for some gravitational potentials. **The Dynamics Of Small Bodies In The Solar System**, p. 321-340, 1999. Springer Netherlands.
- BROUCKE, R. A. Closed form expressions for some gravitational potential: triangle, rectangle, pyramid and polyhedron. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Albuquerque. **Proceedings...** San Diego: AAS/AIAA, 1995. (PAPER AAS 95 - 190).
- BROZOVIC, M.; OSTRO, S. J.; BENNER, L. A. M.; GIOGINO, J. D.; JURGENS, R. F.; ROSE, R.; NOLAN, M. C.; HINE, A. A.; MAGRI, C.; SCHEERS, D. J.; MARGOT,

J. L. Radar observations and a physical model of asteroid 4660 Nereus, a prime space mission target. **Icarus**, v. 201, n. 1, p.153-166, maio 2009. Elsevier BV.

CARVALHO, J. P. S.; MORAES, R. V.; PRADO, A. F. B. A. Planetary satellite orbiters: applications for the Moon. **Mathematical Problems In Engineering**, v. 2011, p.1-19, 2011. Hindawi Limited.

CASOTTO, S.; MUSOTTO, S. Methods for computing the potential of an irregular, homogeneous, solid body and its gradient. **Astrodynamics Specialist Conference**, p.82-96, 14 ago. 2000. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

CHAPMAN, C.R.; VEVERKA, J.; THOMAS, P.C.; KLAASEN, K.; BELTON, M.J.S.; HARCH, A.; MACEWEN, A.; JOHNSON, T.V.; HELFENSTEIN, P.; DAVIES, M.E.; DENK, T. Discovery and physical properties of Dactyl, a satellite of asteroid 243 Ida. **Nature** v. 374, p. 783-785, 1995.

CHOBOTOV, V. A. **Orbital mechanics**. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2002. 365p.

CURTIS, H. **Orbital mechanics for engineering students**. 2. ed. New York: Elsevier Ltd., 2009. 744 p.

DECHAMBRE, D.; SCHEERES, D. J. Transformation of spherical harmonic coefficients to ellipsoidal harmonic coefficients. **Astronomy & Astrophysics**, v. 387, n. 3, p.1114-1122, 17 maio 2002. EDP Sciences.

EVEREST, G. **An account of the measurement of an arc of the Meridian between the parallels of 18°3' e 24°7'**. London: [s. n], 1830. 337 p.

FARNHAM, T.L. **Shape model of asteroid 21 LUTETIA, RO-A-OSINAC/OSIWAC-5-LUTETIA-SHAPE-V1.0**, NASA Planetary Data System, 2013.

GASKELL, R.; SAITO, J.; ISHIGURO, M.; KUBOTA, T.; HASHIMOTO, T.; HIRATA, N.; ABE, S.; BARNOUIN-JHA, O.; SCHEERES, D. **Gaskell Itokawa shape model V1.0**. NASA Planetary Data System, 2008a.

GASKELL, R.W. **Gaskell Eros shape model V1.0**. NASA Planetary Data System, 2008b.(NEAR-A-MSI-5-EROSHAPE-V1.0).

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. San Francisco: W. H. Freeman And Company, 1967. 358 p.

HU, X. **A comparison of ellipsoidal and spherical harmonics for gravitational field modeling of non-spherical bodies**. Columbus, OH. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, june 2012. Report n° 499.

HUDSON, R. S.; OSTRO, S. J. Physical model of asteroid 1620 Geographos from radar and optical data. **Icarus**, New York, v. 140, p.369-378, jun. 1999.

HUGHES, Peter C. **Spacecraft attitude dynamics**. 5. ed. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2004. 570 p.

KAULA, W. M. **Theory of satellite geodesy**. 3. ed. New York: Dover Publications, Inc., 1966. 124 p.

KELLOGG, O. D. **Foundations of potential theory**. 3. ed. New York: Dover Publications, Inc., 2014. 384 p.

KUGA, H. K.; RAO, K.R; CARRARA, V. **Satélites artificiais-** movimento orbital São José dos Campos: INPE, 2011. 103 p. (sid.inpe.br/mctm19/2011/11.22.18.25-PUD). Disponível em: <<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3ARJ3NH>>. Acesso em: 23 jul. 2015.

LIEN, S. L.; KAJIYA, J. T. A symbolic method for calculating the integral properties of arbitrary non-convex polyhedra. **IEEE Computer Graphics and Applications**. v. 4, n. 10, p. 35-42, Oct. 1984.

MACMILAN, W. D. **The theory of the potential**. Reprint. [Originally published: McGraw-Hill, New York (1930)]. New York: MacMilan's Theoretical Mechanics. Dover publications, 1958.

MAGRI, C.; OSTRO, S. J.; SCHEERES, D. J.; NOLAN, M. C.; GIORGINI, J. D.; BENNER, L. A. M.; MARGOT, J. L. Radar observations and a physical model of Asteroid 1580 Betulia. **Icarus**, v. 186, n. 1, p.152-177, jan. 2007. Elsevier BV.

MILLER, J.K.; KONOPLIV, A. S.; ANTREASIAN, P. G.; BORDI, J. J.; CHESLEY, S.; HELFRICH, C. E.; OWEN, W. M.; WANG, T. C.; WILLIAMS, B. G.; YEOMANS, D. K. Determination of shape, gravity, and rotational state of asteroid 433 Eros. **Icarus**, v. 155, n. 1, p.3-17, jan. 2002. Elsevier BV.

MONTANA, C. J.; MICKUS, K. L.; PEEPLES, W. J. Program to calculate the gravitational field and gravity gradient tensor resulting from a system of right rectangular prisms. **Comput. Geosci**, (UK), v. 5, n. 18, p.587-602, abr. 1992.

MOTA, M. L.; ROCCO, E. M. Comparação entre as abordagens impulsivas e contínua do sistema propulsivo em manobras orbitais em torno de um corpo não-esférico. In: XXXV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 35., Fortaleza. **Proceedings... CILAMCE**, 2014.

NAGY, D. The gravitational attraction of a right rectangular prism. **Geophysics**, v. 31, n. 2, p.362-371, abr. 1966. Society of Exploration Geophysicists.

- NEESE, C. (ed.) **Small body radar shape models V2.0**. EAR-A-5-DDRRADARSHAPE-MODELS-V2.0, NASA Planetary Data System, 2004.
- NOLAN, M. C.; MAGRI, C.; HOWELL, E. S.; BENNER, L. A. M.; GIORGINI, J. D.; HERGENROTHER, C. W.; HUDSON, R. S.; LAURETTA, D. S.; MARGOT, J. L.; OSTRO, S.J.; SCHEERES, D.J. **Asteroid (101955) Bennu shape model V1.0**. EAR-A-I0037-5-BENNUSHAPE-V1.0. NASA Planetary Data System, 2013.
- NOLAN, M. C.; MAGRI, C.; HOWELL, E. S.; BENNER, L. A. M.; GIORGINI, J. D.; HERGENROTHER, C. W.; HUDSON, R. S.; LAURETTA, D. S.; MARGOT, J. L.; OSTRO, S. J. Shape model and surface properties of the OSIRIS-REx target Asteroid (101955) Bennu from radar and lightcurve observations. **Icarus**, v. 226, n. 1, p.629-640, set. 2013. Elsevier BV.
- OSTRO, S.J.; HUDSON, R.S.; NOLAN, M.C. ; MARGOT, J.-L.; SCHEERES, D.J.; CAMPBELL, D.B.; MAGRI, C.; GIORGINI, J.D.; YEOMANS, D.K. **Asteroid radar shape models, 216 Kleopatra**. EAR-A-5-DDR-RADARSHAPE-MODELS V2.0:RSHAPES-216KLEOPATRA-200405”, NASA Planetary Data System, 2004.
- PARK, R. S.; WERNER, R. A.; BHASKARAN, S. Estimating small-body gravity field from shape model and navigation data. **Journal Of Guidance, Control, And Dynamics**, v. 33, n. 1, p.212-221, jan. 2010. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA).
- RIAGUAS, A.; ELIPE, A.; LARA, M. Periodic orbits around a massive straight segment. **Celestial Mechanics And Dynamical Astronomy**, v. 73, n. 1/4, p.169-178, 1999. Springer Nature.
- ROCCO, E. M. **Tools for analysis and simulation of spacecraft trajectories in Keplerian orbit**. Bremen: Center of Applied Space Technology and Microgravity-ZARM University of Bremen, Germany, 2006. Technical Report.
- ROCCO, E.R. Perturbed orbital motion with a PID control system for the trajectory. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 14., 2008. Águas de Lindóia. **Anais...** 17 a 21 de Novembro, 2008.
- ROCCO, E. M. Controle de trajetória com propulsão contínua para missões do tipo drag-free. CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA (CONEM 2012), 7., 2012, São Luís, Maranhão, Brasil, 31 de julho- 3 de agosto. **Anais...** Rio de Janeiro: ABCM, 2012.
- ROCCO, E.M. Automatic correction of orbital elements using continuous thrust controlled in closed loop. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, 2013.

ROCCO, E. M. Trajetórias de aproximação para pouso no asteroide 216 Kleopatra. In: XVII COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 17., 2014, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: CBDO, 2014.

ROCCO, E. M. Gravitational disturbances generated by the Sun, Phobos and Deimos in orbital maneuvers around Mars with automatic correction of the semi-major axis. **Journal Of Physics: Conference Series**, v. 641, p.1-6, 7 out. 2015. IOP Publishing.

