



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE – 5970 – TDI / 574**

## **UM MODELO DE PREVISÃO DE ONDAS DE SUPERFÍCIE DO MAR GERADA PELO VENTO.**

**Dirce Maria Pellegatti Franco**

Dissertação de Mestrado em Meteorologia, orientada pelo Dr. Valdir Innocentini,  
aprovada em fevereiro de 1995.

INPE  
São José dos Campos  
1995

551.466.3

FRANCO, D.M.P.

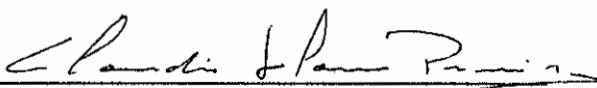
Um modelo de previsão de ondas de superfície do mar geradas pelo vento / D.M.P. Franco. - São José dos Campos: INPE, 1993.

170p. - (INPE-5970-TDI/574)

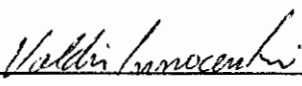
1. Modelagem. 2. Ondas de superfície. 3. Ventos (Meteorologia). 4. Coordenadas de Lagrange.  
I. Título.

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Meteorologia

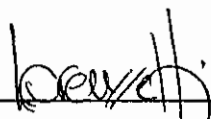
Dr. Cláudio Solano Pereira

  
Presidente

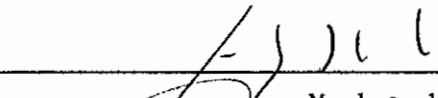
Dr. Valdir Innocentini

  
Orientador

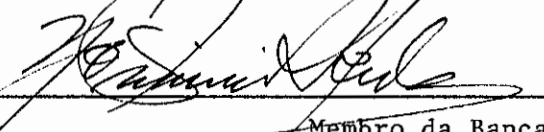
Dr. João Antonio Lorenzzetti

  
Membro da Banca

Dr. José Luiz Stech

  
Membro da Banca

Dr. Yoshimine Ikeda

  
Membro da Banca  
- Convidado -

Candidata: Dirce Maria Pellegatti Franco

São José dos Campos, 16 de fevereiro de 1993



Aos meus pais  
e irmãos.



### AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Valdir Innocentini pela sugestão do tema e pela orientação.

Ao Instituto de Estudos do Mar Almirante Paulo Moreira (IEAPM) pelo incentivo e por ter cedido equipamento para a elaboração desta pesquisa.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), que forneceu todo o apoio, colocando sua infra-estrutura à disposição, viabilizando a realização deste trabalho.

Ao José Antonio Aravéquia pelo incentivo e sugestões fornecidas durante o trabalho.

À Flávia Pellegatti Franco e Jamile Dehaini pela colaboração e apoio durante todo o trabalho.

Aos demais colegas que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos órgãos financiadores de bolsa, CAPES e FAPESP, sem os quais não seria possível esta pesquisa.





## RESUMO

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo de previsão de ondas de superfície do mar geradas pelo vento. O espectro é obtido através de uma equação de balanço de energia onde os termos envolvidos são advecção, refração, geração e dissipação de energia, *shoaling* e interações não-lineares. Este modelo pode ser considerado do tipo acoplado discreto pois tanto o espectro de vagas quanto ondulações são representados discretamente nas frequências e direções. É um modelo de segunda geração, uma vez que o espectro de vagas é calculado de modo que reproduza, através de interações não-lineares, o espectro de Kruseman. Os termos de geração e dissipação de energia foram ajustados com as curvas de crescimento de vagas obtidas empiricamente por Sanders. No cálculo do termo de advecção de energia utilizou-se um esquema numérico semilagrangiano com interpolação biquadrática. Em situações de mudanças bruscas da direção do vento utilizou-se uma parametrização em que parte da energia nas direções referentes às vagas fica retida na forma de ondulações, fazendo com que, nos primeiros instantes após a mudança da direção do vento, não ocorra uma diferença muito marcante entre os espectros direcionais de vagas e de ondulações. Foram realizados alguns experimentos numéricos com campos de vento idealizados onde a contribuição de cada termo envolvido é analisada. Foi realizado ainda um experimento com batimetria na região do litoral de Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Espírito Santo e sul da Bahia para que os termos de refração e *shoaling* pudessem ser analisados. Os casos simulados quando comparados com resultados teóricos e com os obtidos pelos modelos operacionais mostraram-se bastante satisfatórios.



A NUMERICAL MODEL FOR SEA WAVES GENERATED  
BY THE WIND

ABSTRACT

In this research a wave wind model is developed. The energy spectrum is obtained through a energy balance equation, where the terms envolved are: advection, refraction, input and dissipation of energy, shoaling and nonlinear interactions. The model can be classified as coupled discrete, since the wind-sea and swell are discretized in the frequency-directional domain. It is a second generation model, since the wind-sea is computed so that the Kruseman spectral form is reproduced. The generation and dissipation of energy are calibrated with the empirical duration-limited growth curve obtained by Sanders. A semi-Lagrangian numerical scheme with bi-quadratic interpolation is used in the advection of energy. In cases of a sudden change in wind direction the angular spreading of energy is performed so that part of the energy is retained as swell. The contribution of each term in idealized wind field simulated cases was analysed. The bathymetry of the region around Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Espírito Santo and south of Bahia was incorporated in a numerical experiment where the waves are forced by a simple wind field, so that the shoaling and refraction could be studied. A comparison among the simulated cases, theoretical and others operational models indicated qualitatively good results.



## SUMÁRIO

|                                                              | <u>Pág.</u> |
|--------------------------------------------------------------|-------------|
| LISTA DE FIGURAS .....                                       | xv          |
| LISTA DE SÍMBOLOS .....                                      | xxi         |
| <u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....                         | 1           |
| <u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u> .....               | 9           |
| <u>CAPÍTULO 3 - ASPECTOS DINÂMICOS</u> .....                 | 17          |
| 3.1 - A equação do balanço de energia .....                  | 17          |
| <u>CAPÍTULO 4 - DESCRIÇÃO DO MODELO</u> .....                | 23          |
| 4.1 - Estrutura espacial .....                               | 23          |
| 4.2 - Termo de advecção de energia e <i>shoaling</i> .....   | 24          |
| 4.3 - Termo de refração .....                                | 30          |
| 4.4 - Termo de interações não lineares .....                 | 46          |
| 4.5 - Termo de crescimento e decaimento .....                | 56          |
| <u>CAPÍTULO 5 - EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO</u> ..... | 63          |
| 5.1 - Vento com direção variável .....                       | 63          |
| 5.2 - Vento constante .....                                  | 72          |
| 5.3 - Vórtice ciclônico estacionário .....                   | 74          |
| 5.4 - Vórtice ciclônico em movimento .....                   | 89          |
| 5.5 - Batimetria real com vento idealizado .....             | 103         |
| <u>CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES</u> .....  | 119         |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                             | 123         |
| APÊNDICE A - DEMOSTRAÇÃO DAS RELAÇÕES DE HAMILTON ...        | 127         |

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| APÊNDICE B - VARIAÇÃO DA FREQUÊNCIA ANGULAR COM O<br>TEMPO ..... | 129 |
| APÊNDICE C - COMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS NUMÉRICOS.....            | 131 |
| APÊNDICE D - LOCALIZAÇÃO DO PONTO $(x_*, y_*)$ .....             | 143 |
| APÊNDICE E - TAXA DE VARIAÇÃO DO NÚMERO DE ONDA.....             | 145 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                           | <u>Pág.</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 2.1 - Espectro de energia de ondas para o estágio completamente desenvolvido para as intensidades de vento de 10, 15 e 20m/s.....                         | 10          |
| 2.2 - Representação de uma onda senoidal.....                                                                                                             | 11          |
| 2.3 - Representação esquemática de um trem de ondas incidente em uma praia com fundo inclinado.....                                                       | 14          |
| 2.4 - Representação esquemática do efeito de quebra de ondas.....                                                                                         | 15          |
| 3.1 - Representação esquemática da conservação de energia.....                                                                                            | 17          |
| 4.1 - Representação da grade A de Arakawa, onde F representa as variáveis usadas no modelo.....                                                           | 24          |
| 4.2 - Os nove pontos utilizados na obtenção de $E_*^{n+1}$ por interpolação biquadrática .....                                                            | 26          |
| 4.3 - Esquema usado para a obtenção do termo de refração.....                                                                                             | 31          |
| 4.4 - Representação gráfica do oceano com o gradiente de profundidade.....                                                                                | 35          |
| 4.5 - Visualização gráfica da taxa de variação local de energia devida à refração.....                                                                    | 37          |
| 4.6 - Efeito do termo de refração em um ponto de grade para os instantes $t= 0h, 2h$ e $4h$ .....                                                         | 40          |
| 4.7 - Isolinhas de energia ( $m^2$ ) e direções preferenciais de propagação de energia para um trem de ondas propagando-se sobre um fundo inclinado.....  | 42          |
| 4.8 - Isolinhas de energia ( $m^2$ ) e direções preferenciais de propagação de energia para um trem de ondas propagando-se sobre um fundo parabólico..... | 44          |
| 4.9 - Espectro de onda para as intensidades de                                                                                                            |             |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| vento $U=10, 15$ e $20\text{m/s}$ , para um oceano completamente desenvolvido.....                                                                                                                                                                                                    | 50 |
| 4.10 - Espectro de ondas para o oceano com $\bar{E}_w=0,25\bar{E}_{\text{max}}$ , $\bar{E}_w=0,50\bar{E}_{\text{max}}$ , $\bar{E}_w=0,75\bar{E}_{\text{max}}$ e $\bar{E}_w=1,00\bar{E}_{\text{max}}$ para a intensidade do vento $U=10\text{m/s}$ .....                               | 51 |
| 4.11 - Distribuição espectral direcional de energia das vagas através da Equação 4.40 para $U=10\text{m/s}$ , considerando a mudança da direção do vento de $\phi = 90^\circ$ para $\bar{\phi} = 150^\circ$ .....                                                                     | 52 |
| 4.12 - Distribuição espectral direcional de energia obtida através das Equações 4.40 e 4.41 para o vento que tenha mudado de $\phi = 90^\circ$ para $\bar{\phi} = 150^\circ$ .....                                                                                                    | 55 |
| 4.13 - Curvas de crescimento da onda com o tempo de ação do vento.....                                                                                                                                                                                                                | 60 |
| 4.14 - Contribuição de energia dos termos de geração ( $S_{\text{in}}$ ),dissipação ( $S_{\text{ds}}$ ) e interações não-lineares ( $S_{\text{nl}}$ ) em um oceano completamente desenvolvido por um vento $U=15\text{m/s}$ . Oceano com profundidade constante $H=120\text{m}$ ..... | 61 |
| 5.1 - Espectro bidimensional de energia ( $\text{m}^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) obtido através do espalhamento proposto neste trabalho.....                                                                                                                                       | 66 |
| 5.2 - Espectro bidimensional de energia ( $\text{m}^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) obtido através do espalhamento proposto por Golding.....                                                                                                                                          | 68 |
| 5.3 - Espectro direcional obtido através do espalhamento proposto neste trabalho e o proposto por Golding.....                                                                                                                                                                        | 71 |
| 5.4 - Esquema de um oceano com profundidade constante e vento soprando da costa para o oceano.....                                                                                                                                                                                    | 72 |
| 5.5 - Curvas de crescimento limitadas pela pista adimensional $X_*$ (a) energia adimensional                                                                                                                                                                                          |    |



|            |                                                                                                                                        |    |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| E* por X*; | (b) frequência adimensional $f_p^*$ por X*.....                                                                                        | 73 |
| 5.6        | - Campo de vento do vórtice ciclônico estacionário.....                                                                                | 76 |
| 5.7        | - Isolinhas de altura (m) de onda e direções preferenciais de propagação de energia.....                                               | 77 |
| 5.8        | - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto A.....                                               | 80 |
| 5.9        | - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto B.....                                               | 81 |
| 5.10       | - Isolinhas de período médio (s) das ondas.....                                                                                        | 83 |
| 5.11       | - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A..... | 84 |
| 5.12       | - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B..... | 85 |
| 5.13       | - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.....            | 87 |
| 5.14       | - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.....            | 88 |
| 5.15       | - Campos de vento do vórtice ciclônico em movimento.....                                                                               | 90 |
| 5.16       | - Isolinhas de altura (m) de onda e direções preferenciais de propagação de energia.....                                               | 92 |
| 5.17       | - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto A.....                                               | 95 |
| 5.18       | - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto B.....                                               | 96 |
| 5.19       | - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no              |    |

|                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ponto A.....                                                                                                                                                            | 98  |
| 5.20 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.....                             | 99  |
| 5.21 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.....                                        | 101 |
| 5.22 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.....                                        | 102 |
| 5.23 - Região em estudo.....                                                                                                                                            | 104 |
| 5.24 - Campo de vento e linha da costa.....                                                                                                                             | 105 |
| 5.25 - Isolinhas de altura (m) de onda e direções preferenciais de propagação de energia.....                                                                           | 107 |
| 5.26 - Espectro bidimensional de energia ( $\text{m}^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto A.....                                                                    | 109 |
| 5.27 - Espectro bidimensional de energia ( $\text{m}^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto B.....                                                                    | 110 |
| 5.28 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, <i>shoaling</i> , refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A..... | 111 |
| 5.29 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, <i>shoaling</i> , refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B..... | 112 |
| 5.30 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, <i>shoaling</i> , refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.....            | 114 |
| 5.31 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, <i>shoaling</i> , refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.....            | 115 |
| C.1 - Comportamento de uma curva gaussiana com o                                                                                                                        |     |

|     |                                                                          |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------|-----|
|     | tempo para $C=0,2$ .....                                                 | 137 |
| C.2 | - Comportamento de uma curva gaussiana com o<br>tempo para $C=0,5$ ..... | 139 |
| C.1 | - Comportamento de uma curva gaussiana com o<br>tempo para $C=0,7$ ..... | 141 |



## LISTA DE SÍMBOLOS

|                 |                                                                                                     |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$             | - Amplitude da onda (m)                                                                             |
| $B$             | - Fator que representa os efeitos de convergência e divergência de energia                          |
| $c$             | - Velocidade de fase ( $m\ s^{-1}$ )                                                                |
| $C_g$           | - Velocidade de grupo ( $m\ s^{-1}$ )                                                               |
| $C_{g_x}$       | - Componente da velocidade de grupo na direção x                                                    |
| $C_{g_y}$       | - Componente da velocidade de grupo na direção y                                                    |
| $D_1$           | - Fator de dissipação ajustado para $\bar{E}_{aj}/\bar{E}_{max} \leq 0,9$                           |
| $D_2$           | - Fator de dissipação ajustado para $0,9 \leq \bar{E}_{aj}/\bar{E}_{max} \leq 1$                    |
| $D_3$           | - Fator de dissipação ajustado para $\bar{E}_{aj}/\bar{E}_{max} \leq 1$                             |
| $D$             | - Fator de dissipação onde $D = D_1, D_2, D_3$ , dependendo do estágio de desenvolvimento do oceano |
| $E$             | - Energia por unidade de área, de direção e de frequência ( $m^2\ rad^{-1}\ s$ )                    |
| $\bar{E}$       | - Energia por unidade de área ( $m^2$ )                                                             |
| $E_*$           | - Energia adimensional                                                                              |
| $\bar{E}_{aj}$  | - Energia total das vagas adicionada às ondulações ( $m^2$ )                                        |
| $\bar{E}^0$     | - Energia por unidades de área e de frequência ( $m^2\ s$ )                                         |
| $\bar{E}^f$     | - Energia por unidades de área e de direção ( $m^2\ rad^{-1}$ )                                     |
| $\bar{E}_{max}$ | - Energia total máxima das vagas por unidade de área ( $m^2$ )                                      |
| $\bar{E}_w$     | - Energia total das vagas por unidade de área ( $m^2$ )                                             |
| $f$             | - Frequência da onda ( $s^{-1}$ )                                                                   |
| $f_p^*$         | - Frequência de pico adimensional                                                                   |
| $f_{max}$       | - Componente de frequência mais alta representada no modelo ( $s^{-1}$ )                            |
| $f_{min}$       | - Frequência mínima ( $s^{-1}$ )                                                                    |

|                 |                                                                                                              |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f_p$           | - Frequência de pico ( $s^{-1}$ )                                                                            |
| $g$             | - Aceleração da gravidade ( $m\ s^{-2}$ )                                                                    |
| $G$             | - Fator de geração de energia pelo vento, ajustado de acordo com uma curva conhecida de crescimento de vagas |
| $h$             | - Altura da onda (m)                                                                                         |
| $h_s$           | - Altura significativa da onda (m)                                                                           |
| $H$             | - Profundidade do oceano (m)                                                                                 |
| $H_0$           | - Profundidade do oceano no ponto de partida (m)                                                             |
| $i$             | - Índice que denota a posição na grade horizontal x                                                          |
| $j$             | - Índice que denota a posição na grade horizontal y                                                          |
| $k$             | - Número de onda ( $m^{-1}$ )                                                                                |
| $\vec{k}$       | - Vetor número de onda                                                                                       |
| $\dot{\vec{k}}$ | - Variação com o tempo do vetor número de onda                                                               |
| $k_1$           | - Componente do vetor número de onda na direção x                                                            |
| $k_2$           | - Componente do vetor número de onda na direção y                                                            |
| $\dot{k}_1$     | - Variação com o tempo da componente x do vetor número de onda                                               |
| $\dot{k}_2$     | - Variação com o tempo da componente y do vetor número de onda                                               |
| $L$             | - Comprimento de onda (m)                                                                                    |
| $n$             | - Índice que indica o passo de tempo                                                                         |
| $p$             | - Distância em intervalos de grade entre o ponto de partida e o ponto de chegada na direção x                |
| $P$             | - Ponto de chegada                                                                                           |
| $q$             | - Distância em intervalos de grade entre o ponto de partida e o ponto de chegada na direção y                |
| $s$             | - Ortogonal, ray path                                                                                        |
| $S_{in}$        | - Termo de fornecimento de energia pelo vento                                                                |
| $S_{ds}$        | - Termo de dissipação de energia                                                                             |
| $S_{nl}$        | - Termo de interação não-linear                                                                              |
| $T$             | - Período da onda (s)                                                                                        |

|                  |                                                                                                  |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_m$            | - Período médio (s)                                                                              |
| $U$              | - Velocidade do vento ( $m\ s^{-1}$ )                                                            |
| $\vec{u}$        | - Versor ao longo da ortogonal                                                                   |
| $u_*$            | - Velocidade de fricção ( $m\ s^{-1}$ )                                                          |
| $x_*$            | - Coordenada do ponto de partida na direção x                                                    |
| $X_*$            | - Área adimensional de ação do vento                                                             |
| $y_*$            | - Coordenada do ponto de partida na direção y                                                    |
| $\alpha$         | - Ângulo entre a ortogonal e uma linha perpendicular à praia na zona de refração (rad)           |
| $\alpha_d$       | - Ângulo entre a ortogonal e uma linha perpendicular à praia em regiões de águas profundas (rad) |
| $\hat{\alpha}$   | - Parâmetro que determina o estágio de desenvolvimento do espectro                               |
| $\bar{\alpha}$   | - Termo linear de fornecimento de energia pelo vento                                             |
| $\bar{\alpha}_1$ | - Fator do termo linear de fornecimento de energia                                               |
| $\beta$          | - Constante utilizada para determinar $\bar{E}_{max}$                                            |
| $\bar{\beta}$    | - Termo exponencial de fornecimento de energia pelo vento                                        |
| $\bar{\beta}_1$  | - Fator do termo exponencial de fornecimento de energia                                          |
| $\Delta x$       | - Espaçamento de grade na direção x (m)                                                          |
| $\Delta y$       | - Espaçamento de grade na direção y (m)                                                          |
| $\Delta t$       | - Intervalo de tempo (s)                                                                         |
| $\varphi$        | - Ângulo entre a crista da onda e uma linha paralela à praia na zona de refração (rad)           |
| $\varphi_d$      | - Ângulo entre a crista da onda e uma linha paralela à praia em regiões de águas profundas (rad) |
| $\phi$           | - Direção do vento (grau)                                                                        |
| $\mu$            | - Razão entre $f_{min}$ e $f_p$                                                                  |
| $\bar{\rho}$     | - Razão entre as densidades do ar e da água                                                      |
| $\sigma$         | - Frequência angular ( $rad\ s^{-1}$ )                                                           |

- $\theta$  - Direção de propagação de energia (rad)
- $\xi$  - Razão entre a energia total das vagas e a energia total máxima



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Os oceanos estão diretamente relacionados a uma série de atividades humanas; e o conhecimento detalhado do padrão de ondas, em particular, é de grande interesse para a engenharia naval e para que rotas de navio possam ser planejadas de maneira a aumentar os aspectos de segurança e economia de combustível. Problemas relacionados com poluição marinha, exploração de reservas minerais distante da costa, assim como proteção costeira, necessitam também de um conhecimento das ondas.

As primeiras tentativas de descrever o padrão de ondas foram feitas na década de 40, as quais usavam relações empíricas entre a velocidade do vento local e a altura das ondas. Estas primeiras tentativas mostraram-se bastante limitadas, pois as relações eram ajustadas localmente. No final dos anos 50, modelos determinísticos baseados em princípios físicos começaram a ser desenvolvidos na França e Alemanha, os quais constituem a tendência atual de técnicas empregadas nestes tipos de modelos. Centros meteorológicos de vários países utilizam este tipo de modelo, cujos resultados são divulgados diariamente.

São conhecidas, atualmente, várias técnicas de modelo de previsão de onda; a física do problema inclui considerações sobre propagação de ondas, especificações adequadas do fornecimento de energia pelo vento (*input*), efeitos de dissipação de energia por quebra de ondas ou por *white capping*, e efeitos de interações não-lineares. Os modelos aplicados em regiões de água rasa devem incluir ainda os efeitos de refração, *shoaling* e dissipação devida ao atrito no fundo.

Na década de 60 e início dos anos 70, surgiu a chamada primeira geração de modelos de onda, onde os detalhes de como o espectro alcançava sua forma de equilíbrio não eram especificados. Nos anos 70 foram realizados vários experimentos de coleta de dados de crescimento de ondas e medidas diretas do fornecimento de energia pelo vento. Estes dados permitiram o surgimento de uma segunda geração de modelos em que, conhecendo-se a priori a forma do espectro das vagas (ondas formadas na área de geração do vento, segundo Abecasis, 1957), o termo de interações não-lineares é considerado de modo que reproduza estes espectros conhecidos.

O modelo de segunda geração de Golding (1983), em uso operacional no BMO (British Meteorological Office), combina as vantagens da técnica paramétrica na previsão das vagas (técnica esta em que o espectro de vagas é obtido através de alguns de seus parâmetros, não sendo necessário o cálculo discreto de todo o espectro) com um modelo espectral discreto para a previsão do regime de ondulações (ondas que alcançam regiões distantes da área de geração do vento). O termo de propagação de energia é obtido através do esquema de Lax-Wendroff modificado por Gadd (1978). O modelo considera ainda os efeitos de refração, *shoaling* e dissipação de energia pelo fundo. Um modelo atmosférico do BMO fornece o vento. O espectro de vagas é separado do espectro de ondulações a cada passo de tempo, e o termo de interações não-lineares faz com que o espectro de vagas obtenha a forma normal do espectro de JONSWAP (Joint North Sea Wave Project) encontrado em Hasselmann et al. (1973).

No modelo de segunda geração GONO (GOLven NOrdzee) de Janssen et al. (1984), em uso na Holanda, a previsão de vagas é obtida através de uma forma paramétrica onde a energia total e direção média de vagas são usadas

como variáveis prognósticas. Outros parâmetros espectrais, tal como a frequência de pico (frequência de máxima energia no espectro de vagas), são usadas como relações diagnósticas. O regime de ondulações é tratado de uma maneira espectral. O termo de propagação de energia é calculado através de um esquema de diferenças finitas avançadas no tempo (*upstream*). Neste modelo são considerados os efeitos provocados pelo fundo através da dissipação; não são considerados a refração e o *shoaling*. O fornecimento de energia pelo vento é feito através de um modelo atmosférico quase-geostrófico de quatro camadas.

Uma comparação entre os modelos BMO e GONO, e ainda o modelo HYPAS (HYbrid-PARametric-Shallow) de Gunther e Rosenthal (1984, citado por SWIM Group, 1985), desenvolvido no Max-Planck-Institut für Meteorologie em Hamburgo (Alemanha), foi realizada por SWIM Group (1985) para um melhor entendimento dos efeitos de parametrização dos termos que dependem da variação da profundidade em modelos numéricos de previsão de onda. Foram realizados dois experimentos idealizados. No primeiro considerou-se o vento soprando da praia para o mar, onde foram escolhidas algumas profundidades constantes  $H=15, 30, 60$  e  $120\text{m}$ . No segundo experimento, considerou-se o vento soprando do mar para a praia, além de um fundo inclinado. Os experimentos idealizados mostraram grandes diferenças nos resultados de energia de ondas, frequência de pico e espectro de ondas entre os três modelos, dependendo da profundidade do oceano, devido às diferenças nas parametrizações da dissipação pelo fundo. Foi realizado um estudo de *hindcast* (uso de modelos de ondas com condições meteorológicas passadas para calcular características de ondas que ocorreram em algum tempo passado) para um evento de tempestade real, não tendo sido possível um estudo muito detalhado devido às dificuldades em isolar os mecanismos envolvidos em cada modelo. Para o caso real, o erro

quadrático médio (r.m.s.) na altura das ondas foi de 0,5m em todos os modelos em regiões de água rasa, tendo variado entre 0,9m (GONO) e 1,5m (HYPAS) em regiões de água profunda.

Uji (1984) desenvolveu um modelo acoplado discreto (uma descrição paramétrica das vagas com uma representação espectral discreta de todo o espectro, incluindo vagas e ondulações) de onda chamado MRI-II (Meteorological Research Institute), em uso na Japan Meteorological Agency, onde foram considerados cinco processos de transferência de energia para a equação do balanço de energia: o fornecimento de energia pelo vento, quebra de ondas, dissipação friccional, o efeito de vento oposto e transferências não-lineares entre componentes de vagas por interações onda-onda ressonantes. A versão anterior (MRI-I) não havia considerado os efeitos não-lineares, sendo então as componentes espectrais das ondas completamente independentes. Uma comparação entre as duas versões mostrou que o MRI-II apresentou-se muito melhor durante o estágio inicial do crescimento de ondas que a versão anterior. A introdução do efeito de quebra de ondas por componentes supersaturadas (curva proposta por Phillips (1958), cuja forma é proporcional a  $f^{-5}$ ) forneceu um *hindcast* mais razoável para a altura de ondas tanto no espectro unidimensional quanto no espectro bidimensional.

Os modelos atuais de previsão de altura de onda são muito complexos e necessitam de grandes computadores para serem executados. Com o aperfeiçoamento dos microcomputadores, sentiu-se a necessidade de um modelo mais simples que pudesse ser executado nestes tipos de equipamentos, podendo, assim, ser utilizado no campo, próximo da região em que esteja sendo feita a previsão, ou mesmo a bordo de navios. Earle (1989) desenvolveu um modelo onde o espaçamento e número de pontos de grade, passo de

tempo e bandas de frequências são variáveis, de acordo com as necessidades do caso em estudo. São considerados apenas os efeitos de propagação de energia, dissipação devida ao vento oposto e geração pelo vento. Este modelo não possui o acoplamento entre as frequências, pois não leva em consideração o efeito de interações não-lineares. Devido tanto às suas simplificações como à pouca quantidade de memória dos microcomputadores ao serem comparados com os grandes computadores, este modelo fornece bons resultados apenas quando aplicado a regiões de pequenas dimensões. Para economia de memória, o modelo utiliza duas grades: uma grade local onde se situa a área de interesse de estudo e uma grade móvel onde se encontra a tempestade responsável pela situação presente na grade local. Testes para situações de um forte sistema frontal, um furacão e uma tempestade extratropical mostraram que o modelo responde bem aos vários tipos de condições de tempo.

Uma nova geração de modelos, chamada terceira geração, surgiu com o modelo desenvolvido por WAMDI Group (1988), onde o espectro da onda foi calculado por integração da equação básica de transporte espectral, sem nenhuma restrição à forma espectral. A propagação de energia foi obtida utilizando coordenadas esféricas latitude-longitude, através de dois esquemas numéricos alternativos, um esquema *upstream* de primeira ordem e um esquema *leapfrog* de segunda ordem, com um termo de difusão para evitar valores de energia negativa em regiões de fortes gradientes de energia. O modelo possui ainda uma extensão para regiões de profundidades finitas, onde são incluídos termos de refração e fricção pelo fundo. Foram feitos testes em 6 casos de tempestades no Mar do Norte do Atlântico Norte; e nos furacões Camile, ocorrido em 1969, Anita, ocorrido em 1977, e Frederick, ocorrido em 1979. O modelo foi ainda utilizado para uma aplicação global de ondas durante o período do experimento SEASAT (7 de julho a

10 outubro de 1978 em um total de 96 dias). Foram apresentados resultados apenas para o caso do método de propagação de primeira ordem, os quais foram considerados bastante satisfatórios quando comparados com dados reais de medidas de ondas.

No Symposium Measuring Ocean Waves from Space, ocorrido em 1986 (Donelan e Plant, 1987), discutiu-se o que pode ser considerada uma quarta geração de modelos. Nesta nova geração, os modelos serão utilizados em conjunto com medidas obtidas através de sensoriamento remoto. Estes modelos devem incluir os efeitos de interações entre corrente e ondas. Embora estas interações possam provocar ondas extremas, capazes de causar grandes danos em navios, estes efeitos são incluídos em muito poucos modelos atualmente. O estudo destas interações, muito difícil de ser realizado em laboratório, parece ser possível no campo somente com a ajuda de medidas de sensoriamento remoto. Aplicando estas técnicas, tais interações poderão ser estudadas, entendidas e incluídas com precisão em modelos de previsão de altura de ondas do mar. O sensoriamento remoto também pode ser utilizado na inicialização dos modelos, o que é feito através de assimilação dos dados globais de espectro direcional obtidos utilizando este método. Os modelos que não utilizam este método são inicializados através de suas próprias previsões, que podem acarretar erros significativos nos resultados.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de segunda geração de previsão de onda de superfície do mar, com finalidade operacional para o Brasil, para ser utilizado no planejamento de rotas de navios, construção de portos e planejamento costeiro. A única equação envolvida neste problema é uma equação do balanço de energia, e os processos envolvidos são:

- advecção de energia pela velocidade de grupo;
- refração e *shoaling* para o caso das ondas que se propagam em regiões de profundidade variável;
- fornecimento de energia determinada pela direção e intensidade do vento na superfície do oceano;
- dissipação de energia, que representa o amortecimento da onda sem que a energia desta seja transferida para uma outra onda;
- interações não-lineares onda-onda, onde ocorre uma redistribuição de energia entre as ondas.

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos sobre ondas senoidais, espectro de ondas, refração e *shoaling*, quebra de ondas e *white capping*, dissipação de energia e interações não-lineares. A formulação da equação do balanço de energia encontra-se no Capítulo 3. No Capítulo 4 é apresentada a estrutura espacial do modelo, assim como a formulação dos termos envolvidos. O termo de propagação de energia é calculado utilizando o esquema semilagrangiano biquadrático. São realizados alguns experimentos numéricos com os termos separados para um melhor entendimento do papel de cada um deles no resultado final. No Capítulo 5 são apresentados resultados e discussões de experimentos numéricos, considerando todos os termos envolvidos. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas e algumas sugestões para futuros trabalhos na área.





## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Quando o vento age sobre a superfície do mar, as primeiras respostas da superfície da água são pequenas ondulações chamadas ondas capilares, que possuem poucos milímetros de altura e poucos centímetros de comprimento. A banda de período das ondas capilares encontra-se entre 0s e  $10^{-1}$ s (Kinsman, 1965), sendo a tensão superficial a força restauradora deste tipo de ondas. Se, no entanto, o vento continuar a agir durante algum tempo, estas ondulações podem aumentar de altura e comprimento e tornarem-se ondas de gravidade. O período destas ondas de gravidade varia de 1s a 30s (Kinsman, 1965), e a aceleração da gravidade é a força restauradora deste tipo de ondas. Uma das mais marcantes diferenças entre ondas capilares e ondas de gravidade é a duração, pois as ondas capilares desaparecem quando o vento deixa de agir sobre a superfície da água, e as ondas de gravidade persistem com o fim da ação do vento. Dependendo do tamanho da pista (*fetch*) ou do tempo em que o vento esteja agindo sobre certa área, o oceano atinge um ponto de equilíbrio em que a energia fornecida pelo vento torna-se igual à energia perdida pelas ondas através de algum mecanismo de dissipação e advecção. As ondas de gravidade deixam de aumentar sua altura e comprimento de onda quando atingem este ponto de equilíbrio. Neste estágio, o oceano é chamado completamente desenvolvido.

As ondas de gravidade da superfície do mar geradas sobre a região de influência do vento possuem uma forma bastante complexa. Entretanto, um certo estado de mar pode ser expresso matematicamente como a soma dos harmônicos simples da onda, cada qual com uma amplitude específica, comprimento de onda, frequência, fase e direção

de propagação. A variância da superfície da onda devida a cada harmônico simples é fornecida pelo valor médio do quadrado deste harmônico. Espectros de onda fornecem a distribuição da variância da onda como uma função da frequência. Desde que a energia é proporcional à variância, espectros de onda são também chamados espectros de energia da onda. A distribuição da variância como função da frequência e direção é chamado espectro bidimensional (Earle e Bishop, 1984). Estas ondas de gravidade geradas na região de influência do vento são chamadas vagas (*wind-sea*). Observações de dados de vagas mostram que a somatória das componentes senoidais de ondas apresenta uma forma constante de distribuição no espectro de frequências, dependendo da intensidade, pista ou tempo de duração do vento. A Figura 2.1 mostra o espectro de energia de ondas por frequência de um oceano completamente desenvolvido, para as intensidades de vento de 10, 15 e 20m/s.

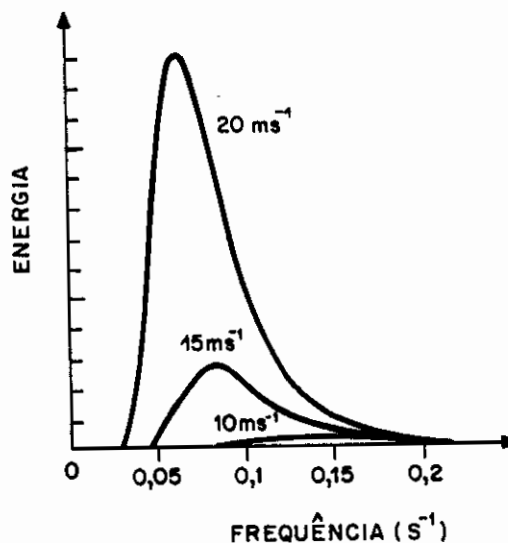


Fig. 2.1 - Espectro de energia de ondas para o estágio completamente desenvolvido para as intensidades de vento de 10, 15 e 20m/s.

Conhecem-se atualmente várias equações que descrevem o espectro de vagas (Pierson e Moskowitz, 1964; Hasselmann et al, 1973), sendo a maioria delas função da energia total, frequência de pico e frequência mínima (menor frequência das vagas). A análise dos espectros de vagas mostra que à medida que a energia do oceano fornecida pelo vento aumenta, ocorre uma diminuição na frequência de pico. Esta migração de energia de altas para baixas frequências ocorre através de interações não-lineares.

As vagas, quando se propagam para locais distantes da região de influência do vento, deixam de ter a aparência tão complexa e tornam-se sobreposições de ondas senoidais de comprimento de onda e direção de propagação bastante próximas uma das outras. As ondas existentes nestas regiões são chamadas ondulações (*swell*), segundo Abecasis (1957). A Figura 2.2 mostra um esquema de onda senoidal, usada para o estudo de ondas no oceano.

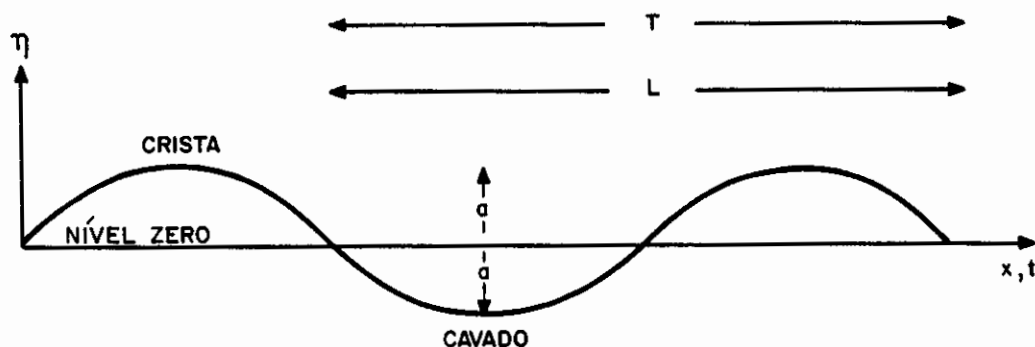


Fig. 2.2 - Representação de uma onda senoidal.

O perfil de uma onda senoidal, em função do espaço e do tempo, é obtido através de:

$$\eta(x,t) = a \sin(kx - \sigma t) \quad , \quad (2.1)$$

onde  $k$  é o número de onda e  $\sigma$  é a frequência angular ( $\sigma=2\pi f$ ). Através de  $\sigma$  obtém-se a relação de dispersão da onda:

$$\sigma = \sqrt{gk \tanh(kH)} \quad , \quad (2.2)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $H = H(x)$  é a profundidade do oceano.

A velocidade de fase  $c$  em função do número de onda  $k$  é obtido por:

$$c = \frac{\sigma}{k} \quad . \quad (2.3)$$

A velocidade com que se propaga a energia, chamada velocidade de grupo  $c_g$ , é obtida por:

$$c_g = \frac{d\sigma}{dk} \quad ; \quad (2.4)$$

portanto:

$$c_g = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right] \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)} \quad . \quad (2.5)$$

A Equação 2.5 refere-se a  $c_g$  em regiões de água intermediária, que são caracterizadas por  $L/20 \leq H \leq L/2$  (Earle e Bishop, 1984). Em regiões de água profunda, ( $H > L/2$ ),  $\tanh(kH) \approx 1$  e  $\sinh(2kH) \rightarrow \infty$ ; então:

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (2.6)$$

Em regiões de água rasa, ( $H < L/20$ ),  $\tanh(kH) \cong kH$  e  $\sinh(2kH) \cong 2kH$ ; portanto:

$$c_g = \sqrt{gH} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{gH} \quad (2.7)$$

Pela análise das Equações 2.6 e 2.7, pode-se observar que tanto a velocidade de grupo quanto a velocidade de fase são funções da profundidade  $H$  apenas em regiões de águas rasa e intermediária. Em regiões de água profunda,  $c_g$  e  $c$  tornam-se independentes desta grandeza. Quando a crista de uma onda encontra-se situada em uma região de água rasa, as partes da crista cuja profundidade é menor deslocam-se mais lentamente do que as outras, pois nesta região tanto  $c$  quanto  $c_g$  são funções da profundidade. Este fato provoca a curvatura das cristas que tendem a ajustar-se à configuração das batimétricas (isolinhas de profundidade), tornando-se, as ondas, cada vez mais paralelas à costa. O fenômeno descrito acima chama-se refração devido à sua semelhança com o fenômeno da ótica.

Um esquema de refração é mostrado na Figura 2.3, onde a profundidade diminui lentamente em direção à linha da costa. Supondo que uma crista de onda senoidal mova-se em direção à praia, em água profunda a crista faz um ângulo  $\varphi_d$  com a praia, onde o subscrito  $d$  indica região de água profunda. Na zona de refração, o ângulo formado entre a crista e a praia é  $\varphi$ . Os ângulos entre a ortogonal (linha de avanço da onda) e a perpendicular à praia são  $\alpha_d$  e  $\alpha$  para a água profunda e zona de refração, respectivamente. Pode-se notar que, à medida que a

profundidade diminui, as cristas das ondas inclinam-se, tornando-se cada vez mais paralelas às batimétricas. A mudança de direção das cristas provoca um afastamento entre as ortogonais em regiões de água rasa, pois as ortogonais são perpendiculares às cristas das ondas. Em regiões de água profunda ocorre uma aproximação entre as ortogonais (Kinsman, 1965).

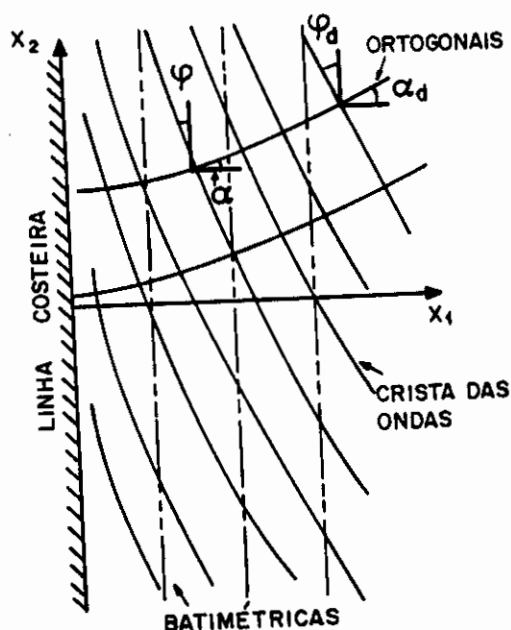


Fig. 2.3 - Representação esquemática de um trem de ondas incidente em uma praia com fundo inclinado.

FONTE: Kinsman (1965), p. 156.

Enquanto a refração faz com que a altura das ondas seja alterada devido à aproximação ou separação das ortogonais e que a direção de propagação seja mudada ao "sentirem" o fundo, o *shoaling* faz com que a altura das ondas seja alterada devido às diferentes velocidades de propagação da onda em uma zona de profundidade variável. Uma onda que esteja se propagando na direção de regiões menos profundas deve ter, considerando apenas o efeito de *shoaling*, sua altura aumentada. Isto ocorre porque a

velocidade de grupo diminui com o decréscimo da profundidade, fazendo com que haja um acúmulo de energia por unidade de área nas regiões mais rasas. Uma diminuição de energia ocorre quando as ondas propagam-se de regiões rasas para regiões profundas; neste caso, as ondas devem ter sua altura diminuída devido ao efeito de *shoaling* (Kinsman, 1965).

À medida que as ondas se aproximam da costa, as velocidades das cristas devem tornar-se diferentes das velocidades dos cavados, pois  $c$  torna-se função de  $H$  em regiões de água rasa. A Figura 2.4 ilustra o caso onde o  $H$  da crista da onda é maior do que o  $H$  do cavado à sua frente; então, a crista deve mover-se mais rápido do que o cavado. Cada crista alcança, desta forma, o cavado à sua frente até que se forme uma parede de água (crista); neste estágio, a crista desaba para produzir quebra de onda (Beer, 1983). De acordo com a teoria de Stokes e observações de ondas, em regiões de água profunda as ondas devem quebrar quando a crista alcançar o ângulo de  $120^\circ$ , que corresponde a uma inclinação dada por  $h/L = 1/7$ , onde  $h$  é a altura da onda e  $L$  é o comprimento de onda. Em regiões de água rasa, a altura máxima que a onda alcança sem que ocorra quebra é  $h = 0,78H$  (Earle e Bishop, 1984).

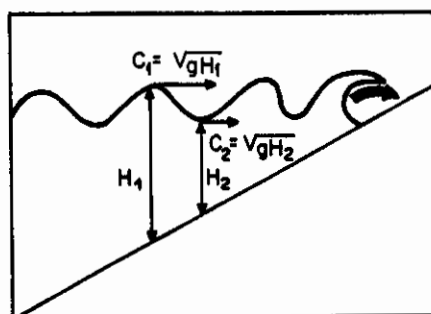


Fig. 2.4 - Representação esquemática do efeito de quebra de ondas.

FONTE: Beer (1983), p. 24.

A quebra de ondas na praia, portanto, ocorre principalmente devido à mudança de profundidade, embora o vento possa mudar o padrão de quebra de ondas. A formação de espuma devida ao vento soprando no topo das ondas, chamada *white capping* (Kinsman, 1965), pode ocorrer em regiões distantes da costa, independente da profundidade do local ou do comprimento de onda.

A fricção pelo fundo em regiões de água rasa é outro mecanismo que, junto com quebra de ondas e *white capping*, provoca dissipação de energia. Considera-se geralmente fricção pelo fundo o trabalho realizado pelo cisalhamento induzido no fundo pelo movimento das partículas de água (fricção turbulenta de fundo). Outra forma de fricção pelo fundo é o trabalho realizado pelas forças viscosas induzidas por um fundo permeável que permita o movimento entre as partículas de água e os grãos de material (percolação). Os efeitos de fricção turbulenta são, na maior parte das vezes, maiores do que os efeitos de percolação (Collins, 1972).



### CAPÍTULO 3

#### ASPECTOS DINÂMICOS

##### 3.1 A EQUAÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA

A evolução dos campos de elevação da superfície do mar no espaço e no tempo é governada pela equação de balanço de energia. A Figura 3.1 mostra uma área arbitrária A limitada por um contorno fechado B, onde E é a energia por unidade de área. Considera-se um elemento de contorno dB, um vetor unitário  $\underline{n}$  e um vetor velocidade  $\underline{c}_g$ . Considera-se ainda que dentro da área A existam fontes (e/ou sumidouros) de energia de intensidade S por unidade de área (Collins, 1972)

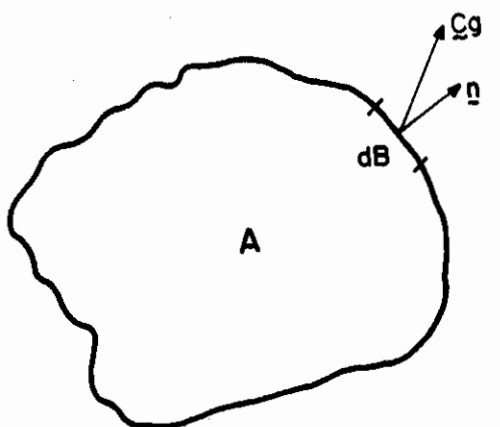


Fig. 3.1 - Representação esquemática da conservação de energia.

A expressão de conservação de energia para a área A é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint E \, dA + \oint E \, \underline{c}_g \cdot \underline{n} \, dB - \iint S \, dA = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Usando o teorema da divergência no segundo termo e considerando que a área A não depende do tempo, obtém-se:

$$\int \int \left[ \frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla}_H \cdot (\underline{C}_g E) - S \right] dA = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Como A é uma área arbitrária, obtém-se a equação do balanço de energia como se segue:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla}_H \cdot (\underline{C}_g E) = S \quad . \quad (3.3)$$

Considerando  $E(x, y, t, k_1, k_2)$  a energia por unidade de área, de tempo e por unidade de número de onda, a Equação 3.3 torna-se:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla}_H \cdot (\underline{C}_g E) + \underline{\nabla}_k \cdot (\dot{\underline{k}} E) = S \quad , \quad (3.4)$$

onde:

$$\underline{\nabla}_H = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad , \quad (3.5)$$

$$\underline{\nabla}_k = \left( \frac{\partial}{\partial k_1}, \frac{\partial}{\partial k_2} \right) \quad , \quad (3.6)$$

$$\dot{\underline{k}} = \frac{d\underline{k}}{dt} \quad , \quad (3.7)$$

$$\underline{\nabla}_H \cdot (\underline{C}_g E) = \underline{C}_g \cdot \underline{\nabla}_H E + E \underline{\nabla}_H \cdot \underline{C}_g \quad , \quad (3.8)$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{k}} \cdot (\dot{\underline{k}} E) = \dot{\underline{k}} \cdot \underline{\nabla}_{\underline{k}} E + E \underline{\nabla}_{\underline{k}} \cdot \dot{\underline{k}} . \quad (3.9)$$

Considerando que a taxa de variação temporal de  $x$  e  $y$  segue a energia da onda, obtêm-se as componentes da velocidade de grupo na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$c_{g_x} = \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_1} , \quad c_{g_y} = \dot{y} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_2} . \quad (3.10)$$

Utilizando as relações de Hamilton (ver Apêndice A), dadas por:

$$\dot{k}_1 = - \frac{\partial \sigma}{\partial x} , \quad \dot{k}_2 = - \frac{\partial \sigma}{\partial y} , \quad (3.11)$$

obtêm-se:

$$\underline{\nabla}_H \cdot \underline{c}_g = \frac{\partial c_{g_x}}{\partial x} + \frac{\partial c_{g_y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial k_1} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial k_2} , \quad (3.12a)$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{k}} \cdot \dot{\underline{k}} = \frac{\partial \dot{k}_1}{\partial k_1} + \frac{\partial \dot{k}_2}{\partial k_2} = - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial k_1} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial k_2} . \quad (3.12b)$$

Substituindo as Equações 3.12a e 3.12b nas Equações 3.8 e 3.9, respectivamente, a Equação 3.4 torna-se:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla}_H E + \dot{\underline{k}} \cdot \underline{\nabla}_{\underline{k}} E = \frac{dE}{dt} = S , \quad (3.13)$$

que é a mesma equação de balanço de energia encontrada em Hasselmann (1960, citado por Golding, 1983).

Considerando agora  $E(x,y,\theta,f,t)$  a energia por unidade de área , por unidade de direção de propagação  $\theta$  e por unidade de frequência  $f$ , obtém-se de modo análogo à Equação 3.4:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla}_H \cdot (\underline{c}_g E) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} E \right) \\ + \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{df}{dt} E \right) = S \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Desde que  $\frac{df}{dt} = 0$  (ver Apêndice B), tem-se que:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla}_H \cdot (\underline{c}_g E) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} E \right) = S \quad , \quad (3.15)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{c}_g E) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (\underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta) E \right] = S \quad , \quad (3.16)$$

que é a equação do balanço de energia para  $E(x,y,\theta,f,t)$ , onde:

$$\underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta = \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad (3.17)$$

$\frac{\partial E}{\partial t}$  = taxa de variação local da energia;

$\nabla \cdot (\underline{c}_g E)$  = termo de advecção de energia e *shoaling*;

$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (\underline{c}_g \cdot \nabla \theta) E \right]$  = termo de refração;

$S = S_{in} + S_{ds} + S_{nl}$  = termo fonte (e/ou sumidouro) de energia, onde  $S_{in}$  representa o fornecimento de energia pelo vento;  $S_{ds}$  é a dissipação de energia; e  $S_{nl}$  é a redistribuição de energia no espectro de onda devida às interações não-lineares conservativas.



## CAPÍTULO 4

### DESCRIÇÃO DO MODELO

A integração no tempo da Equação 3.16 (equação do balanço de energia) para  $E(x,y,\theta,f,t)$  é realizada através da integração de cada termo envolvido, ou seja, advecção e *shoaling*, refração, geração, dissipação de energia e interações não-lineares.

Consideram-se as seguintes notações:

$$\overline{E} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E \, d\theta \, df \quad ;$$

$$\overline{E}^0 = \int_0^{2\pi} E \, d\theta \quad ;$$

$$\overline{E}^f = \int_0^{\infty} E \, df \quad .$$

#### 4.1 ESTRUTURA ESPACIAL

O modelo é bidimensional, e está sendo considerada a grade A de Arakawa (Messinger e Arakawa, 1976) na horizontal. A Figura 4.1 mostra a grade utilizada. Optou-se por esta grade por ser mais simples do que os outros tipos; e, sendo a energia por unidade de área a única variável prognóstica do modelo, não houve necessidade de outro tipo de grade.

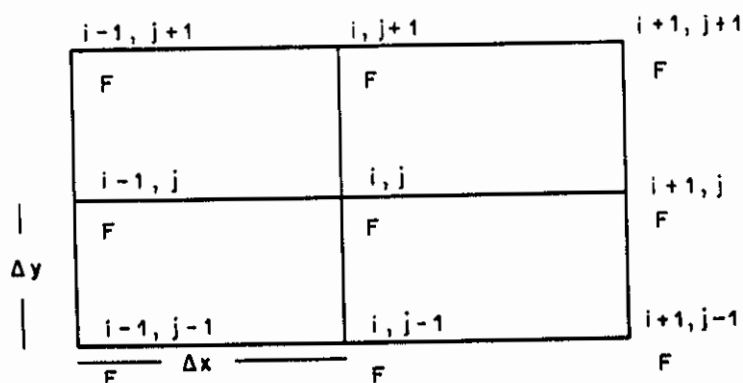


Fig. 4.1 - Representação da grade A de Arakawa, onde F representa as variáveis usadas no modelo.

O espaçamento da grade é 37000m tanto para  $\Delta x$  quanto para  $\Delta y$ . O passo de integração é  $\Delta t = 1800s$ , o modelo opera em 24 direções com espaçamento de  $15^\circ$  e 13 períodos ( $T=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 20$  e  $25s$ ). Como condições de contorno considera-se que a energia é zero na costa; no oceano aberto considerou-se como condição de contorno, para o termo de advecção, que os pontos fora da grade possuem o mesmo valor da energia da fronteira; para o termo de *shoaling* foi utilizado o esquema *upstream*.

#### 4.2 TERMO DE ADVECÇÃO DE ENERGIA E SHOALING

A taxa de variação local de energia devida à advecção e *shoaling* pode ser obtida por:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (C_g E) = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Na integração da Equação 4.1 foram testados os esquemas *leapfrog*; Lax-Wendroff modificado por Gadd (1978); *upstream*; o esquema de Smolarkiewicz (1983) que é um *upstream* com pouca difusão implícita; além do esquema



semilagrangiano para um escoamento bidimensional com interpolação biquadrática, usado por Bates e Macdonalds (1982). Neste capítulo será mostrada apenas a descrição do esquema semilagrangiano. Os outros esquemas e uma comparação entre eles encontra-se no Apêndice C.

O esquema semilagrangiano difere dos outros esquemas de diferenças finitas convencionais por usar uma derivada total para calcular as mudanças na variável de uma parcela, enquanto os outros usam a derivada parcial para obter as mudanças em um ponto de grade.

Para a integração da Equação 4.1 utilizando o esquema semilagrangiano, deve-se expandi-la como se segue:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{c_g} \cdot \underline{\nabla} E + E \underline{\nabla} \cdot \underline{c_g} = 0 \quad , \quad (4.2)$$

onde:

$\underline{c_g} \cdot \underline{\nabla} E$  = termo de advecção de energia;

$E \underline{\nabla} \cdot \underline{c_g}$  = termo de *shoaling*.

a) Termo de advecção.

Para que seja calculada a energia devida apenas ao termo de advecção utilizando o esquema semilagrangiano, deve-se considerar a Equação 4.2 como se segue:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad . \quad (4.3)$$

A Figura 4.2 ilustra o esquema usado, onde um escoamento constante com componentes  $(u,v)$  (positivo na figura) advecta uma partícula de seu ponto de partida  $(x_*, y_*)$  no instante  $n\Delta t$  para seu ponto de chegada P no instante  $(n+1)\Delta t$ . Considera-se  $(p,q)$  como distâncias em intervalos de grade entre o ponto de partida e o ponto de chegada ( $p>0$  e  $q>0$  na figura), nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. O ponto de grade mais próximo do ponto de partida é escolhido como o centro de nove pontos, utilizados para a interpolação biquadrática.

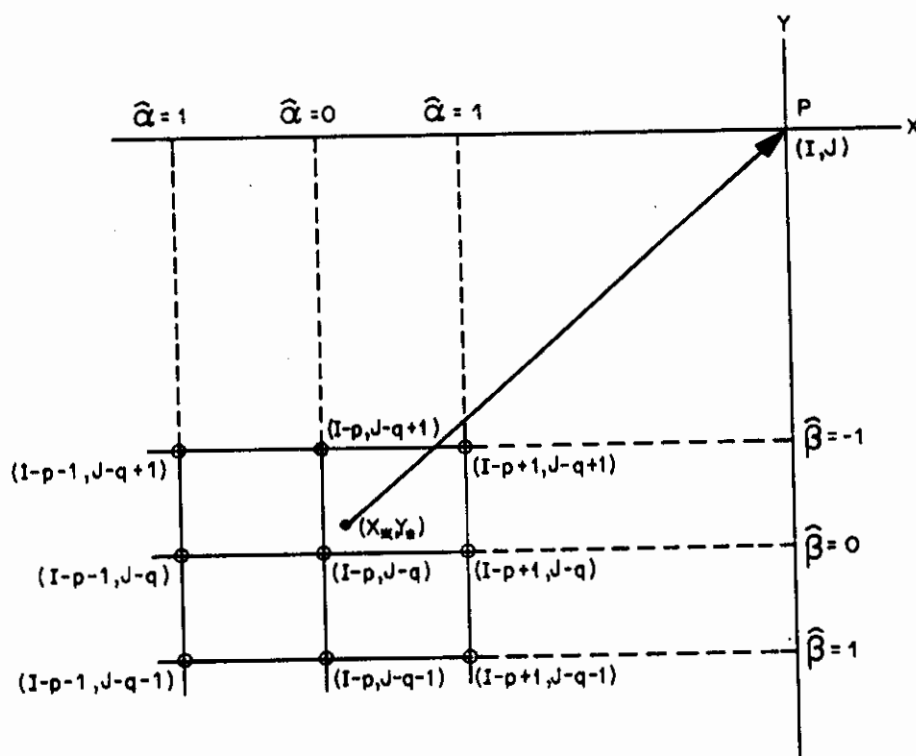


Fig. 4.2 - Os nove pontos utilizados na obtenção de  $E_*^{n+1}$  por interpolação biquadrática.

FONTE: Bates e Macdonald (1982), p. 1835.

Através da interpolação deve-se obter o valor da energia no ponto  $(x_*, y_*)$  que deve ser o mesmo valor do ponto P no tempo  $(n+1)\Delta t$ , considerando que haja conservação da energia total no termo de advecção.

Considerando a Equação 4.3 em duas dimensões, que se integram sobre a trajetória da partícula pode-se escrever:

$$E^{n+1}(P) = E_*^n, \quad (4.4)$$

onde  $E_*^n$  é a energia no ponto  $(x_*, y_*)$ , no instante  $n\Delta t$  que deve ser a mesma que  $E$  no ponto  $P$  no instante  $(n+1)\Delta t$ . O valor de  $E_*^n$  é obtido através da interpolação lagrangiana biquadrática entre os nove pontos vizinhos a ele. A interpolação utilizada é a lagrangiana dada como em Carnahan et al. (1969):

$$E^n(x, y) = \sum_{i=-1}^{i=1} \sum_{j=-1}^{j=1} L_{i,j} E_{i,j}^n, \quad (4.5)$$

onde, para o caso bidimensional:

$$L_{i,j} = \prod_{\substack{k=-1 \\ k \neq i}}^{k=1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \prod_{\substack{l=-1 \\ l \neq j}}^{l=1} \frac{(y - y_l)}{(y_j - y_l)}. \quad (4.6)$$

Usando as Equações 4.5 e 4.6 e considerando uma interpolação biquadrática, obtém-se para a Equação 4.4:

$$\begin{aligned} E_{I,J}^{n+1} = & 0,25 \hat{\gamma} (1+\hat{\gamma}) \hat{\lambda} (1+\hat{\lambda}) E_{I-p-1, J-q-1}^n + 0,5 (1-\hat{\gamma}^2) \\ & \times \hat{\lambda} (1+\hat{\lambda}) E_{I-p, J-q-1}^n - 0,25 \hat{\gamma} (1-\hat{\gamma}) \hat{\lambda} (1+\hat{\lambda}) \\ & \times E_{I-p+1, J-q-1}^n + 0,5 \hat{\gamma} (1+\hat{\gamma}) (1-\hat{\lambda}^2) E_{I-p-1, J-q}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times E_{I-p+1, J-q}^n - 0,25 \hat{\gamma} (1+\hat{\gamma}) \hat{\lambda} (1-\hat{\lambda}) E_{I-p-1, J-q+1}^n \\
& - 0,5 (1-\hat{\gamma}^2) \hat{\lambda} (1-\hat{\lambda}) E_{I-p, J-q+1}^n \\
& + 0,25 \hat{\gamma} (1-\hat{\gamma}) \hat{\lambda} (1-\hat{\lambda}) E_{I-p+1, J-q+1}^n , \quad (4.7)
\end{aligned}$$

onde, para uma direção arbitrária:

$$\hat{\gamma} = \gamma - p , \quad \gamma = c_g \cos(\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} , \quad (4.8a)$$

e

$$\hat{\lambda} = \lambda - q , \quad \lambda = c_g \sin(\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} . \quad (4.8b)$$

Sendo total a energia obtida no ponto P através deste esquema numérico, deve-se subtrair desta a energia existente no passo anterior à integração para que se obtenha a variação de energia no ponto devida apenas ao termo de advecção.

Em regiões de água rasa, onde  $c_g$  é função da profundidade, a localização do ponto  $(x_*, y_*)$  encontrada através do método proposto acima pode ser diferente da localização real. No Apêndice D é proposta uma maneira de encontrar uma posição mais correta do ponto. Considera-se aqui que a diferença na localização do ponto utilizando um método ou outro não seja muito significativa, além do que, o método proposto no Apêndice D acarretaria maior tempo de processamento.

b) Termo de *shoaling*.

O termo de *shoaling* fornecido por:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - E \nabla \cdot \underline{C_g} \quad , \quad (4.9)$$

ao longo de uma direção arbitrária  $\theta$  é:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - E \left( \frac{\partial C_g}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial C_g}{\partial y} \sin(\theta) \right) \quad , \quad (4.10)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção de propagação e o eixo x, crescente no sentido horário.

Para a integração da Equação 4.10, utilizou-se o seguinte esquema:

$$\frac{E_1^{n+1} - E_1^n}{\Delta t} = - E_1^n \frac{(C_{g_{1+1}} - C_{g_{1-1}})}{2\Delta x} \cos(\theta) \quad , \quad (4.11a)$$

$$\frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} = - E_j^n \frac{(C_{g_{j+1}} - C_{g_{j-1}})}{2\Delta y} \sin(\theta) \quad . \quad (4.11b)$$

Para que o termo de *shoaling* não produza energia negativa assumiu-se como critério, considerando apenas a componente x:

$$\frac{\Delta C_g}{\Delta x} \cos(\theta) \Delta t \leq 1 \quad . \quad (4.12)$$

Nas fronteiras utilizou-se o esquema *upstream*, como descrito em Pielke (1984):

$$\frac{E_1^{n+1} - E_1^n}{\Delta t} = \begin{cases} - E_1^n \frac{(C_{g_{1+1}}^n - C_{g_1}^n)}{\Delta x} \cos(\theta), & C_g \cos(\theta) \leq 0 \\ 0, & C_g \cos(\theta) > 0 \end{cases} \quad (4.13a)$$

para a fronteira à esquerda do domínio, e

$$\frac{E_1^{n+1} - E_1^n}{\Delta t} = \begin{cases} - E_1^n \frac{(C_{g_1}^n - C_{g_{1-1}}^n)}{\Delta y} \cos(\theta), & C_g \cos(\theta) > 0 \\ 0, & C_g \cos(\theta) \leq 0 \end{cases} \quad (4.13b)$$

para a fronteira à direita do domínio. A componente na direção  $y$  é obtida de maneira análoga.

#### 4.3 TERMO DE REFRAÇÃO

A taxa de variação local de energia devida à refração em uma direção fixa é obtida por:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\theta} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (C_g \cdot \nabla \theta) E \right] . \quad (4.14)$$

Considerando-se lei de Snell:

$$\frac{\partial}{\partial s} (k \sin \alpha) = 0 , \quad (4.15)$$

onde:

$s$  é o ray path, ortogonais;

$k$  é o número de onda;

$\alpha$  é o ângulo entre  $s$  e o gradiente de profundidade.

A Equação 4.15 pode ser expandida em:

$$k \frac{\partial \text{sen} \alpha}{\partial s} + \text{sen} \alpha \frac{\partial k}{\partial s} = 0 \quad . \quad (4.16)$$

A Figura 4.3 ilustra o esquema utilizado para a obtenção do termo de refração. Na Figura 4.3a o gradiente de profundidade  $\nabla H$  é perpendicular à costa, e  $\alpha$  é o ângulo entre  $\nabla H$  e a ortogonal. A Figura 4.3b é o mesmo caso da Figura 4.3a, considerando-se o plano cartesiano, onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção  $x$  e a ortogonal  $s$  (direção de propagação de energia) e  $\underline{u}$  é o versor ao longo de  $s$ .

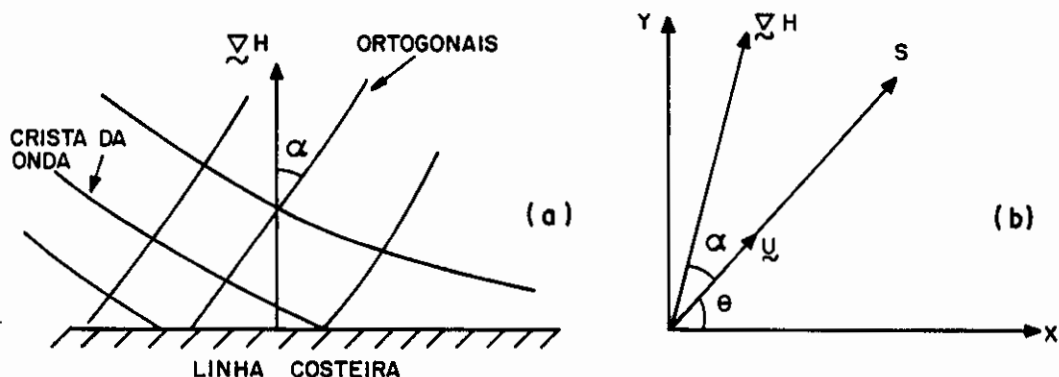


Fig. 4.3 - Esquema usado para a obtenção do termo de refração.

Considerando  $\underline{u}$  como se segue :

$$\underline{u} = (\cos \theta, \text{sen} \theta) \quad , \quad (4.17)$$

e visto que:

$$\vec{\nabla}H = \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right), \quad (4.18)$$

obtém-se, então:

$$|\vec{\nabla}H \wedge \vec{u}| = \frac{\partial H}{\partial x} \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial H}{\partial y} \cos\theta = |\vec{\nabla}H| \operatorname{sen}\alpha; \quad (4.19)$$

portanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left( \frac{\partial H}{\partial x} \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial H}{\partial y} \cos\theta \right)}{|\vec{\nabla}H|}. \quad (4.20)$$

Substituindo a Equação 4.20 na Equação 4.16 e fazendo a derivada do primeiro termo em relação a  $s$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & k \frac{\partial \theta}{\partial s} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial H}{\partial y} \operatorname{sen}\theta \right) \\ & + \frac{\partial k}{\partial s} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial H}{\partial y} \cos\theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Rearranjando os termos da Equação 4.21, obtém-se:



$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = - \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial H}{\partial x} \operatorname{sen} \theta - \frac{\partial H}{\partial y} \cos \theta \\ \frac{\partial H}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial H}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \end{array} \right\} \left( \begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} \frac{\partial k}{\partial s} \right) . \quad (4.22)$$

Através da equação da relação de dispersão para uma frequência constante (ver Apêndice E), chega-se a:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = - \left[ \frac{k^2 \operatorname{sech}^2(kH)}{\operatorname{tgh}(kH) + kH \operatorname{sech}^2(kH)} \right] \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right) . \quad (4.23)$$

Considerando que  $\underline{c}_g$  possui a mesma direção de  $s$ , pode-se utilizar a seguinte expressão:

$$\underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta = |\underline{c}_g| \frac{\partial \theta}{\partial s} . \quad (4.24)$$

Substituindo a Equação 4.23 na Equação 4.22 e considerando a Equação 4.24, obtém-se:

$$\underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta = - \frac{|\underline{c}_g|}{k} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \operatorname{sen} \theta - \frac{\partial H}{\partial y} \cos \theta \right) A(k, H) , \quad (4.25)$$

onde:

$$A(k, H) = - \frac{k^2 \operatorname{sech}^2(kH)}{\operatorname{tgh}(kH) + kH \operatorname{sech}^2(kH)} , \quad (4.26)$$

pois

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \nabla H \cdot \vec{u} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial H}{\partial y} \sin\theta \quad . \quad (4.27)$$

O fator entre parênteses na Equação 4.25 é calculado usando diferenças centradas para as derivadas em H. Nas fronteiras, este fator é obtido através de diferenças avançadas para as fronteiras à esquerda do domínio e atrasadas para as fronteiras à direita. Os outros fatores são calculados como uma função de H para cada frequência utilizada no modelo.

Analisando a Equação 4.26, nota-se que o fator  $A(k,H)$  é sempre menor que zero, motivo pelo qual, através das Equações 4.20 e 4.25, obtém-se que:

$$c_g \cdot \nabla\theta \propto |\nabla H| \sin\alpha \quad , \quad (4.28)$$

portanto,  $c_g \cdot \nabla\theta$  deve ter o mesmo sinal do  $\sin\alpha$ .

A Figura 4.4 ilustra um oceano com o gradiente de profundidade  $\nabla H$ ; a seta tracejada indica a ortogonal. Obtém-se, de acordo com a Equação 4.28, que  $c_g \cdot \nabla\theta > 0$  do lado esquerdo de  $\nabla H$  e que  $c_g \cdot \nabla\theta < 0$  do lado direito de  $\nabla H$ .

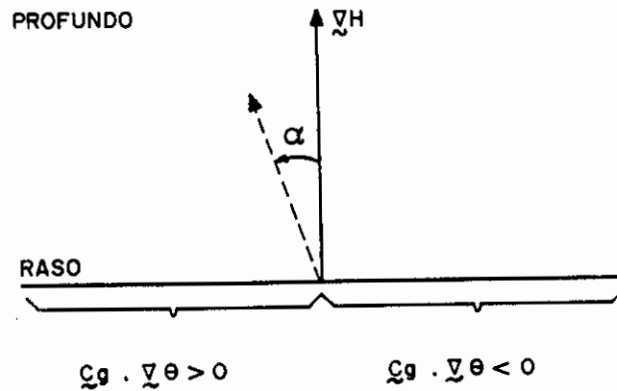


Fig. 4.4 - Representação gráfica do oceano com o gradiente de profundidade.

Se uma onda se propaga em regiões em que a velocidade de grupo  $c_g$  torna-se função da profundidade, pode ocorrer uma mudança de direção preferencial de propagação de energia devida ao efeito de refração. Em tal situação, ondas que se propagam em uma certa direção contribuem com energia para outras direções, fazendo com que ocorra esta mudança na direção preferencial. A Figura 4.5 mostra uma visualização gráfica de como ocorre a contribuição de energia de uma direção para outra, no caso da situação da Figura 4.4. As setas cheias indicam a direção considerada ( $\theta$ ); as setas tracejadas indicam as direções que deverão contribuir com energia para a direção  $\theta$  devida ao efeito de refração. A diferença no tamanho das setas indica diferenças de quantidade de energia em cada direção. A direção  $\theta - \Delta\theta$  refere-se à direção à direita de  $\theta$ , e  $\theta + \Delta\theta$  refere-se à direção à esquerda de  $\theta$ . Quando a direção  $\theta$  encontra-se à direita de  $\nabla H$ , a contribuição deve ser da direção  $\theta + \Delta\theta$ ; caso contrário, deve ser de  $\theta - \Delta\theta$ . Para o primeiro caso da Figura 4.5, obtém-se que a taxa de variação local de energia é menor do que zero, pois a contribuição de energia da direção  $\theta - \Delta\theta$  para  $\theta$  é menor do

que a energia que está saindo desta direção; no caso seguinte, ocorre a situação contrária. Os outros casos devem ser analisados da mesma maneira. Quando a direção  $\theta$  encontra-se paralela e no mesmo sentido de  $\vec{V}_H$  (parte inferior da figura, ao centro), esta não deve receber nem contribuir para nenhuma outra direção. Para a situação em que  $\theta$  encontra-se paralela, mas com sentido contrário à  $\vec{V}_H$  (parte inferior da figura, nas extremidades), esta deve receber contribuição das outras direções, mas não deve contribuir com energia para nenhuma direção.

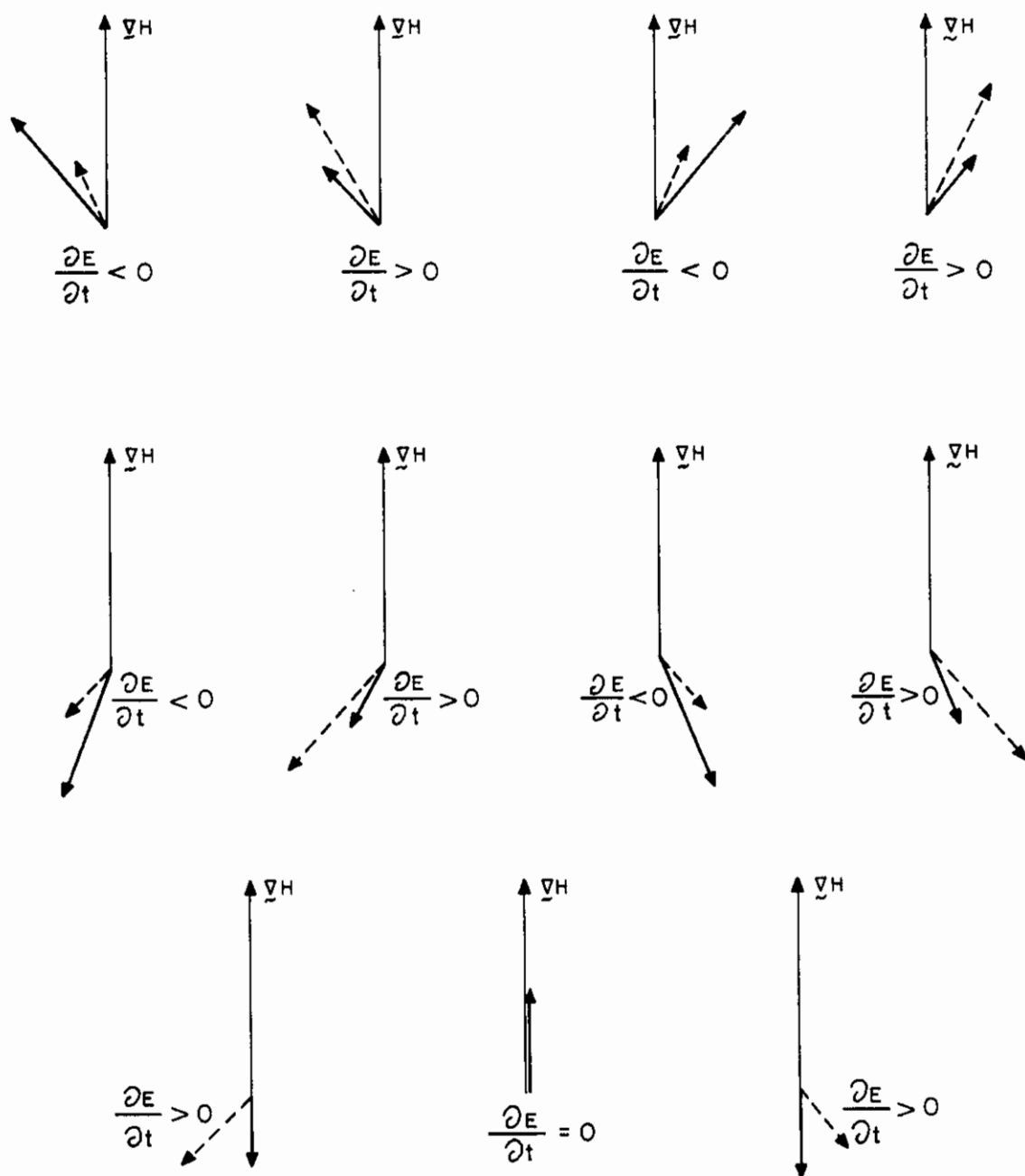


Fig. 4.5 - Visualização gráfica da taxa de variação local de energia devida à refração.

Baseando-se na Figura 4.5, o termo completo de refração, expresso em forma de fluxo, é calculado utilizando uma diferença *upstream* na direção  $\theta$ . A direção do *upstream* é determinado pelo sinal de  $\underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta$ .

Considerando:

$$\left[ \Delta E \right]_{\theta} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta \right) E \right] \Delta t \quad , \quad (4.29)$$

o termo completo de refração torna-se:

$$\begin{aligned} \left[ \Delta E \right]_{\theta} = & \left\{ \left[ \max \left( \begin{array}{c} \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta \\ 0 \end{array} \right) E \right]_{\theta - \Delta \theta} B - \left[ \min \left( \begin{array}{c} \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta \\ 0 \end{array} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times E \right]_{\theta + \Delta \theta} B - \left[ \left( \left| \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} \theta \right| \right) E \right]_{\theta} \right\} \frac{\Delta t}{\Delta \theta} \quad . \quad (4.30) \end{aligned}$$

O fator B da Equação 4.30 representa os efeitos de convergência e divergência de energia devido aos efeitos de aproximação ou separação das ortogonais; considera-se B como:

$$B = \begin{cases} 2 - \cos(\Delta \theta) & \text{para } \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} H > 0 \\ \cos(\Delta \theta) & \text{para } \underline{c}_g \cdot \underline{\nabla} H \leq 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Para que seja preservada a estabilidade do termo de refração, considera-se o limite:

$$|\underline{c}_g \cdot \underline{\nabla}\theta| \leq \frac{\Delta\theta}{\Delta t} . \quad (4.32)$$

Um experimento numérico que considera apenas o efeito do termo de refração para um fundo inclinado, onde  $\underline{V}H$  encontra-se na direção  $\theta=90^\circ$ , é mostrado na Figura 4.6. Os resultados obtidos referem-se a apenas um ponto de grade e para o período  $T=25s$ . A Figura 4.6a mostra o instante inicial ( $t=0s$ ), onde a energia é distribuída de uma maneira uniforme em todas as direções. As Figuras 4.6b,c mostram a distribuição de energia nos instantes  $t=2h$  e  $4h$ , respectivamente. Pode-se notar que na direção  $\theta=270^\circ$  (paralela e com sentido contrário ao  $\underline{V}H$ ) há um acúmulo de energia, e na direção  $\theta=90^\circ$  (paralelo e no mesmo sentido de  $\underline{V}H$ ) não há mudança na quantidade de energia com o passar do tempo. Os resultados obtidos na Figura 4.6 são compatíveis com a representação gráfica ilustrada na Figura 4.5.

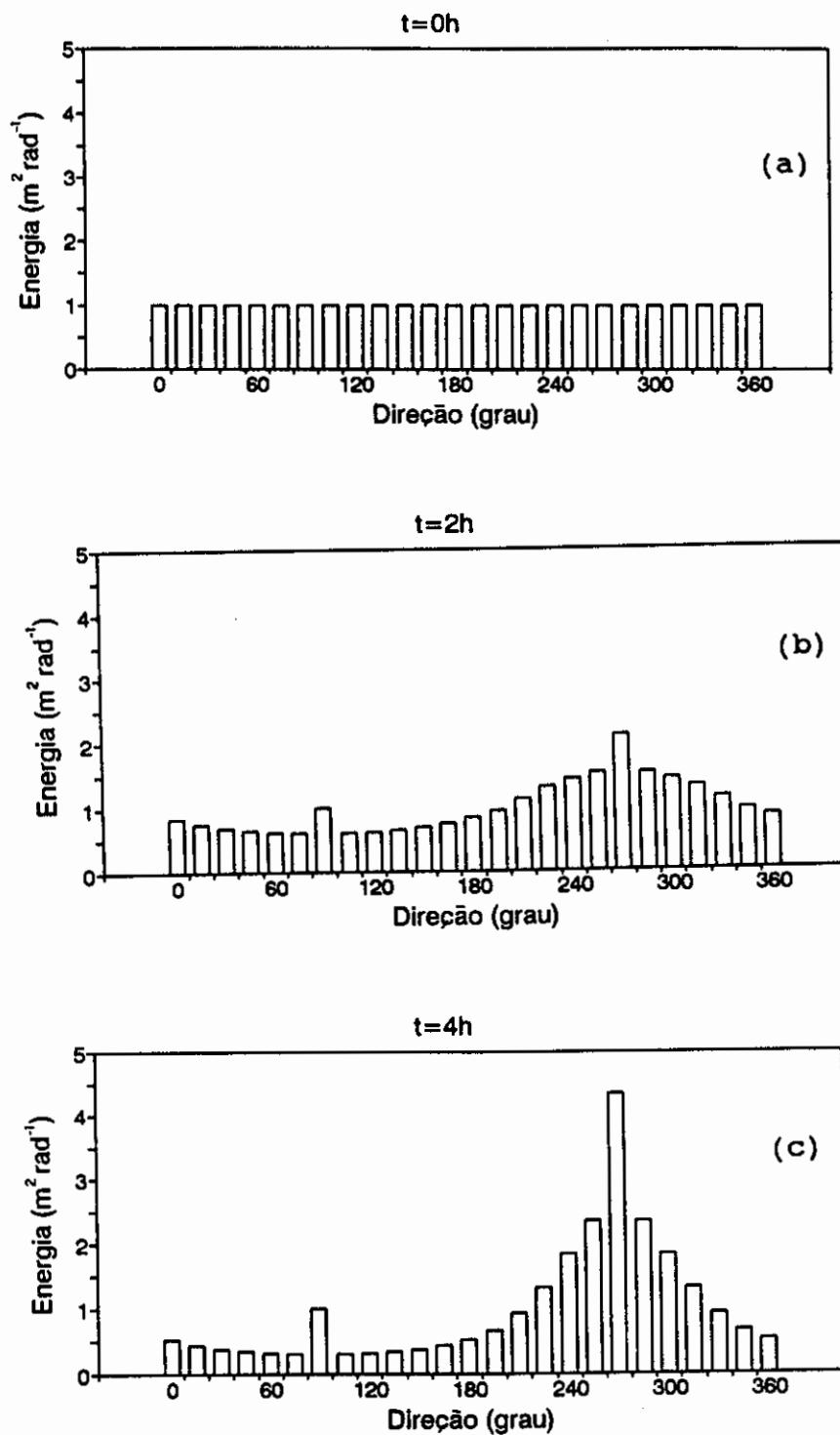
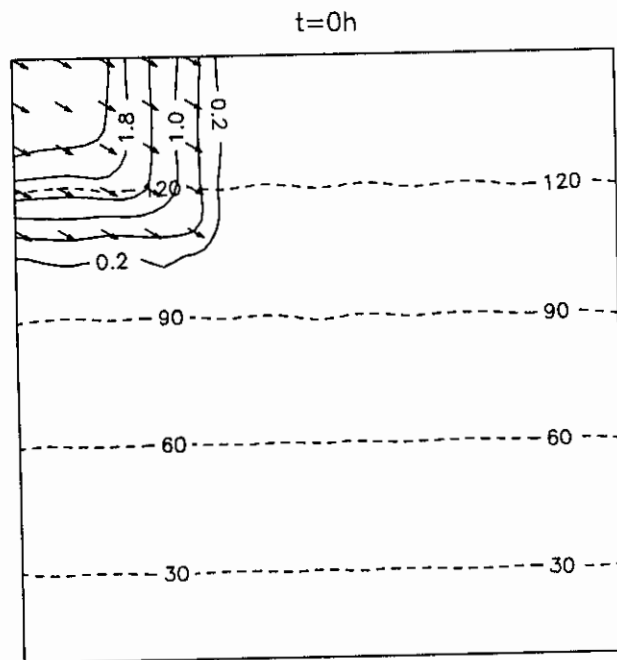


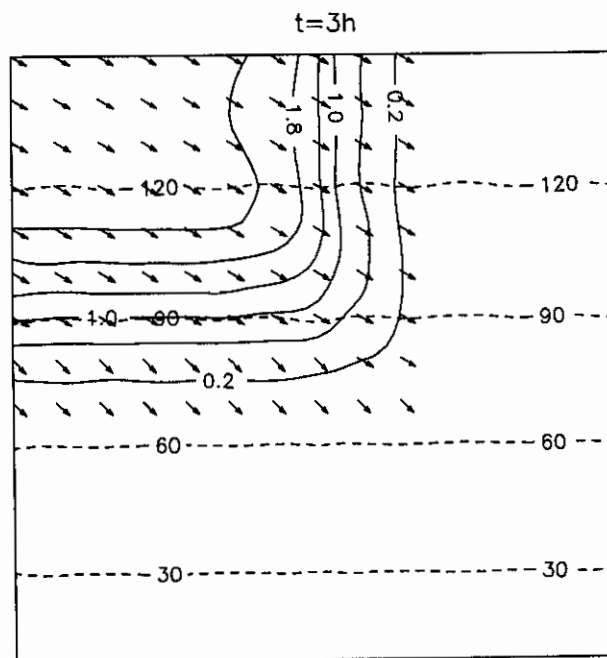
Fig. 4.6 - Efeito do termo de refração em um ponto de grade para os instantes  $t = 0h$ ,  $2h$  e  $4h$ .