ROCCO, E. M.; GONÇALVE, L. D.; MORAES, R. V. Orbital trajectories in the vicinity of Saturn's moons Prometheus, Epimetheus, Janus and Pandora. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ASTEROIDS, COMETS, METEORS, 2017, Montevideo. **Proceedings...** ACM, 2017.

ROY, A. E. **Orbital motion**. Philadelphia: IOP Publishing, 1988.

SCHEERES, D.J.; OSTRO, S.J; HUDSON, S.; WERNER, R.A. Orbits close to asteroid 4769 Castalia. **Icarus**, v. 121, n. 1, p.67-87, maio 1996. Elsevier BV.

SCHEERES, D. J.; OSTRO, S. J.; BENNER, L. A. M. The dynamical environment about asteroid 25143 Itokawa: Target of the hayabusa Mission. In: AIAA/AAS ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE, 2004, Providence, Rhode Island. **Proceedings...** AIAA/AAS, 2004. p.1-12.

SCHEERES, D. J. **Orbital motion in strongly perturbed environments**. [s.L]: Springer Praxis Books, 2012a.

SCHEERES, D. J. Orbit mechanics about small asteroids. **Acta Astronautica**, v.72, p.1–14, 2012b.

SCHEERES, D. J.; HESAR, S. G.; TARDIVEL, S.; HIRABAYASHI, M.; FARNOCCHIA, D.; McMAHON, J. W.; CHESLEY, S. R.; BARNOUN, O.; BINZEL, R. P.; BOTTKE, W. F.; DALY, M. G.; EMERY, J. P.; HERGENROTHER, C. W.; LAURETTA, D. S.; MARSHALL, J. R.; MICHEL, P.; NOLAN, M. C.; WALSH, K. J. The geophysical environment of Bennu. **Icarus**, [s.l.], v. 276, p.116-140, set. 2016. Elsevier BV.

VENDITTI, F. C. F. **Manobras orbitais ao redor de corpos irregulares**. 2013. 228 p. IBI: <8JMKD3MGP7W/3F7Q5U2>. (sid.inpe.br/mtc-m19/2013/11.12.19.30-TDI). Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2013. Disponível em: <<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3F7Q5U2>>.

VENDITTI, F.C.F.; ROCCO, E.M.; PRADO, A.F.B.A. Orbital maneuvers around irregular shaped bodies. In: ANNUAL MEETING OF THE DIVISION ON DYNAMICAL ASTRONOMY OF THE AMERICAN ASTRONOMICAL SOCIETY, 44, Paraty, **Proceedings...**DDA/AAS, 2013a.

VENDITTI, F.C.F.; ROCCO, E.M.; PRADO, A.F.B.A. Estudos de perturbações em órbitas ao redor do asteroide 216 Kleopatra utilizando modelo de poliedros. CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 11., 2013, Fortaleza. **Anais...** São Carlos: SBMAC, 2013b.

ZHENJIANG, Z.; MENG, Y.; HUTAO, C.; PINGYUAN, C. The method to determine spherical harmonic model of asteroid based on polyhedron, In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER AND ELECTRICAL ENGINEERING, INTERNATIONAL PROCEEDINGS OF COMPUTER SCIENCE AND INFORMATION TECHNOLOGY, 3., 2012, Beijing. **Proceedings...** 3., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. v. 53.

WALDVOGEL, J. The newtonian potential of a homogeneous cube. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, ZAMP, v.27, p. 867-871, 1976.

WALDVOGEL, J. The newtonian potential of a homogeneous polyhedra. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, ZAMP, v.30, p. 388-398, 1979.

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 59, n. 3, p. 253-278, 1994.

WERNER, R. A.; SCHEERES, D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v.65, n.3, p.313-344, 1996.

WERNER, R. A. Spherical harmonics coefficients for the potential of a constant density polyhedron. **Comp. and Geosci.**, v. 23, p.1071-1077, 1997.

YEOMANS D. K.; ANTREASIAN P. G.; BARRIOT J.-P.; CHESLEY S. R.; DUNHAM D. W.; FARQUHAR. W.; GIORGINI J. D.; HELFRICH C. L.; KONOPLIV A. S.; MCADAMS J. V.; MILLER J. K.; OWEN W. M. JR.; SCHEERES D. J.; THOMAS P. C.; VEVERKA J.; WILLIAMS B. G. Radio science results during the NEAR-Shoemaker spacecraft rendezvous with Eros. **Science**, v. 289, p. 2085–2088, 2000.

YU, Y; BAOYIN, H. Resonant orbits in the vicinity of asteroid 216 Kleopatra, **Astrophysics and Space Science**, v. 343, n. 1, p 75-82, 2013.

APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL SOBRE O TETRAEDRO RETO RETÂNGULO

Devido à relevância dessa integral, utilizada na obtenção do modelo do potencial gravitacional apresentado neste trabalho, faz-se necessário sua dedução, apresentada a seguir.

As funções beta e gama são definidas pelas Equações (A.1) e (A.2), respectivamente:

$$\beta(n_1 + 1, n_2 + 1) = \int_0^1 x^{n_1} (1-x)^{n_2} dx \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!, \quad (\text{A.2})$$

e se relacionam por meio da Equação (A.3):

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \quad (\text{A.3})$$

Logo, a integral da função $f(x, y, z) = x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$ sobre o tetraedro reto retângulo W , com vértices localizados nos pontos $O(0,0,0)$, $V_1(1,0,0)$, $V_2(0,1,0)$ e $V_3(0,0,1)$, é expressa pela Equação (A.4):

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} dx dy dz \\ &= \frac{1}{n_1 + 1} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-z-y)^{n_1+1} y^{n_2} z^{n_3} dy dz \\ &= \frac{1}{n_1 + 1} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-z)^{n_1+1} \left(1 - \frac{y}{1-z}\right)^{n_1+1} y^{n_2} z^{n_3} dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Fazendo $Y = \frac{y}{1-z}$, então, $y = (1-z)Y$. Logo, $dy = (1-z)dY$, a qual, substituída na Equação (A.4), produz a Equação (A.5):

$$I = \frac{1}{n_1 + 1} \int_0^1 \int_0^1 (1-z)^{n_1+1} (1-Y)^{n_1+1} (1-z)^{n_2} Y^{n_2} z^{n_3} (1-z) dY dz. \quad (\text{A.5})$$

Manipulando algebricamente a Equação (A.5), chega-se a Equação (A.6):

$$I = \frac{1}{n_1 + 1} \int_0^1 \int_0^1 (1-Y)^{(n_1+1)} Y^{n_2} (1-z)^{(n_1+n_2+2)} z^{n_3} dY dz, \quad (\text{A.6})$$

a qual, pode ser reescrita por meio da Equação (A.7)

$$I = \frac{1}{n_1 + 1} \int_0^1 \beta(n_2 + 1, n_1 + 2) (1-z)^{(n_1+n_2+2)} z^{n_3} dz. \quad (\text{A.7})$$

Por sua vez, a Equação (A.7) produz, na sequência, as Equações (A.8) e (A.9):

$$I = \frac{\beta(n_2 + 1, n_1 + 2)}{n_1 + 1} \beta(n_3 + 1, n_1 + n_2 + 2) \quad (\text{A.8})$$

$$I = \frac{1}{n_1 + 1} \frac{n_2! (n_1 + 1)!}{(n_1 + n_2 + 2)!} \frac{n_3! (n_1 + n_2 + 2)!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 3)!}. \quad (\text{A.9})$$

Portanto, a integral da função polinomial $f(x, y, z) = x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$ sobre o tetraedro reto retângulo $OV_1V_2V_3$, representado por W , é dada pela Equação (A.10)

$$I = \iiint_W x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} dx dy dz = \frac{n_1! n_2! n_3!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 3)!}. \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES BETA E GAMMA

Muitos problemas em Engenharia recorrem às chamadas funções especiais da Matemática aplicada para chegarem a uma solução, sendo tais funções, definidas por integrais que podem ser determinadas por um número finito de funções elementares.

Para o cálculo do potencial de um corpo com distribuição de massa irregular, a dificuldade predominante está atrelada aos cálculos de integrais de volume, as quais foram simplificadas, aplicando o método desenvolvido por Lien e Kajjia (1984), cuja técnica utiliza as funções especiais Beta e Gama. O intuito deste apêndice é apresentar a relação entre essas funções.

A função Gama é definida pela Equação (B.1)

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{B.1})$$

sendo $Re(z) > 0$, isto é, parte real de z é positiva. Considerando um número c , tal que $Re(c) > 0$, a Equação (B.1) pode ser reescrita como a Equação (B.2)

$$\Gamma(z) = \int_0^c e^{-t} t^{z-1} dt + \int_c^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{B.2})$$

Integrando por partes a primeira parcela do segundo membro da Equação (B.2), obtém-se a Equação (B.3)

$$\int_0^c e^{-t} t^{z-1} dt = e^{-t} \frac{t^z}{z} + \frac{1}{z} \int_0^c e^{-t} t^z dt \quad (\text{B.3})$$

Caso $c \rightarrow \infty$, o limite obtido é expresso pela Equação (B.4)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \quad (\text{B.4})$$

resultando na Equação (B.5)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{B.5})$$

Outra função especial envolvida é a função Beta de Euler, definida pela Equação (B.6)

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (\text{B.6})$$

satisfazendo $\text{Re}(a) > 0$ e $\text{Re}(b) > 0$. Logo, $\Gamma(a)\Gamma(b)$ é dado pela Equação (B.7)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{b-1} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} x^{a-1} y^{b-1} dx dy \quad (\text{B.7})$$

Substituindo $x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$ e $y = v^2 \Rightarrow dy = 2vdv$ na Equação (B.7), obtém-se a Equação (B.8)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4 \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2a-1} v^{2b-1} dv \quad (\text{B.8})$$

Utilizando as coordenadas polares $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$, e lembrando que a Jacobiana dessa transformação é dada pela Equação (B.9)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad (\text{B.9})$$

Então a Equação (B.8) torna-se a Equação (B.10)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(a+b)-1} dr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2a-1} (\sin \theta)^{2b-1} d\theta \quad (\text{B.10})$$

Rearranjando a Equação (B.10), pode-se reescrevê-la na forma da Equação (B.11)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2[(a+b)-1]} 2r dr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2a-1} (\sin \theta)^{2b-1} d\theta \quad (\text{B.11})$$

Substituindo $r^2 = t$, na Equação (B.11), resulta na Equação (B.12)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(a+b)-1} dt \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta)^{a-1} (\sin^2 \theta)^{b-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (\text{B.12})$$

Fazendo $s = \cos^2 \theta \Rightarrow ds = -2\sin \theta \cos \theta d\theta$, tem-se que $1-s = \sin^2 \theta$, que substituídas na Equação (B.12), produz a Equação (B.13)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(a+b)-1} dt \int_1^0 s^{a-1} (1-s)^{b-1} (-ds) \quad (\text{B.13})$$

que equivale a Equação (B.14)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(a+b)-1} dt \int_0^1 s^{a-1} (1-s)^{b-1} ds \quad (\text{B.14})$$

Portanto, das definições das funções Beta e Gama, a Equação (B.14) fornece a Equação (B.15)

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\beta(a,b) \quad (\text{B.15})$$

resultando na relação desejada, a qual é expressa pela Equação (B.16)

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{B.16})$$

Da Equação (B.16) percebe-se que $\beta(a,b) = \beta(b,a)$.

APÊNDICE C - DEDUÇÃO DO INTERVALO DE CONVERGÊNCIA PARA A EXPANSÃO EM SÉRIE DE POTÊNCIAS DA FUNÇÃO GERATRIZ DOS POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Se a e $b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, então, o teorema binomial permite escrever a Equação (C.1)

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} a^n b^{m-n}, \quad (\text{C.1})$$

sendo $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$. Tomando-se $a=1$ e $b=-x$ na Equação (C.1), obtém-se a Equação (C.2)

$$(1-x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^{m-n} x^{m-n} = 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + (-1)^m x^m, \quad (\text{C.2})$$

a qual, é a série de McLaurin da função $f(x) = (1-x)^m$, para $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $m \in \mathbb{R}$, então, a série de potências, dada pela Equação (C.3),

$$\begin{aligned} 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \\ + (-1)^m \frac{\overbrace{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}^{n \text{ fatores}}}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

é a série de McLaurin, caso convirja, que representa a função $f(x) = (1-x)^m$, $m \in \mathbb{R}$.

A Equação (C.4) permite calcular o raio de convergência da série expressa pela Equação (C.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|m-n|}{n+1} = 1, \quad (\text{C.4})$$

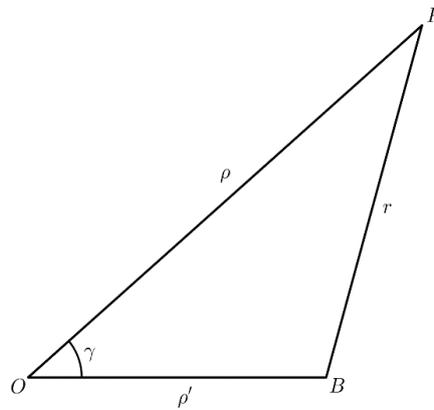
para todo $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixado. Portanto o raio de convergência da série binomial é $R=1$, ou seja, a série binomial converge em $|x| < 1$, e diverge em $|x| > 1$. Caso $m \in \mathbb{N}$, tem-se que a série binomial será dada pela Equação (C.5)

$$(1-x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad (\text{C.5})$$

na qual, $a_1 = 1$ e $a_n = (-1)^n \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{n!}$, para $n = 2, 3, \dots, m$, e $a_n = 0$ se $n > m+1$.

Considere o triângulo formado pelos pontos O , P e B , ilustrado na Figura C.1

Figura C.1 – Triângulo formado pelos pontos O , P e B .



Fonte: Produção do autor.

Aplicando o teorema dos cossenos para a Figura C.1, pode-se obter o valor de r , dado pela Equação (C.6):

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma. \quad (\text{C.6})$$

Isolando $\frac{1}{r}$ da Equação (C.6), definindo $\chi = \frac{\rho'}{\rho}$ e $u = \cos \gamma$, obtém-se a Equação (C.7):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho \sqrt{1 - 2\chi u + \chi^2}}. \quad (\text{C.7})$$

Deseja-se expandir a função $V(\chi, u) = (1 - 2u\chi + \chi^2)^{-1/2}$, denominada função geratriz dos polinômios de Legendre, em uma série de potências convergente de χ . Com este propósito, pode-se reescrever a função V , obtendo a Equação (C.8)

$$V(\chi, u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2u\chi + \chi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2u\chi - \chi^2)}}. \quad (\text{C.8})$$

Definindo $v = 2u\chi - \chi^2$, conclui-se que a função V pode ser expandida, inicialmente, em uma série binomial, que será convergente, desde que $|v| < 1$, como indicado pela Equação (C.4). Logo, impondo-se essa condição, obtém-se o sistema de inequações dada pela Equação (C.9):

$$|2u\chi - \chi^2| < 1 \Rightarrow -1 < 2u\chi - \chi^2 < 1. \quad (\text{C.9})$$

Lembrado que $|u| \leq 1$ e $|\chi| < 1$, para $u = -1$ e $u = 1$, obtém-se os sistemas de inequações expressos pelas Equações (C.10) e (C.11), respectivamente:

$$-1 < -2\chi - \chi^2 < 1, \quad (\text{C.10})$$

$$-1 < 2\chi - \chi^2 < 1. \quad (\text{C.11})$$

Então, a solução simultânea dos sistemas dados pelas Equações (C.10) e (C.11), satisfaz as condições $|\chi| < \sqrt{2} - 1$ e $\chi \neq \pm 1$. Portanto, nesse intervalo, a função V pode ser escrita como uma série de potências em χ convergente, dada pela Equação (C.12)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (2u\chi - \chi^2)}} = P_0(u) + P_1(u)\chi + P_2(u)\chi^2 + \dots, \quad (\text{C.12})$$

sendo $P_0(u), P_1(u), P_2(u), \dots$, os polinômios de Legendre.

APÊNDICE D – TEOREMA DE EULER PARA FUNÇÕES HOMOGÊNEAS

Considere a função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela Equação (D.1)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{D.1})$$

Diz-se que f é uma função homogênea de grau p , se satisfizer a condição dada pela Equação (D.2)

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{D.2})$$

Uma propriedade importante das funções homogêneas é o fato de que se conhece o valor da função num ponto P , então conhece-se o valor da função em qualquer ponto P' que tenha coordenadas proporcionais às coordenadas de P .

Outra propriedade importante das funções homogêneas é a que se a Equação (D.2) for derivada em relação à λ , obtém-se a Equação (D.3)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_i)} x_i = p \lambda^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{D.3})$$

e como esta relação deve ser válida para qualquer λ real, se $\lambda = 1$, resulta na Equação (D.4)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial (x_i)} x_i = p f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{D.4})$$

conhecido como o Teorema de Euler para funções homogêneas.

APÊNDICE E – RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE VERTÍCES E FACES DO MODELO POLIÉDRICO DO ASTEROIDE

Considere um poliedro com m faces e E arestas. Desse modo, a face F_1 tem n_1 arestas e forma $n_1 - 2$ regiões triangulares, a face F_2 tem n_2 arestas e forma $n_2 - 2$ regiões triangulares, assim por diante, e, finalmente, a face F_m tem n_m arestas e forma $n_m - 2$ regiões triangulares. Logo, o número de arestas desse poliedro é dado pela Equação (E.1)

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m n_i \quad (\text{E.1})$$

Relacionando o número de faces, o número de arestas e o número de regiões triangulares, obtém-se a Equação (E.2)

$$2E - 2F = \sum_{i=1}^m n_i - 2m = \sum_{i=1}^m (n_i - 2) \quad (\text{E.2})$$

tomando $F = m$ e lembrando que $\sum_{i=1}^m (n_i - 2)$ representa o número de faces triangulares do poliedro. Aplicando o Teorema de Euler para poliedros, tem a Equação (E.3)

$$V - E + F = 2 \quad \Rightarrow \quad 2V - 2E + 2F = 4 \quad (\text{E.3})$$

Substituindo a Equação (E.2) na Equação (E.3), resulta na Equação (E.4)

$$F_t = 2V - 4 \quad (\text{E.4})$$

a qual, relaciona o número de faces triangulares com o número de vértices do poliedro.