Um experimento numérico onde são incluídos os efeitos de advecção, refração de energia e *shoaling*, considerando apenas o período  $T=25s$  e 24 direções com  $\Delta\theta=15^\circ$ , é mostrado nas Figuras 4.7 e 4.8. A Figura 4.7a representa um trem de onda (energia) no instante inicial ( $t=0h$ ), propagando-se sobre um fundo idealizado (linhas tracejadas), levemente inclinado. As setas indicam direções preferenciais de propagação de energia. Os instantes  $t=3h$ ,  $6h$ , e  $9h$  são mostrados nas Figuras 4.7b,c,d, respectivamente. Pode-se notar a mudança de direção de propagação de energia, que tende a ficar perpendicular à praia (considerando as batimétricas paralelas à praia); portanto, a onda deve tender a ficar paralela à praia. Nota-se, ainda, uma concentração de isolinhas de energia nas regiões rasas, próximas à praia, devida ao efeito de *shoaling*, que pode com o tempo provocar o aumento na altura das ondas. A Figura 4.8a mostra um trem de ondas, no instante inicial ( $t=0h$ ), propagando-se sobre uma região de fundo parabólico (linhas tracejadas). As setas indicam direções preferenciais de propagação de energia. As Figuras 4.8b,c,d mostram o trem de onda nos instantes  $t=2h$ ,  $4h$  e  $6h$ , respectivamente. Pode-se observar através das figuras a mudança de direção de propagação de energia, devida à refração sobre o fundo parabólico. Pode-se notar na Figura 4.8d uma tendência de concentração de energia sobre a região de maior elevação (menor profundidade) devida à redução da velocidade de grupo com a diminuição da profundidade, efeito do *shoaling*. Este efeito faz com que a energia advectada de regiões profundas para regiões rasas provoque nestas um acúmulo de energia.



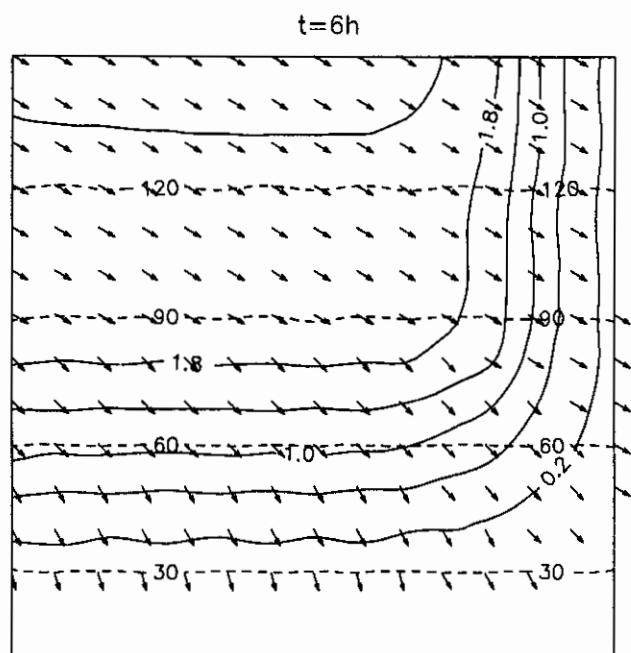
(a)



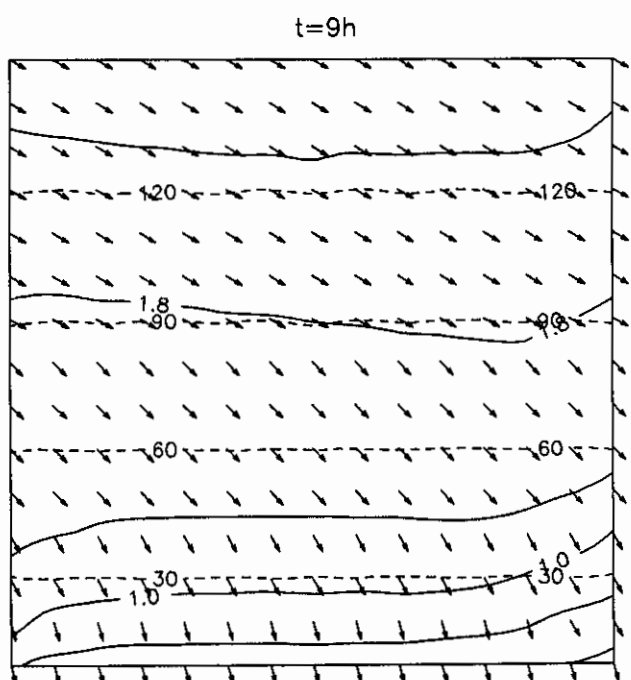
(b)

Fig. 4.7 - Isolinhas de energia ( $m^2$ ) e direções preferenciais de propagação de energia para um trem de ondas propagando-se sobre um fundo inclinado.

(continua)



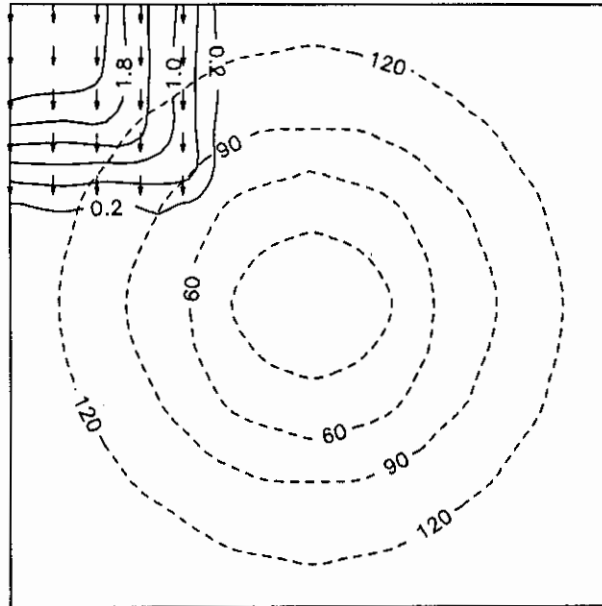
(c)



(d)

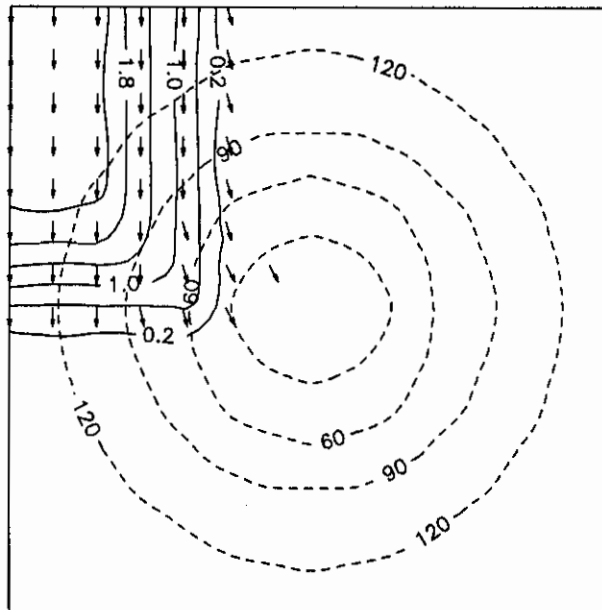
Fig. 4.7 - Conclusão.

t=0h



(a)

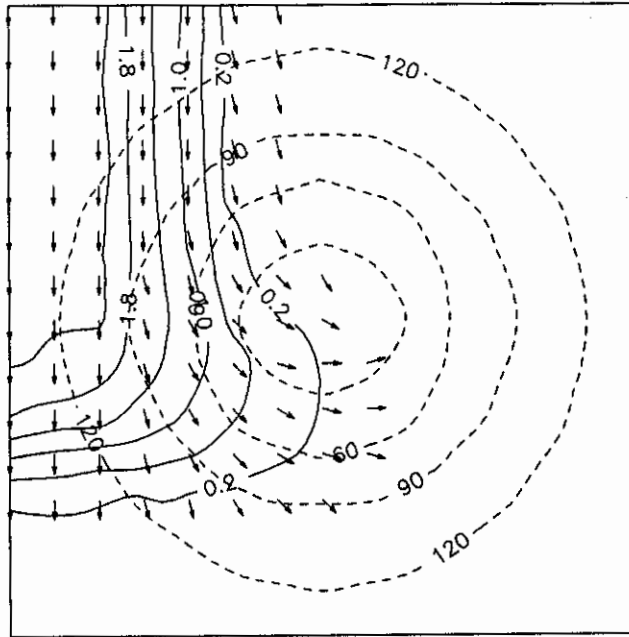
t=2h



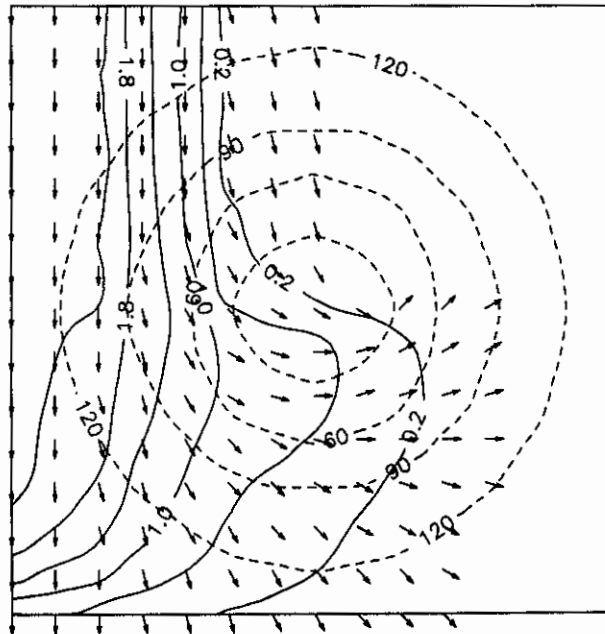
(b)

Fig. 4.8 - Isolinhas de energia ( $m^2$ ) e direções preferenciais de propagação de energia para um trem de ondas propagando-se sobre um fundo parabólico.

(continua)

$t=4h$ 

(c)

 $t=6h$ 

(d)

Fig. 4.8 - Conclusão.

#### 4.4 TERMO DE INTERAÇÕES NÃO-LINEARES

A taxa de variação local de energia devida às interações não-lineares é:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = S_{nl} \quad . \quad (4.33)$$

A redistribuição de energia no espectro de onda devida às interações não-lineares conservativas foi obtida através do espectro de Kruseman (1976, citado por Janssen et al., 1984). Optou-se por este espectro por ser sua forma analítica bastante simples; segundo Janssen et al. (1984), o ajuste do espectro de vagas utilizando tanto o espectro de JONSWAP quanto o de Kruseman difere somente marginalmente. Não é possível concluir se um espectro é superior ao outro devido a erros aleatórios nas medidas. O espectro usado é:

$$\bar{E}_w^0 = \begin{cases} 0 & f < f_{min} \\ \frac{\hat{\alpha} g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f_p^5} \frac{f - f_{min}}{f_p - f_{min}} & f_{min} < f < f_p \\ \frac{\hat{\alpha} g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f^5} & f > f_p \end{cases} , \quad (4.34)$$

onde  $f_{min}$  é a frequência mínima,  $f_p$  é a frequência de pico e  $g$  é a aceleração da gravidade.

O parâmetro  $\hat{\alpha}$  (parâmetro que determina o estágio de desenvolvimento do espectro) utilizado é o mesmo obtido empiricamente por Sanders et al. (1981, citado por Janssen et al., 1984):

$$\hat{\alpha} = 4,93 \times 10^{-3} \xi^{-1,944} , \quad (4.35)$$

sendo:

$$\xi = \left( \frac{\bar{E}_w}{\bar{E}_{max}} \right)^{0,25} \quad 0 \leq \xi \leq 1 , \quad (4.36)$$

onde  $\bar{E}_w$  é a energia total das vagas por unidade de área obtida analiticamente através da integração da Equação 4.34, como se segue:

$$\bar{E}_w = \int_{f_{min}}^{\infty} E_w df d\theta = \frac{\hat{\alpha} g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{4 f_p^4} (3 - 2\mu) , \quad (4.37)$$

$$\text{sendo } \mu = \frac{f_{min}}{f_p} ,$$

e  $\bar{E}_{max}$  é a energia total máxima das vagas por unidade de área para uma determinada velocidade de vento  $U$  em 10m de altura.  $\bar{E}_{max}$  é a energia que o oceano possui quando atinge o estágio completamente desenvolvido, fornecida por:

$$\bar{E}_{max} = \left( \frac{\beta U^2}{4 g} \right) , \quad (4.38)$$

onde o fator  $\beta$  é uma constante utilizada para determinar a energia total máxima do espectro. Sanders (1976) obteve, utilizando dados de JONSWAP, que a constante  $\beta$  varia dependendo da estação do ano. Os valores de  $\beta$  encontrados foram  $\beta = 0,22$  no inverno e  $\beta = 0,14$  no verão. Esta

diferença ocorre, segundo ele, devido à transferência de energia do vento para o sistema água-onda ser menos eficiente no verão do que no inverno. Esta afirmação pode estar associada a uma maior estabilidade da coluna de água no verão causada pelo aquecimento das camadas superiores do oceano. Devido à falta de dados de onda e de vento no oceano, considerou-se  $\beta = 0,22$ .

Os valores de  $\bar{E}_w$  e frequência de pico  $f_p$  dependem do estágio de desenvolvimento, Sanders et al. (1981, citado por Janssen et al., 1984) determinaram empiricamente:

$$f_p = \frac{g}{U} \frac{6,89 \times 10^{-2}}{\sqrt{\beta} \xi^{-1,976}} \quad (4.39)$$

O espalhamento angular é obtido seguindo Janssen et al. (1984):

$$E_{\text{esp}} = \frac{2}{\pi} \cos^2(\theta - \phi) \bar{E}_w^0 \quad |\theta - \phi| < \frac{\pi}{2}, \quad (4.40)$$

onde  $\phi = \phi(x, y, t)$  é a direção do vento, e  $\bar{E}_w^0$  é o espectro de Kruseman obtido através da Equação 4.34.

Para que a redistribuição de energia no espectro de ondas seja obtida, devem-se conhecer os valores de  $\hat{\alpha}$ ,  $\xi$  e  $f_p$ . Estes valores são encontrados conhecendo o estágio de desenvolvimento em que se encontra o oceano. Se este estágio de desenvolvimento não for conhecido, considera-se algum nível de desenvolvimento, e, através de um processo iterativo, são obtidos os valores de  $\hat{\alpha}$ ,  $\xi$ ,  $f_p$ . A redistribuição é obtida através dos seguintes passos:



- a) considera-se  $\bar{E}_w = \bar{E}_{\max}$  como uma primeira suposição;
- b) calculam-se  $\hat{\alpha}$ ,  $\xi$  e  $f_p$  através das Equações 4.35, 4.36 e 4.39, respectivamente;
- c) calcula-se  $f_{\min}$  utilizando a Equação 4.37;
- d) calcula-se  $\bar{E}_w$  no domínio  $|\theta - \phi| < \pi/2$  e  $f_{\min} \leq f$ ;
- e) retorna-se a b) e repete-se o processo.

Através de experimentos, notou-se que o processo converge após 2 iterações; calcula-se então a distribuição no espectro de frequências através da Equação 4.34 e a distribuição angular utilizando a Equação 4.40.

A Figura 4.9 mostra o espectro obtido para as velocidades do vento  $U=10, 15$  e  $20\text{m/s}$ , considerando o oceano completamente desenvolvido. Pode-se observar que a  $f_p$  torna-se menor (período maior) à medida que a intensidade do vento aumenta. Observa-se ainda que em, um oceano completamente desenvolvido, um vento de  $15\text{m/s}$  deverá conter maior energia no período próximo a  $10\text{s}$ . Portanto, neste caso, se o oceano for decomposto em ondas senoidais, as ondas de período  $10\text{s}$  possuirão maiores amplitudes (pois a energia é proporcional ao quadrado da amplitude) do que as componentes de ondas com períodos diferentes deste.

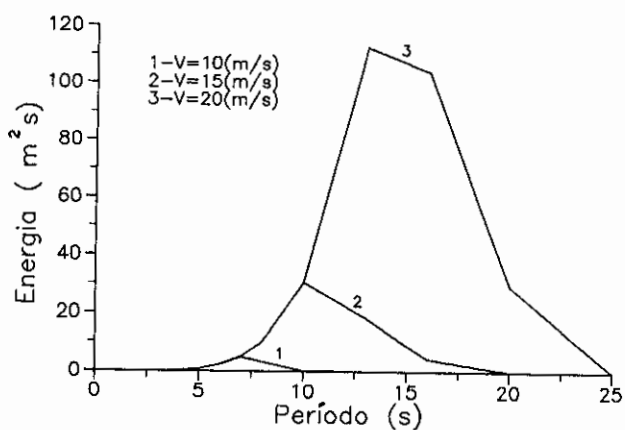


Fig. 4.9 - Espectro de onda para as intensidades de vento  $U=10, 15$  e  $20\text{m/s}$ , para um oceano completamente desenvolvido.

A Figura 4.10 mostra o espectro de ondas para os oceanos com energia  $\bar{E}_w = 0,25\bar{E}_{\max}$ ,  $0,50\bar{E}_{\max}$ ,  $0,75\bar{E}_{\max}$  e  $1,00\bar{E}_{\max}$  para um vento com intensidade  $10\text{m/s}$ . Pode-se notar a migração de energia através de interações não-lineares de alta para baixa frequência (pois  $f=1/T$ ) à medida que o oceano torna-se mais próximo do estágio completamente desenvolvido. A curva 4 da Figura 4.10 corresponde à curva 1 da Figura 4.9.

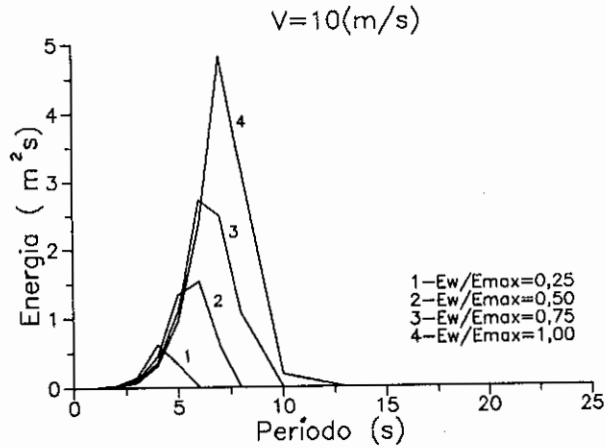


Fig. 4.10 - Espectro de ondas para o oceano com  $\bar{E}_w = 0,25\bar{E}_{max}$ ,  $\bar{E}_w = 0,50\bar{E}_{max}$ ,  $\bar{E}_w = 0,75\bar{E}_{max}$  e  $\bar{E}_w = 1,00\bar{E}_{max}$  para a intensidade de vento  $U=10\text{m/s}$ .

Um experimento que mostra a distribuição espectral direcional de energia das vagas para  $U=10\text{m/s}$ , através da Equação 4.40, é apresentado na Figura 4.11. No instante inicial,  $t=0\text{h}$ , o oceano encontra-se completamente desenvolvido sob a influência do vento de direção  $\phi=90^\circ$ ; ainda em  $t=0\text{h}$ , ocorre uma mudança na direção do vento  $\phi=90^\circ$  para uma nova direção  $\bar{\phi}=150^\circ$ . As distribuições de energia para os instantes  $t=1\text{h}$ ,  $2\text{h}$  e  $3\text{h}$  foram obtidas considerando que toda a energia contida no intervalo  $|\theta-\bar{\phi}| < \pi/2$  tenha sido redistribuída através da função  $\cos^2(\theta-\bar{\phi})$ . Pode-se observar que ocorre uma mudança brusca entre a quantidade de energia nas direções do espectro de vagas e ondulações; esta configuração é a mesma encontrada na parametrização de Golding (1983) em situações de mudanças bruscas da direção do vento.

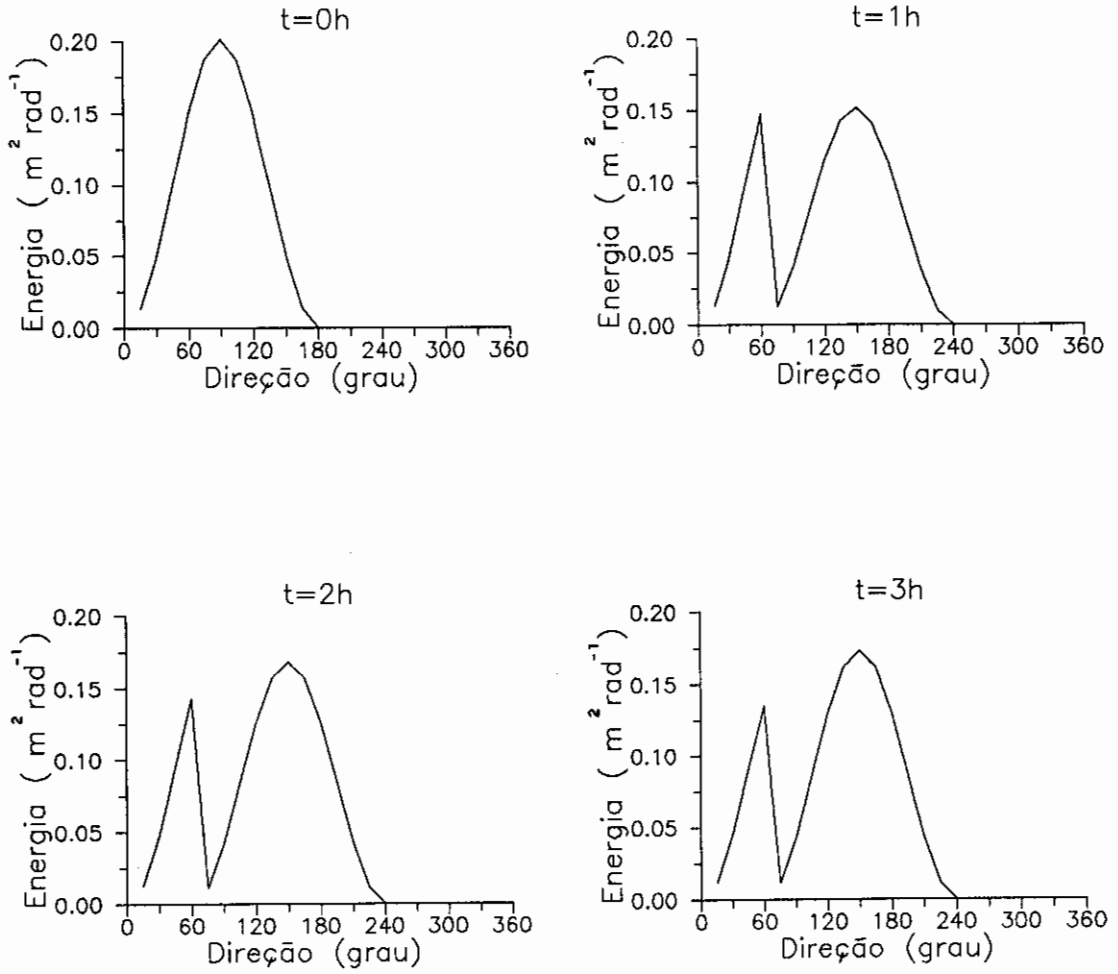
$V=10\text{m/s}$ 


Fig. 4.11 - Distribuição espectral direcional de energia das vagas através da Equação 4.40 para  $U=10\text{m/s}$ , considerando a mudança da direção do vento de  $\phi = 90^\circ$  para  $\bar{\phi} = 150^\circ$ .

Para que não ocorra esta mudança abrupta entre os espectros de vagas e ondulações, considera-se que, após a mudança da direção do vento, parte da energia contida no novo espectro de vagas deve permanecer retida no espectro de ondulações. Isto é feito admitindo as seguintes propriedades:

$$\bar{E}_{\text{nov}}^f = \bar{E}_{\text{ret}}^f + \bar{E}_{\text{esp}}^f ;$$

$$\bar{E}_{\text{ret}}^f \text{ é proporcional a } |\text{sen}(\theta - \bar{\phi})| ;$$

$$\bar{E}_{\text{ret}}^f \text{ é proporcional a } \bar{E}_{\text{ant}}^f - \bar{E}_{\text{esp}}^f ;$$

$$\text{se } \bar{E}_{\text{esp}}^f > \bar{E}_{\text{ant}}^f \text{ nenhuma energia é retida ;}$$

$$\text{se } \bar{E}_{\text{esp}}^f < \bar{E}_{\text{ant}}^f \text{ então } \bar{E}_{\text{nov}}^f < \bar{E}_{\text{esp}}^f ;$$

onde  $\bar{E}_{\text{nov}}^f$  é espalhamento angular, de acordo com a nova direção do vento;  $\bar{E}_{\text{ant}}^f$  é a energia anterior à compilação da interação não-linear;  $\bar{E}_{\text{ret}}^f$  é a energia retida na direção anterior à mudança do vento;  $\bar{E}_{\text{esp}}^f$  é a energia espalhada na nova direção.

Um espalhamento angular que satisfaz as propriedades acima é:

$$\bar{E}^{f*} = \bar{E}_{\text{esp}}^f , \quad (4.41a)$$

caso  $\bar{E}_{\text{ant}}^f - \bar{E}_{\text{esp}}^f < 0$ , ou ainda:

$$\bar{E}^{f*} = \bar{E}_{\text{esp}}^f + \left( \bar{E}_{\text{ant}}^f - \bar{E}_{\text{esp}}^f \right) |\text{sen}(\theta - \bar{\phi})| \quad (4.41b)$$

para  $\bar{E}_{\text{ant}}^f - \bar{E}_{\text{esp}}^f \geq 0$ .

Para que haja conservação de energia das vagas deve-se corrigir  $\bar{E}^{f*}$  como se segue:

$$\bar{E}_{\text{nov}}^f = \frac{\bar{E}^{f*} \times \bar{E}_w}{\bar{E}^*} . \quad (4.42)$$

Encontra-se então a nova energia total das vagas por unidade de área, de componente de frequência e de direção, através de:

$$E_{\text{nov}} = \frac{\bar{E}_w^0 \times \bar{E}_{\text{nov}}^f}{\bar{E}_w} . \quad (4.43)$$

O mesmo experimento numérico apresentado na Figura 4.11 é mostrado na Figura 4.12, onde a distribuição espectral das vagas é obtida através das Equações 4.40 e 4.41. Pode-se observar maior suavidade da curva na interface ondulação-vagas do que a encontrada na Figura 4.11. A diferença entre as duas formulações ocorre, principalmente, nos instantes próximos ao da mudança da direção do vento. Com o passar do tempo, no entanto, os dois espectros tornam-se próximos um do outro.

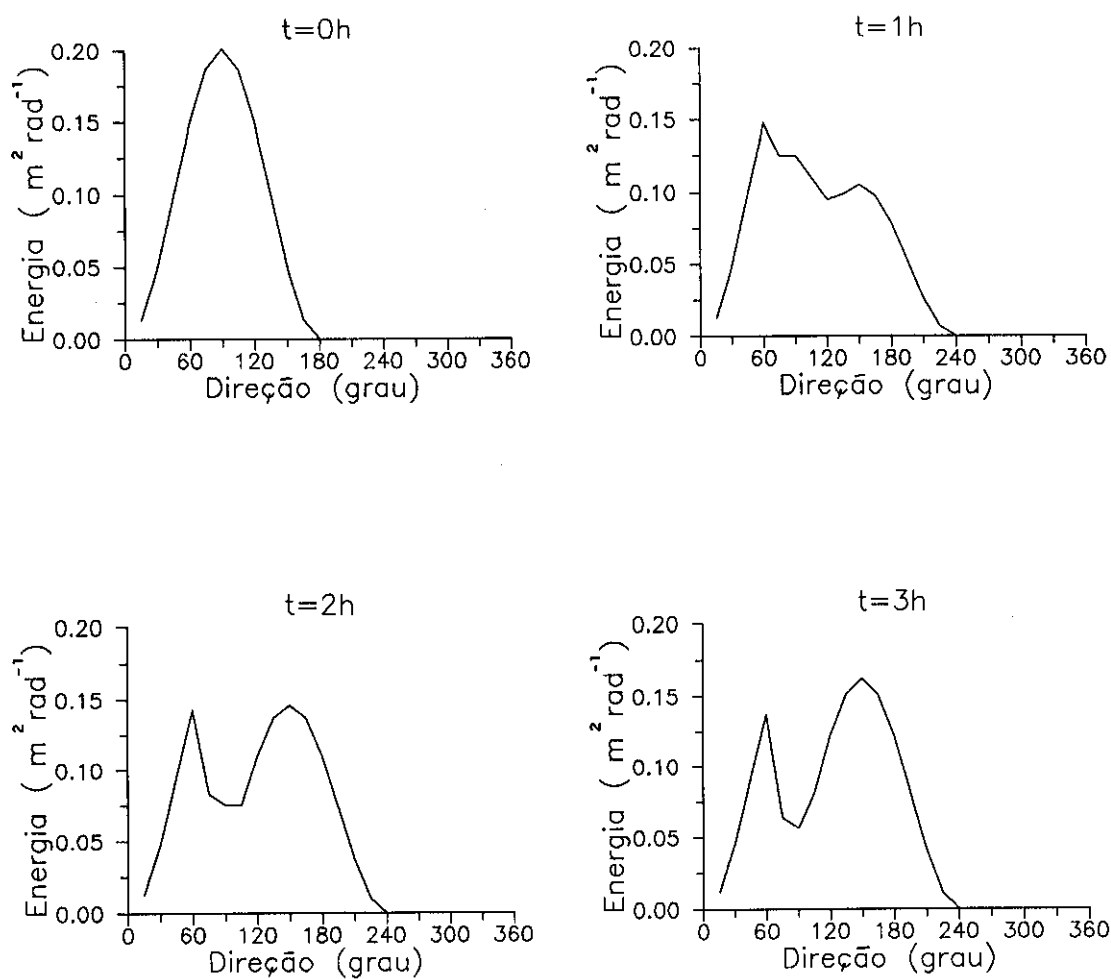
$V=10\text{m/s}$ 


Fig. 4.12 - Distribuição espectral direcional de energia obtida através das Equações 4.40 e 4.41 para o vento que tenha mudado de  $\phi = 90^\circ$  para  $\bar{\phi} = 150^\circ$ .

#### 4.5 TERMO DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO

A taxa de variação local de energia devida ao crescimento e decaimento é obtida por:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = S_{in} + S_{ds} \quad . \quad (4.44)$$

A geração de energia pelo vento  $S_{in}$  é representada tanto por um termo linear (Phillips, 1957), como por um termo exponencial (Miles, 1957, 1960),

$$S_{in} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}E \quad . \quad (4.45)$$

O termo linear representa uma forçante direta na superfície da água devida às flutuações turbulentas no vento de superfície; este mecanismo governa o crescimento da onda na fase inicial da geração. O termo exponencial representa uma forçante devida ao cisalhamento do escoamento turbulento do vento; este termo governa o estágio principal de desenvolvimento da onda, como mostra Snyder et al. (1981).

O termo linear é:

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \bar{\alpha}_1 U^2 \cos^2(\theta - \phi) & \text{para } f = f_{\max}, |\theta - \phi| < 90^\circ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \quad (4.46)$$

onde  $f_{\max}$  é a componente de frequência mais alta representada no modelo;  $U$  e  $\phi$  são a velocidade e direção do vento em 10m de altura; e  $\theta$  é a direção de propagação de energia. A direção  $\phi$  foi considerada crescente no sentido



anti-horário à partir do eixo x.

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{6 \times 10^{-8}}{2\pi f_{\max}} . \quad (4.47)$$

O termo exponencial é:

$$\bar{\beta} = \begin{cases} \bar{\beta}_1 f \left\{ \frac{U \cos(\theta - \phi)}{c} - 1 \right\} & \text{se } \frac{U \cos(\theta - \phi)}{c} > 1 \\ 0 & \text{caso contrário} , \end{cases} \quad (4.48)$$

onde c é a velocidade de fase da onda com frequência f.

O fator  $\bar{\beta}_1$  é dado por:

$$\bar{\beta}_1 = G \times 2\pi\bar{\rho} , \quad (4.49)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a razão entre as densidades do ar e da água e G é um fator de geração.

Para que o crescimento de energia das ondas esteja de acordo com curvas conhecidas de crescimento de onda, até que o oceano atinja o estágio completamente desenvolvido, deve-se ajustar um termo de dissipação.

O termo de dissipação utilizado é baseado em Hasselmann (1974):

$$S_{ds} = D f^2 E(f, \theta) \left( \iint E(f, \theta) d\theta df \right)^{0,25} , \quad (4.50)$$

onde  $D$  é um fator de dissipação. Os fatores  $G$  da Equação 4.49 e  $D$  da Equação 4.50 foram ajustados de acordo com a curva de crescimento de vagas limitada pelo tempo de ação do vento ( $t$ ) determinada empiricamente por Sanders (1976); esta curva é a altura significativa obtida através de:

$$h_s = \frac{U^2}{g} \beta \operatorname{tgh} \left[ 6.1 \times 10^{-4} \left( \frac{g t}{U} \right)^{0.75} \right] , \quad (4.51)$$

A curva de crescimento obtida no modelo, que deve ser comparada à curva representada pela Equação 4.51, é dada por:

$$h_s = 4 \sqrt{\bar{E}} . \quad (4.52)$$

A Figura 4.13 mostra as curvas de crescimento obtidas através da Equação 4.51 (linha tracejada) e do modelo proposto neste trabalho (linha cheia) para as velocidades do vento  $U = 5, 10, 15$  e  $20\text{m/s}$ , utilizando  $G = 12 \times 10^{-2}$ ;  $D$  variando como se segue:

$$D_1 = (U + 30) \times 10^{-5} , \quad (4.53a)$$

$$\text{enquanto } \frac{\bar{E}_{aj}}{\bar{E}_{\max}} \leq 0,9 ,$$

onde  $\bar{E}_{aj}$  é a energia das vagas adicionada à energia das ondulações que esteja no intervalo de frequências  $f_{\min}$ , considerando  $\bar{E} = \bar{E}_{\max}$ , até  $f_{\max}$  que é a máxima frequência do modelo.

$$D_2 = D_1 + 2,4 \times 10^{-4} , \quad (4.53b)$$

para  $0,9 < \frac{\bar{E}_{aj}}{\bar{E}_{max}} \leq 1$ ; finalmente:

$$D_3 = \left( \frac{D_2 + 6.3 \times 10^{-11}}{D_2^2} \right) \frac{\bar{E}_{aj}}{\bar{E}_{max}} \quad (4.53c)$$

para  $\frac{\bar{E}_{aj}}{\bar{E}_{max}} > 1$  ,

onde  $D = D_1$ ,  $D_2$  ou  $D_3$ , dependendo do estágio de desenvolvimento em que se encontra o oceano.

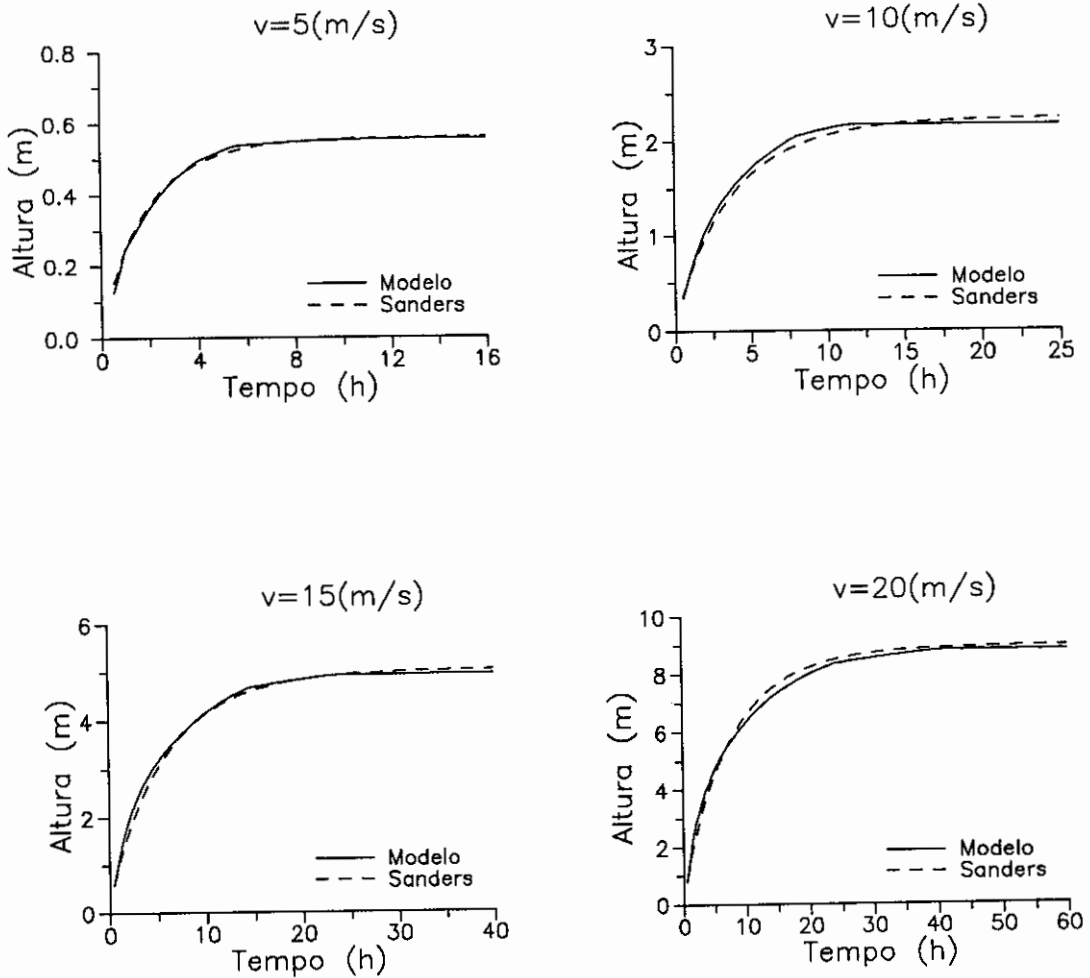


Fig. 4.13 - Curvas de crescimento da onda com o tempo de ação do vento.

Para saber como cada dos termos de geração, dissipação e interações não-lineares contribuem com energia em um oceano completamente desenvolvido, sob a influência de um vento de intensidade  $U=15 \text{ m/s}$  e com profundidade constante ( $H=120 \text{ m}$ ), deve-se observar a Figura 4.14. Pode-se notar que o termo de geração contribui com energia nos menores períodos (altas frequências). O termo de interações não-lineares faz com que energia fornecida pelo vento seja redistribuída no espectro de períodos, fornecendo uma contribuição positiva de energia em períodos maiores do que

o termo de geração. O termo de dissipação fornece maior contribuição negativa nos períodos de maior energia. As curvas obtidas neste experimento numérico são muito parecidas com as encontradas em Hasselmann (1974, 1976).

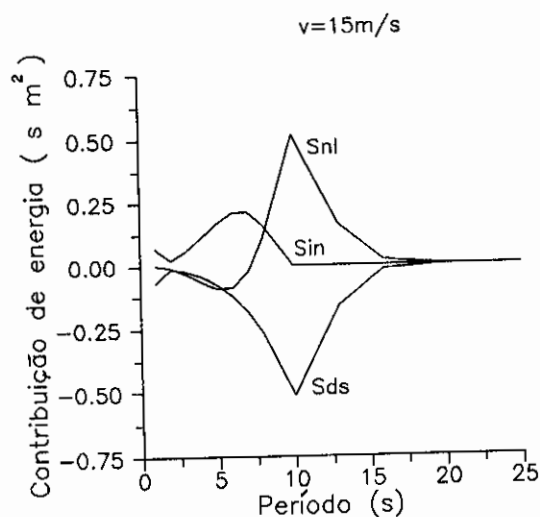


Fig. 4.14 - Contribuição de energia dos termos de geração ( $S_{in}$ ), dissipação ( $S_{ds}$ ) e interações não-lineares ( $S_{nl}$ ) em um oceano completamente desenvolvido por um vento  $U=15m/s$ . Oceano com profundidade constante  $H=120m$ .



## CAPÍTULO 5

### EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão analisados alguns experimentos idealizados, considerando todos os termos do modelo. Foram feitos cinco experimentos onde no primeiro considerou-se um vento com direção variável e profundidade constante (termo de *shoaling* e refração não forneceram contribuição), para que fosse comparada a parametrização do espectro direcional proposta neste trabalho e a proposta por Golding (1983) em situações de mudanças bruscas do vento. No segundo experimento considerou-se um oceano com profundidade constante sob a influência de um vento de intensidade e direção constantes, para que a curva de crescimento obtida através deste trabalho fosse comparada com curvas fornecidas por outros modelos operacionais. No terceiro e no quarto experimento considerou-se um oceano com profundidade constante sob a influência de um vórtice ciclônico estacionário e um vórtice ciclônico em movimento, respectivamente. Estes experimentos foram feitos para que se observasse o comportamento de cada termo envolvido diante de situações complicadas de vento. No quinto experimento considerou-se batimetria real sob a influência de um vento idealizado, para que os termos de *shoaling* e refração fornecessem contribuições.

#### 5.1 VENTO COM DIREÇÃO VARIÁVEL

Neste caso deseja-se demonstrar a diferença no espectro de ondas quando são consideradas tanto as parametrizações propostas por Golding, como as propostas neste trabalho. Considerou-se neste experimento numérico um oceano com profundidade constante ( $H=200\text{m}$ ) para que o entendimento da contribuição dos termos de advecção, geração, dissipação de energia e interações não-lineares

fosse facilitado. Foi considerado que, no instante  $t=0h$ , o oceano encontrava-se completamente desenvolvido devido a um vento de intensidade  $U=20m/s$  e direção  $\phi=180^\circ$ . Considerou-se ainda que o vento tenha mudado de direção com o tempo da seguinte forma:

$$t = 0,5h, \phi = 240^\circ;$$

$$t = 6,5h, \phi = 300^\circ;$$

$$t = 12,5h, \phi = 360^\circ;$$

$$t = 18,5h, \phi = 60^\circ;$$

$$t = 24,5h, \phi = 120^\circ;$$

$$t = 30,5h, \phi = 180^\circ.$$

Calculou-se a integração dos termos de advecção, geração, dissipação de energia e interações não-lineares apenas no ponto central do domínio. Nos outros pontos considerou-se que a energia continuou a mesma de quando o oceano encontrava-se completamente desenvolvido devida ao vento de direção  $\phi=180^\circ$ .

Os espectros bidimensionais para os instantes  $t=0, 6, 12, 18, 24, 30, 36h$ , resultantes da parametrização proposta neste trabalho e da de Golding, são mostrados nas Figuras 5.1 e 5.2, respectivamente, onde a direção do vento está representada pela linha tracejada. Os resultados obtidos referem-se apenas ao ponto central da grade. Pode-se observar uma diferença no espectro de energia entre os dois modelos em quase todos os instantes, principalmente para  $t=6h$  e  $t=30h$ , cujas direções do vento são  $\phi=240^\circ$  e  $\phi=120^\circ$ , respectivamente. No espectro obtido pela parametrização de Golding, a energia contida na nova



direção do vento é quase sempre maior do que a obtida na parametrização proposta. Esta diferença ocorre devido à retenção de energia no espalhamento angular do termo de interação não-linear, proposta neste trabalho, retenção esta que não ocorre na parametrização de Golding. Quando a diferença entre a nova direção do vento e a direção do vento em  $t=0s$  é maior do que  $90^\circ$ , observam-se dois picos no período de energia, um referente às ondulações e outro às vagas. Para diferença menor do que  $90^\circ$ , não ocorre uma distinção muito clara entre os picos de períodos de vagas e ondulações. Esta configuração, encontrada no espectro de períodos, pode ser observada nas duas parametrizações pois a diferença entre elas encontra-se apenas no espalhamento direcional.

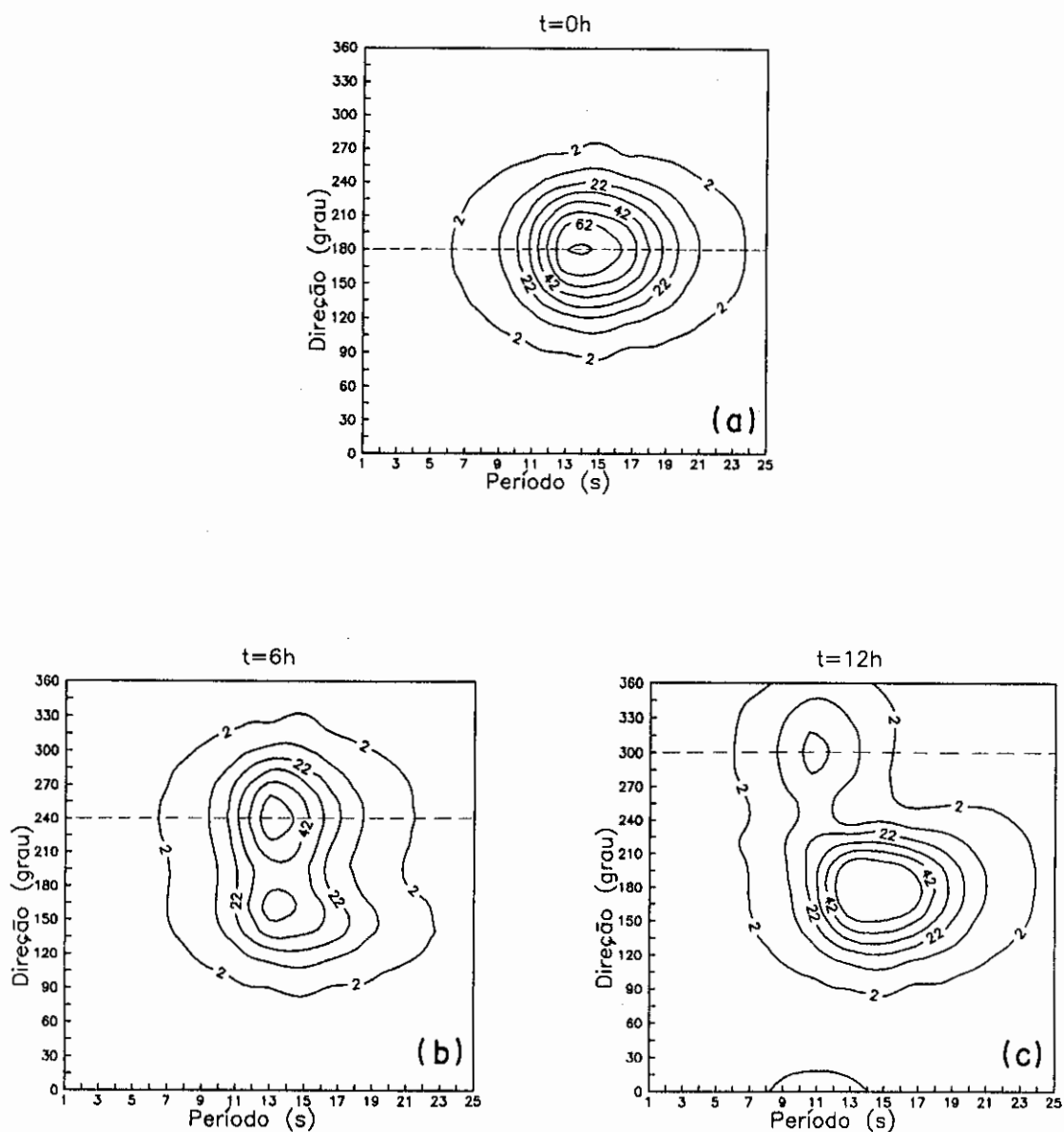


Fig. 5.1 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} s$ ) obtido através do espalhamento proposto neste trabalho.

(continua)

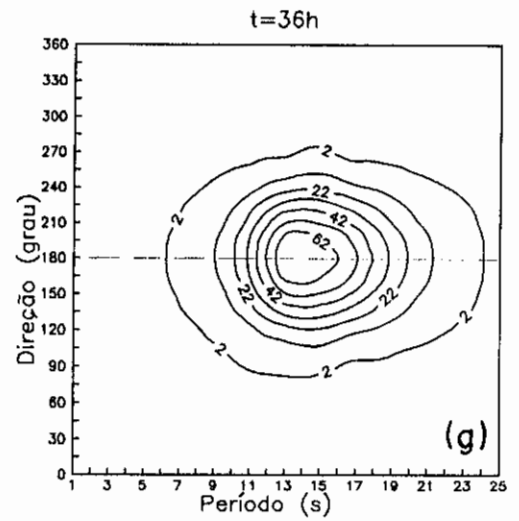
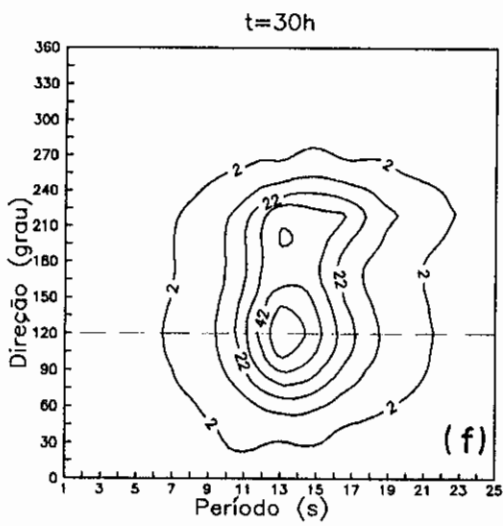
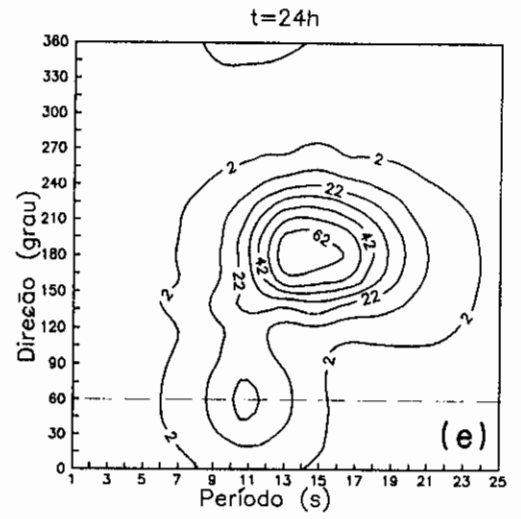
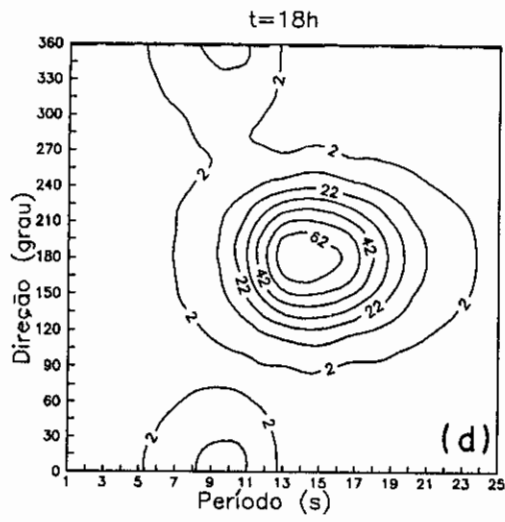


Fig. 5.1 - Conclusão.

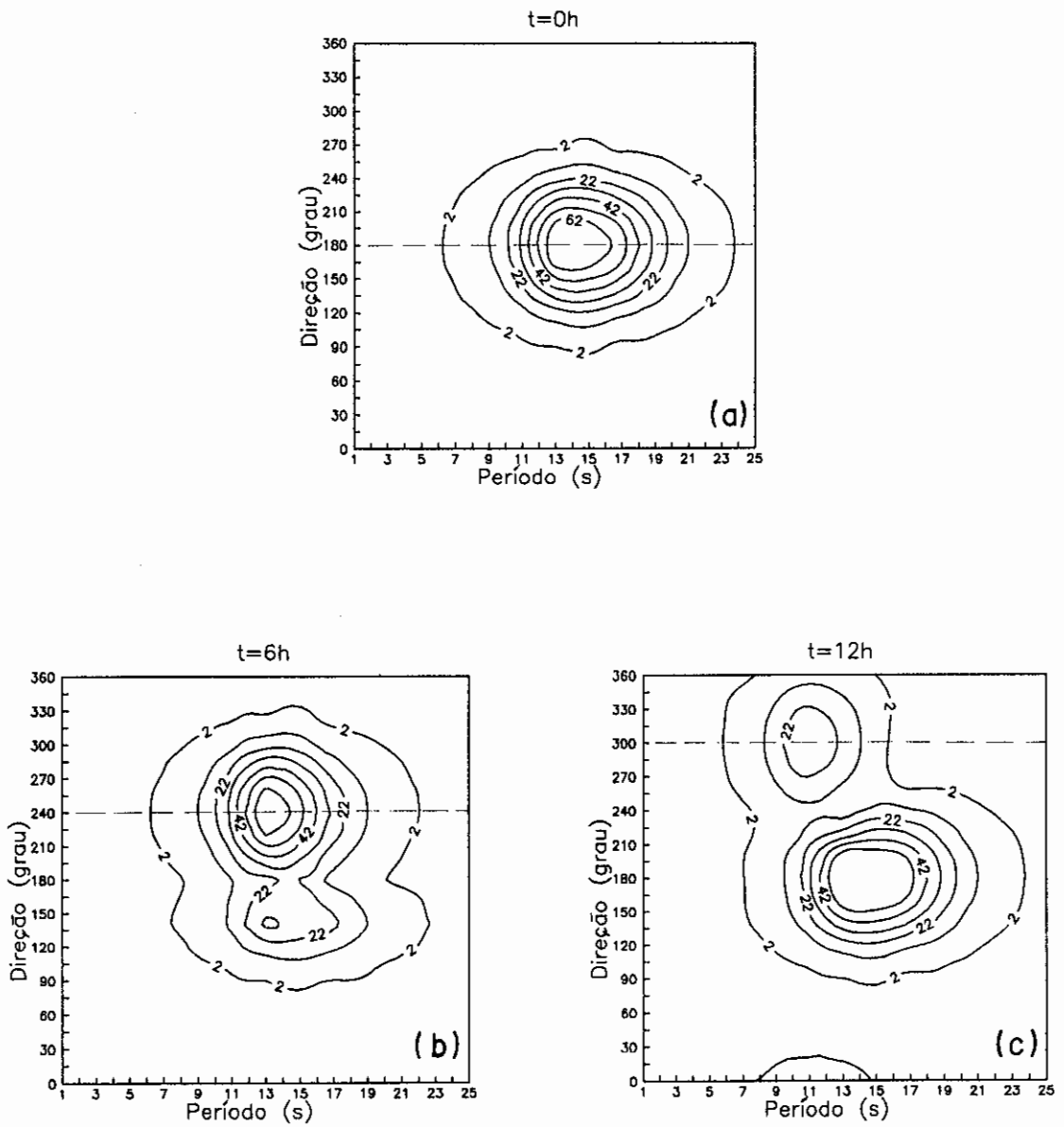


Fig. 5.2 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) obtido através do espalhamento proposto por Golding.

(continua)

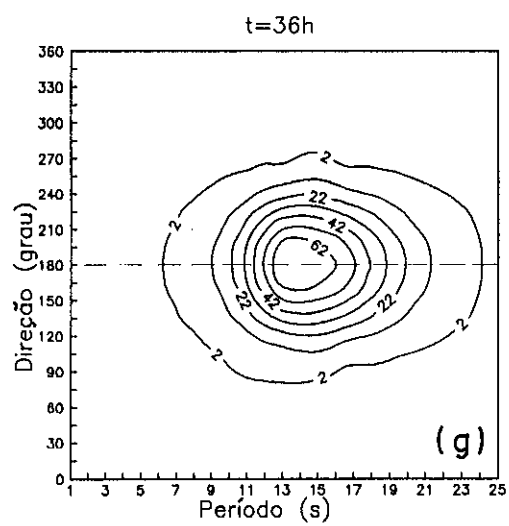
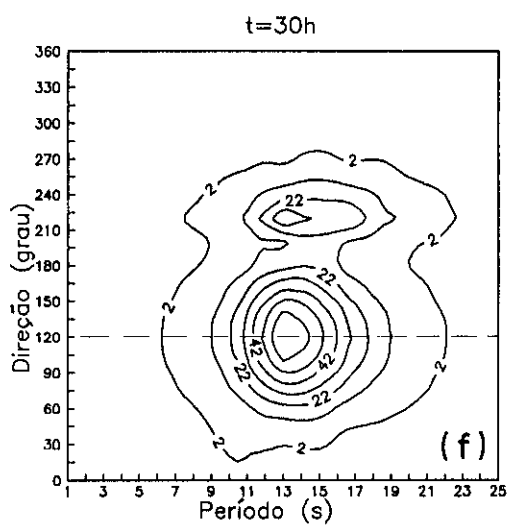
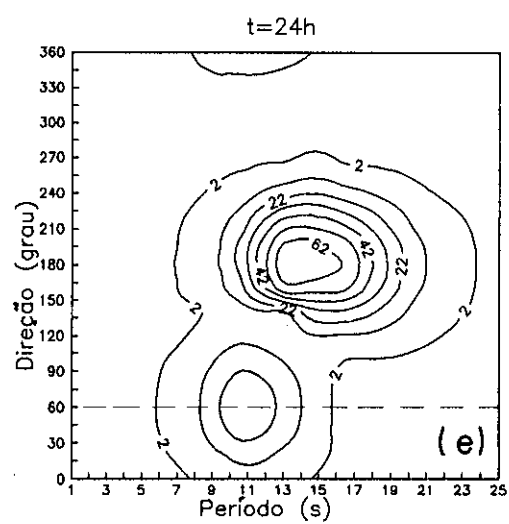
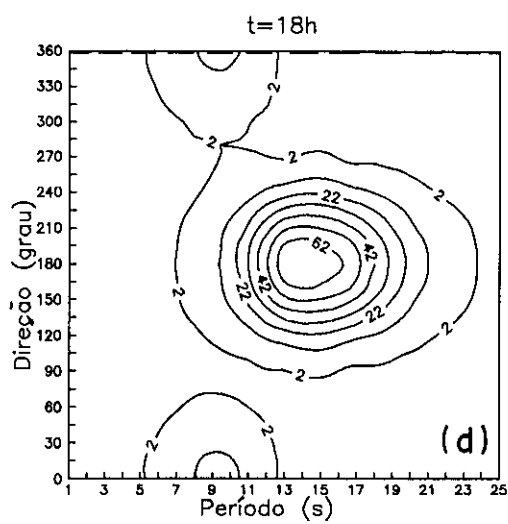


Fig. 5.2 - Conclusão.

O espectro direcional para este experimento numérico é mostrado na Figura 5.3, onde a linha cheia refere-se à parametrização proposta neste trabalho e a linha tracejada, à parametrização de Golding. Pode-se observar de uma maneira mais clara a diferença entre os dois espectros. A maior diferença entre os dois ocorre quando a nova direção do vento encontra-se próxima à direção inicial, como se pode notar claramente nas Figuras 5.3b e 5.3f, pois são situações em que existe maior quantidade de energia e, portanto, onde deve haver maior retenção. A grande quantidade de energia em  $\phi=180^\circ$  durante todo o tempo ocorre porque o oceano encontrava-se completamente desenvolvido para a direção  $\phi=180^\circ$  em  $t=0h$ . As diferenças mostradas neste experimento poderiam ser muito maiores se os resultados fossem considerados logo após a mudança do vento, como foi salientado no Capítulo 4.

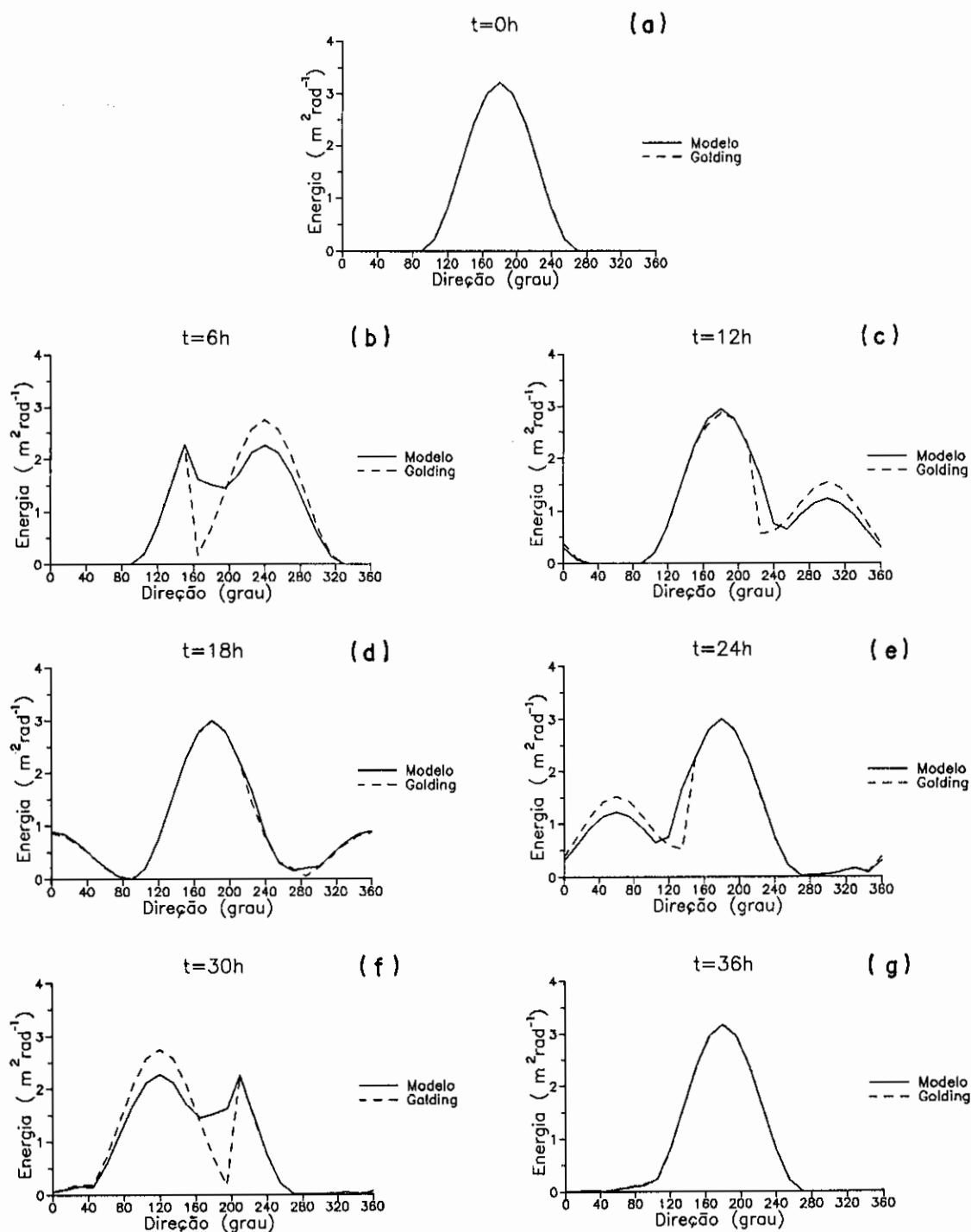


Fig. 5.3 - Espectro direcional obtido através do espalhamento proposto neste trabalho e o proposto por Golding.

## 5.2 VENTO CONSTANTE

O objetivo deste experimento é comparar curvas de crescimento de energia e frequência de pico limitadas pela pista com resultados de curvas obtidas em alguns modelos operacionais. Alguns experimentos numéricos foram realizados por SWAMP Group (1985) e SWIN Group (1985) para comparar a performance de vários modelos operacionais com diferentes condições de vento e de batimetria. Um destes experimentos consiste em considerar um oceano de profundidade constante ( $H=120\text{m}$ ), e vento de intensidade  $U=20\text{m/s}$  soprando da costa para o oceano, como mostra a Figura 5.4. Considera-se como condição de contorno que na praia a energia seja zero.

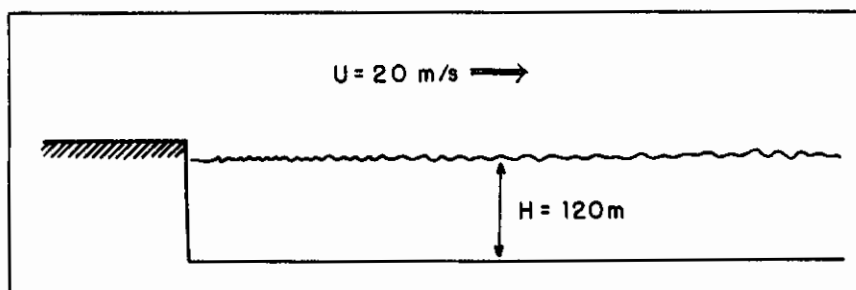


Fig. 5.4 - Esquema de um oceano com profundidade constante e vento soprando da costa para o oceano.

Considerou-se que em  $t=0\text{h}$  o oceano encontrava-se em repouso. O resultado deste experimento é mostrado na Figura 5.5, onde as curvas foram obtidas quando o oceano atingiu seu estado de equilíbrio. Para o caso do modelo proposto neste trabalho, isto ocorreu em  $t=240\text{h}$ .



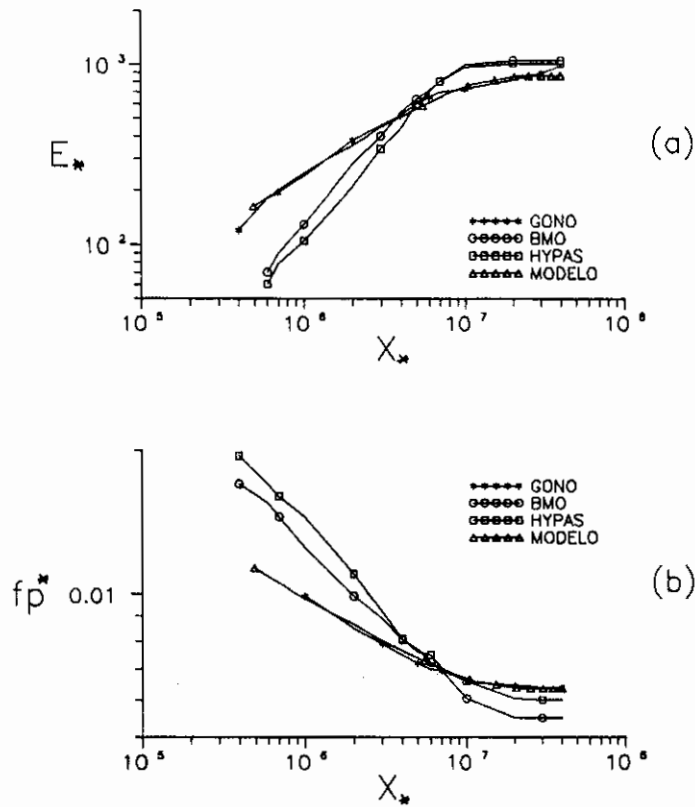


Fig. 5.5 - Curvas de crescimento limitadas pela pista adimensional  $X_*$ . (a) energia adimensional  $E_*$  por  $X_*$ ; (b) frequência de pico adimensional  $f_p^*$  por  $X_*$ .

Na Figura 5.5a são apresentadas tanto as curvas de crescimento de energia limitada pela pista obtidas através do modelo proposto neste trabalho, como as curvas adaptadas de SWIN Group (1985) para os modelos BMO (Golding, 1983), GONO (Janssen et al., 1984) e HYPAS de Gunther e Rosenthal, (1984, citado por SWIM Group, 1985), cujas descrições resumidas encontram-se no Capítulo 1 deste trabalho. Na abscissa,  $X_*$  é a pista adimensional, fornecida por  $X_* = Xg/u_*^2$ , onde  $u_*$  é a velocidade de fricção dada por  $u_* = U (1,83 \times 10^{-3})^{1/2}$  (SWAMP Group, 1985), e na ordenada  $E_*$  é a energia adimensional dada por  $E_* = Eg^2/u_*^4$ . Pode-se notar que a curva de  $E_*$  encontrada através do modelo

proposto é muito próxima da encontrada por GONO. Tanto o modelo proposto quanto o GONO alcançam o mesmo nível assintótico do BMO e HYPAS, porém, mais lentamente. Para pequenos  $X_*$  o modelo proposto e GONO possuem maior quantidade de energia do que os outros modelos. Na Figura 5.5b são apresentadas as curvas de frequência de pico adimensional dadas por  $f_p^* = f_p u_*/g$  em função de  $X_*$  para os mesmos modelos da Figura 5.5a. A curva de  $f_p^*$  encontrada para o modelo proposto também é muito próxima da encontrada no modelo GONO, assim como a curva de  $E_*$ . Para pequenos  $X_*$  as  $f_p^*$  de GONO e do modelo proposto são menores do que as  $f_p^*$  dos modelos BMO e HYPAS, pois  $f_p^*$  é inversamente proporcional à  $E_*$ . A proximidade entre as curvas de GONO e do modelo proposto se deve ao fato de que as curvas de crescimento das vagas destes modelos foram ajustadas da mesma forma. SWAMP Group (1985) concluiu que as diferenças obtidas entre as curvas de crescimento de BMO, GONO e HYPAS podem estar na incerteza se realmente  $u_*$  é a variável mais apropriada para descrever o crescimento da onda. Esta incerteza pode ser estendida para o caso deste modelo. Outro ponto de incerteza na curva de crescimento obtida por este modelo encontra-se no ajuste feito pelo termo de dissipação na parte do espectro referente às ondulações. Para que estes ajustes possam ser mais corretos, deve-se calibrar o modelo com dados reais de ondas.

### 5.3 VÓRTICE CICLÔNICO ESTACIONÁRIO

Neste experimento considerou-se um vórtice ciclônico estacionário com vento de velocidade máxima  $U=25\text{m/s}$  agindo sobre um oceano com profundidade constante ( $H=500\text{m}$ ). O campo de vento do vórtice foi obtido através de:

$$U_{i,j} = \frac{U_{i_0 \pm 1, j_0 \pm 1} \sqrt{R_{i_0 \pm 1, j_0 \pm 1}}}{\sqrt{R_{i,j}}} , \quad (5.1)$$

para  $i = 1, i_{\max}$  e  $j = 1, j_{\max}$  ,

onde

$i_{\max}$  e  $j_{\max}$  são os índices máximos da grade nas direções x e y respectivamente;

$i_0, j_0$  são os índices do ponto do centro do vórtice;

$U_{i,j}$  é a velocidade do vento no ponto em questão;

$U_{i_0 \pm 1, j_0 \pm 1}$  é a velocidade máxima do vórtice;

$R_{i_0 \pm 1, j_0 \pm 1}$  é a distância do ponto de velocidade máxima do vento ao centro do vórtice;

$R_{i,j}$  é a distância do ponto em questão ao centro do vórtice que é obtida através de:

$$R_{i,j} = \sqrt{(i - i_0)^2 + (j - j_0)^2} . \quad (5.2)$$

As componentes do vento nas direções x e y foram consideradas perpendiculares ao raio que liga o ponto em questão e o centro do vórtice. O campo de vento encontrado através da Equação 5.1 é mostrado na Figura 5.6. Os pontos indicados com as letras A e B serão estudados separadamente, com um detalhamento da contribuição de cada termo envolvido no modelo. Como condição inicial admitiu-se que o oceano encontrava-se em repouso em  $t=0h$ .

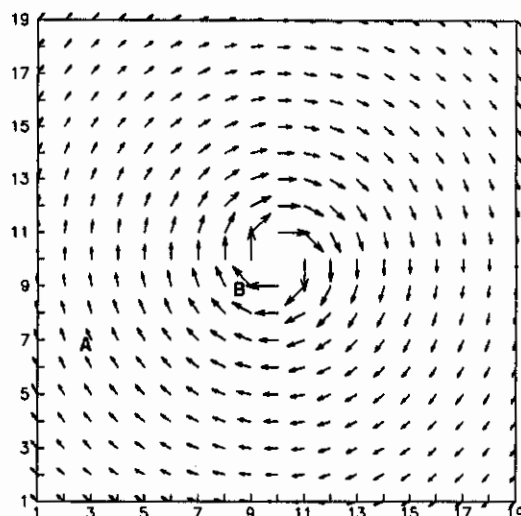


Fig. 5.6 - Campo de vento do vórtice ciclônico estacionário.

A Figura 5.7 mostra as isolinhas de altura de onda (linha cheia) e direção preferencial de propagação de energia (seta) (direção de maior energia) nos instantes  $t=12, 24, 36$  e  $48h$ , provenientes do campo de vento da Figura 5.6. Pode-se observar que inicialmente a direção preferencial de propagação de energia em cada ponto é muito próxima da direção do vento. Com o passar do tempo os pontos que se encontram distantes do centro do vórtice apresentam direções preferenciais de propagação de energia perpendiculares às direções do vento. Estas direções de propagação de energia fazem com que a altura das ondas torne-se, com o tempo, grande em regiões distantes do centro do vórtice.

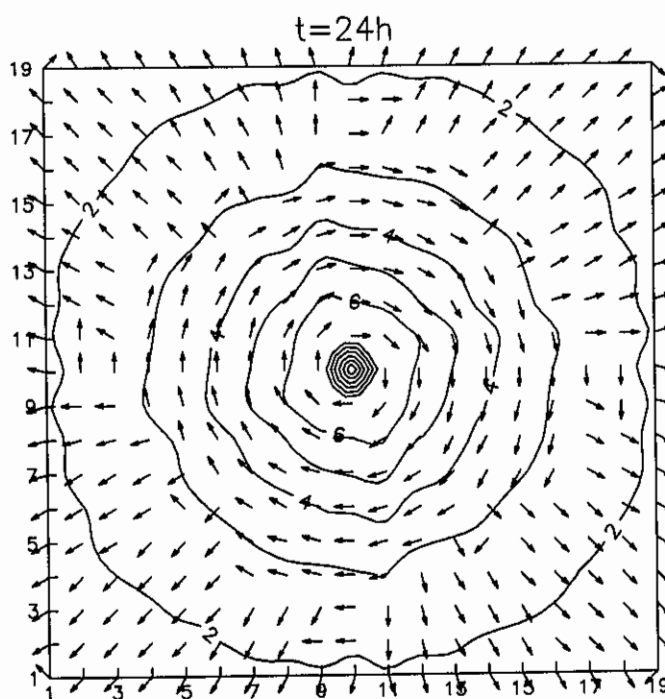
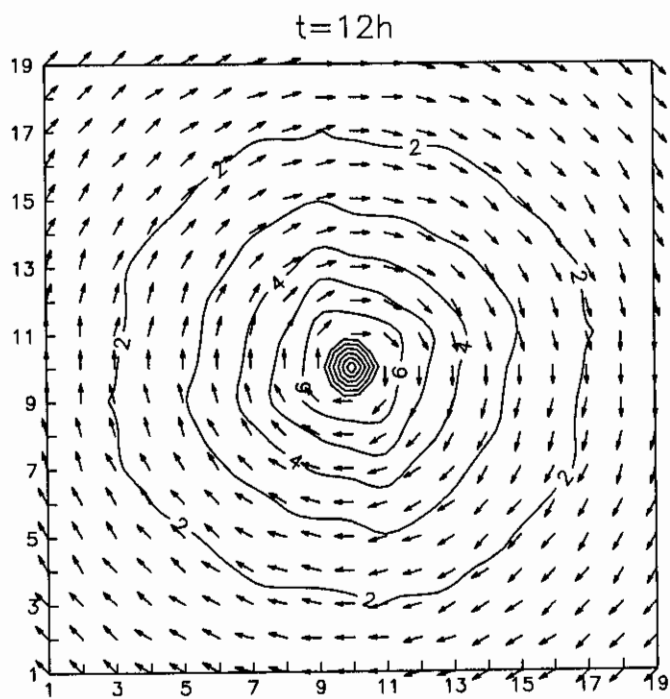


Fig. 5.7 - Isolinhas de altura (m) de onda e direções preferenciais de propagação de energia.

(continua)

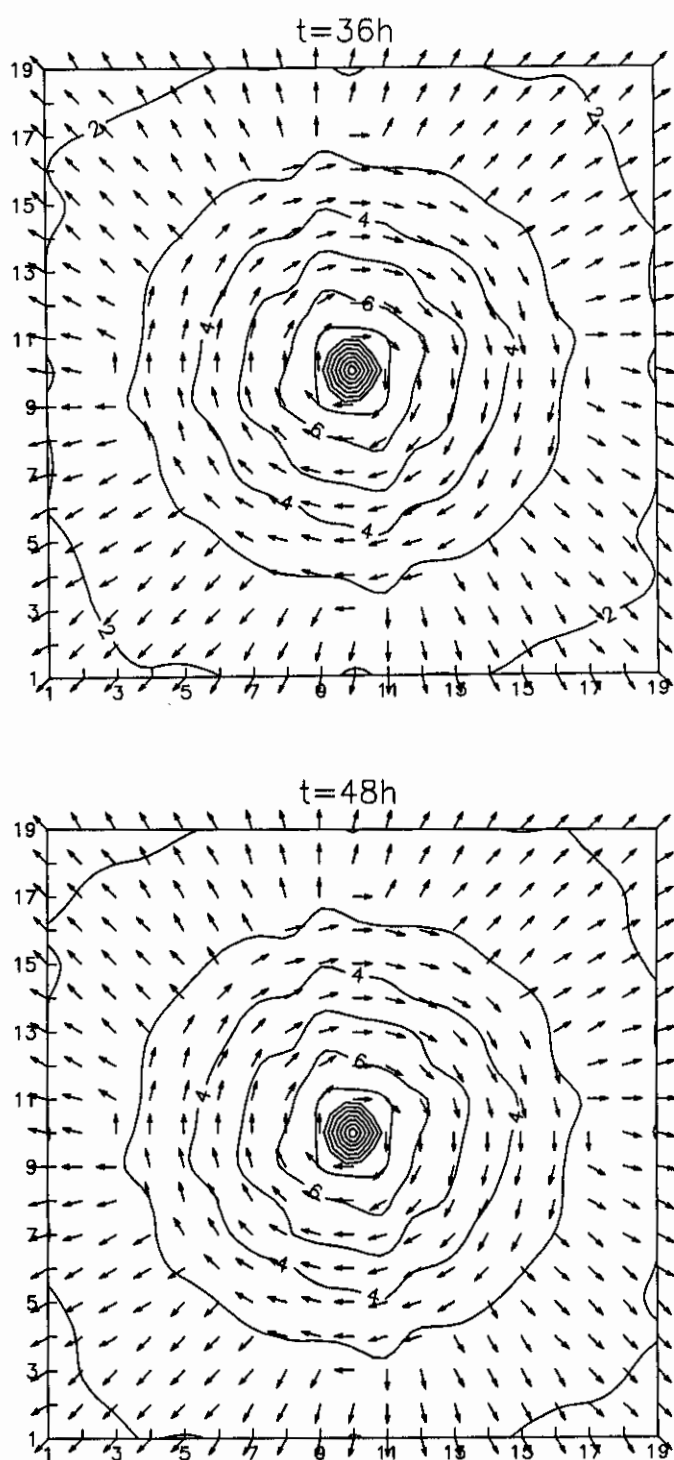


Fig. 5.7 - Conclusão.