APÊNDICE F – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 2063 BACCHUS OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA

Para obter o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide Bacchus e de seus coeficientes dos harmônicos esféricos via potencial, assim como via direta, Tabela F foram utilizados os dados de radar (NEESE, 2004) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2004), contendo 2048 vértices e 4092 faces.

Tabela F – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Bacchus.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$3,21443582472 \times 10^{-15}$
\bar{C}_{10}	$-3,23020048455 \times 10^{-18}$	$-3,09231601116 \times 10^{-18}$	$1,37884473384 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{11}	$-1,90510707226 \times 10^{-17}$	$-1,92672979344 \times 10^{-17}$	$-2,16227211850 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{11}	$1,48317754426 \times 10^{-17}$	$1,46090671562 \times 10^{-17}$	$-2,22708286411 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-1,18677719605 \times 10^{-1}$	$-1,18677719605 \times 10^{-1}$	$8,05612214282 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$5,54629185584 \times 10^{-17}$	$5,56819054922 \times 10^{-17}$	$2,18986933729 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{21}	$-1,02587329733 \times 10^{-16}$	$-1,02618268920 \times 10^{-16}$	$-3,09391869644 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$1,99981774411 \times 10^{-1}$	$1,99981774411 \times 10^{-1}$	$-1,34925998612 \times 10^{-17}$
\bar{S}_{22}	$-1,54827221532 \times 10^{-16}$	$-1,54507708863 \times 10^{-16}$	$-3,19512668447 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$2,64868614172 \times 10^{-3}$	$2,64868614172 \times 10^{-3}$	$-1,91850695317 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{31}	$-2,47981600458 \times 10^{-2}$	$-2,47981600458 \times 10^{-2}$	$-1,81180676995 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{31}	$-3,42521462512 \times 10^{-3}$	$-3,42521462512 \times 10^{-3}$	$-2,03384781266 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$-7,87625649979 \times 10^{-3}$	$-7,87625649979 \times 10^{-3}$	$6,25647354519 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{32}	$5,49277302339 \times 10^{-3}$	$5,49277302339 \times 10^{-3}$	$-2,76697342815 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{33}	$2,57473044855 \times 10^{-2}$	$2,57473044855 \times 10^{-2}$	$1,24040616118 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{33}	$1,19753482831 \times 10^{-2}$	$1,19753482831 \times 10^{-2}$	$1,12940777381 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{40}	$6,01543973835 \times 10^{-2}$	$6,01543973835 \times 10^{-2}$	$-4,23231964847 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{41}	$-3,66926399057 \times 10^{-3}$	$-3,66926399057 \times 10^{-3}$	$-5,26196003091 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{41}	$-1,60371720789 \times 10^{-4}$	$-1,60371720789 \times 10^{-4}$	$3,64430989120 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-8,81947633109 \times 10^{-2}$	$-8,81947633109 \times 10^{-2}$	$2,03147657797 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{42}	$-5,79985481736 \times 10^{-3}$	$-5,79985481736 \times 10^{-3}$	$2,75325184950 \times 10^{-19}$

(Continua)

Tabela F – Conclusão

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{43}	$2,73693183188 \times 10^{-3}$	$2,73693183188 \times 10^{-3}$	$3,63147242417 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{43}	$2,44783451607 \times 10^{-3}$	$2,44783451607 \times 10^{-3}$	$-9,87645627480 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{44}	1,18324593248E-01	1,18324593248E-01	$-1,71197565040 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{44}	$1,50587645229 \times 10^{-2}$	$1,50587645229 \times 10^{-2}$	$-5,18309025155 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{50}	$-1,83101058507 \times 10^{-4}$	$-1,83101058507 \times 10^{-4}$	$-4,76090558401 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{51}	$2,98525538899 \times 10^{-2}$	$2,98525538899 \times 10^{-2}$	$2,45639788392 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{51}	$3,04821480962 \times 10^{-3}$	$3,04821480962 \times 10^{-3}$	$2,64346033122 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{52}	$4,08862372709 \times 10^{-3}$	$4,08862372709 \times 10^{-3}$	$-2,56776596781 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{52}	$-4,08677083307 \times 10^{-3}$	$-4,08677083307 \times 10^{-3}$	$1,92837389400 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{53}	$-3,06955311560 \times 10^{-2}$	$-3,06955311560 \times 10^{-2}$	$-2,35737521940 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{53}	$-8,75300700644 \times 10^{-3}$	$-8,75300700644 \times 10^{-3}$	$-1,68231366375 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{54}	$-1,13545111031 \times 10^{-2}$	$-1,13545111031 \times 10^{-2}$	$7,68306277515 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{54}	$3,96932117384 \times 10^{-3}$	$3,96932117384 \times 10^{-3}$	$1,39099670813 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{55}	$2,81107837240 \times 10^{-2}$	$2,81107837240 \times 10^{-2}$	$1,57578655323 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{55}	$1,61026619046 \times 10^{-2}$	$1,61026619046 \times 10^{-2}$	$2,43060135917 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{60}	$-5,12225515751 \times 10^{-2}$	$-5,12225515751 \times 10^{-2}$	$3,83681766512 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{61}	$-2,08180084332 \times 10^{-3}$	$-2,08180084332 \times 10^{-3}$	$2,68068596315 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{61}	$4,16788784845 \times 10^{-4}$	$4,16788784845 \times 10^{-4}$	$1,46175559476 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{62}	$7,22179496205 \times 10^{-2}$	$7,22179496205 \times 10^{-2}$	$-5,42203252599 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{62}	$7,97533056736 \times 10^{-3}$	$7,97533056736 \times 10^{-3}$	$-7,33933813495 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{63}	$8,94062083352 \times 10^{-4}$	$8,94062083352 \times 10^{-4}$	$-4,54385671302 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{63}	$-2,47202534606 \times 10^{-3}$	$-2,47202534606 \times 10^{-3}$	$5,63806124528 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{64}	$-7,47257811851 \times 10^{-2}$	$-7,47257811851 \times 10^{-2}$	$4,39171518796 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{64}	$-1,55677207065 \times 10^{-2}$	$-1,55677207065 \times 10^{-2}$	$4,04621395901 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{65}	$2,09951937837 \times 10^{-3}$	$2,09951937837 \times 10^{-3}$	$4,74457889914 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{65}	$5,40807362941 \times 10^{-3}$	$5,40807362941 \times 10^{-3}$	$-9,89359503072 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{66}	$1,07413705844 \times 10^{-1}$	$1,07413705844 \times 10^{-1}$	$-8,09724653928 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{66}	$2,84406712745 \times 10^{-2}$	$2,84406712745 \times 10^{-2}$	$-2,90037157464 \times 10^{-20}$

Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE G – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 101955 BENNU OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA

Para obter o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide Bennu e de seus coeficientes dos harmônicos esféricos via potencial, assim como via direta, Tabela G foram utilizados os dados de radar (NOLAN et al., 2013) e disponibilizados pela NASA, contendo 1348 vértices e 2692 faces.

Tabela G – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Bennu.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,60600834931 \times 10^{-16}$
\bar{C}_{10}	$5,10148251116 \times 10^{-18}$	$5,19861027436 \times 10^{-18}$	$-9,71277632001 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{11}	$-4,49623592761 \times 10^{-18}$	$-4,50366418673 \times 10^{-18}$	$-7,42825912584 \times 10^{-21}$
\bar{S}_{11}	$-6,11059181749 \times 10^{-17}$	$-6,14786326293 \times 10^{-17}$	$-3,72714454388 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-1,75565029799 \times 10^{-2}$	$-1,75565029799 \times 10^{-2}$	$1,11959593157 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{21}	$-2,42297422495 \times 10^{-17}$	$-2,39679914006 \times 10^{-17}$	$2,61750848888 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{21}	$-8,65116562290 \times 10^{-17}$	$-8,66956647855 \times 10^{-17}$	$-1,84008556425 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{22}	$5,80311889770 \times 10^{-3}$	$5,80311889770 \times 10^{-3}$	$-2,20371054579 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{22}	$2,33083777330 \times 10^{-16}$	$2,33025580888 \times 10^{-16}$	$5,81964422292 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{30}	$-5,56049920875 \times 10^{-3}$	$-5,56049920875 \times 10^{-3}$	$1,23057168678 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{31}	$-1,56472431661 \times 10^{-3}$	$-1,56472431661 \times 10^{-3}$	$-3,70688882741 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{31}	$1,53992029049 \times 10^{-3}$	$1,53992029049 \times 10^{-3}$	$1,05668780531 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$-1,03729343179 \times 10^{-4}$	$-1,03729343179 \times 10^{-4}$	$-1,33246858608 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{32}	$1,10327011190 \times 10^{-4}$	$1,10327011190 \times 10^{-4}$	$5,05536067148 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{33}	$-2,63151511486 \times 10^{-3}$	$-2,63151511486 \times 10^{-3}$	$-1,11362152281 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{33}	$-9,04010067188 \times 10^{-4}$	$-9,04010067188 \times 10^{-4}$	$2,00148646492 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{40}	$1,02534817487 \times 10^{-2}$	$1,02534817487 \times 10^{-2}$	$-2,44387196269 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{41}	$4,02905420243 \times 10^{-4}$	$4,02905420243 \times 10^{-4}$	$6,08082697428 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{41}	$1,86790926021 \times 10^{-3}$	$1,86790926021 \times 10^{-3}$	$8,56891540843 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-2,16315958089 \times 10^{-3}$	$-2,16315958089 \times 10^{-3}$	$2,53369314461 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{42}	$-7,48635748279 \times 10^{-4}$	$-7,48635748279 \times 10^{-4}$	$-7,77502844802 \times 10^{-23}$