A mudança de direção preferencial de propagação de energia pode ser esclarecida analisando as Figuras 5.8 e 5.9, onde são mostrados os espectros bidimensionais de energia dos pontos A e B, respectivamente, indicados na Figura 5.6. A direção do vento está representada, nas figuras, pela linha tracejada. Observa-se na Figura 5.8 que, com o passar do tempo, ocorre um espectro com dois picos tanto nos períodos quanto nas direções; assim, pode-se notar uma separação entre os espectro de vagas e ondulações. A grande quantidade de energia na forma de ondulações é a responsável pela mudança na direção preferencial de propagação de energia. Na Figura 5.9 não ocorre uma quebra no pico de energia, pois o ponto encontra-se muito próximo do centro do vórtice, onde a intensidade do vento é grande, e a energia encontra-se quase que totalmente na forma de vagas.

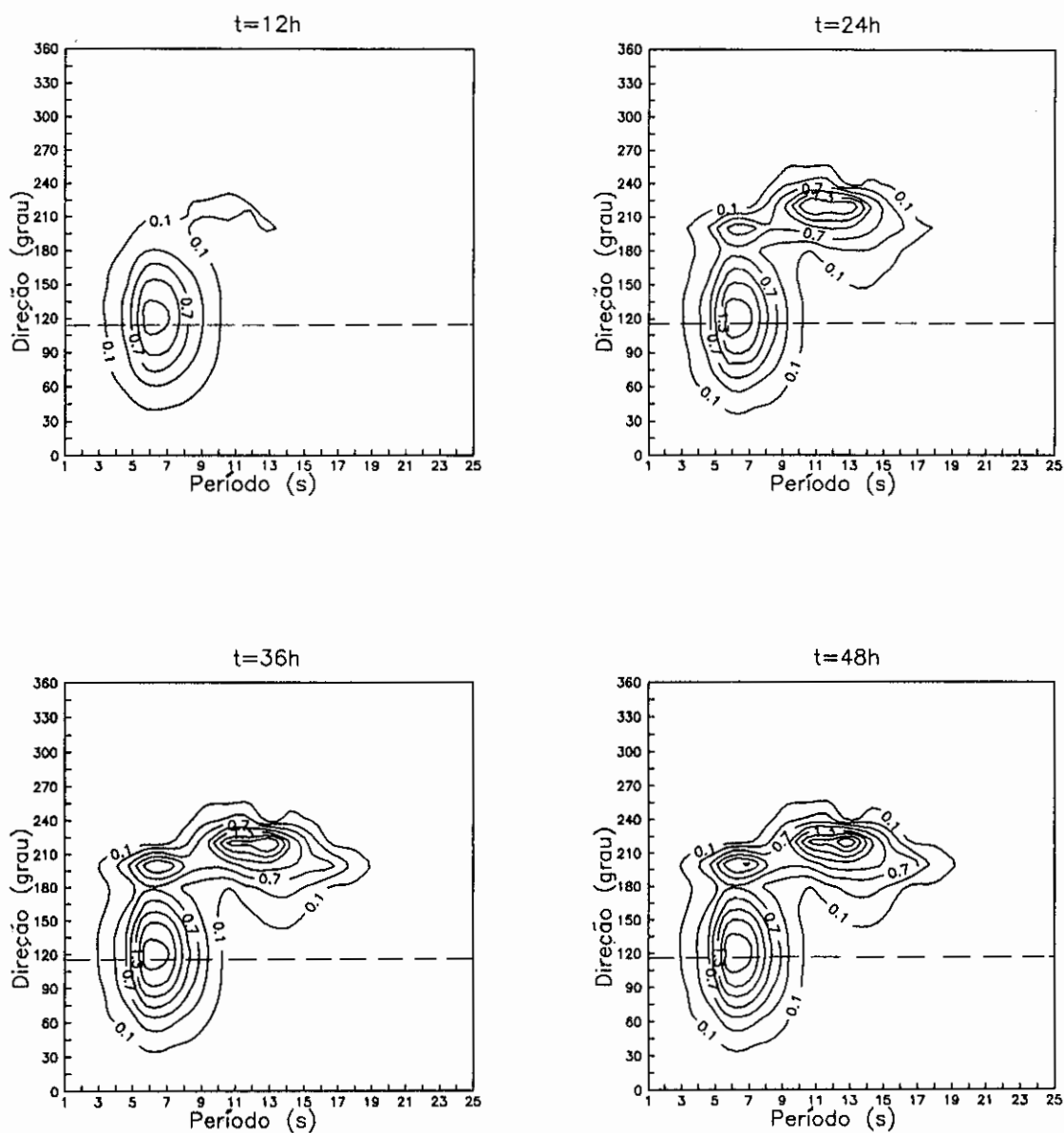


Fig. 5.8 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto A.



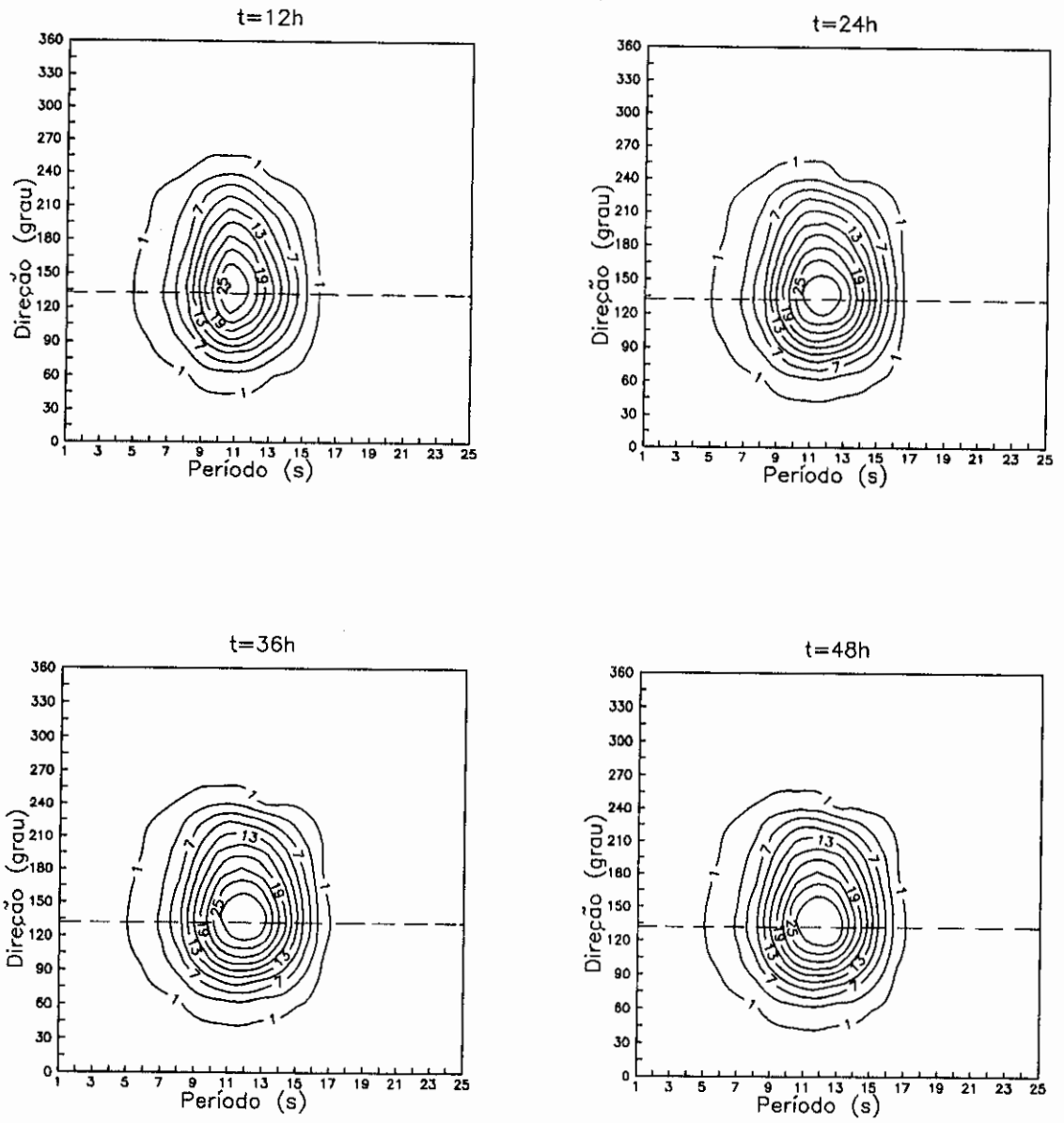


Fig. 5.9 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} s$ ) do ponto B.

Na Figura 5.10 são apresentadas isolinhas de período médio das ondas, nos instantes  $t=12, 24, 36$  e  $48h$ , obtidos através de:

$$T_m = \frac{\int_0^{\infty} \bar{E}^0 df}{\int_0^{\infty} f \bar{E}^0 df} . \quad (5.3)$$

Pode-se observar que as ondas com maior período médio encontram-se próximas ao centro do vórtice onde os ventos são mais fortes. Nota-se que, para o caso distante do centro do vórtice (como no ponto A), o período médio é próximo do período de pico das vagas. No caso próximo ao centro do vórtice (como no ponto B), o período médio é menor do que o período de pico das vagas.

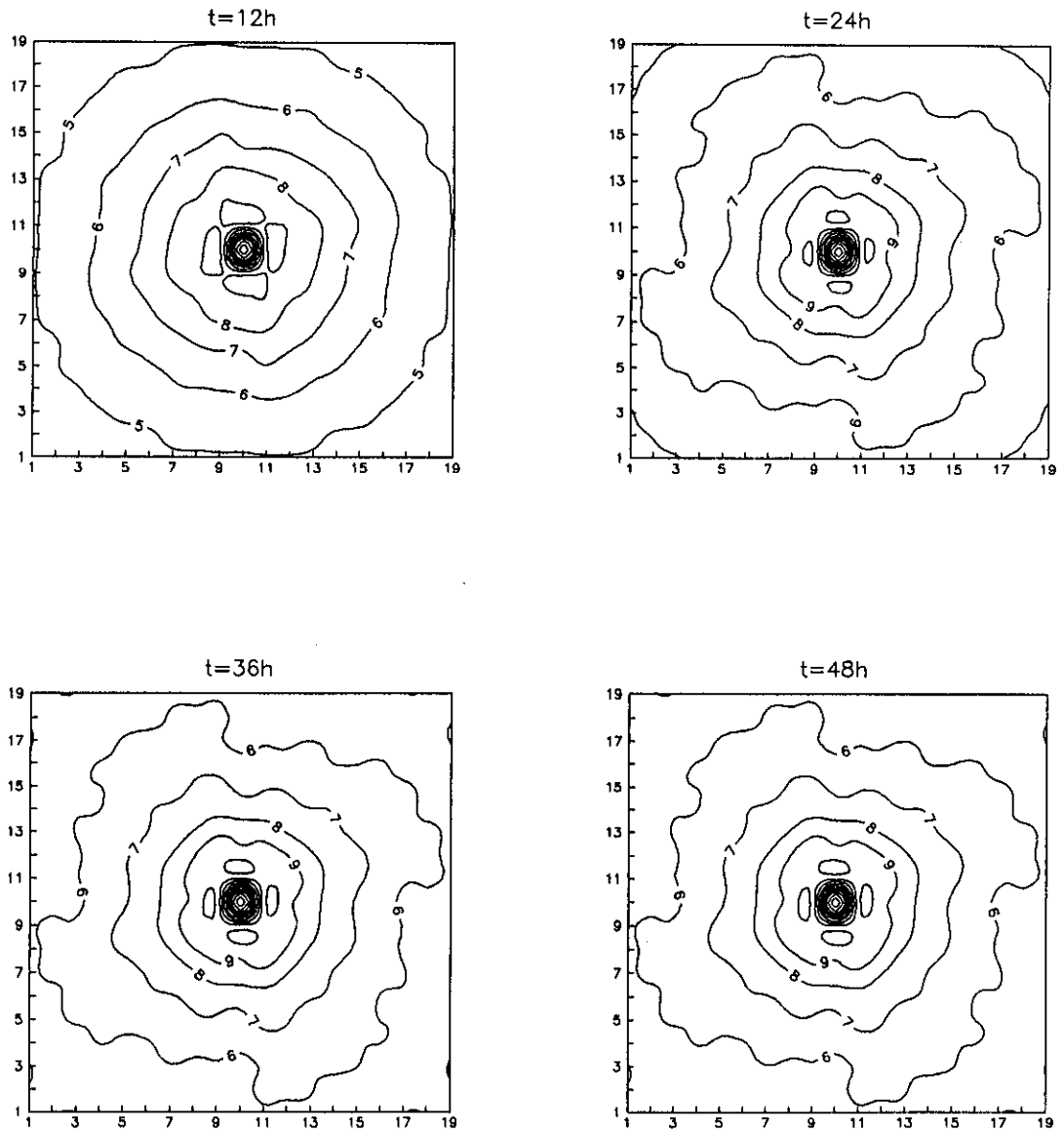


Fig. 5.10 - Isolinhas de período médio (s) das ondas.

A contribuição de energia por unidade de período, nos pontos A e B, dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares é mostrada nas Figuras 5.11 e 5.12, respectivamente. Estas contribuições referem-se apenas ao último passo de tempo.

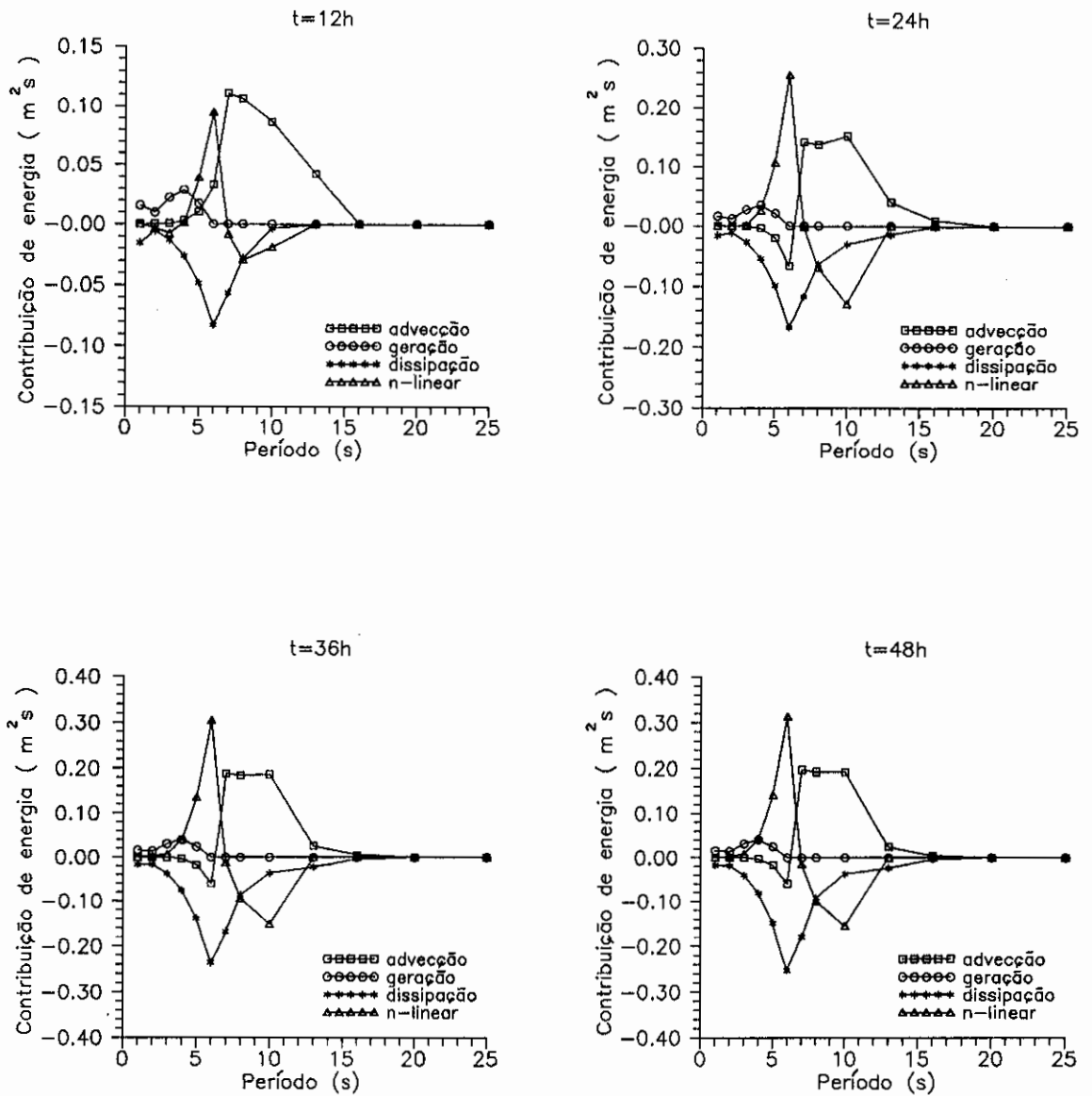


Fig. 5.11 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.

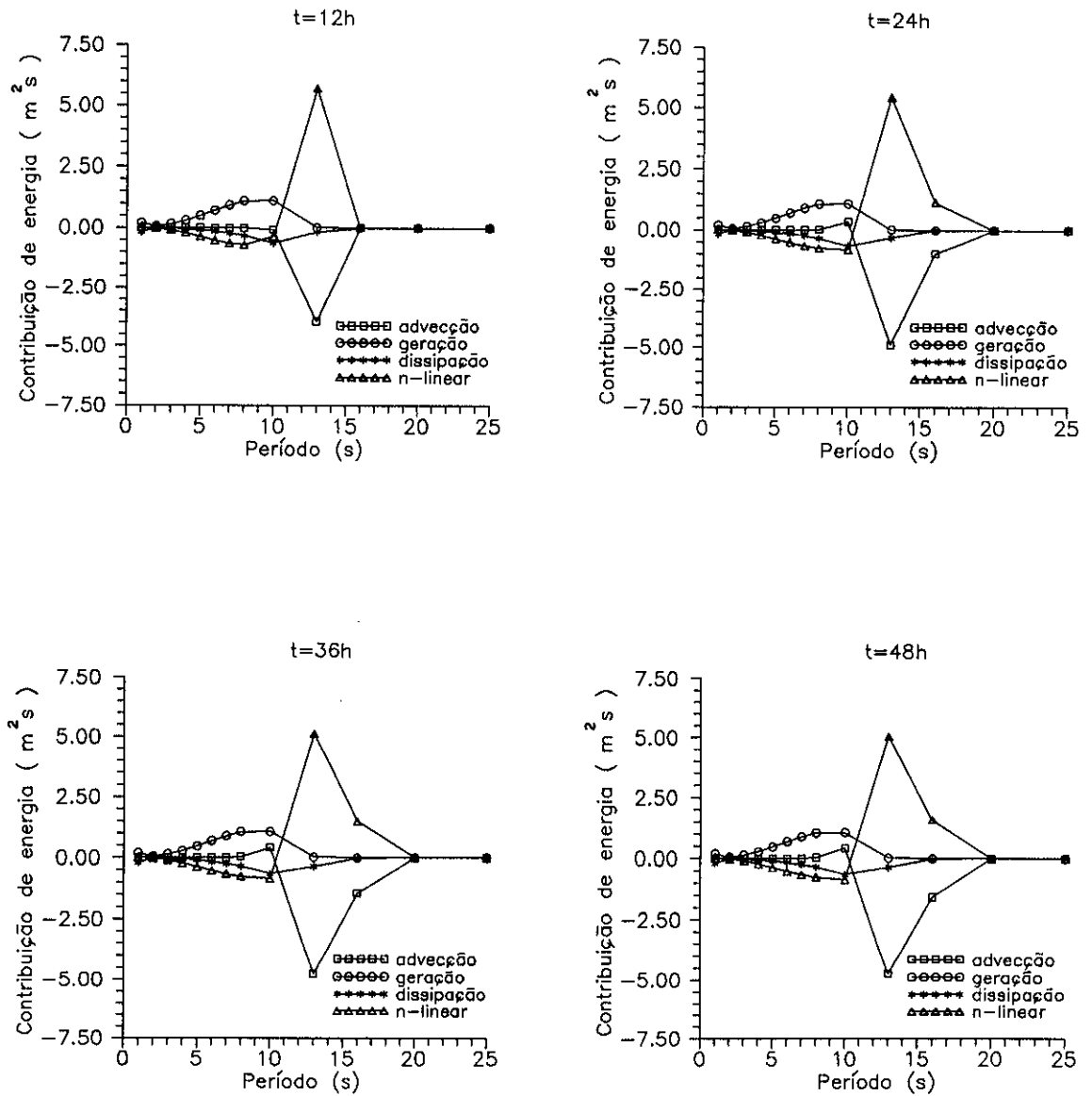


Fig. 5.12 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.

Observa-se que a contribuição do termo de geração é maior na parte de períodos menores (frequências maiores). Isto está de acordo com as Equações 4.46 e 4.48.

O termo de interações não-lineares fornece uma contribuição positiva tanto nos períodos menores para o caso distante do vórtice (região de pouca energia e ventos fracos), quanto nos períodos maiores em regiões próximas ao centro do vórtice (regiões de muita energia e ventos fortes).

O termo de advecção fornece uma contribuição positiva em regiões distantes do centro do vórtice e negativa próximas deste. A contribuição positiva em regiões distantes do vórtice é energia na forma de ondulações que foi gerada nas regiões próximas ao centro deste, onde os ventos são muito fortes.

A contribuição de energia por direção para o mesmo caso analisado anteriormente é mostrada nas Figuras 5.13 e 5.14. Pode-se observar que a contribuição de energia devida ao termo de geração permanece praticamente constante com o tempo para ambos os pontos.

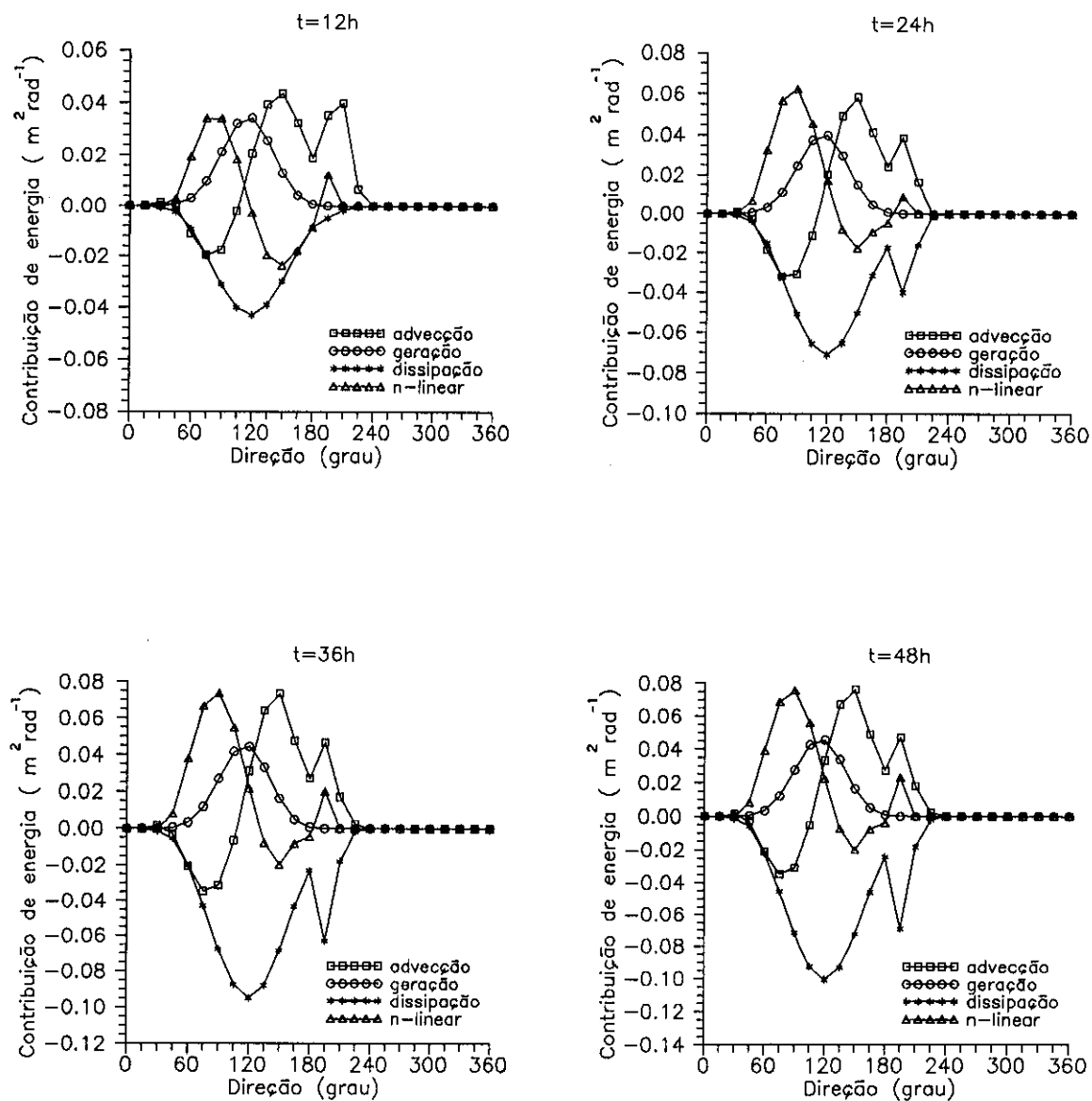


Fig. 5.13 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.

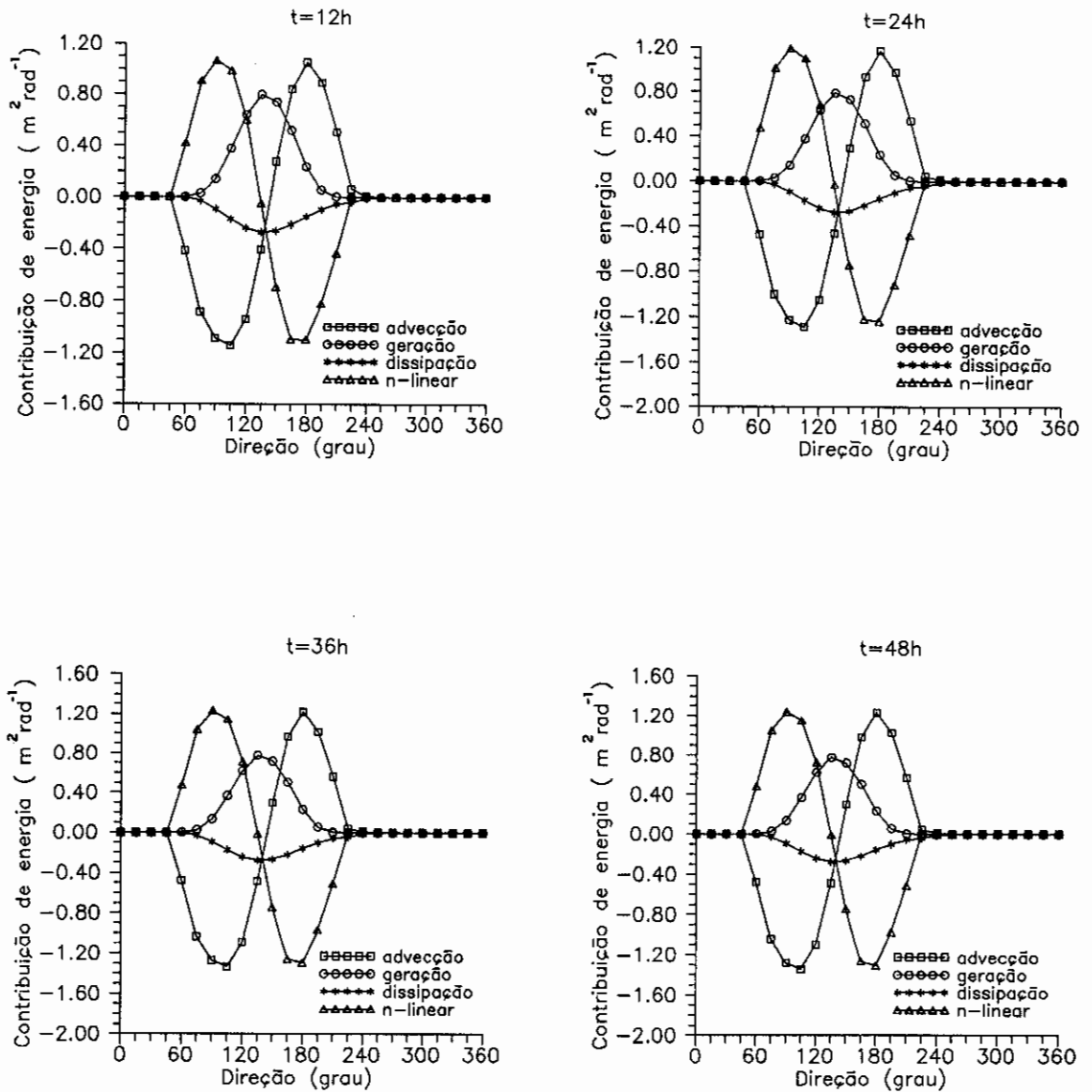


Fig. 5.14 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.

O termo de advecção apresenta, para ambos os pontos no espectro referente às vagas, que é a parte do espectro de direções que estão sob a influência do vento, uma contribuição negativa para direções com ângulos menores do que o da direção do vento e positiva para ângulos



maiores. Na Figura 5.13 (ponto A) observa-se um segundo pico de contribuição positiva, de intensidade menor do que a observada anteriormente, devida ao termo de advecção que é referente às ondulações, como foi observada na Figura 5.8.

Nota-se que o termo de interações não-lineares fornece, no espectro referente às vagas, uma contribuição contrária à do termo de advecção, o que faz com que o espectro de vagas mantenha a sua forma. Na Figura 5.13 são notados dois picos de contribuição positiva devidos ao termo de interações não-lineares, um no espectro de vagas e outro menor, que se refere à região de transição entre vagas e ondulações. Nas direções de transição são encontradas energias com período referente tanto às vagas quanto às ondulações.

O termo de dissipação contribui de acordo com os outros termos, sendo mais negativo à medida que a energia do ponto torna-se maior devida às contribuições dos termos de advecção, geração e interações não-lineares.

#### 5.4 VÓRTICE CICLÔNICO EM MOVIMENTO

Considerou-se, como no caso do vórtice ciclônico estacionário, um oceano com profundidade constante ( $H=500\text{m}$ ), e, como condição inicial, que o oceano encontrava-se em repouso em  $t=0\text{h}$ . Considerou-se ainda que o vórtice ficou estacionário durante 11,5 horas, a partir deste instante foram fornecidas novas posições de vento a cada seis horas. Os campos de vento para o vórtice em movimento, nos instantes  $t=0, 12, 18, 24, 30, 36$  e  $42\text{h}$ , são mostrados na Figura 5.15. A equação utilizada para estes campos de vento é a mesma do vórtice ciclônico estacionário. Os pontos indicados com as letras A e B, na Figura 5.15a, serão analisados separadamente. Os resultados

que serão discutidos neste experimento foram computados antes da mudança de direção do vento.

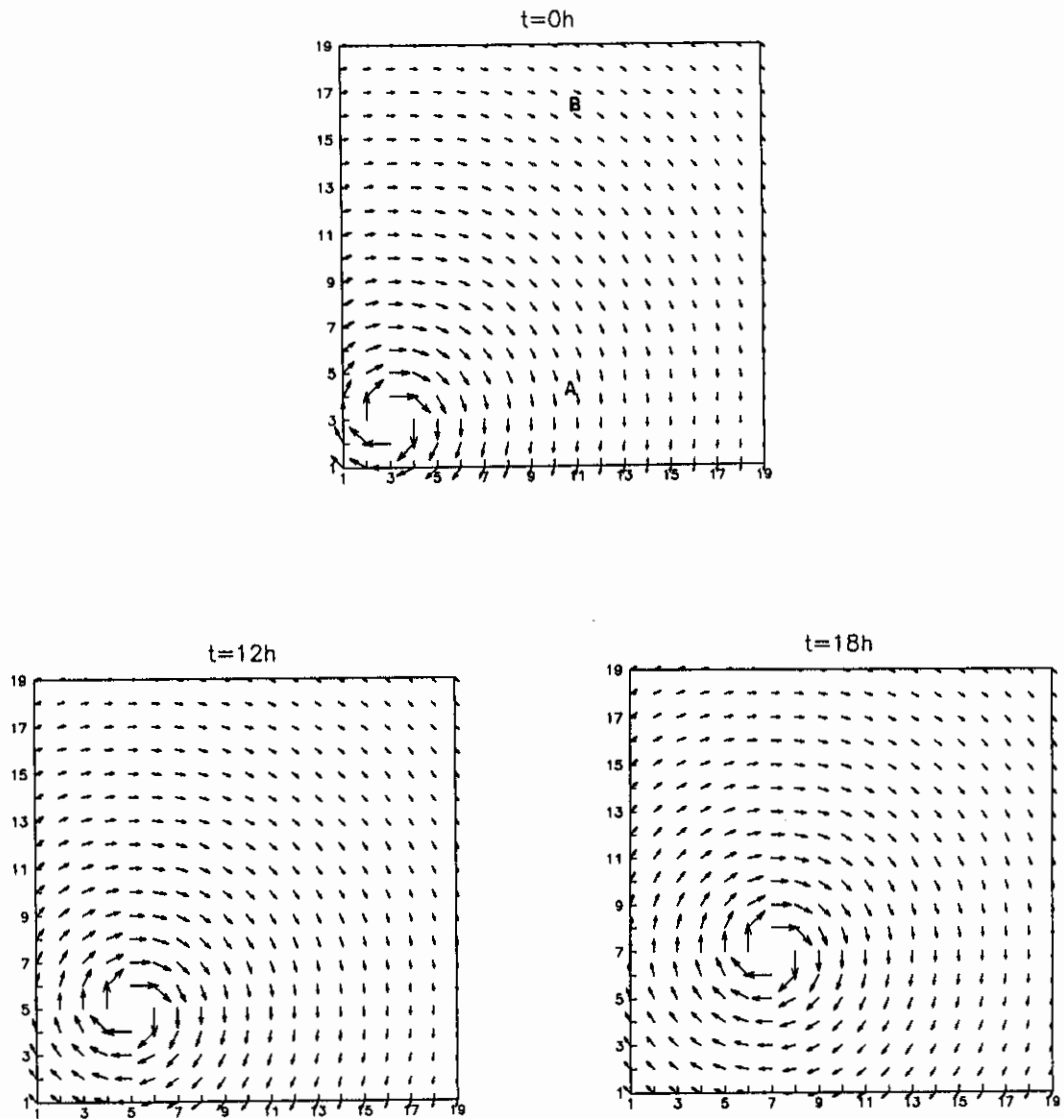


Fig. 5.15 - Campos de vento do vórtice ciclônico em movimento.

(continua)

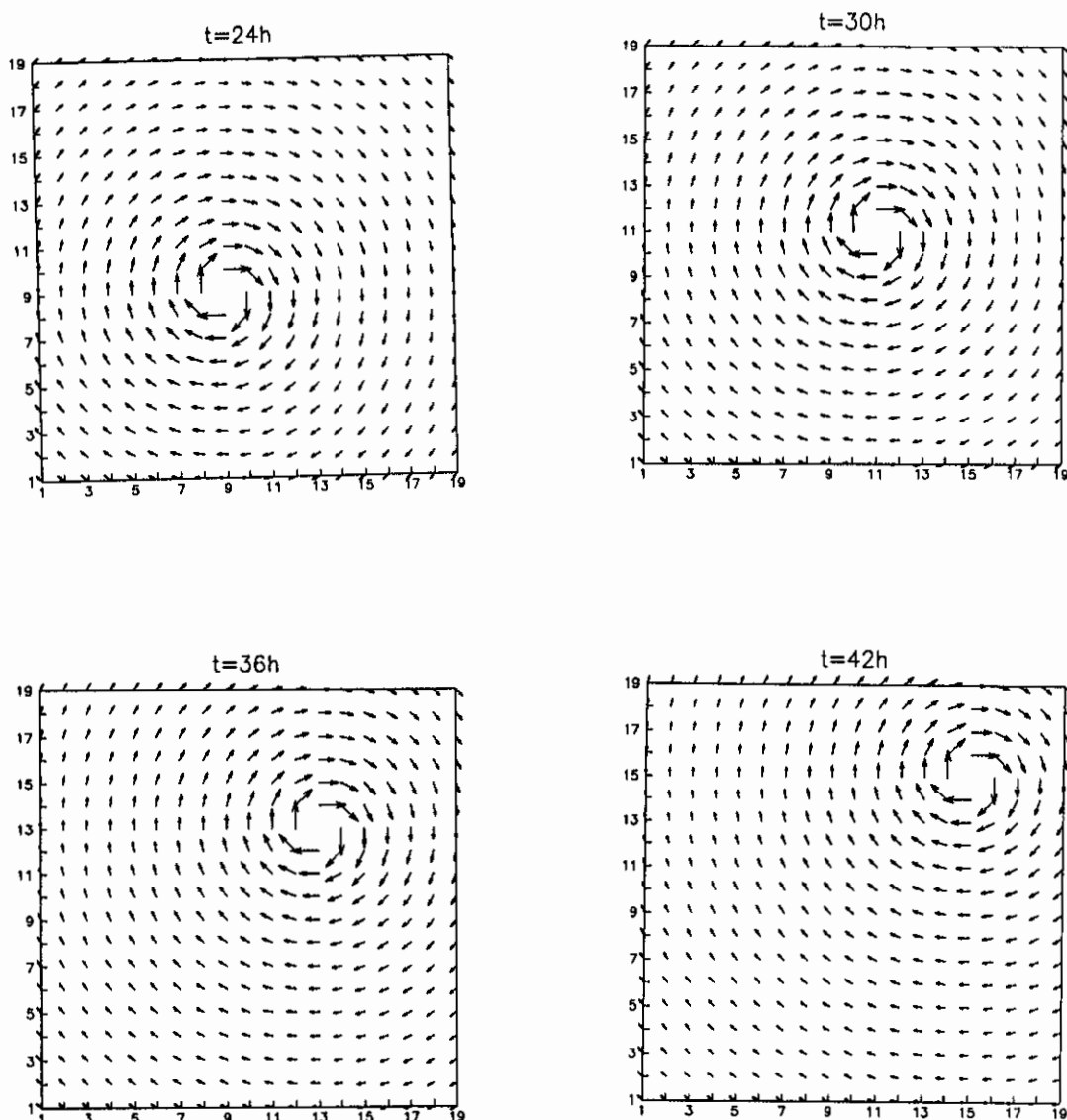


Fig. 5.15 - Conclusão.

Na Figura 5.16, são mostradas as isolinhas de altura de onda (linha cheia) e direções preferenciais de propagação de energia (setas) para  $t=12, 24, 36$  e  $48h$ . As isolinhas de ondas maiores acompanham o centro do vórtice, onde os ventos são mais fortes. Os campos de direção preferencial de propagação de energia tornam-se muito confusos com o passar do tempo e deslocamento do vórtice.

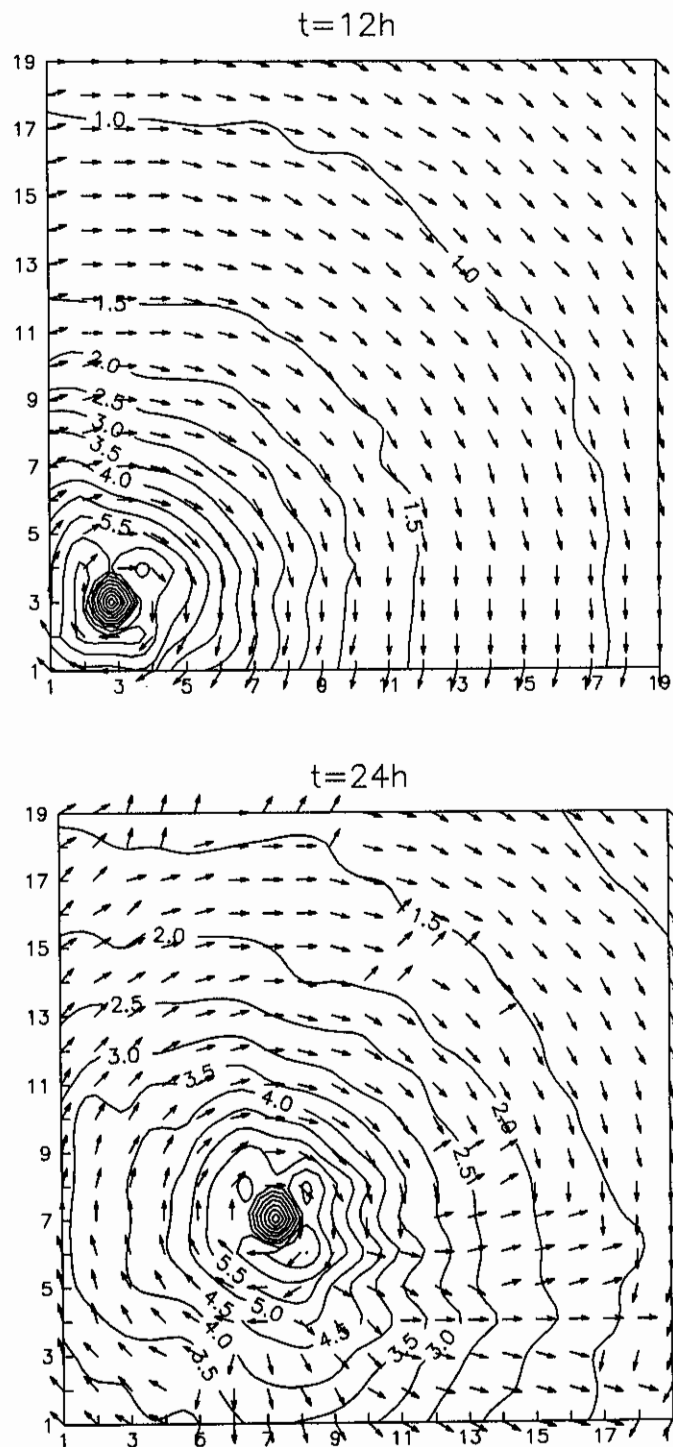


Fig. 5.16 - Isolinhas de altura (m) de onda e direções preferenciais de propagação de energia.