(Continua)

Tabela G – Conclusão.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{43}	$-1,07488792875 \times 10^{-3}$	$-1,07488792875 \times 10^{-3}$	$-9,75361463443 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{43}	$-9,04495713041 \times 10^{-5}$	$-9,04495713041 \times 10^{-5}$	$1,45075104211 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{44}	$2,17236508848 \times 10^{-3}$	$2,17236508848 \times 10^{-3}$	$-1,47677514546 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{44}	$-3,12495285183 \times 10^{-3}$	$-3,12495285183 \times 10^{-3}$	$9,70058092111 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{50}	$1,31336407223 \times 10^{-3}$	$1,31336407223 \times 10^{-3}$	$-5,88446999454 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{51}	$-5,42729356758 \times 10^{-4}$	$-5,42729356758 \times 10^{-4}$	$-1,71798994501 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{51}	$-1,10128596312 \times 10^{-4}$	$-1,10128596312 \times 10^{-4}$	$-4,01623107313 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{52}	$-5,19119951448 \times 10^{-4}$	$-5,19119951448 \times 10^{-4}$	$-1,49266023404 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{52}	$-1,24547832177 \times 10^{-3}$	$-1,24547832177 \times 10^{-3}$	$-6,96841530765 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{53}	$-4,11813618357 \times 10^{-4}$	$-4,11813618357 \times 10^{-4}$	$2,06123972672 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{53}	$1,98552601271 \times 10^{-4}$	$1,98552601271 \times 10^{-4}$	$-1,07662042056 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{54}	$-1,39920597053 \times 10^{-3}$	$-1,39920597053 \times 10^{-3}$	$-4,99888884240 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{54}	$-4,33570225130 \times 10^{-4}$	$-4,33570225130 \times 10^{-4}$	$3,07489483735 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{55}	$-4,98384886424 \times 10^{-4}$	$-4,98384886424 \times 10^{-4}$	$1,06350733122 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{55}	$5,54115793458 \times 10^{-4}$	$5,54115793458 \times 10^{-4}$	$4,22179330370 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{60}	$-2,51746094703 \times 10^{-3}$	$-2,51746094703 \times 10^{-3}$	$1,26795794679 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{61}	$1,19358388101 \times 10^{-3}$	$1,19358388101 \times 10^{-3}$	$6,40475509459 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{61}	$3,10618976038 \times 10^{-5}$	$3,10618976038 \times 10^{-5}$	$-6,84306424118 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{62}	$7,42628323002 \times 10^{-4}$	$7,42628323002 \times 10^{-4}$	$-1,14970473640 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{62}	$2,88872216819 \times 10^{-4}$	$2,88872216819 \times 10^{-4}$	$-3,86184295596 \times 10^{-23}$
\bar{C}_{63}	$1,36249778999 \times 10^{-3}$	$1,36249778999 \times 10^{-3}$	$4,16701539229 \times 10^{-21}$
\bar{S}_{63}	$9,65138371326 \times 10^{-4}$	$9,65138371326 \times 10^{-4}$	$-1,10838898985 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{64}	$-5,29542993302 \times 10^{-4}$	$-5,29542993302 \times 10^{-4}$	$5,00840751573 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{64}	$7,06806995725 \times 10^{-4}$	$7,06806995725 \times 10^{-4}$	$-2,84051220064 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{65}	$1,42494630823 \times 10^{-4}$	$1,42494630823 \times 10^{-4}$	$-4,35164523126 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{65}	$5,80893242683 \times 10^{-4}$	$5,80893242683 \times 10^{-4}$	$-7,46704553609 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{66}	$7,13168111593 \times 10^{-4}$	$7,13168111593 \times 10^{-4}$	$-1,44601794704 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{66}	$3,02771300248 \times 10^{-5}$	$3,02771300248 \times 10^{-5}$	$-8,86152835457 \times 10^{-20}$

Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE H – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 1580 BETULIA OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA

Para obter o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide Betulia e de seus coeficientes dos harmônicos esféricos via potencial, assim como via direta, Tabela H, foram utilizados os dados de radar (MAGRI et al., 2007) e disponibilizados pela NASA, contendo 1148 vértices e 2292 faces.

Tabela H – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Betulia.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$2,40779618466 \times 10^{-15}$
\bar{C}_{10}	$3,36184236797 \times 10^{-17}$	$3,35600638795 \times 10^{-17}$	$5,83598002208 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{11}	$-1,13543936075 \times 10^{-17}$	$-9,70379363317 \times 10^{-18}$	$1,65059997429 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{11}	$1,71838272787 \times 10^{-17}$	$1,66384552917 \times 10^{-17}$	$-5,45371986982 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-6,60146506901 \times 10^{-2}$	$-6,60146506901 \times 10^{-2}$	$3,40753955748 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$-2,61105041107 \times 10^{-17}$	$-2,61012087702 \times 10^{-17}$	$9,29534049645 \times 10^{-21}$
\bar{S}_{21}	$-1,03277207035 \times 10^{-16}$	$-1,03551277259 \times 10^{-16}$	$-2,74070223948 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{22}	$2,65204700661 \times 10^{-2}$	$2,65204700661 \times 10^{-2}$	$-1,74416515041 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{22}	$1,37567613463 \times 10^{-17}$	$1,33105032962 \times 10^{-17}$	$4,46258050143 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$3,60702208953 \times 10^{-3}$	$3,60702208953 \times 10^{-3}$	$-2,87474034654 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{31}	$-2,53587628862 \times 10^{-3}$	$-2,53587628862 \times 10^{-3}$	$-3,34605043772 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{31}	$-2,30698501585 \times 10^{-3}$	$-2,30698501585 \times 10^{-3}$	$8,68418362569 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{32}	$-1,72128599863 \times 10^{-2}$	$-1,72128599863 \times 10^{-2}$	$9,54552052912 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{32}	$8,58401476339 \times 10^{-3}$	$8,58401476339 \times 10^{-3}$	$-3,11486970620 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{33}	$2,28214024318 \times 10^{-3}$	$2,28214024318 \times 10^{-3}$	$3,05182601741 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{33}	$-2,80461923372 \times 10^{-2}$	$-2,80461923372 \times 10^{-2}$	$-1,58475439466 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{40}	$1,42060330448 \times 10^{-2}$	$1,42060330448 \times 10^{-2}$	$-7,81247409999 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{41}	$-6,59000703915 \times 10^{-4}$	$-6,59000703915 \times 10^{-4}$	$-1,28170339273 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{41}	$-5,72212503684 \times 10^{-4}$	$-5,72212503684 \times 10^{-4}$	$9,00915547098 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-7,15113903637 \times 10^{-3}$	$-7,15113903637 \times 10^{-3}$	$5,79744484906 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{42}	$2,48519157518 \times 10^{-4}$	$2,48519157518 \times 10^{-4}$	$-9,00313528930 \times 10^{-20}$

(Continua)

Tabela H – Conclusão.

\bar{C}_{43}	$2,97059200752 \times 10^{-3}$	$2,97059200752 \times 10^{-3}$	$1,26129290808 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{43}	$4,17494490089 \times 10^{-3}$	$4,17494490089 \times 10^{-3}$	$2,50425533174 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{44}	$-1,56100439321 \times 10^{-3}$	$-1,56100439321 \times 10^{-3}$	$1,58611472875 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{44}	$1,43158186981 \times 10^{-3}$	$1,43158186981 \times 10^{-3}$	$3,35354559075 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{50}	$-4,44249891149 \times 10^{-3}$	$-4,44249891149 \times 10^{-3}$	$2,97949585691 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{51}	$2,31061126833 \times 10^{-3}$	$2,31061126833 \times 10^{-3}$	$1,01192957176 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{51}	$1,81669089957 \times 10^{-3}$	$1,81669089957 \times 10^{-3}$	$-6,79729425756 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{52}	$9,16317343922 \times 10^{-3}$	$9,16317343922 \times 10^{-3}$	$-4,78509408746 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{52}	$-3,09686302978 \times 10^{-3}$	$-3,09686302978 \times 10^{-3}$	$1,72519142839 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{53}	$-1,68739450654 \times 10^{-3}$	$-1,68739450654 \times 10^{-3}$	$-2,23849807818 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{53}	$5,67253553748 \times 10^{-3}$	$5,67253553748 \times 10^{-3}$	$4,32801989133 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{54}	$-2,37034623351 \times 10^{-3}$	$-2,37034623351 \times 10^{-3}$	$8,86443727166 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{54}	$-2,52456651028 \times 10^{-3}$	$-2,52456651028 \times 10^{-3}$	$2,48360043059 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{55}	$-1,40684750806 \times 10^{-3}$	$-1,40684750806 \times 10^{-3}$	$-2,03439200658 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{55}	$-6,85216374373 \times 10^{-3}$	$-6,85216374373 \times 10^{-3}$	$-9,04180820957 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{60}	$-2,38327959670 \times 10^{-3}$	$-2,38327959670 \times 10^{-3}$	$1,76925579322 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{61}	$1,30365561893 \times 10^{-3}$	$1,30365561893 \times 10^{-3}$	$1,78499853977 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{61}	$1,37495516983 \times 10^{-3}$	$1,37495516983 \times 10^{-3}$	$3,25103433155 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{62}	$1,18441115889 \times 10^{-3}$	$1,18441115889 \times 10^{-3}$	$-2,77002240118 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{62}	$-7,09997792375 \times 10^{-5}$	$-7,09997792375 \times 10^{-5}$	$4,98124216140 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{63}	$-8,05923615591 \times 10^{-4}$	$-8,05923615591 \times 10^{-4}$	$1,95901612281 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{63}	$-4,10284783585 \times 10^{-3}$	$-4,10284783585 \times 10^{-3}$	$-3,26973552739 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{64}	$6,92104182450 \times 10^{-4}$	$6,92104182450 \times 10^{-4}$	$-1,53074778316 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{64}	$-2,06703804389 \times 10^{-4}$	$-2,06703804389 \times 10^{-4}$	$-7,16514127235 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{65}	$2,15942718190 \times 10^{-3}$	$2,15942718190 \times 10^{-3}$	$1,24868752915 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{65}	$7,43647677081 \times 10^{-3}$	$7,43647677081 \times 10^{-3}$	$8,13250642251 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{66}	$-8,20781745865 \times 10^{-3}$	$-8,20781745865 \times 10^{-3}$	$4,24544379683 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{66}	$5,20755545433 \times 10^{-4}$	$5,20755545433 \times 10^{-4}$	$3,16265102319 \times 10^{-19}$

Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE I – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 4769 CASTALIA OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA

Para obter o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide Castalia e de seus coeficientes dos harmônicos esféricos via potencial, assim como via direta, Tabela I foram utilizados os dados de radar (NEESE, 2004) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2004), contendo 2048 vértices e 4092 faces.

Tabela I – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Castalia.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$6,95122670362 \times 10^{-16}$
\bar{C}_{10}	$2,18823190445 \times 10^{-17}$	$2,16577267641 \times 10^{-17}$	$2,24592280320 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{11}	$5,63908233883 \times 10^{-18}$	$5,69793089779 \times 10^{-18}$	$5,88485589648 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{11}	$1,55678945323 \times 10^{-17}$	$1,58573401254 \times 10^{-17}$	$2,89445593074 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-1,05085885878 \times 10^{-1}$	$-1,05085885878 \times 10^{-1}$	$2,56633311100 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$-9,73510184009 \times 10^{-18}$	$-9,60515042489 \times 10^{-18}$	$1,29951415204 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{21}	$2,00486234844 \times 10^{-18}$	$2,07275207391 \times 10^{-18}$	$6,78897254714 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$1,48221977330 \times 10^{-1}$	$1,48221977330 \times 10^{-1}$	$3,58422886994 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{22}	$-1,87316494193 \times 10^{-17}$	$-1,93489136678 \times 10^{-17}$	$6,17264248562 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$-2,00883981683 \times 10^{-2}$	$-2,00883981683 \times 10^{-2}$	$3,55857163679 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{31}	$3,43116228683 \times 10^{-2}$	$3,43116228683 \times 10^{-2}$	$1,02934863076 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{31}	$-7,48643953309 \times 10^{-4}$	$-7,48643953309 \times 10^{-4}$	$-1,43318127376 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$1,17695437647 \times 10^{-2}$	$1,17695437647 \times 10^{-2}$	$4,21885388167 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{32}	$2,28275173272 \times 10^{-3}$	$2,28275173272 \times 10^{-3}$	$-2,81981541420 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{33}	$-1,78385241460 \times 10^{-2}$	$-1,78385241460 \times 10^{-2}$	$-1,55222614852 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{33}	$1,19145491198 \times 10^{-2}$	$1,19145491198 \times 10^{-2}$	$1,32705790871 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{40}	$3,53178698419 \times 10^{-2}$	$3,53178698419 \times 10^{-2}$	$-7,73734621730 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{41}	$-2,63501619379 \times 10^{-3}$	$-2,63501619379 \times 10^{-3}$	$-1,86142913637 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{41}	$-1,63916753662 \times 10^{-3}$	$-1,63916753662 \times 10^{-3}$	$-6,34798662660 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-4,86195297962 \times 10^{-2}$	$-4,86195297962 \times 10^{-2}$	$3,67985058996 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{42}	$3,10180504774 \times 10^{-3}$	$3,10180504774 \times 10^{-3}$	$-3,69030421471 \times 10^{-19}$

(Continua)

Tabela I – Conclusão.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{43}	$-6,93673663817 \times 10^{-3}$	$-6,93673663817 \times 10^{-3}$	$-5,67871969076 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{43}	$3,83941217730 \times 10^{-3}$	$3,83941217730 \times 10^{-3}$	$3,77508690216 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{44}	$4,50491753479 \times 10^{-2}$	$4,50491753479 \times 10^{-2}$	$-3,31021935260 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{44}	$-1,22186792580 \times 10^{-2}$	$-1,22186792580 \times 10^{-2}$	$1,58533669727 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{50}	$2,42018438145 \times 10^{-2}$	$2,42018438145 \times 10^{-2}$	$-4,79676800986 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{51}	$-3,71693878436 \times 10^{-2}$	$-3,71693878436 \times 10^{-2}$	$-1,14791938122 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{51}	$2,33876435947 \times 10^{-3}$	$2,33876435947 \times 10^{-3}$	$1,40938155825 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{52}	$-2,30591393839 \times 10^{-2}$	$-2,30591393839 \times 10^{-2}$	$2,84171950621 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{52}	$-1,87285670367 \times 10^{-3}$	$-1,87285670367 \times 10^{-3}$	$2,26684369931 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{53}	$2,37300119753 \times 10^{-2}$	$2,37300119753 \times 10^{-2}$	$2,14892761923 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{53}	$-1,00620885892 \times 10^{-2}$	$-1,00620885892 \times 10^{-2}$	$-1,11153612439 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{54}	$6,61735610238 \times 10^{-3}$	$6,61735610238 \times 10^{-3}$	$-1,09403353668 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{54}	$-8,18501346153 \times 10^{-4}$	$-8,18501346153 \times 10^{-4}$	$-1,78130705130 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{55}	$-3,60303328103 \times 10^{-3}$	$-3,60303328103 \times 10^{-3}$	$-1,71733598276 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{55}	$2,45783824136 \times 10^{-2}$	$2,45783824136 \times 10^{-2}$	$1,45807105535 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{60}	$-1,50978414134 \times 10^{-2}$	$-1,50978414134 \times 10^{-2}$	$3,55691940646 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{61}	$-1,87701445877 \times 10^{-3}$	$-1,87701445877 \times 10^{-3}$	$6,22803719598 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{61}	$1,16435725793 \times 10^{-3}$	$1,16435725793 \times 10^{-3}$	$2,86093282961 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{62}	$2,21586106557 \times 10^{-2}$	$2,21586106557 \times 10^{-2}$	$-4,93267662207 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{62}	$-5,34457884836 \times 10^{-3}$	$-5,34457884836 \times 10^{-3}$	$2,07214036353 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{63}	$5,83599343801 \times 10^{-3}$	$5,83599343801 \times 10^{-3}$	$4,69641699004 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{63}	$-4,48466920581 \times 10^{-3}$	$-4,48466920581 \times 10^{-3}$	$-3,52569948748 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{64}	$-1,92458109997 \times 10^{-2}$	$-1,92458109997 \times 10^{-2}$	$5,66000479675 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{64}	$1,13773359612 \times 10^{-2}$	$1,13773359612 \times 10^{-2}$	$-6,71012840594 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{65}	$-6,94808808577 \times 10^{-3}$	$-6,94808808577 \times 10^{-3}$	$-3,77983266904 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{65}	$5,03223883409 \times 10^{-3}$	$5,03223883409 \times 10^{-3}$	$2,91948395482 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{66}	$1,34420722723 \times 10^{-2}$	$1,34420722723 \times 10^{-2}$	$-3,03107401812 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{66}	$-2,96907106549 \times 10^{-2}$	$-2,96907106549 \times 10^{-2}$	$1,73845157386 \times 10^{-18}$

Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE J – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 21 LUTETIA OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA

Para obter o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide Lutetia e de seus coeficientes dos harmônicos esféricos via potencial, assim como via direta, Tabela J foram utilizados os dados de radar (FARNHAM, 2013) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2013), contendo 1483 vértices e 2962 faces.

Tabela J – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Lutetia.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,03980409352 \times 10^{-15}$
\bar{C}_{10}	$-3,05069389852 \times 10^{-18}$	$-3,29503356312 \times 10^{-18}$	$2,44339664601 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{11}	$5,91577104230 \times 10^{-17}$	$5,97156613278 \times 10^{-17}$	$5,57950904745 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{11}	$-7,09162799706 \times 10^{-17}$	$-7,14600661346 \times 10^{-17}$	$-5,43786164008 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-5,83493158684 \times 10^{-2}$	$-5,83493158684 \times 10^{-2}$	$1,61755958321 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{21}	$1,10088435801 \times 10^{-16}$	$1,10126957133 \times 10^{-16}$	$3,85213320735 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{21}	$-3,35746233620 \times 10^{-17}$	$-3,36928948387 \times 10^{-17}$	$-1,18271476655 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{22}	$4,72148677238 \times 10^{-2}$	$4,72148677238 \times 10^{-2}$	$-8,48732611288 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{22}	$9,76185773893 \times 10^{-19}$	$1,16180758131 \times 10^{-18}$	$-1,85621807418 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$-3,07004950980 \times 10^{-3}$	$-3,07004950980 \times 10^{-3}$	$4,38834817310 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{31}	$1,25984468161 \times 10^{-2}$	$1,25984468161 \times 10^{-2}$	$1,18922588487 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{31}	$5,96019346036 \times 10^{-3}$	$5,96019346036 \times 10^{-3}$	$3,58750814758 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{32}	$5,13419201599 \times 10^{-5}$	$5,13419201599 \times 10^{-5}$	$6,15692780677 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{32}	$-9,30317684934 \times 10^{-4}$	$-9,30317684934 \times 10^{-4}$	$-3,52461780550 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{33}	$-1,68335450172 \times 10^{-2}$	$-1,68335450172 \times 10^{-2}$	$-1,59089635960 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{33}	$1,14705725492 \times 10^{-2}$	$1,14705725492 \times 10^{-2}$	$1,31409885814 \times 10^{-18}$
\bar{C}_{40}	$1,17727272498 \times 10^{-2}$	$1,17727272498 \times 10^{-2}$	$-2,52106935268 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{41}	$8,59317733835 \times 10^{-4}$	$8,59317733835 \times 10^{-4}$	$4,77320806268 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{41}	$-5,02487412021 \times 10^{-3}$	$-5,02487412021 \times 10^{-3}$	$-9,72567638239 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-1,11476134250 \times 10^{-2}$	$-1,11476134250 \times 10^{-2}$	$1,00941972527 \times 10^{-17}$
\bar{S}_{42}	$5,95025176221 \times 10^{-3}$	$5,95025176221 \times 10^{-3}$	$-6,37865668071 \times 10^{-19}$

(Continua)

Tabela J – Conclusão.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{43}	$6,40158116680 \times 10^{-4}$	$6,40158116680 \times 10^{-4}$	$2,14157860027 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{43}	$7,68290341398 \times 10^{-3}$	$7,68290341398 \times 10^{-3}$	$8,89311033230 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{44}	$1,21638249255 \times 10^{-2}$	$1,21638249255 \times 10^{-2}$	$-1,17879185939 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{44}	$-2,03251321008 \times 10^{-3}$	$-2,03251321008 \times 10^{-3}$	$-2,50709652572 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{50}	$-9,60947441854 \times 10^{-4}$	$-9,60947441854 \times 10^{-4}$	$-8,75996171092 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{51}	$-5,77494717853 \times 10^{-3}$	$-5,77494717853 \times 10^{-3}$	$4,76786872199 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{51}	$-3,04381768202 \times 10^{-3}$	$-3,04381768202 \times 10^{-3}$	$-1,61365166771 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{52}	$5,71871054743 \times 10^{-4}$	$5,71871054743 \times 10^{-4}$	$5,91710025123 \times 10^{-21}$
\bar{S}_{52}	$-1,51227254744 \times 10^{-3}$	$-1,51227254744 \times 10^{-3}$	$5,29388804069 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{53}	$7,03215172419 \times 10^{-3}$	$7,03215172419 \times 10^{-3}$	$5,35654759723 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{53}	$1,57334984136 \times 10^{-3}$	$1,57334984136 \times 10^{-3}$	$2,56768351595 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{54}	$-2,28641347935 \times 10^{-3}$	$-2,28641347935 \times 10^{-3}$	$1,92688660979 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{54}	$-3,30065921928 \times 10^{-4}$	$-3,30065921928 \times 10^{-4}$	$2,43358577172 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{55}	$-1,02959438187 \times 10^{-2}$	$-1,02959438187 \times 10^{-2}$	$-2,44822523284 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{55}	$2,50548283616 \times 10^{-3}$	$2,50548283616 \times 10^{-3}$	$1,42836396114 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{60}	$-4,68911217275 \times 10^{-3}$	$-4,68911217275 \times 10^{-3}$	0
\bar{C}_{61}	$4,33451403209 \times 10^{-4}$	$4,33451403209 \times 10^{-4}$	$-8,09093733971 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{61}	$3,97213215602 \times 10^{-3}$	$3,97213215602 \times 10^{-3}$	0
\bar{C}_{62}	$3,86123711020 \times 10^{-3}$	$3,86123711020 \times 10^{-3}$	0
\bar{S}_{62}	$-1,45117606136 \times 10^{-3}$	$-1,45117606136 \times 10^{-3}$	$3,70347835992 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{63}	$-3,37539033122 \times 10^{-3}$	$-3,37539033122 \times 10^{-3}$	$-3,94492534305 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{63}	$-6,35238785681 \times 10^{-3}$	$-6,35238785681 \times 10^{-3}$	$-6,69315593959 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{64}	$-2,40816750894 \times 10^{-3}$	$-2,40816750894 \times 10^{-3}$	0
\bar{S}_{64}	$2,82346236382 \times 10^{-4}$	$2,82346236382 \times 10^{-4}$	$9,77767918975 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{65}	$3,63982543595 \times 10^{-3}$	$3,63982543595 \times 10^{-3}$	$2,27278158037 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{65}	$1,18590571029 \times 10^{-3}$	$1,18590571029 \times 10^{-3}$	$4,94519318448 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{66}	$2,09476583940 \times 10^{-3}$	$2,09476583940 \times 10^{-3}$	$1,10302598855 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{66}	$-2,80294299880 \times 10^{-3}$	$-2,80294299880 \times 10^{-3}$	0

Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE K – COMPARAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DE STOKES NORMALIZADOS REFERENTES AO ASTEROIDE 4660 NEREUS OBTIDOS PELO AUTOR VIA POTENCIAL E VIA DIRETA

Para obter o modelo do campo gravitacional em torno do asteroide Nereus e de seus coeficientes dos harmônicos esféricos via potencial, assim como via direta, Tabela H, foram utilizados os dados de radar (MAGRI et al., 2007) e disponibilizados pela NASA, contendo 1148 vértices e 2292 faces.

Tabela K – Comparação entre os coeficientes de Stokes normalizados relativos ao Nereus.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{00}	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,00000000000 \times 10^0$	$1,69989348119 \times 10^{-15}$
\bar{C}_{10}	$-1,67993035839 \times 10^{-17}$	$-1,68176207205 \times 10^{-17}$	$1,83171365788 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{11}	$-2,14796977784 \times 10^{-17}$	$-2,11729313969 \times 10^{-17}$	$3,06766381453 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{11}	$3,19139800360 \times 10^{-17}$	$3,16207991448 \times 10^{-17}$	$-2,93180891213 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{20}	$-9,10315855288 \times 10^{-2}$	$-9,10315855288 \times 10^{-2}$	$6,28516732155 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{21}	$3,70604580439 \times 10^{-17}$	$3,70599298964 \times 10^{-17}$	$-5,28147515416 \times 10^{-22}$
\bar{S}_{21}	$-7,36820079295 \times 10^{-17}$	$-7,35925579271 \times 10^{-17}$	$8,94500023747 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{22}	$1,05142351502 \times 10^{-1}$	$1,05142351502 \times 10^{-1}$	$-8,77917881063 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{22}	$1,03723133664 \times 10^{-16}$	$1,04068048893 \times 10^{-16}$	$-3,44915229948 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{30}	$8,93885654765 \times 10^{-5}$	$8,93885654765 \times 10^{-5}$	$-3,52837927511 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{31}	$2,11147640475 \times 10^{-3}$	$2,11147640475 \times 10^{-3}$	$-6,10944623856 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{31}	$-1,53974996143 \times 10^{-3}$	$-1,53974996143 \times 10^{-3}$	$8,76917565773 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{32}	$-4,26637927718 \times 10^{-3}$	$-4,26637927718 \times 10^{-3}$	$-8,61069546994 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{32}	$6,12270916384 \times 10^{-3}$	$6,12270916384 \times 10^{-3}$	$-2,05828518588 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{33}	$-6,09955139427 \times 10^{-3}$	$-6,09955139427 \times 10^{-3}$	$1,40319517409 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{33}	$-3,67898059456 \times 10^{-3}$	$-3,67898059456 \times 10^{-3}$	$-3,02092296364 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{40}	$3,47724917668 \times 10^{-2}$	$3,47724917668 \times 10^{-2}$	$-7,72184160648 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{41}	$-1,64448298386 \times 10^{-3}$	$-1,64448298386 \times 10^{-3}$	$-3,96346218210 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{41}	$-1,66860545760 \times 10^{-4}$	$-1,66860545760 \times 10^{-4}$	$-4,05915441572 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{42}	$-4,29297616192 \times 10^{-2}$	$-4,29297616192 \times 10^{-2}$	$4,33266029433 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{42}	$3,03884189970 \times 10^{-3}$	$3,03884189970 \times 10^{-3}$	$8,70895943628 \times 10^{-20}$

(Continua)

Tabela K – Conclusão.