(continua)

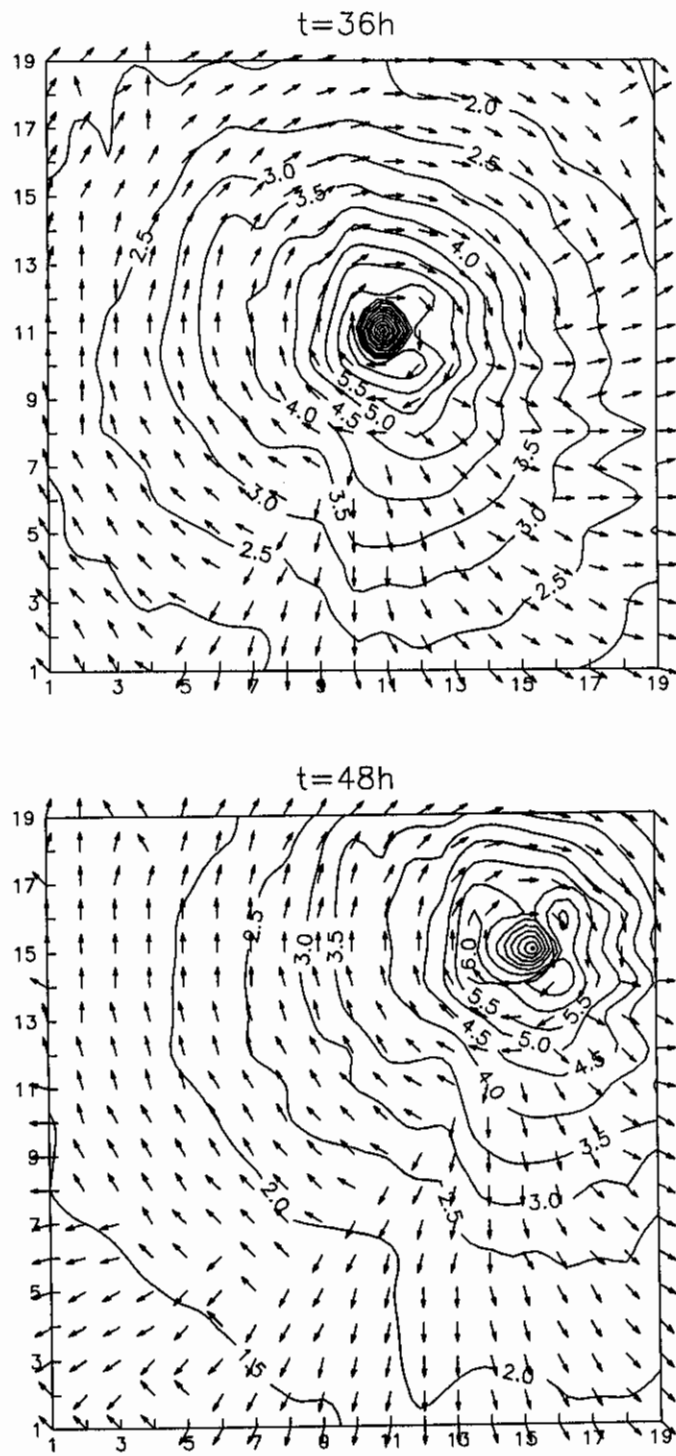


Fig. 5.16 - Conclusão.

Para que estes campos sejam entendidos, devem-se analisar os espectros bidimensionais de energia nas Figuras 5.17 e 5.18, que referem-se aos pontos A e B, respectivamente, indicados na Figura 5.15. As linhas tracejadas, nas figuras, indicam a direção do vento. Na análise do espectro do ponto A, nota-se que em  $t=12h$  ocorre um pico pronunciado de energia na direção correspondente à direção do vento e ao período  $T=6s$ ; há neste instante, portanto, energia na forma de vagas. Nota-se ainda em  $t=12h$  um pico de menor energia próximo de  $\phi=15^\circ$  e  $T=11s$ , que é energia na forma de ondulações. Em  $t=24h$  ocorrem dois picos direcionais, um na direção de influência do vento (vagas) e outro maior, que ocorre devido à advecção de energia (ondulações). A diferença de aproximadamente  $90^\circ$  entre as direções do pico de energia e do vento ocorre devido à parametrização das vagas obtida pelas Equações 4.40 e 4.41. Com o passar do tempo e distanciamento do centro do vórtice, observa-se um decréscimo na quantidade de energia, tanto na forma de vagas quanto de ondulações, que deve ocorrer devido aos termos de advecção e dissipação de energia. Os resultados obtidos para o ponto B mostram em  $t=12h$  uma pequena quantidade de energia na forma de vagas; em  $t=24h$  observa-se um pequeno pico no espectro de períodos relativo às ondulações (períodos maiores). Com o passar do tempo e aproximação do centro do vórtice, não é possível notar uma distinção entre os dois espectros.

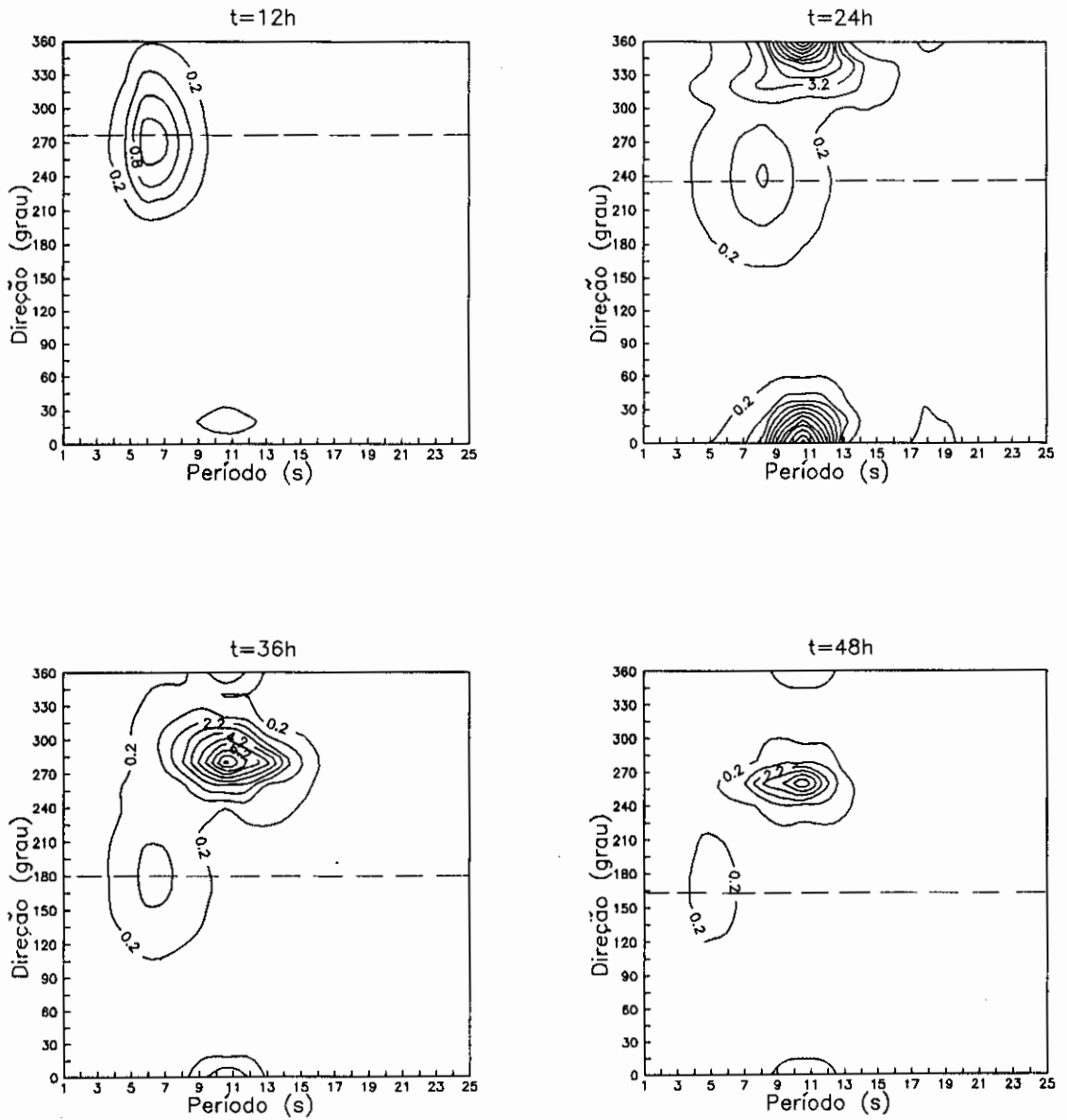


Fig. 5.17 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} s$ ) do ponto A.

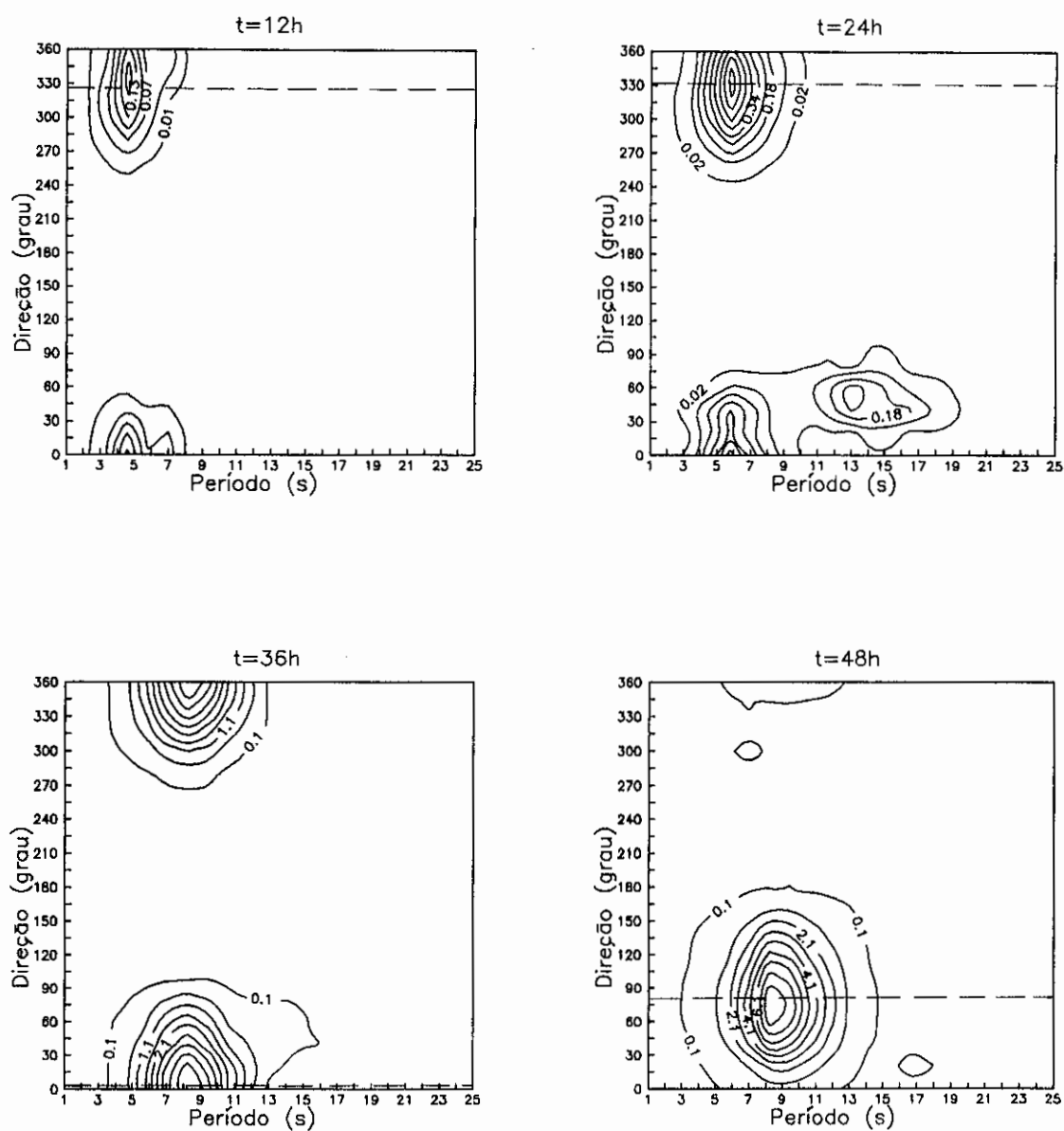


Fig. 5.18 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ ) do ponto B.



A contribuição de cada termo na quantidade de energia por unidade de período, nos pontos A e B, é apresentada nas Figuras 5.19 e 5.20, respectivamente. Estas figuras serão analisadas juntamente com as Figuras 5.17 e 5.18 para que seja facilitado o entendimento. Analisando a Figura 5.19 (ponto A), nota-se uma contribuição positiva devida ao termo de advecção tanto nos períodos de vagas quanto nos de ondulações em  $t=12h$ . Em  $t=24h$ , quando o centro do vórtice encontra-se próximo do ponto em questão, o termo de advecção fornece uma contribuição positiva em períodos correspondentes às vagas, pois os ventos são muito fortes no ponto neste instante. A contribuição devida a este termo é negativa nos períodos correspondentes às ondulações. Em  $t=36h$  ocorre contribuição positiva devido a advecção em períodos de vagas e nos períodos de transição entre vagas e ondulações. Nos períodos referentes apenas às ondulações, a contribuição devida a este termo é negativa. Em  $t=48h$ , quando o centro do vórtice encontra-se distante do ponto, ocorre uma contribuição negativa devida a este termo, em períodos correspondentes às ondulações. Neste instante a contribuição devida à advecção é muito mais pronunciada do que a do termo de dissipação; desta forma, conclui-se que a advecção é a grande responsável pela diminuição rápida de energia das ondulações notada na Figura 5.17.

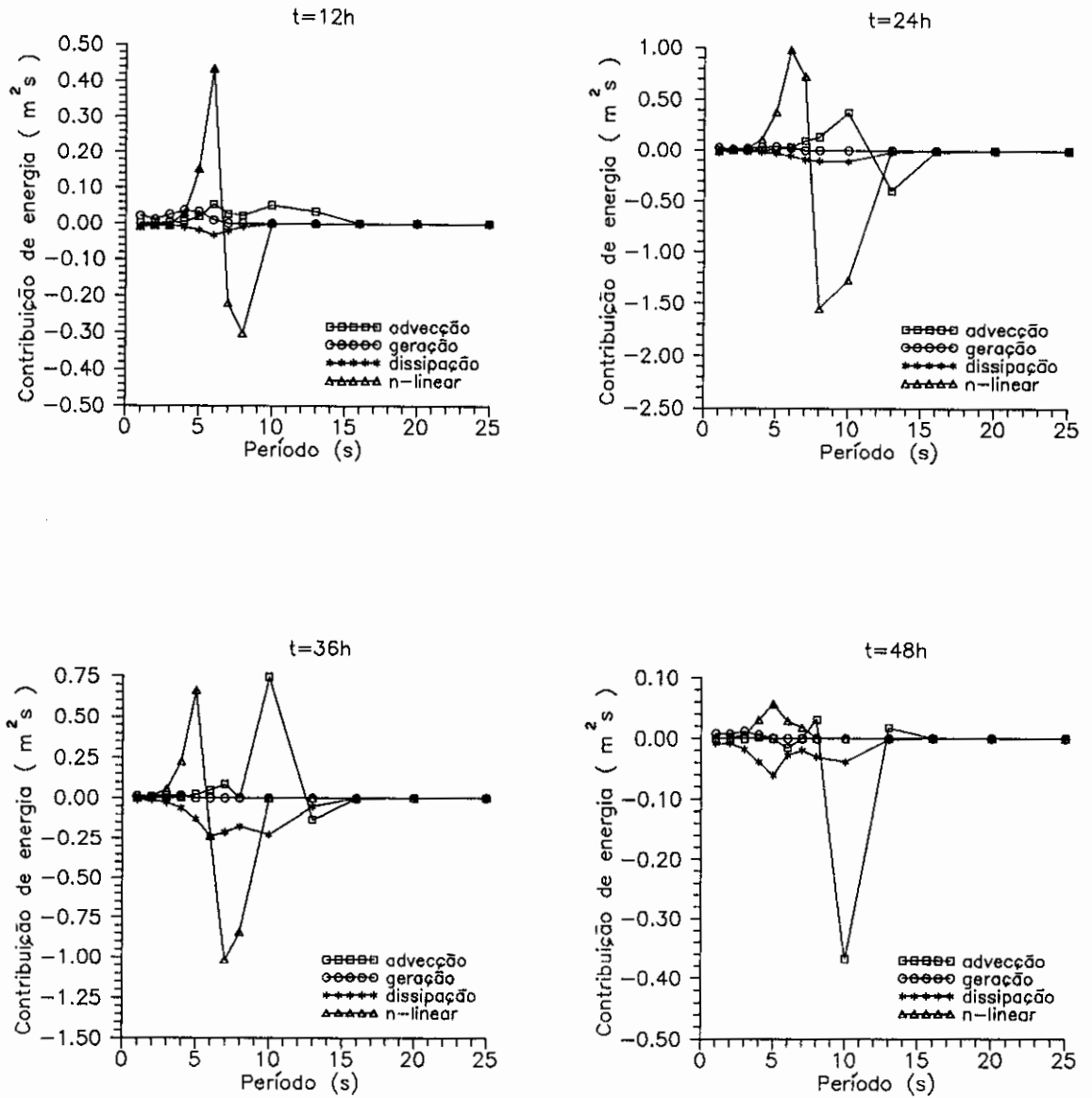


Fig. 5.19 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.

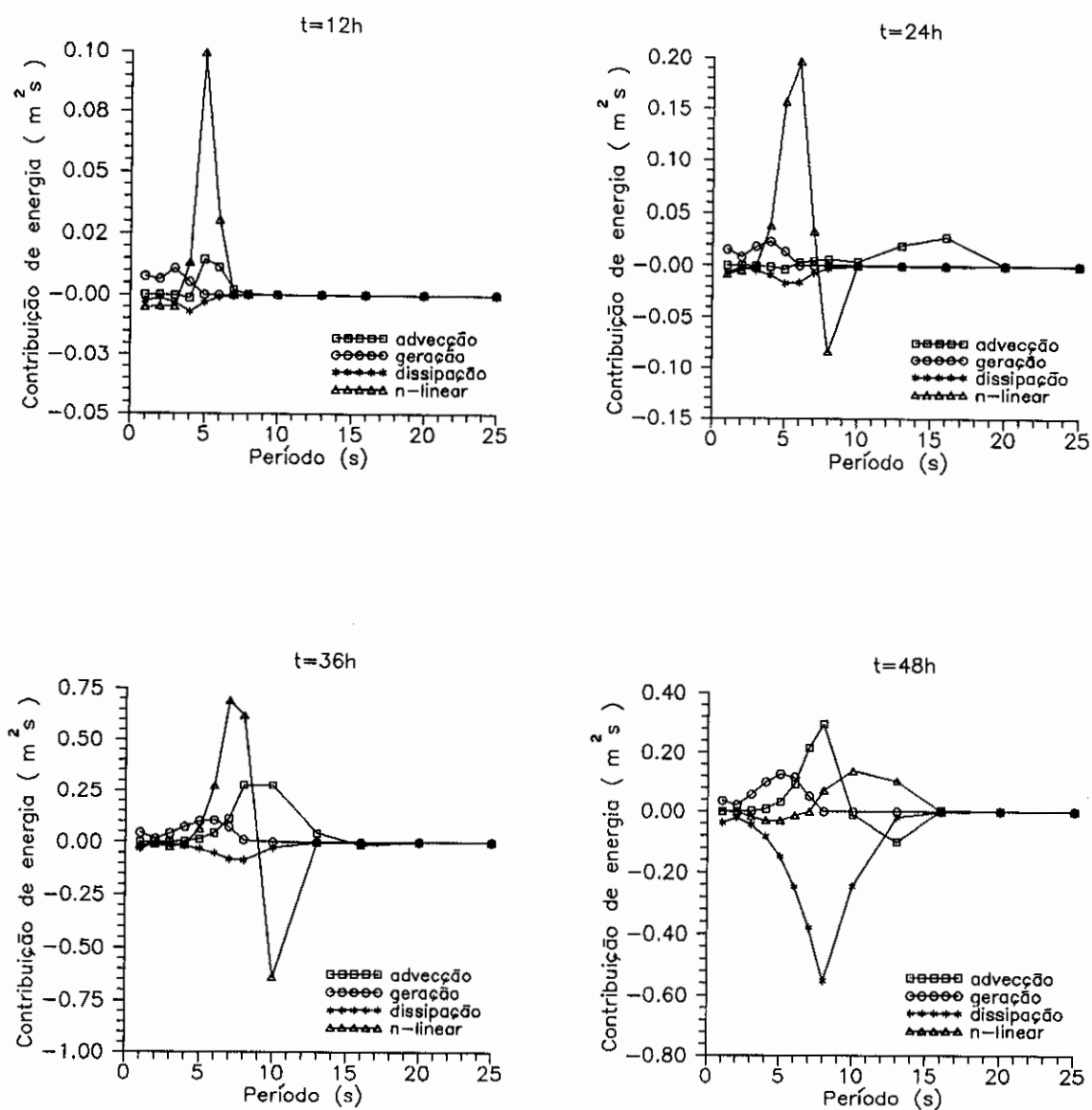


Fig. 5.20 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.

Observa-se uma migração muito pequena do pico positivo de contribuição de energia devida ao termo de interações não-lineares para períodos maiores à medida que o centro do vórtice se aproxima do ponto A, e para períodos menores quando o centro se afasta deste. Os dois picos separados de contribuição positiva de energia, devido aos termos de interações não-lineares e advecção, são os responsáveis pela distinção entre os espectros de vagas e ondulações observados na Figura 5.17.

Na Figura 5.20 (ponto B), a maior separação entre os picos de contribuição devida aos termos de interações não-lineares e advecção ocorre em  $t=24h$ . Pode-se notar, neste instante, uma separação bem marcante entre os dois picos na Figura 5.18. O pico positivo devido à contribuição do termo de interações não-lineares tende a migrar para períodos maiores com a aproximação do centro do vórtice. Nestes instantes, a separação entre os picos de contribuição devida aos termos de interações não-lineares e advecção não é muito distinta, o que faz com que não ocorra uma separação entre os espectros de vagas e ondulações, como se nota nos instantes  $t=36$  e  $48h$  da Figura 5.18.

A contribuição de cada termo na quantidade de energia por direção para os mesmos pontos A e B é mostrada nas Figuras 5.21 e 5.22, respectivamente. Na Figura 5.21 (ponto A) observa-se que o termo de advecção, no espectro referente às vagas, fornece uma contribuição negativa para as direções com ângulos menores do que o da direção de influência do vento e positiva para as direções maiores. Nos instantes  $t=24$  e  $36h$ , nota-se uma grande contribuição positiva do termo de advecção nos ângulos referentes ao espectro de ondulações, como observado na Figura 5.17. Em  $t=48h$ , situação em que o ponto encontra-se muito distante do centro do vórtice, ocorre uma contribuição negativa devida a este termo na região do espectro de ondulações.

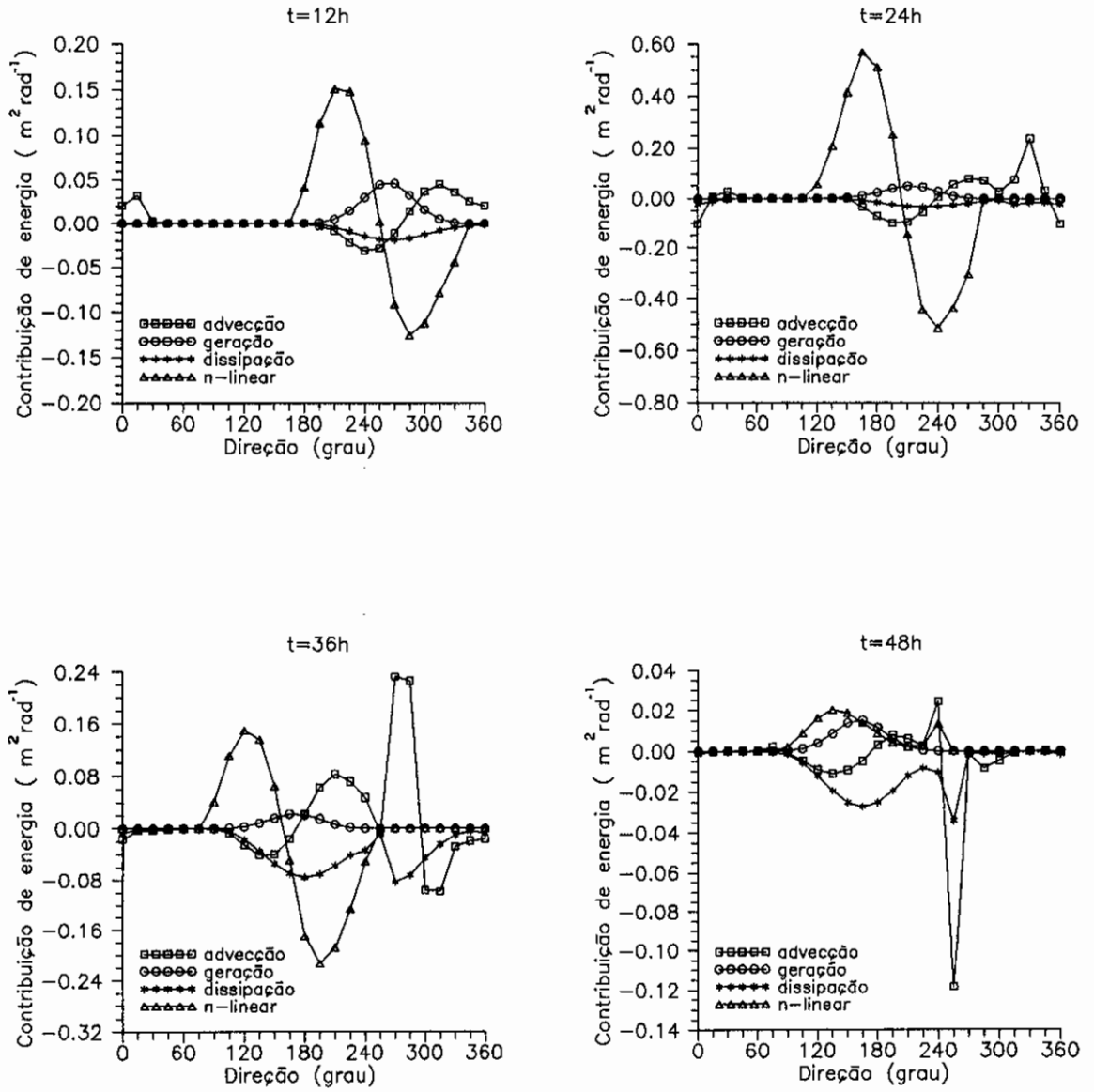


Fig. 5.21 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.

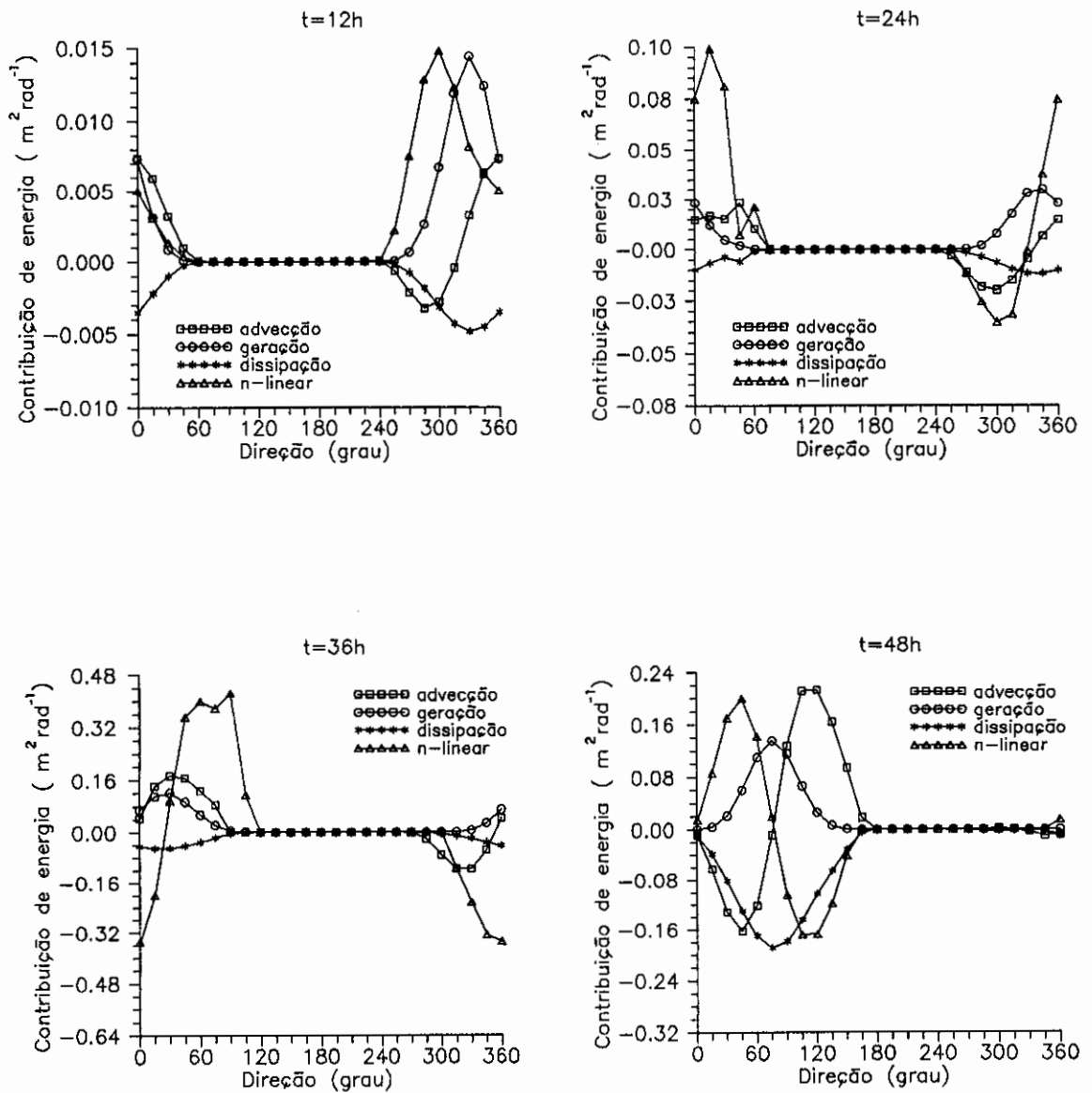


Fig. 5.22 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.

O termo de interações não-lineares, no espectro referente às vagas, contribui de forma contrária à do termo de advecção.

Em todos os instantes o termo de geração contribui somente no espectro referente às vagas, e a contribuição negativa devida ao termo de dissipação varia de acordo com a quantidade de energia.

Na Figura 5.22 (ponto B), observa-se, como nos casos anteriores, uma contribuição negativa, no espectro referente às vagas, devida ao termo de advecção para direções com ângulo menor do que o da direção de influência do vento, e positiva para direções com ângulo maior. Em  $t=24h$  observa-se um segundo pico de contribuição positiva devido ao termo de advecção, referente ao espectro de ondulações observado na Figura 5.18.

A contribuição do termo de interações não-lineares é contrária à do termo de advecção. O termo de geração contribui somente no espectro referente às vagas, e a contribuição do termo de dissipação tanto no espectro de vagas quanto no de ondulações varia de acordo com a quantidade de energia.

Com a aproximação do centro do vórtice, as contribuições dos termos passam a ter influência apenas no espectro de vagas.

## 5.5 BATIMETRIA REAL COM VENTO IDEALIZADO

Uma tentativa de testar o modelo em situações mais realísticas é apresentada nesta parte do trabalho, onde é utilizada batimetria real obtida através de cartas náuticas do DHN (1965 ,1966, 1967). A região considerada encontra-se entre as latitudes  $16^{\circ}S$  e  $28^{\circ}40'S$  e as

longitudes  $36^{\circ}43'W$  e  $49^{\circ}W$ . Por falta de dados de vento no oceano considerou-se um campo de vento idealizado onde a velocidade máxima é  $U=15m/s$ . Como nos experimentos anteriores, considerou-se que no instante inicial  $t=0h$  o oceano encontrava-se em repouso. A Figura 5.23 mostra a região em estudo, onde a linha cheia indica a linha da costa, as linhas tracejadas referem-se às batimetrias. Na fronteira próxima da costa foi considerada profundidade zero.

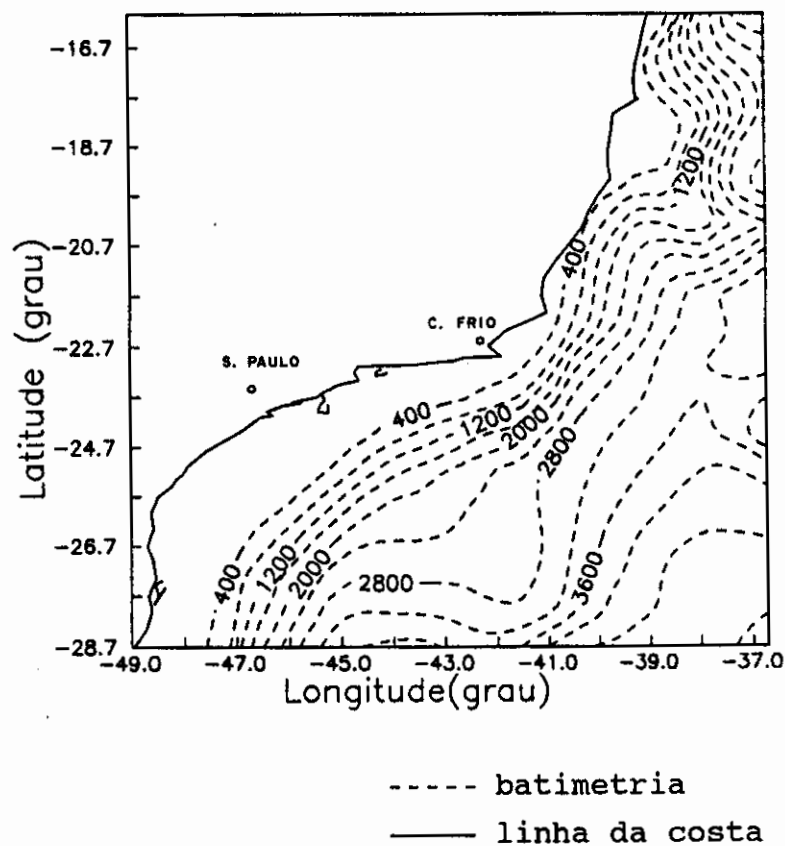


Fig. 5.23 - Região em estudo.

Na Figura 5.24 é mostrada a linha da costa (linha cheia) e os campos de vento (seta). A equação utilizada para estes campos é a mesma do experimento com vórtice ciclônico estacionário. Os pontos marcados com as letras A e B serão estudados separadamente. As



profundidades obtidas nas cartas náuticas para estes pontos são 30m e 8m, respectivamente. Foram escolhidos pontos próximos da costa para que os efeitos de refração e *shoaling* pudessem ser analisados.

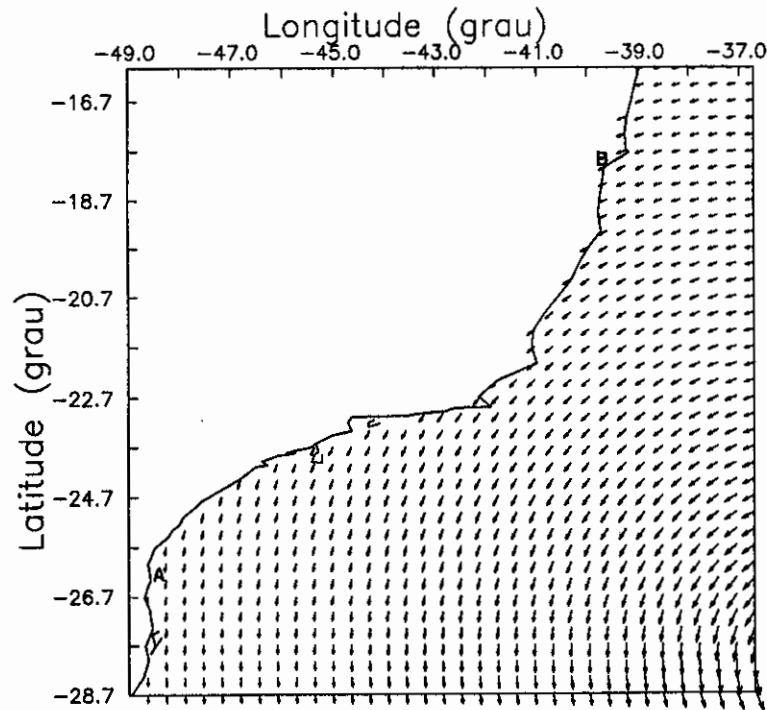


Fig. 5.24 - Campo de vento e linha da costa.

Os campos de direção preferencial de propagação de energia (setas) e altura de ondas (linha cheia), resultantes do campo de vento acima, são mostrados na Figura 5.25 para os instantes  $t=12, 24, 36$  e  $48h$ . Para a integração de  $48h$  houve um consumo de  $38min$  de tempo de processamento e  $8,8Mbytes$  de memória em uma Sparc Station 2. Nota-se na figura que, em todos os instantes, a direção preferencial de energia em cada ponto é praticamente a mesma da direção do vento. Nos instantes  $t=36$  e  $48h$ , podem-se observar alguns pontos, próximos da costa, em que ocorre uma mudança na direção preferencial de propagação de

energia, tornando-se praticamente perpendicular à costa. Ocorre uma grande concentração de energia no canto inferior direito, em todos os instantes, pois nesta região o vento possui maior intensidade.

t=12h

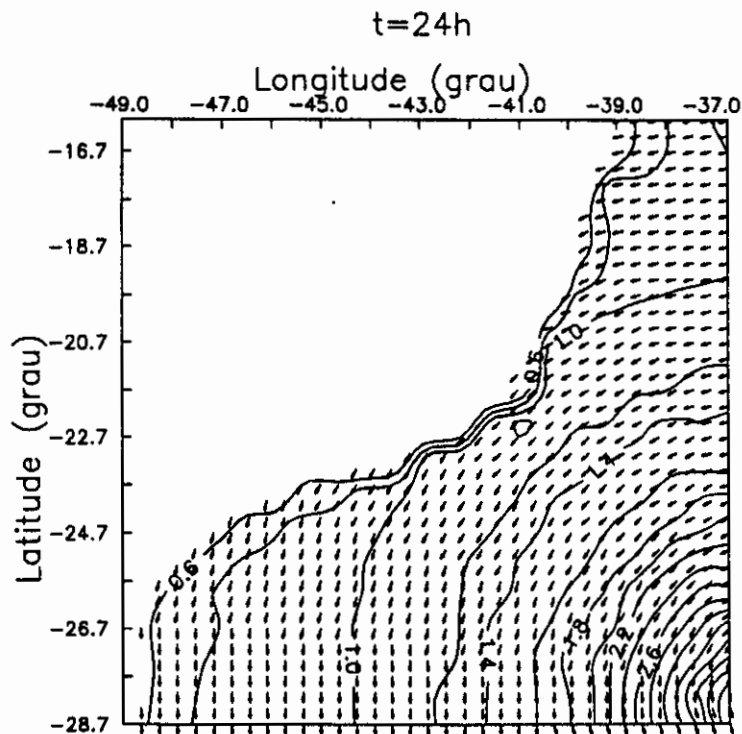
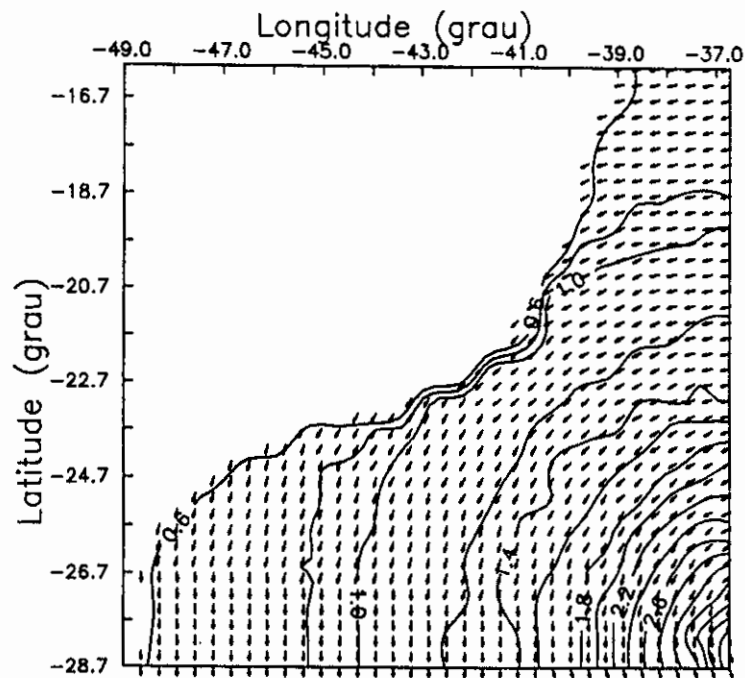
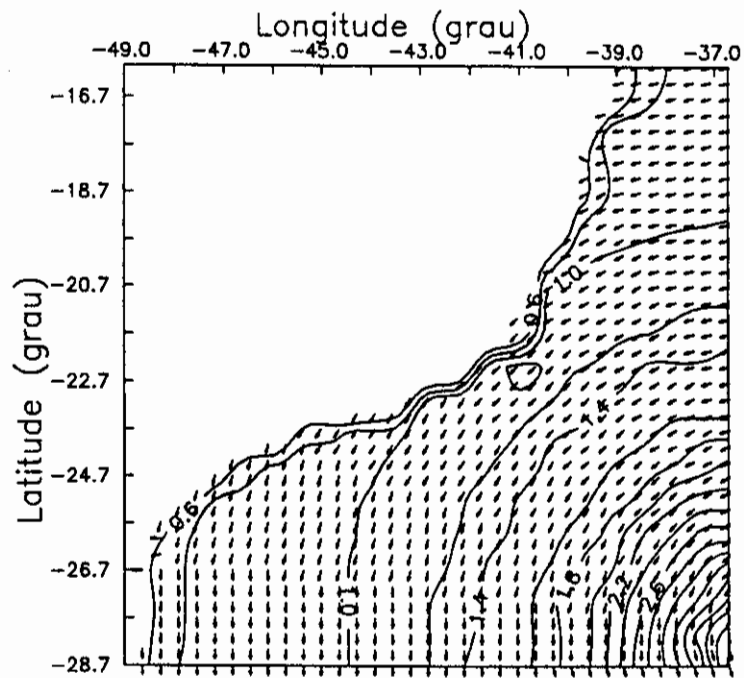


Fig. 5.25 - Isolinhas de altura (m) de onda e direções preferenciais de propagação de energia.

(continua)

t=36h



t=48h

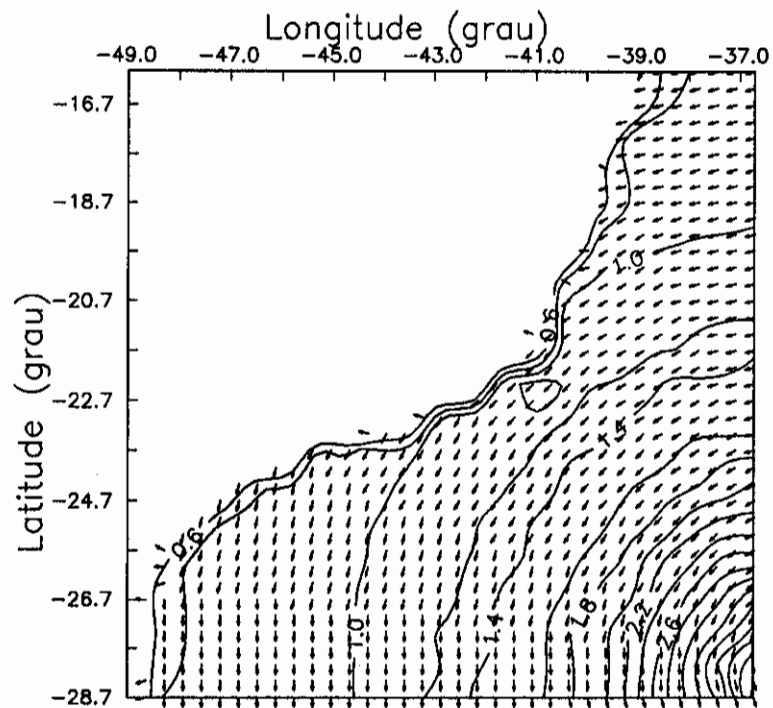


Fig. 5.25 - Conclusão.

Os espectros bidimensionais referentes aos pontos A e B são mostrados nas Figuras 5.26 e 5.27, respectivamente, onde a direção do vento está representada pela linha tracejada. Observa-se para os dois pontos uma distinção, com o tempo, entre os espectros de vagas e ondulações referentes aos períodos. Em  $t=48h$  observa-se no ponto A uma distinção também nas direções. O mesmo pode ser observado em  $t=36$  e  $48h$  para o ponto B.

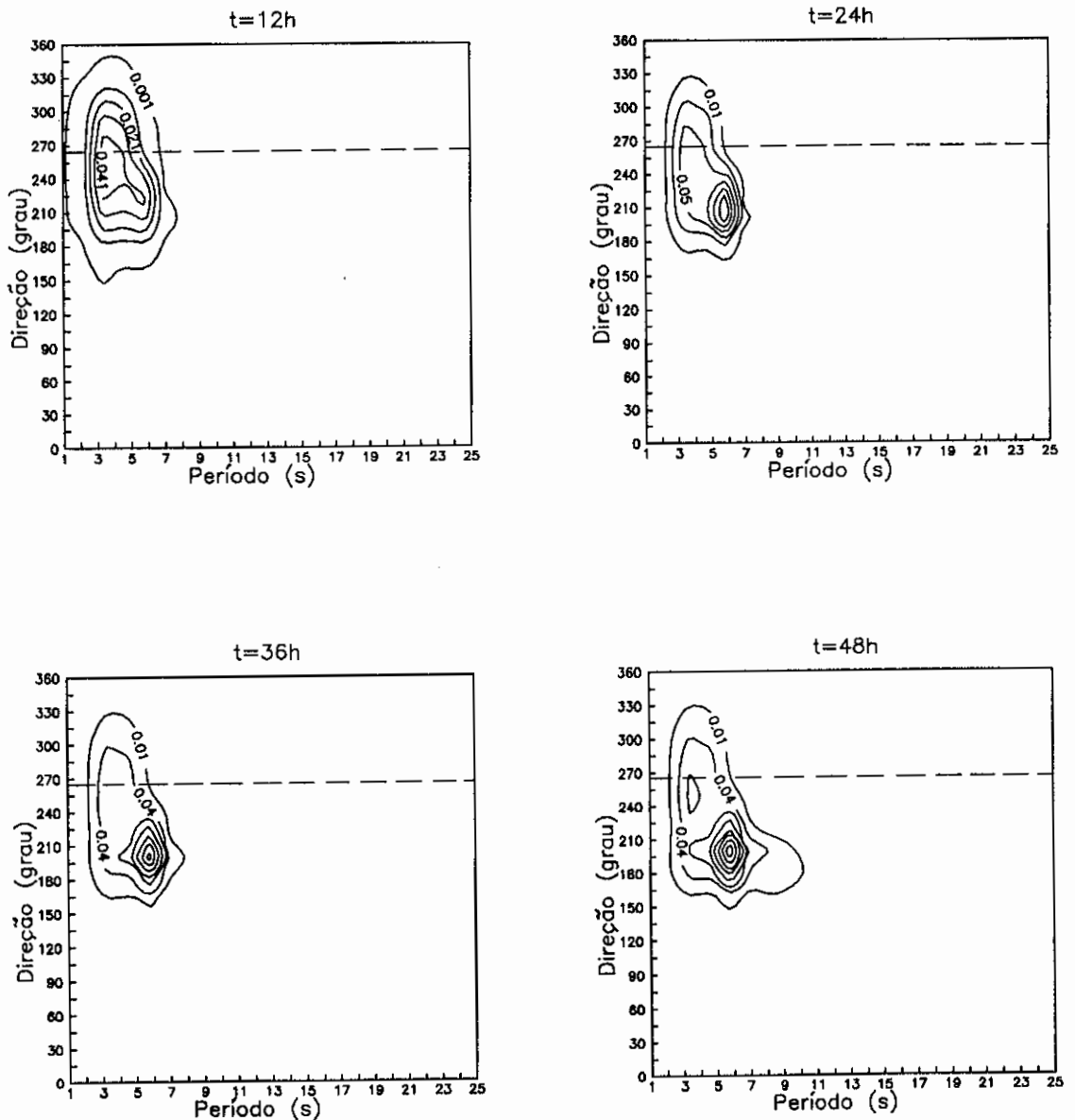


Fig. 5.26 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} s$ ) do ponto A.

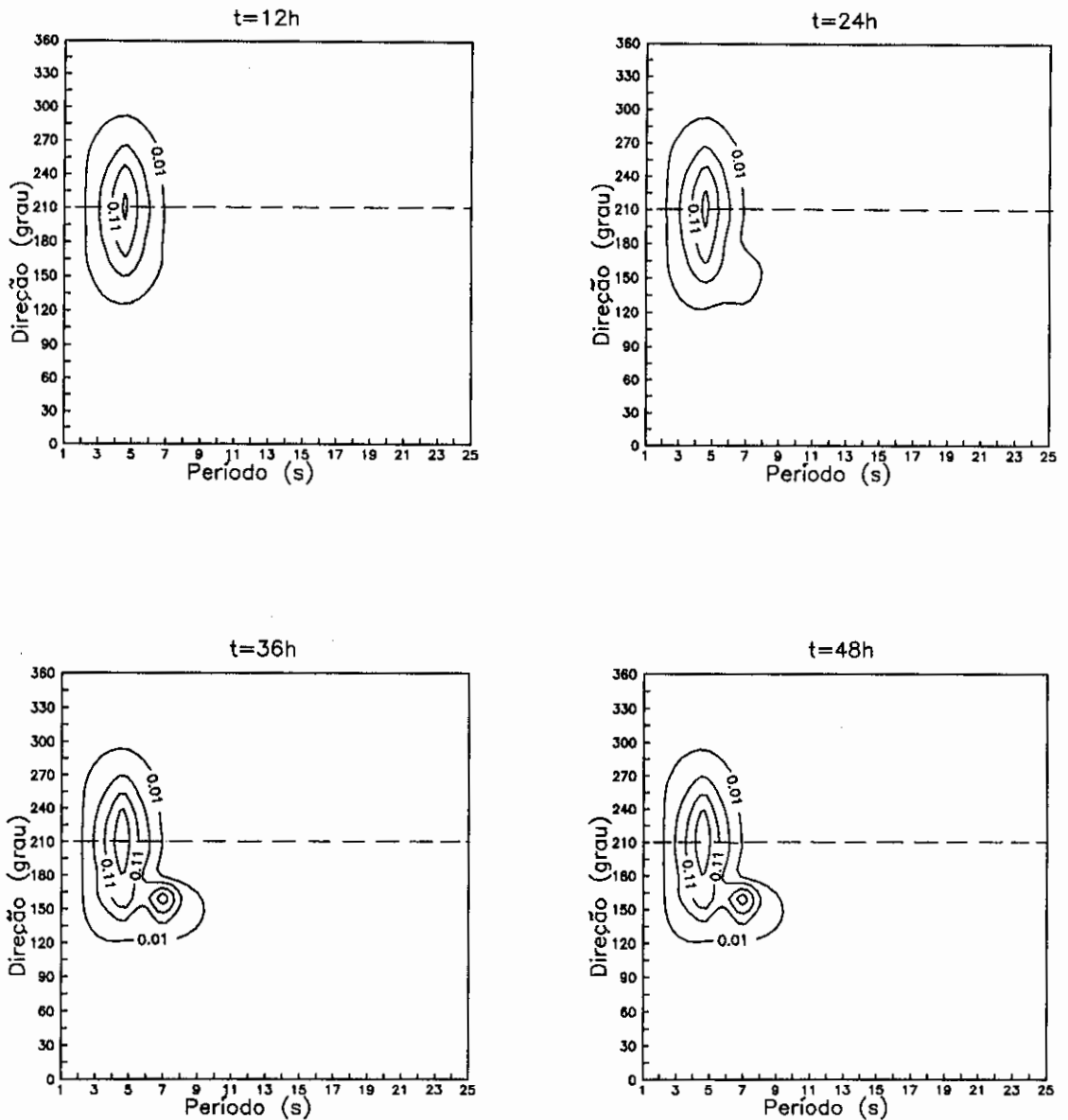


Fig. 5.27 - Espectro bidimensional de energia ( $m^2 \text{ rad}^{-1} s$ ) do ponto B.

As contribuições de cada termo de energia por unidade de período são mostradas nas Figuras 5.28 e 5.29, referentes aos pontos A e B, respectivamente. São incluídas, neste caso, as contribuições devidas aos termos de refração e *shoaling* causadas pela variação da profundidade do oceano. Tanto na Figura 5.28 (ponto A)

quanto na Figura 5.29 (ponto B), observa-se uma contribuição positiva de energia devida ao termo de geração nos períodos menores, referentes às vagas.

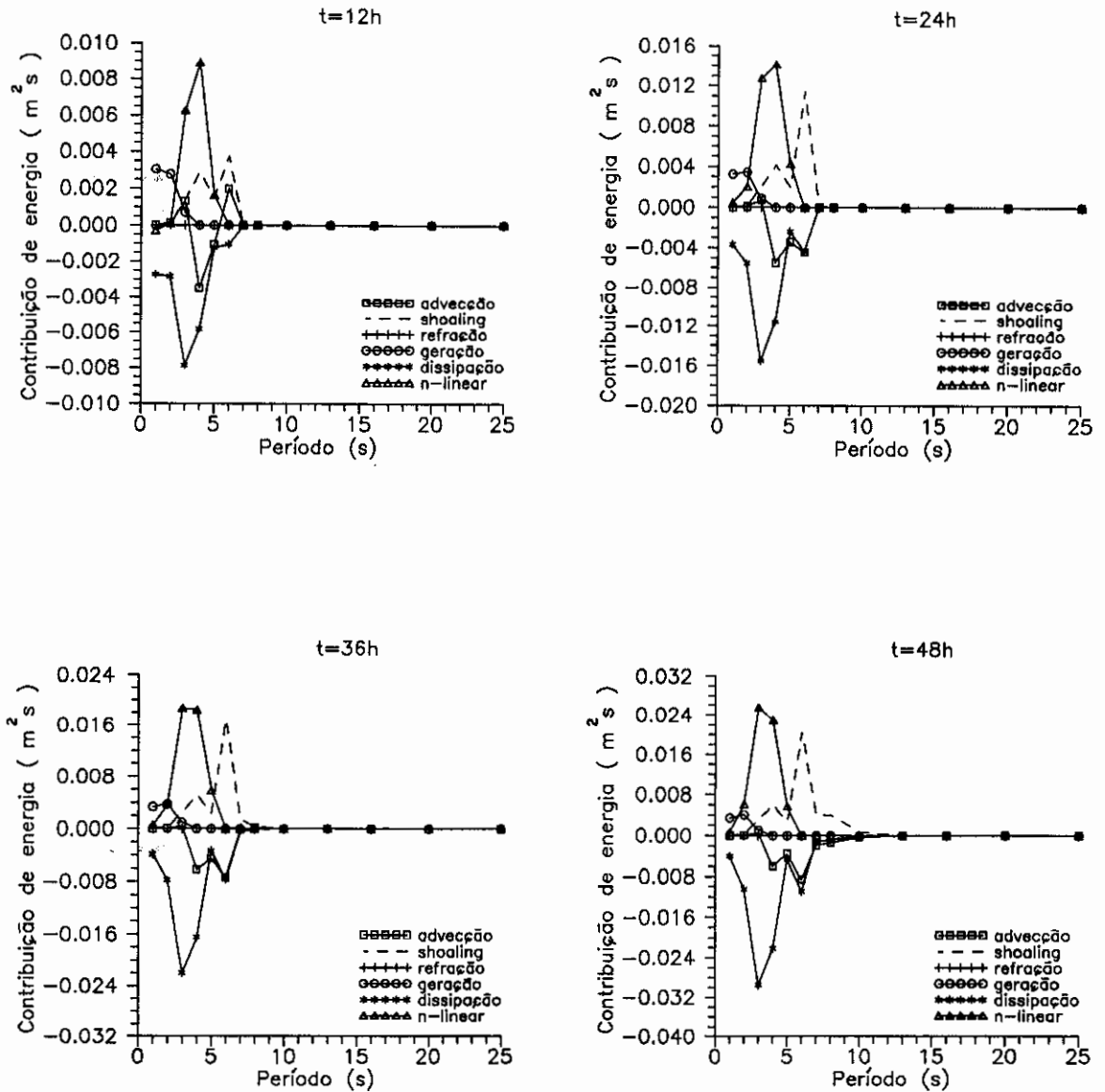


Fig. 5.28 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, shoaling, refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.

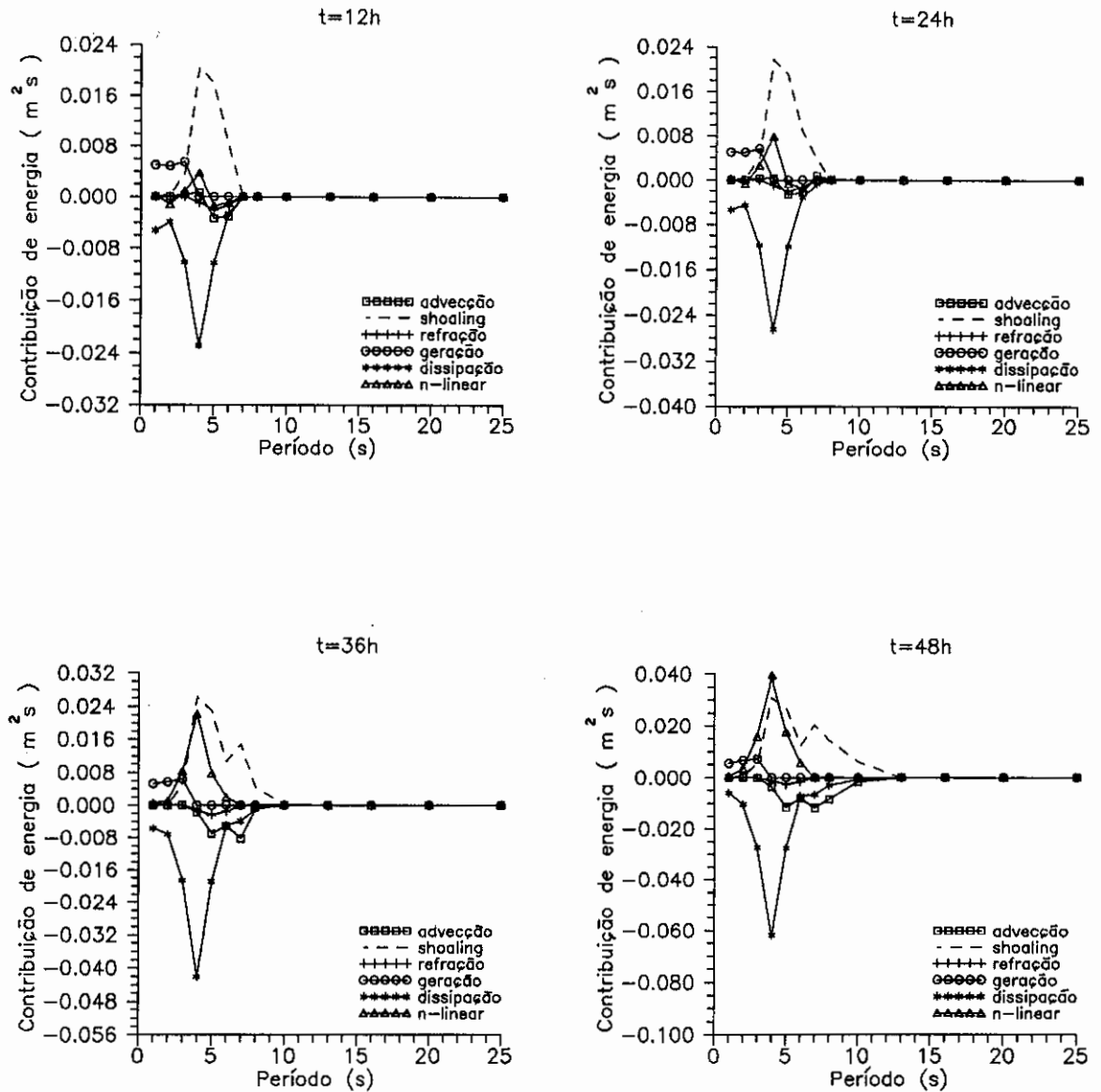


Fig. 5.29 - Contribuição de energia por unidade de período dos termos de advecção, shoaling, refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.

Os termos de dissipação e advecção são negativos em todos os instantes, tanto no espectro referente às vagas quanto no de ondulações.



Na contribuição devida ao termo de interações não-lineares, não é notado um deslocamento do pico para períodos maiores ou menores, com o decorrer do tempo.

Nota-se que o termo de *shoaling* é o responsável pelo segundo pico no espectro de períodos, encontrado nas Figuras 5.26 e 5.27. Na Figura 5.28 (ponto A), no espectro referente às vagas, a contribuição devida ao termo de interações não-lineares é maior do que a contribuição devida ao termo de *shoaling* em todos os instantes. No espectro de ondulações, observa-se uma contribuição devida ao termo de *shoaling* durante todo o tempo neste ponto.

Na Figura 5.29 (ponto B), observa-se para  $t=12$  e  $24h$  que a contribuição devida ao termo de *shoaling*, no espectro referente às vagas, é bem maior do que devida ao termo de interações não-lineares. Isto ocorre no ponto B, pois neste local a inclinação do fundo é maior do que a do ponto A, como pode ser observado na Figura 5.23. As ondas de curto período, próximas do ponto B, sofrem um forte efeito de *shoaling* neste local. Para  $t=36$  e  $48h$ , quando o oceano torna-se mais desenvolvido, as duas contribuições tornam-se equivalentes no espectro de vagas. Nestes instantes aparece uma contribuição positiva no espectro de ondulações devida ao termo de *shoaling*.

As Figuras 5.30 e 5.31 mostram as contribuições por direção, de cada termo para os pontos A e B, respectivamente. Na Figura 5.30 (ponto A) observa-se que, em  $t=12$  e  $24h$ , o termo de advecção, no espectro de vagas, fornece uma contribuição positiva para direções com ângulos menores do que a direção do vento, e negativa para direções com ângulos maiores. Nos instantes  $t=36$  e  $48h$ , nota-se o aparecimento, em direções de ângulos menores do que a direção do vento, de contribuições referentes ao

espectro de ondulações. Apesar de estas contribuições encontrarem-se em direções que estão sob a influência do vento, possuem períodos referentes às ondulações.

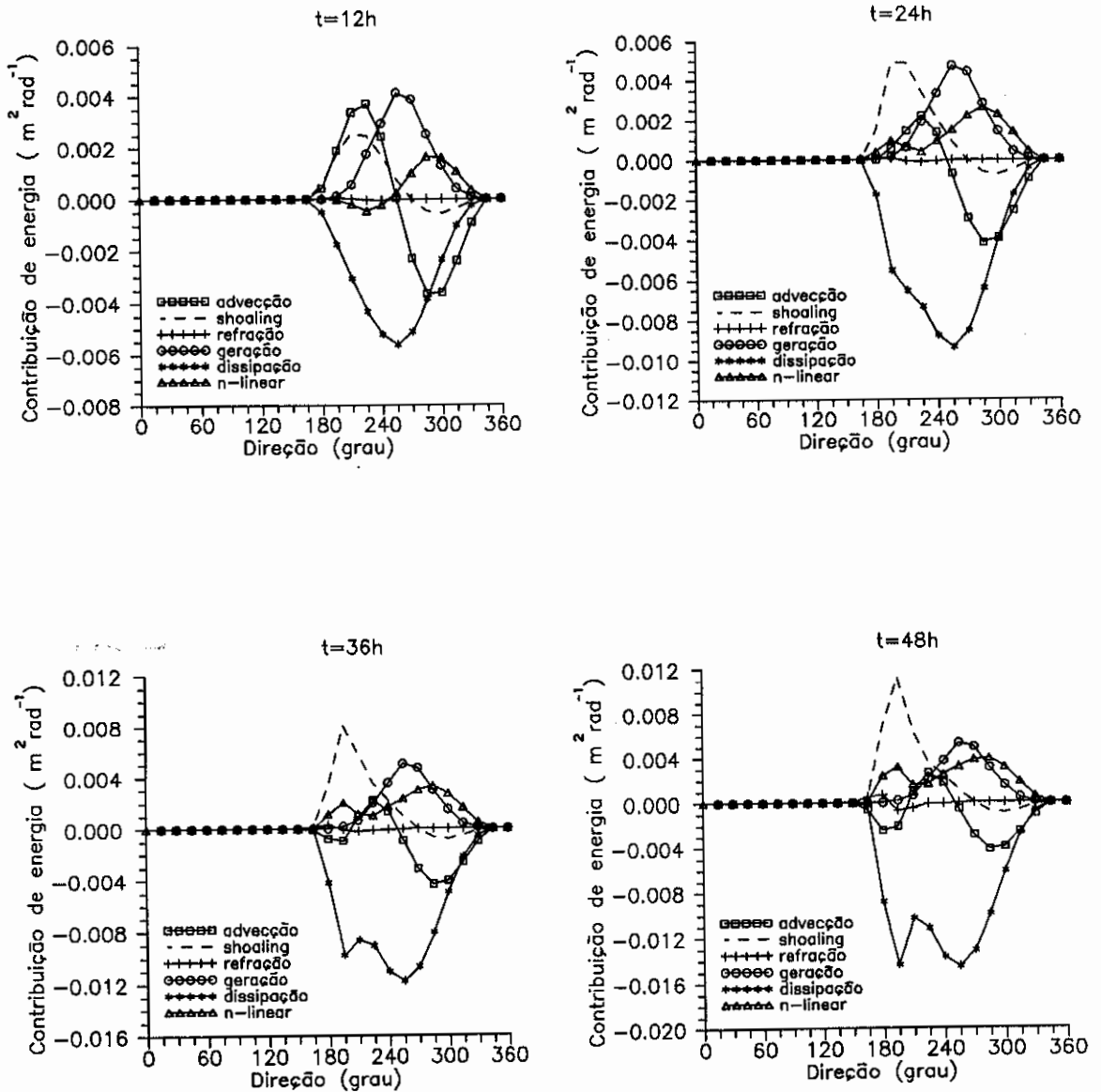


Fig. 5.30 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, shoaling, refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto A.

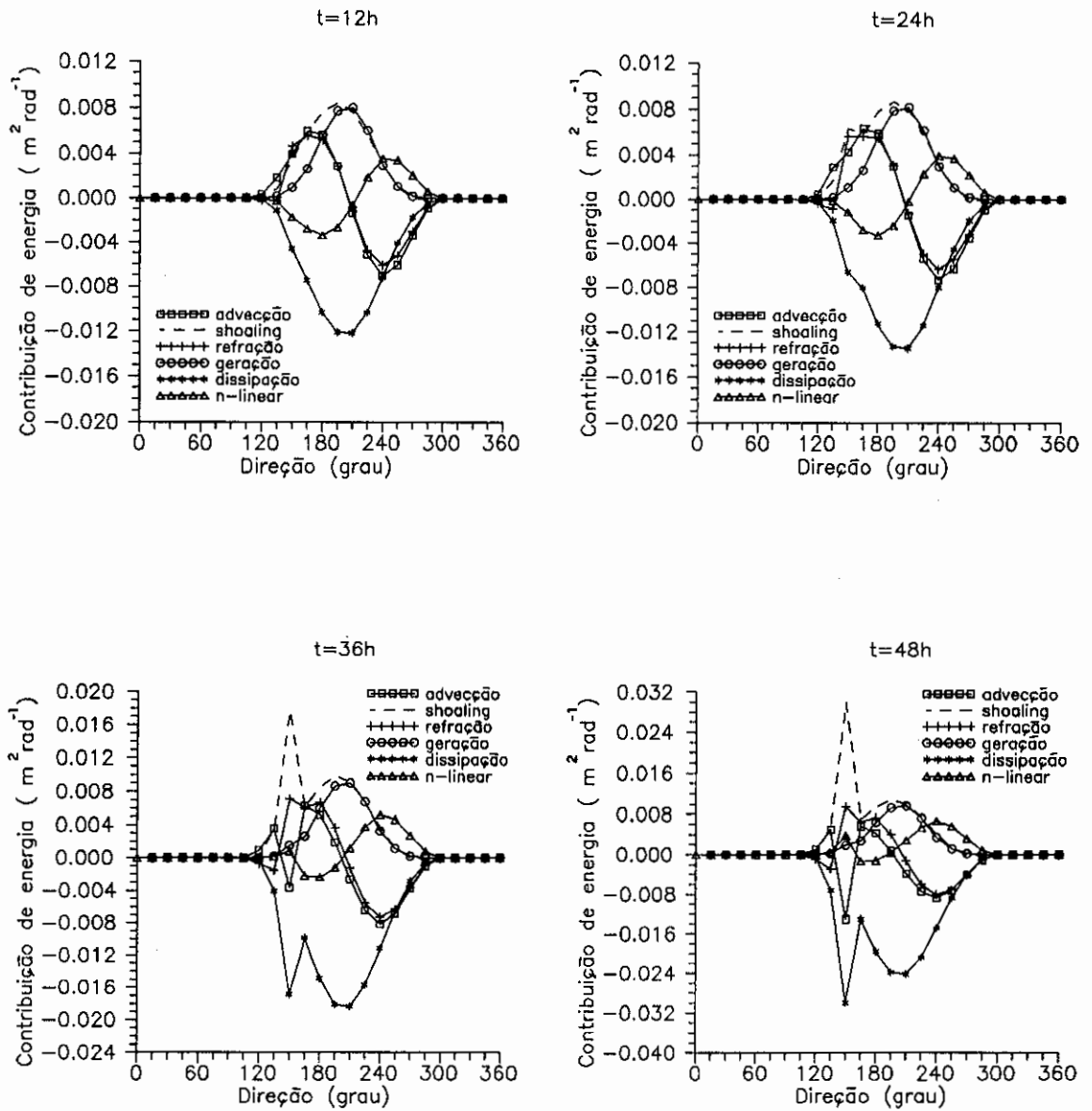


Fig. 5.31 - Contribuição de energia por direção dos termos de advecção, shoaling, refração, geração, dissipação e interações não-lineares no ponto B.

O termo de interações não-lineares contribui, no espectro referente às vagas, de maneira oposta à do termo de advecção. O termo de *shoaling*, em todos os instantes, fornece uma contribuição positiva para direções com ângulos menores do que a direção do vento, e negativa para ângulos maiores. A contribuição devida a este termo ocorre desta forma, pois a direção preferencial de propagação de energia encontra-se praticamente perpendicular ao  $\nabla H$ . A contribuição negativa é bem menor do que a positiva, e isto deve ocorrer devido ao fato de o ponto encontrar-se próximo à linha da costa, onde recebe, de acordo com este campo de vento, muita energia de direções com ângulos menores do que a direção do vento.

O termo de geração contribui apenas na região de influência do vento. O termo de dissipação fornece uma contribuição negativa, centrada na direção preferencial de propagação de energia; com o aparecimento de energia no espectro de ondulações, ocorre um pico negativo de contribuições devido a este termo, nas direções referentes às ondulações.

Nos instantes iniciais não é observada contribuição devida ao termo de refração. Com o passar do tempo, nota-se uma pequena contribuição de energia devido a este termo, ocorrendo um pico em  $\theta \approx 180^\circ$ , direção esta que deve ser paralela e de sentido oposto ao  $\nabla H$ .

Na Figura 5.31 (ponto B) a contribuição devida à refração é muito mais pronunciada do que no ponto A. Isto ocorre em virtude de a profundidade ser menor e de  $\nabla H$  ser maior neste ponto do que no anterior. Novamente o pico de contribuição positiva devido a este termo parece encontrar-se na direção paralela e de sentido oposto ao  $\nabla H$  ( $\theta \approx 150^\circ$ ).

Em  $t=12$  e  $24h$ , o termo de *shoaling* fornece uma contribuição centrada na direção preferencial de propagação de energia. Em  $t=36$  e  $48h$ , aparece um pico de contribuição deste termo, em  $\theta=150^\circ$ , que é referente ao espectro de período de ondulações notados na Figura 5.27.

Os outros termos contribuem da mesma maneira que contribuem para o ponto A.



## CAPÍTULO 6

### CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo de previsão de altura de ondas de superfície do mar geradas pelo vento. A única equação envolvida é a do balanço de energia e os mecanismos considerados neste trabalho para esta equação são a advecção, refração, geração, e dissipação de energia, *shoaling* e interações não-lineares. O termo de advecção de energia é obtido através de um esquema semilagrangiano que, por ser um esquema incondicionalmente estável, permite que seja utilizado um passo de tempo maior do que o permitido em outros esquemas numéricos.

O papel do termo de refração de fazer com que a direção de propagação de energia da onda mude ao atravessar regiões de diferentes profundidades é realizada de acordo com a lei de Snell. Estas mudanças de direção de propagação de energia provocam a convergência ou a divergência das ortogonais, dependendo de como se encontra o gradiente de profundidade e direção de propagação de energia, este efeito é considerado neste trabalho.

O crescimento das vagas tem o mesmo comportamento de um modelo paramétrico o que é obtido através de uma forma discreta de parametrizar o termo de interações não-lineares. Esta parametrização discreta é feita de modo que o espectro de frequências de vagas alcance o espectro de Kruseman (1976, citado por Janssen et al., 1984). Apesar de o espectro de JONSWAP (Hasselmann et al., 1973) ser bastante difundido em muitos modelos optou-se pelo de Kruseman pela sua forma bastante simples e performance semelhante ao JONSWAP. Este é, portanto, um modelo de segunda geração pois conhece-se a priori a forma

do espectro de vagas. Um modelo de terceira geração seria muito mais dispendioso tanto em tempo de processamento quanto em memória de máquina. O espalhamento angular de vagas é feito na forma de  $\cos^2(\theta)$ . Em situações de mudança do vento, considera-se que parte da energia contida no intervalo de direções referentes às vagas seja mantida na forma de ondulações, fazendo assim com que não ocorra uma diferença muito brusca na parte de transição do espectro direcional entre vagas e ondulações.

Considerou-se como dissipação apenas os efeitos realizados por quebra de ondas e *white capping*. A dissipação produzida pelo fundo do oceano não foi considerada devido à dificuldade de parametrizar este termo na falta de dados reais de altura de ondas de superfície do mar. Apesar disto, este modelo pode ser considerado de água rasa uma vez que, os efeitos realizados pelo fundo oceânico são incorporados nos termos de refração e *shoaling*; estes efeitos são "sentidos" quando ocorre variação na intensidade da velocidade de grupo da onda ao atravessar regiões de diferentes profundidades.

O ajuste, no espectro de vagas, dos termos de geração e dissipação de energia foi feito de acordo com as curvas de crescimento fornecidas por Sanders (1976). Estes ajustes mostraram-se bastante satisfatórios durante todo o estágio de desenvolvimento, para todas as velocidades de vento estudadas. As contribuições de energia, no espectro de vagas, dos termos de geração, dissipação e interações não-lineares em um oceano completamente desenvolvido são similares às encontradas por Hasselmann (1974, 1976). A dissipação na parte do espectro referente às ondulações é uma extensão da dissipação do espectro de vagas; para que ocorra um melhor ajuste nesta parte do modelo são necessários dados reais de medidas de altura de ondas no espectro de ondulações.



Foram feitos alguns experimentos numéricos para que os resultados pudessem ser comparados com modelos operacionais já existentes. No experimento em que ocorreu mudança brusca da direção do vento a parametrização do espectro direcional sugerida neste trabalho forneceu melhores resultados, na parte de transição entre ondulações e vagas, do que a parametrização apresentada no trabalho de Golding (1983). Esta diferença ocorre principalmente nos primeiros instantes após a mudança de direção do vento, com o passar do tempo, no entanto, as duas parametrizações tornam-se equivalentes.

No experimento em que foram comparadas curvas de crescimento de energia e frequências de pico adimensionais, limitadas pela área adimensional de ação do vento, dos modelos BMO, GONO, HYPAS e o modelo proposto, notou-se que as curvas obtidas através deste modelo são muito próximas das encontradas no modelo GONO que é um modelo operacional.

Na situação idealizada de um oceano que tenha ficado sob a influência de um vórtice ciclônico estacionário, por um certo tempo, pode-se notar que a direção de propagação de maior energia, nas regiões distantes do centro do vórtice, tornaram-se perpendiculares à direção do vento. Isto ocorreu devido à grande quantidade de energia, na forma de ondulações, que foram advectadas para estas direções. Para o caso do vórtice ciclônico em movimento a direção de propagação de energia torna-se bastante complicada, dependendo do ponto em estudo e da localização deste ponto em relação ao vórtice.

No experimento com batimetria real notou-se a contribuição de energia devida aos termos de *shoaling* e refração nas regiões mais rasas e onde o fundo era mais inclinado. A contribuição devida a refração só pode ser

observada em regiões muito rasas; para que este efeito possa ser notado mais claramente deve-se considerar uma malha mais fina. Isto implica, no entanto, em um consumo muito maior tanto de tempo quanto de memória de computador. Deve-se decidir, portanto, qual o propósito do estudo para que a dimensão da região em questão e o espaçamento de grade sejam maiores ou menores, dependendo das necessidades. Deve-se tomar cuidado ao diminuir o espaçamento da grade para que o termo de refração não torne-se instável.

Sugere-se como contribuições futuras :

- a) A implementação do termo de dissipação pelo fundo oceânico através de uma parametrização adequada pois em regiões próximas à costa este efeito é muito importante.
- b) Um melhor ajuste do termo de dissipação na parte do do espectro referente às ondulações, utilizando-se de medidas reais de ondas.
- c) A utilização do modelo em condições de vento reais para que possa ser estudado como o modelo se comporta diante de tais situações de vento.
- d) A utilização de técnicas de sensoriamento remoto para que o modelo possa ser inicializado através da energia de ondas obtidas através desta técnica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abecasis, F.M.; Castanho, J.P.; Carvalho, J.R. **A previsão características das ondas do mar.** Lisboa, Ministério das Obras Públicas, Laboratório Nacional de Engenharia, 1957. 215p. Memória 114.
- Bates, J.R.; Macdonald, A. Multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes: analysis and application to a multi-level primitive equation model. **Monthly Weather Review**, 110(12):1831-1842, Dec. 1982.
- Beer, T. **Environmental oceanography.** Oxford, Pergamon 1983. 262p.
- Carnahan, B.; Luther, H.A.; Wilkes, J.O. **Applied numerical methods.** New York, John Wiley and Sons, 1969. 604p.
- Collins, J.I. Prediction of shallow-water spectra. **Journal of Geophysical Research**, 77(15):2693-2707, May 1972.
- Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN) **Belmonte (BA) ao Rio de Janeiro (RJ) - Costa Leste:** carta náutica, escala 1:1091261 na latitude 19°50'. Rio de Janeiro, 1965.
- \_\_\_\_\_ **Rio de Janeiro (RJ) a Ilha de Santa Catarina (SC) - Costa Sul:** carta náutica, escala 1:1046128 na latitude 25°40'. Rio de Janeiro, 1966.
- \_\_\_\_\_ **Rio de Janeiro (RJ) ao Rio da Prata (Uruguai e Argentina):** escala 1:2376700 na latitude 29°30'. Rio de Janeiro, 1967.

- Donelan, M.A.; Plant, W.J. Symposium Overview, Johns Hopkins APL Technical Digest, 8(1):4-6, Jan.-Mar. 1987, Proceedings of the Symposium, Measuring Ocean Waves from Space Held at The Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory, April 15-17, 1986.
- Earle, M.D.; Bishop, J.M. A practical guide to ocean wave analysis, New York, Endeco, 1984. 78p.
- Earle, M.D. Microcomputer numerical ocean surface wave model. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 6:151-168, Feb. 1989.
- Gadd, A.J. A numerical advection scheme with small phase errors, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 104(441):583-594, July 1978.
- Golding, B. A wave prediction system for real-time sea state forecasting. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 109(460):393-416, Apr. 1983.
- Hasselmann, K. On the spectral dissipation of ocean waves due to whitecapping, Boundary Layer of Meteorology, 6(1):107-127, 1974.
- \_\_\_\_\_ A parametric wave prediction model, Journal of Physical Oceanography, 6(2):200-228, Mar. 1976.
- Hasselmann, D.E.; Dunckel, M.; Ewing, J.A. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). Deutsche Hydrographische Zeitschrift, A8(12):32-38, 1973.
- Haltiner, G.J.; Williams, R.T. Numerical prediction and dynamic meteorology, New York, John Wiley and Sons, 1980. 471p.