	Via potencial	Via direta	Diferença
\bar{C}_{43}	$-5,68672154013 \times 10^{-4}$	$-5,68672154013 \times 10^{-4}$	$1,59606474008 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{43}	$1,33747501960 \times 10^{-3}$	$1,33747501960 \times 10^{-3}$	$1,23191604306 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{44}	$4,42030530522 \times 10^{-2}$	$4,42030530522 \times 10^{-2}$	$3,01762710379 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{44}	$-1,02075608729 \times 10^{-2}$	$-1,02075608729 \times 10^{-2}$	$1,30398032193 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{50}	$-2,44947998104 \times 10^{-4}$	$-2,44947998104 \times 10^{-4}$	$-6,52888251786 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{51}	$-2,00644175753 \times 10^{-3}$	$-2,00644175753 \times 10^{-3}$	$1,09865123117 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{51}	$8,50707821061 \times 10^{-4}$	$8,50707821061 \times 10^{-4}$	$-9,64665412475 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{52}	$3,50343103865 \times 10^{-3}$	$3,50343103865 \times 10^{-3}$	$1,10726017406 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{52}	$-3,93558724821 \times 10^{-3}$	$-3,93558724821 \times 10^{-3}$	$1,07842978457 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{53}	$2,82266590101 \times 10^{-3}$	$2,82266590101 \times 10^{-3}$	$-4,97395359414 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{53}	$1,73137845129 \times 10^{-3}$	$1,73137845129 \times 10^{-3}$	$2,10124430982 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{54}	$-3,76569367745 \times 10^{-3}$	$-3,76569367745 \times 10^{-3}$	$-8,06829214514 \times 10^{-20}$
\bar{S}_{54}	$3,98205035414 \times 10^{-3}$	$3,98205035414 \times 10^{-3}$	$-6,40658427588 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{55}	$-2,24036637023 \times 10^{-3}$	$-2,24036637023 \times 10^{-3}$	$-1,07992193632 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{55}	$-8,19836720926 \times 10^{-3}$	$-8,19836720926 \times 10^{-3}$	$-6,99009735317 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{60}	$-2,20526669595 \times 10^{-2}$	$-2,20526669595 \times 10^{-2}$	$-1,84937334409 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{61}	$9,95404638266 \times 10^{-4}$	$9,95404638266 \times 10^{-4}$	$1,04124475651 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{61}	$1,76046649966 \times 10^{-4}$	$1,76046649966 \times 10^{-4}$	$1,91636774794 \times 10^{-21}$
\bar{C}_{62}	$2,87194910207 \times 10^{-2}$	$2,87194910207 \times 10^{-2}$	$2,63521290279 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{62}	$-3,43394294141 \times 10^{-3}$	$-3,43394294141 \times 10^{-3}$	$-4,40738242191 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{63}	$-1,50465693835 \times 10^{-4}$	$-1,50465693835 \times 10^{-4}$	$-1,36215595625 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{63}	$-4,96586201233 \times 10^{-4}$	$-4,96586201233 \times 10^{-4}$	$-6,09918862972 \times 10^{-20}$
\bar{C}_{64}	$-2,66716519701 \times 10^{-2}$	$-2,66716519701 \times 10^{-2}$	$3,18090815861 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{64}	$7,54337572062 \times 10^{-3}$	$7,54337572062 \times 10^{-3}$	$-1,56135455492 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{65}	$2,41665796582 \times 10^{-4}$	$2,41665796582 \times 10^{-4}$	$1,86959382581 \times 10^{-19}$
\bar{S}_{65}	$2,07923642798 \times 10^{-4}$	$2,07923642798 \times 10^{-4}$	$1,76992756380 \times 10^{-19}$
\bar{C}_{66}	$3,08141773782 \times 10^{-2}$	$3,08141773782 \times 10^{-2}$	$1,79782194680 \times 10^{-18}$
\bar{S}_{66}	$-1,26758190697 \times 10^{-2}$	$-1,26758190697 \times 10^{-2}$	$-4,94100376447 \times 10^{-19}$

Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE L – DETERMINAÇÃO DE ALGUNS COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS NORMALIZADOS UTILANDO AS FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO DIRETA

De acordo com as fórmulas para determinar os coeficientes dos harmônicos esféricos, desenvolvidas no item 4.4, tais coeficientes são dados pelas Equações (L.1) e (L.2)

$$C_{nm} = \frac{(2 - \delta_{m0})(n - m)!}{M(n + m)!} \iiint_Q \left(\frac{\rho'}{a}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta') \cos(m\phi') dM \quad (\text{L.1})$$

$$S_{nm} = \frac{(2 - \delta_{m0})(n - m)!}{M(n + m)!} \iiint_Q \left(\frac{\rho'}{a}\right)^n P_{nm}(\text{sen } \theta') \text{sen}(m\phi') dM, \quad (\text{L.2})$$

sendo n e m , respectivamente, a ordem e o grau do coeficiente, δ_{0m} delta de Kronecker, $\rho' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, a raio normalizador, P_{nm} os polinômios associados de Legendre, θ' a latitude e ϕ' a longitude. Logo, variando os valores de n e m , obtém-se os coeficientes até a ordem 3, dados pelas Equações elencadas de (L.3) até (L.17)

$$C_{10} = \frac{1}{aV} \iiint_Q \zeta dv \quad (\text{L.3})$$

$$C_{11} = \frac{1}{aV} \iiint_Q \xi dv \quad (\text{L.4})$$

$$S_{11} = \frac{1}{aV} \iiint_Q \eta dv \quad (\text{L.5})$$

$$C_{20} = \frac{1}{2a^2V} \iiint_Q (2\zeta^2 - \eta^2 - \xi^2) dv \quad (\text{L.6})$$

$$C_{21} = \frac{1}{a^2V} \iiint_Q \xi \zeta dv \quad (\text{L.7})$$

$$S_{21} = \frac{1}{a^2V} \iiint_Q \eta \zeta dv \quad (\text{L.8})$$

$$C_{22} = \frac{1}{4a^2V} \iiint_Q (\xi^2 - \eta^2) dv \quad (\text{L.9})$$

$$S_{22} = \frac{1}{2a^2V} \iiint_Q \xi \eta dv \quad (\text{L.10})$$

$$C_{30} = \frac{1}{2a^3V} \iiint_Q \zeta (2\zeta^2 - 3\eta^2 - 3\xi^2) dv \quad (\text{L.11})$$

$$C_{31} = \frac{1}{4a^3V} \iiint_Q \xi (4\zeta^2 - \eta^2 - \xi^2) dv \quad (\text{L.12})$$

$$S_{31} = \frac{1}{4a^3V} \iiint_Q \eta (4\zeta^2 - \eta^2 - \xi^2) dv \quad (\text{L.13})$$

$$C_{32} = \frac{1}{4a^3V} \iiint_Q \zeta (\xi^2 - \eta^2) dv \quad (\text{L.14})$$

$$S_{32} = \frac{1}{2a^3V} \iiint_Q \xi \eta \zeta dv \quad (\text{L.15})$$

$$C_{33} = \frac{1}{24a^3V} \iiint_Q \xi (\xi^2 - 3\eta^2) dv \quad (\text{L.16})$$

$$S_{33} = \frac{1}{24a^3V} \iiint_Q \eta (3\xi^2 - \eta^2) dv \quad (\text{L.17})$$

lembrando que Q é o sólido, objeto de estudo, e $dv = d\xi d\eta d\zeta$. Desse modo, decompondo o sólido em elementos tetraédricos, conhecendo as coordenadas dos

vértices e os correspondentes triângulos que eles formam, pode-se calcular os coeficientes.

APÊNDICE M - ALGORITMO PARA DETERMINAR O MODELO DO CAMPO GRAVITACIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DA EXPANSÃO DO POTENCIAL EM SÉRIE BASEADO NA METODOLOGIA DESENVOLVIDA NESTE TRABALHO

A metodologia empregada neste trabalho para modelar o campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular, utilizando o método da expansão do potencial em série, é exposta na forma de um algoritmo que descreve os passos para refinar as coordenadas do centro de massa, permitindo calcular os termos da série expandida do potencial com maior precisão.

- a) obter as coordenadas dos vértices e das faces correspondentes, relativas ao asteroide a ser estudado, disponibilizados pelo JPL/NASA;
- b) calcular as coordenadas do centro de massa referente ao asteroide;
- c) se essas coordenadas estiverem muito próximas da origem, da ordem 10^{-15} ou menores, vá para o passo d); caso contrário, faça uma translação dos vértices iniciais, em relação às coordenadas do centro de massa inicial e refaça o passo b);
- d) determinar os momentos e produtos de inércia, utilizando as coordenadas dos vértices finais que satisfaçam o passo c);
- e) construir o tensor de inércia com os valores encontrados no passo d);
- f) calcular os autovalores e seus respectivos autovetores, correspondentes ao tensor de inércia;
- g) adotar a convenção usual, colocando o menor momento de inércia em relação ao eixo x , o intermediário, em relação à y e o maior, em relação à z ;
- h) verificar se os autovetores formam uma base ortonormal destrógiara; caso contrário, utilizando o produto vetorial, examine qual autovetor deve ter seus sinais trocados;
- i) multiplicar a matriz formada pelas coordenadas dos vértices finais pela matriz de rotação, isto é, a matriz formada pelos autovetores que satisfazem o passo h);

A partir da obtenção das coordenadas dos vértices finais, o centro de massa está localizado na origem e os eixos coordenados coincidem com os eixos principais de inércia. Logo, pode-se iniciar os cálculos relativos aos termos da expansão do potencial em série, utilizando a Equação (M.1)

$$U = G \frac{M}{V} \left[\iiint_Q P_0(u) \frac{1}{\rho} dV + \iiint_Q P_1(u) \frac{\rho' \rho}{\rho^3} dV + \iiint_Q P_2(u) \frac{\rho'^2 \rho^2}{\rho^5} dV + \dots \right] \quad (\text{M.1})$$