- Janssen, P.A.E.M.; Komen, G.J.; Voogt, W.J.P. An operational coupled hybrid wave prediction model. *Journal of Geophysical Research*, 89(C3):3635-3654, May 1984.
- Kinsman, B. *Wind waves their generation and propagation on the ocean surface*. New Jersey, Prentice-Hall, 1965. 676p.
- Lighthill, J. *Waves in fluid*. Cambridge, Cambridge University, 1978. 504p.
- Messinger, F.; Arakawa, A. *Numerical methods used in atmospheric models*. Geneve, WMO/ICSU Joint Organizing Committee, 1976. 64p. (WMO-GARP Publications Series 17)
- Miles, J.W. On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 3:185-204, Nov. 1957.
- \_\_\_\_\_ On the generation of surface waves by turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 7:469-478, Mar. 1960.
- Phillips, O.M. On the generation of waves by turbulent wind. *Journal of Fluid Mechanics*, 2:417-445, July 1957.
- \_\_\_\_\_ The equilibrium range in the spectrum of wind generated waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 4:426-434, Aug. 1958.
- Pielke, R.A. *Mesoscale meteorological modeling*. Orlando, Academic, 1984. 612p.

- Pierson, W.J.; Moskowitz, L. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. *Journal of Geophysical Research*, 69(24):5181-5203, Dec. 1964.
- Sanders, J.W. A growth-stage scaling model for the wind-driven sea. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 29(4):136-161, 1976.
- Shuman, F.G. Numerical methods in weather prediction, smoothing and filtering. *Monthly Weather Review*, 83(11):357-361, Nov. 1957.
- Smolarkiewicz, P.K. A simple positive definite advection scheme whith small implicit diffusion. *Monthly Weather Review*, 111(3):479-486, Mar. 1983.
- Snyder, R.L. et al. Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 102:1-59, Jan. 1981.
- SWAMP Group. *Ocean wave modeling*. New York, Plenum, 1985. 256p.
- SWIN Group. A shallow water intercomparison of three numerical wave prediction models (SWIM). *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 111(470): 1087-1112, Oct. 1985.
- Uji, T. A coupled discrete wave model MRI-II. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 40(4):303-313, Aug. 1984.
- WAMDI Group. A third generation ocean wave prediction model. *Journal of Physical Oceanography*, 18(12):1775-1810, Dec. 1988.

APÊNDICE ADEMONSTRAÇÃO DAS RELAÇÕES DE HAMILTON

Considera-se que a energia  $E$  possa ser escrita da mesma forma que a apresentada em Lighthill (1978),

$$E(\underline{x}, t) = A(\underline{x}, t) \exp \{i \phi(\underline{x}, t)\} , \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$\phi = \text{fase};$$

$$\underline{k} = (k_1, k_2) = \underline{\nabla} \phi = \text{número de onda};$$

$$\underline{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} \right) ,$$

$$\sigma = - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{frequência angular.}$$

Supondo-se que o meio seja totalmente não-homogêneo, onde a frequência angular dependa de  $\underline{k}$  e de  $\underline{x}$  através da relação de dispersão:

$$\sigma = \sigma(x, y, k_1, k_2) = \sigma \left( x , y , \frac{\partial \phi}{\partial x} , \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) , \quad (\text{A.2})$$

$$c_{g_x} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_1} \quad \text{e} \quad c_{g_y} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_2} , \quad (\text{A.3})$$

chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial \sigma}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} , \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} = - \frac{\partial \sigma}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} , \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

que pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial k_1}{\partial t} = - c_{g_x} \frac{\partial k_1}{\partial x} - c_{g_y} \frac{\partial k_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} , \\ \frac{\partial k_2}{\partial t} = - c_{g_x} \frac{\partial k_2}{\partial x} - c_{g_y} \frac{\partial k_2}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} . \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Portanto,

$$\frac{dk_1}{dt} = - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{dk_2}{dt} = - \frac{\partial \sigma}{\partial y} , \quad (\text{A.6})$$

conhecidas como relações de Hamilton.



APÊNDICE BVARIAÇÃO DA FREQUÊNCIA ANGULAR COM O TEMPO

Deseja-se demonstrar que  $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ , mas:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial k_1} \frac{dk_1}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial k_2} \frac{dk_2}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} \\ + \frac{\partial\sigma}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} , \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

desde que  $\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$  ,

pois  $\sigma$  depende apenas de  $k_1$ ,  $k_2$  e da profundidade em um ponto fixo; então:

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_{g_x} \frac{dk_1}{dt} + c_{g_y} \frac{dk_2}{dt} + c_{g_x} \frac{\partial\sigma}{\partial x_1} + c_{g_y} \frac{\partial\sigma}{\partial x_2} . \quad (\text{B.2})$$

Usando as relações de Hamilton (Apêndice A), obtém-se:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 ; \quad (\text{B.3})$$

sabendo que  $\sigma = 2\pi f$ , então:

$$\frac{df}{dt} = 0 . \quad (\text{B.4})$$



APÊNDICE CCOMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS NUMÉRICOS

Quando são feitas aproximações de equações diferenciais através de esquemas de diferenças finitas, deve-se analisar se a representação numérica é linearmente estável, para pequenas perturbações. Sendo o esquema linearmente estável deve-se observar como se comportam as fases e amplitudes comparadas com os resultados analíticos. A representação numérica deve ainda convergir para a equação diferencial quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ .

Neste apêndice são mostrados alguns esquemas de diferenças finitas aplicados à equação de taxa de variação local de energia devida à propagação e ao *shoaling*, como é o caso da Equação 4.1. Esta equação pode ser considerada de uma forma mais geral como se segue:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{v} \cdot (\underline{v} F) = 0 \quad , \quad (C.1)$$

onde  $F$  representa a variável dependente e  $\underline{v}$  é o vetor velocidade dependente do espaço. A descrição dos esquemas *leapfrog*, Lax-Wendroff modificado por Gadd (1978), *upstream* e de Smolarkiewicz (1983) aplicados à Equação C.1 e os resultados obtidos são apresentados a seguir.

a) Esquema *leapfrog*

Considerando a Equação C.1 e utilizando o esquema *leapfrog* de diferenças finitas, obtém-se:

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^{n-1}}{2\Delta t} = - \frac{V_{i+1}^n F_{i+1}^n - V_{i-1}^n F_{i-1}^n}{2\Delta x}, \quad (C.2)$$

onde  $n$  é usado para indicar o passo de tempo;  $i$  indica a localização do ponto de grade na direção  $x$ ;  $\Delta t$  é o intervalo de tempo; e  $\Delta x$  é o intervalo de grade na direção  $x$ . O critério de estabilidade é  $|C| \leq 1$  (Messinger e Arakawa, 1976), onde:

$$C = v \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (C.3)$$

Ao considerar-se uma onda como a solução da equação diferencial, o esquema *leapfrog* apresenta, quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , uma solução física e uma outra solução que não possui significado físico, que é um modo computacional, sendo esta a grande desvantagem deste esquema. Por ser um esquema centrado no tempo, o esquema *leapfrog* apresenta uma separação de variáveis que pode ser controlada através de um filtro no tempo. Usou-se o filtro de Shuman (1957) no tempo, denominado filtro de Asselim (Haltiner e Williams, 1980), representado por:

$$\overline{F}^{n-1} = F^n + 0,05 (F^{n+1} + F^{n-1} - 2F^n), \quad (C.4)$$

onde  $\overline{F}^{n-1}$  é a variável filtrada.

A análise do comportamento de fases e amplitudes encontra-se no fim do apêndice, onde são comparados os resultados de todos os esquemas numéricos.

## b) Esquema de Lax-Wendroff modificado por Gadd

A solução da Equação C.1, utilizando o esquema de Lax-Wendroff modificado por Gadd, é obtida através de dois passos de integração, dos quais o primeiro é:

$$F_{i+1/2}^{n+1/2*} = \frac{1}{2} \left( F_{i+1}^n + F_i^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( v_{i+1}^n F_{i+1}^n - v_i^n F_i^n \right) . \quad (C.5)$$

O segundo passo é usado para que seja obtido o valor definitivo da variável.

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \left\{ (1+a) \left( v_{i+1/2}^{n+1/2} F_{i+1/2}^{n+1/2*} - v_{i-1/2}^{n+1/2} \times F_{i-1/2}^{n+1/2*} \right) - \frac{a}{3} \left( v_{i+3/2}^{n+1/2} F_{i+3/2}^{n+1/2*} - v_{i-3/2}^{n+1/2} F_{i-3/2}^{n+1/2*} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right\} , \quad (C.6)$$

onde:

$$a = \frac{3}{4} \left\{ 1 - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} v_i \right)^2 \right\} . \quad (C.7)$$

O esquema acima não possui, como o esquema anterior, um modo computacional e seu critério de estabilidade é  $|C| \leq 1$  (Gadd, 1978).

c) Esquema *upstream*

O esquema *upstream* para a equação de propagação de energia é:

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} = \begin{cases} - \frac{v_{i+1}^n F_{i+1}^n - v_i^n F_i^n}{\Delta x} & v \leq 0 \\ - \frac{v_i^n F_i^n - v_{i-1}^n F_{i-1}^n}{\Delta x} & v > 0 \end{cases} \quad (C.8)$$

O critério de estabilidade do esquema *upstream* é  $C \leq 1$  (Pielke, 1984). Este esquema apresenta a vantagem de conservar a positividade da função e a desvantagem de possuir uma forte difusão implícita.

## d) Esquema de Smolarkiewicz

O esquema *upstream* descrito anteriormente é um esquema de primeira ordem tanto no espaço quanto no tempo; além disso, possui uma forte difusão implícita. O esquema de Smolarkiewicz é obtido expandindo a Equação (C.1) em uma série de Taylor de segunda ordem, como uma tentativa de diminuir a difusão implícita do esquema anterior. Smolarkiewicz obteve, desta forma, basicamente um esquema *upstream* acrescido de um termo antidifusivo. O esquema é obtido através de dois passos de integração, dos quais o primeiro é:

$$F_i^* = F_i^n - \left\{ G \left( F_i^n, F_{i+1}^n, v_{i+1/2}^n \right) - G \left( F_{i-1}^n, F_i^n, v_{i-1/2}^n \right) \right\} \quad (C.9)$$

onde:

$$G \left( F_1, F_{1+1}, v \right) = \left[ \left( v + |v| \right) F_1 + \left( v - |v| \right) F_{1+1} \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} . \quad (C.10)$$

O segundo passo para que seja obtido o valor definitivo da variável é:

$$F_1^{n+1} = F_1^* - \left\{ G \left( F_1^*, F_{1+1}^*, \tilde{v}_{1+1/2} \right) - G \left( F_{1-1}^*, F_1^*, \tilde{v}_{1-1/2} \right) \right\} , \quad (C.11)$$

onde:

$$\tilde{v}_{1+1/2} = \frac{\left( |v_{1+1/2}| \Delta x - \Delta t v_{1+1/2}^2 \right) \left( F_{1+1}^* - F_1^* \right)}{\left( F_1^* + F_{1+1}^* + \delta \right)} , \quad (C.12)$$

onde  $\delta$  é um valor muito pequeno para assegurar que o denominador seja diferente de zero quando  $F_{1+1}^* = F_1^* = 0$ .

Pode-se diminuir a difusão implícita do esquema introduzindo um coeficiente de correção (Sc) em  $v$  do segundo passo de integração.

O critério de estabilidade do esquema proposto acima (Smolarkiewicz, 1983) é:

$$C = \max_i \left( \frac{|\tilde{v}_{i+1/2}| \Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1 . \quad (C.13)$$

## e) Comparação entre os esquemas

As Figuras C.1, C.2 e C.3 mostram o comportamento de uma curva gaussiana com o tempo para  $v$  constante dos esquemas *leapfrog* sem filtro (a), *leapfrog* com filtro de Asselin (b), Smolarkiewicz sem coeficiente de correção (c), Smolarkiewicz com  $Sc=1,06$  (d), *upstream* (e), Lax-Wendroff modificado por Gadd (f), semilagrangiano em conjunto com esquema centrado (g) e resultado analítico (h), para os valores de  $C=0,2$ ,  $C=0,5$  e  $C=0,7$  respectivamente. O esquema *leapfrog* apresenta a fase um pouco atrasada e valores negativos bastante altos, o que ocorre com mais frequência à medida que  $C$  aumenta de valor. A inclusão do filtro de Asselin faz com que ocorra, com o aumento do valor de  $C$ , uma diminuição nos valores negativos, assim como na amplitude da curva. Pode-se notar que o esquema *upstream*, apesar de conservar a fase e a positividade da função, é um esquema bastante difusivo e amortecedor. O esquema de Smolarkiewicz também conserva a positividade da função e possui a vantagem de ser menos difusivo do que o esquema *upstream*. Com o acréscimo do coeficiente de correlação  $Sc=1,06$ , ocorre ainda uma pequena difusão da curva que provoca uma diminuição da amplitude; a fase é conservada. O esquema Lax-Wendroff modificado por Gadd apresenta valores negativos razoavelmente baixos; a amplitude é muito pouco amortecida; e a fase é sempre, independente do valor de  $C$ , um pouco adiantada em relação à analítica. O esquema semilagrangiano também apresenta valores negativos. A fase torna-se, com o decorrer do tempo, um pouco atrasada para  $C<0,5$  e adiantada para  $C>0,5$ ; e a amplitude da curva é um pouco amortecida. A análise das figuras mostra que o esquema Lax-Wendroff modificado por Gadd apresenta-se um pouco mais eficiente para representar a propagação e *shoaling* neste tipo de estudo do que o esquema semilagrangiano. Optou-se, no entanto, pelo último porque este esquema é incondicionalmente estável,



podendo-se assim utilizar um  $\Delta t$  maior do que nos outros esquemas.

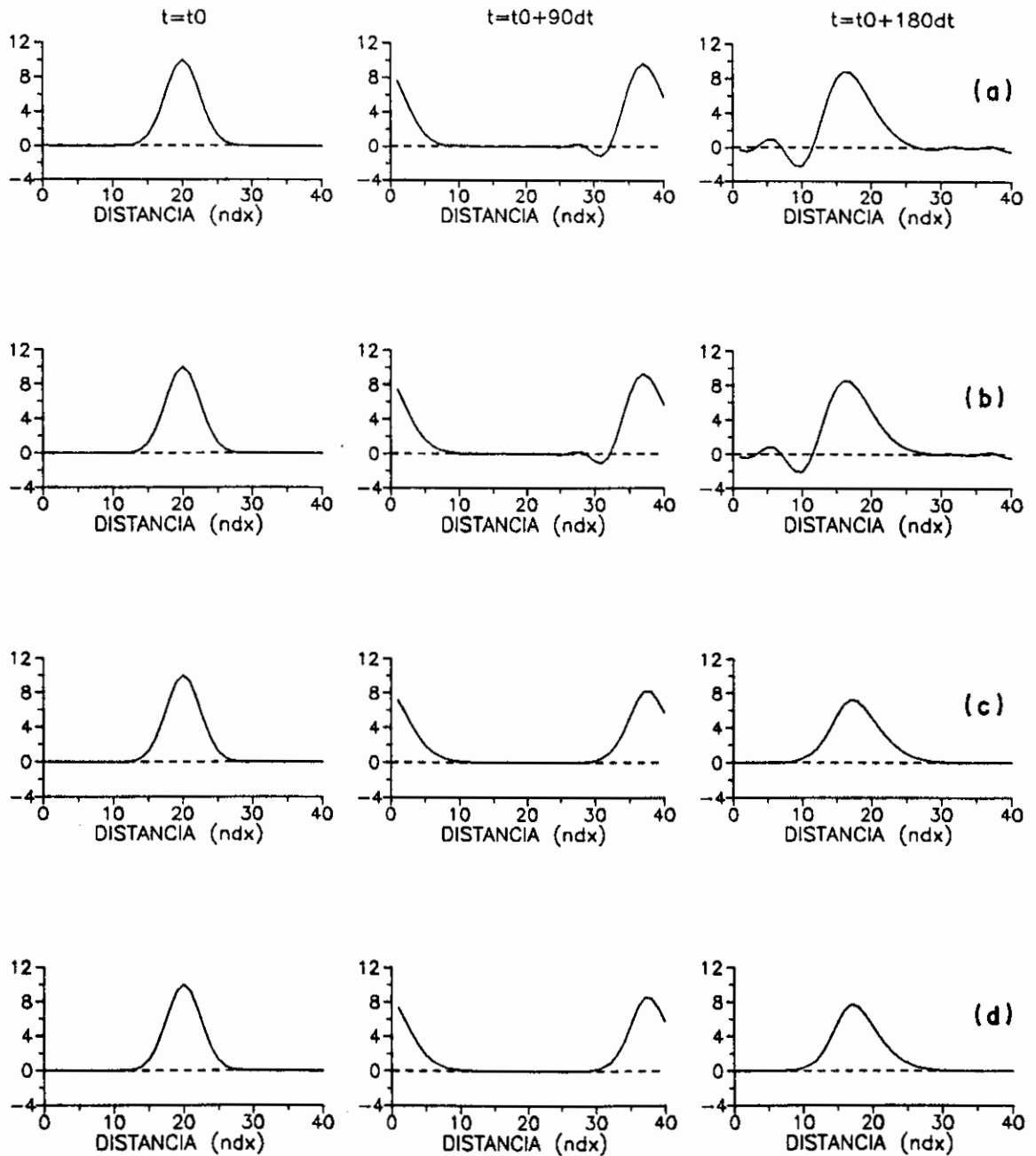


Fig. C.1 - Comportamento de uma curva gaussiana com o tempo para  $C=0,2$ .

(continua)

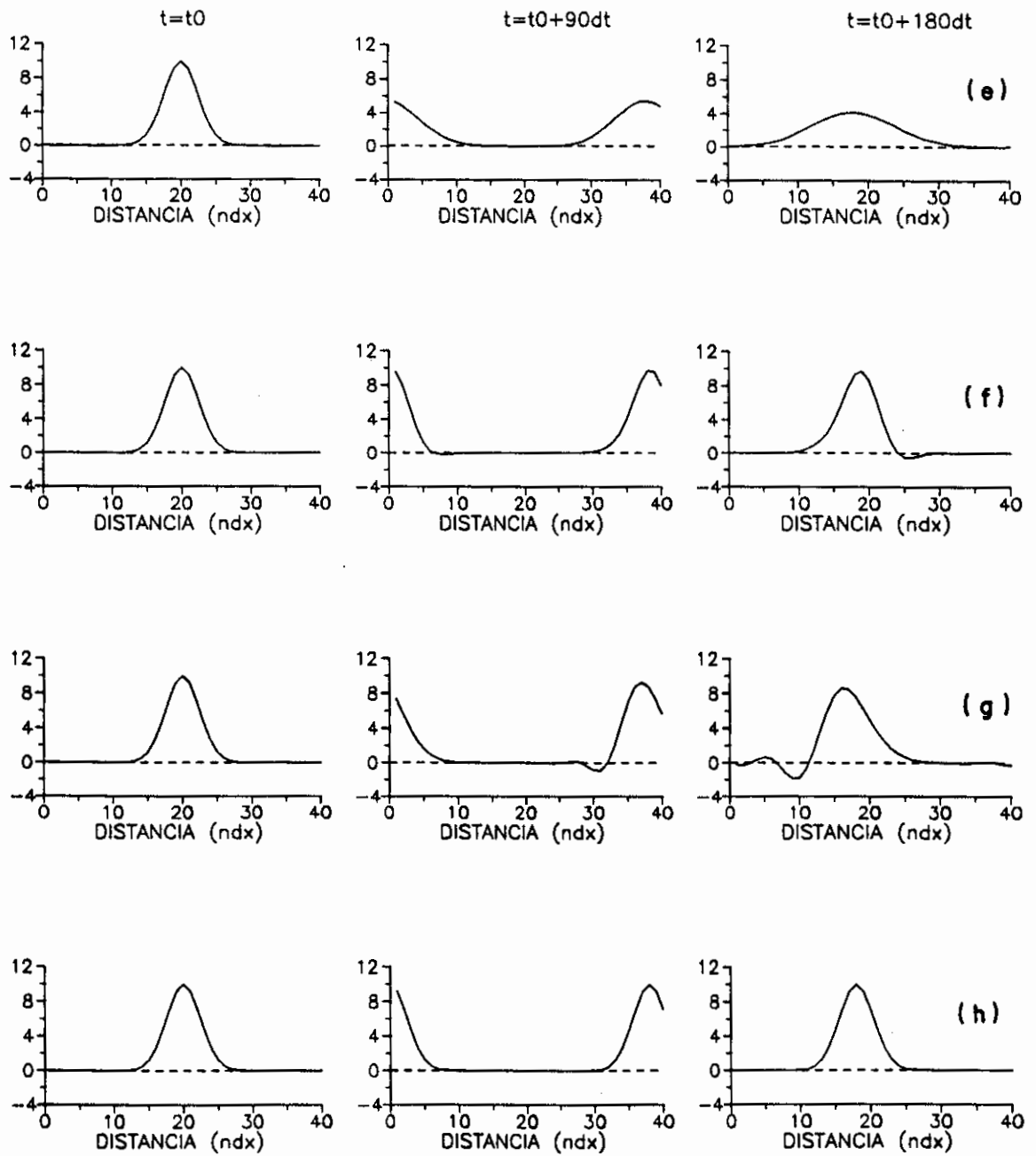


Fig. C.1 - Conclusão.

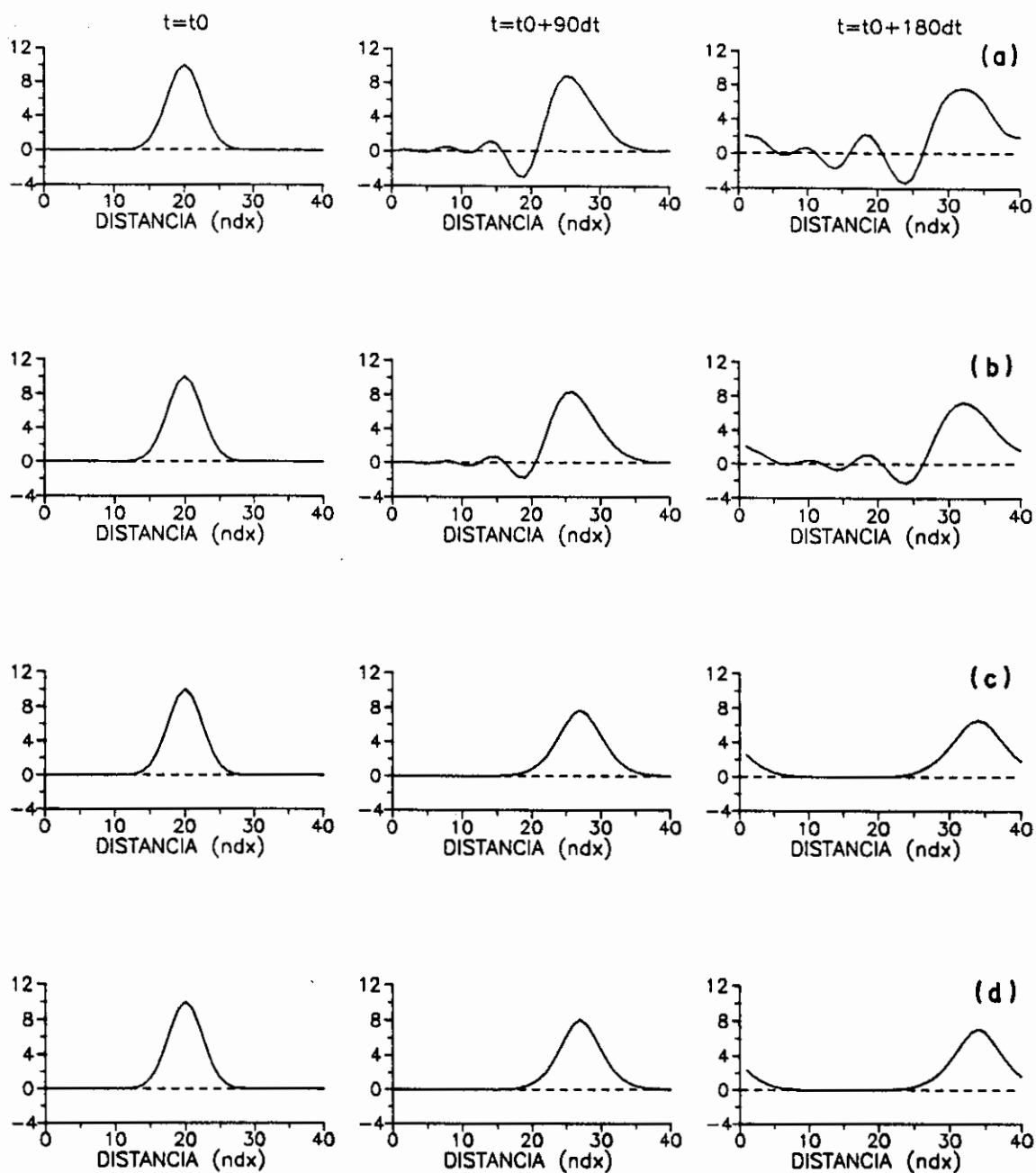


Fig. C.2 - Comportamento de uma curva gaussiana com o tempo para  $C=0,5$ .

(continua)

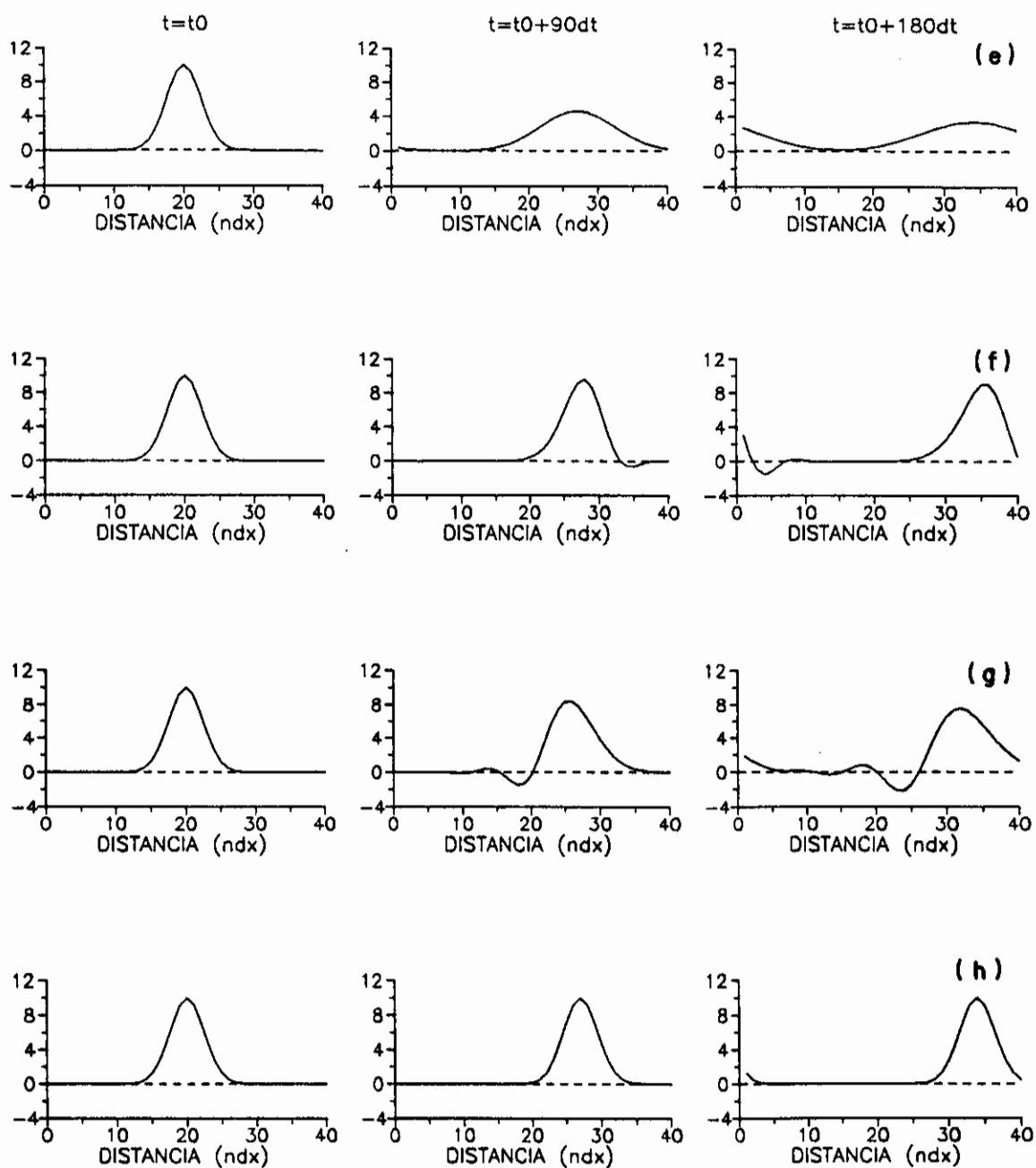


Fig. C.2 - Conclusão.

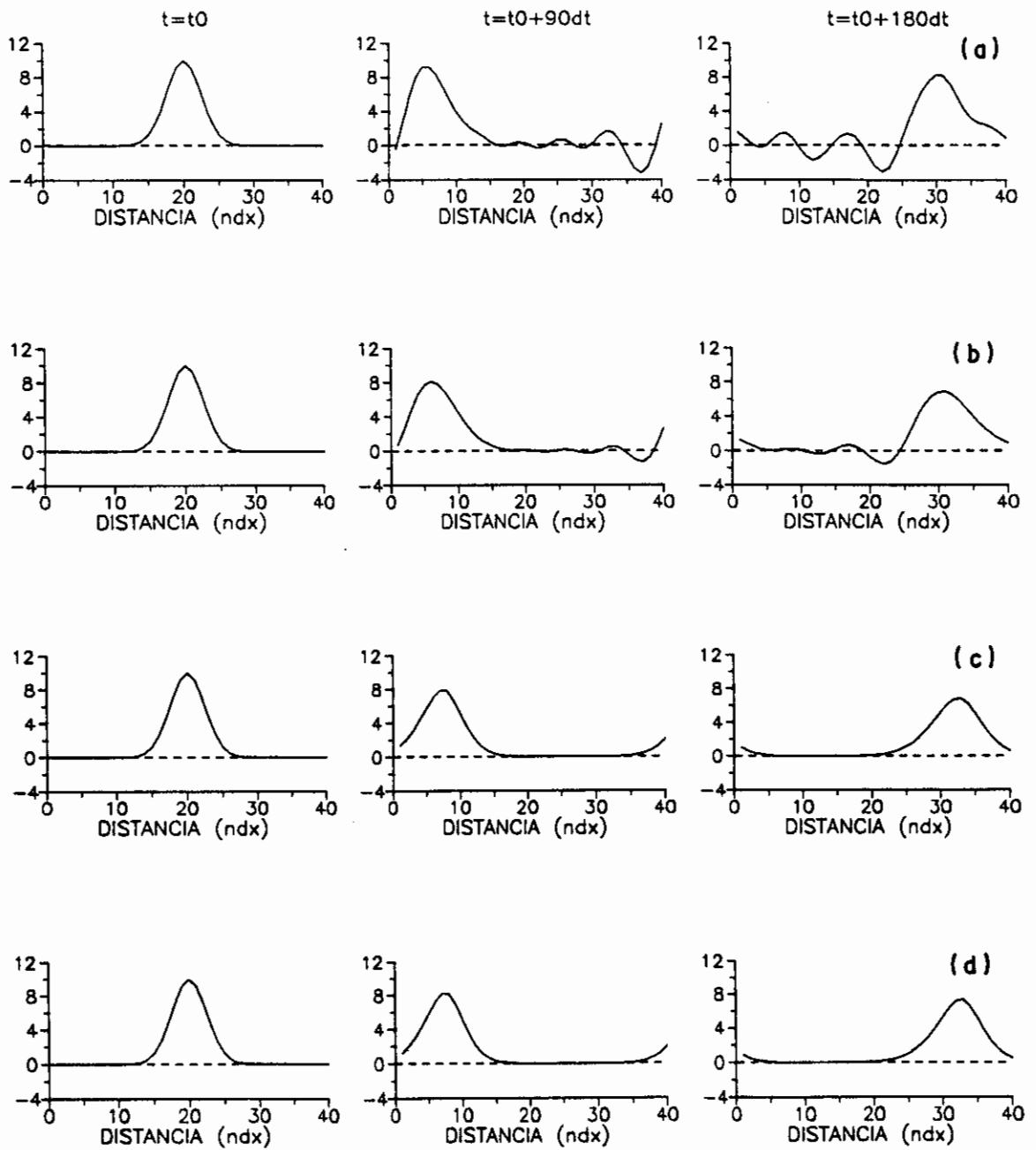


Fig. C.3 - Comportamento de uma curva gaussiana com o tempo para  $C=0,7$ .

(continua)

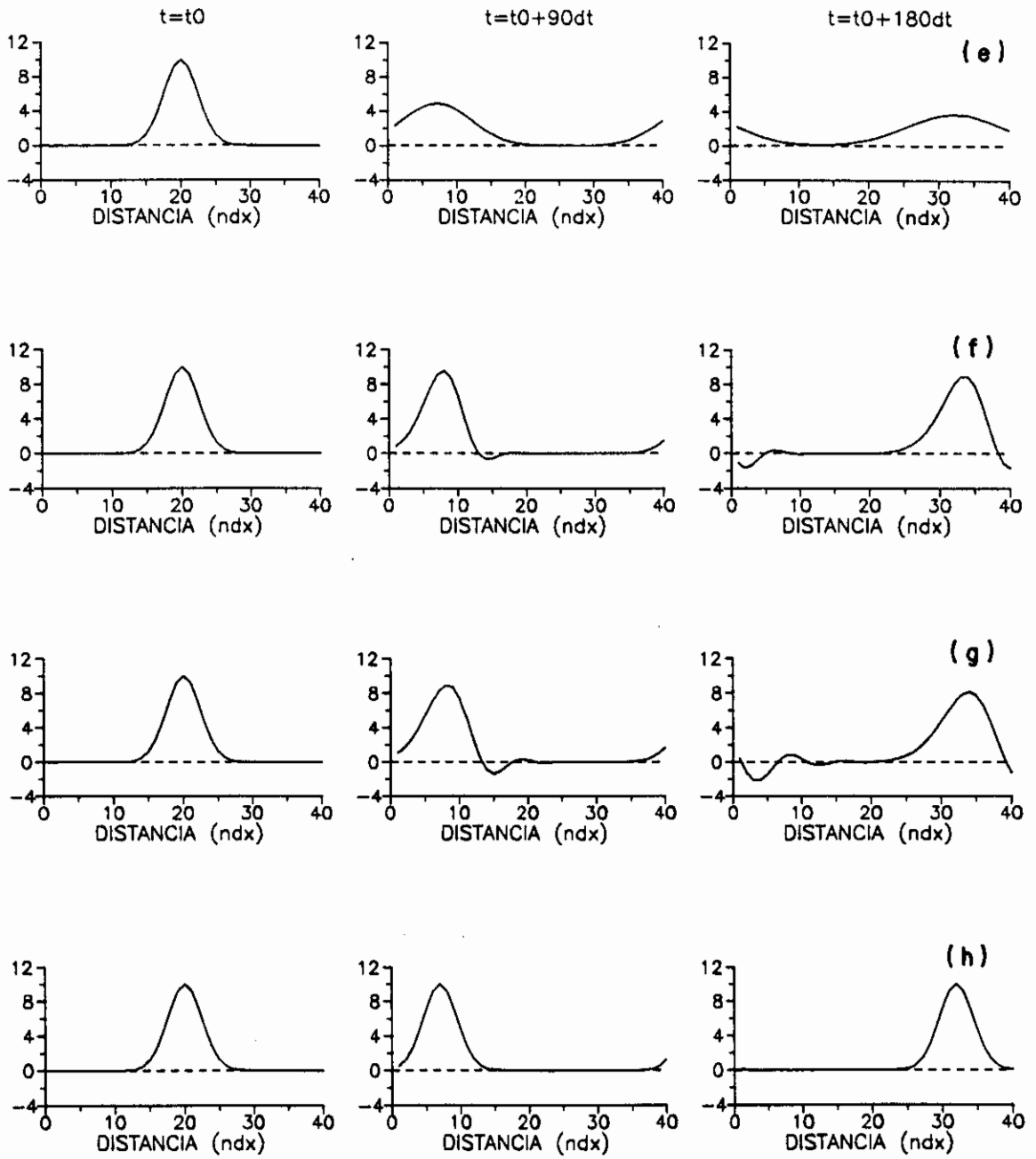


Fig. C.3 - Conclusão.

APÊNDICE DLOCALIZAÇÃO DO PONTO  $(x_*, y_*)$ 

Neste apêndice será apresentado um cálculo para que seja obtida uma posição mais correta do ponto  $(x_*, y_*)$ , utilizado para a obtenção do termo de advecção de energia.

Considerando a velocidade uma função linear de  $x$  dada por:

$$v = ax + b \quad , \quad (D.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias, e visto que:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad , \quad (D.2)$$

pode-se escrever:

$$\int_{x_0}^{x_*} \frac{dx}{ax + b} = \int_{t_0}^{t_*} dt \quad , \quad (D.3)$$

onde  $x_0$  é o ponto de partida e  $x_*$  é a verdadeira coordenada  $x$  do ponto P, obtém-se resolvendo a integração:

$$\frac{1}{a} \ln(ax + b) \Big|_{x_0}^{x_*} = t \Big|_{t_0}^{t_*} \quad . \quad (D.4)$$

Substituindo os extremos de integração e manipulando a Equação D.4, chega-se a:

$$ax_* + b = e^{\Delta ta} \left( ax_0 + b \right) , \quad (D.5)$$

onde  $\Delta t = t_* - t_0$ , ou, através de manipulações:

$$x_* = x_0 e^{\Delta ta} + \frac{b}{a} \left( e^{\Delta ta} - 1 \right) . \quad (D.6)$$

A componente  $y_*$  do ponto P deve ser encontrada de maneira análoga.

Em regiões de água rasa, a velocidade de grupo é dada por:

$$c_g = \sqrt{kH} . \quad (D.7)$$

Considerando a variação da profundidade na direção x como se segue:

$$H = \bar{a}x + H_0 , \quad (D.8)$$

onde  $H_0$  é a profundidade do ponto de partida e  $\bar{a}$  é uma constante qualquer, obtém-se para  $c_g$ :

$$c_g = \sqrt{k (\bar{a}x + H_0)} . \quad (D.9)$$

Pode-se considerar, como uma primeira aproximação, que  $c_g$  varia linearmente com x, como foi considerado na Equação D.1.



APÊNDICE ETAXA DE VARIAÇÃO DO NÚMERO DE ONDA

Neste apêndice será obtida a taxa de variação do número de onda seguindo uma ortogonal. Considerando a relação de dispersão:

$$\sigma = \sqrt{g k \operatorname{tgh}(kH)} \quad , \quad (\text{E.1})$$

e visto que a frequência angular é  $\sigma = 2\pi f$ , pode-se escrever a Equação E.1 da seguinte maneira:

$$F[k(s), H(s)] = k \operatorname{tgh}(kH) - \frac{(2\pi f)^2}{g} = 0 \quad . \quad (\text{E.2})$$

Para frequência constante:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial s} \operatorname{tgh}(kH) + k \frac{\partial (\operatorname{tgh}(kH))}{\partial s} = 0 \quad , \quad (\text{E.3})$$

ou ainda:

$$\frac{\partial k}{\partial s} \operatorname{tgh}(kH) + k \operatorname{sech}^2(kH) \left( \frac{\partial k}{\partial s} H + k \frac{\partial H}{\partial s} \right) = 0 \quad , \quad (\text{E.4})$$

então:

$$\frac{\partial k}{\partial s} \operatorname{tgh}(kH) + kH \operatorname{sech}^2(kH) \frac{\partial k}{\partial s}$$

$$+ k^2 \operatorname{sech}^2(kh) \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad . \quad (\text{E.5})$$

Rearranjando os termos, obtém-se:

$$\frac{\partial k}{\partial s} \left[ \operatorname{tgh}(kH) + kH \operatorname{sech}^2(kH) \right] + k^2 \operatorname{sech}^2(kH) \frac{\partial H}{\partial s} \quad , \quad (\text{E.6})$$

que pode ser escrita assim:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = - \left[ \frac{k^2 \operatorname{sech}^2(kH)}{\operatorname{tgh}(kH) + kH \operatorname{sech}^2(kH)} \right] \left[ \frac{\partial H}{\partial s} \right] \quad . \quad (\text{E.7})$$