



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-15401-TDI/1415

APLICAÇÕES EM MANOBRAS ESPACIAIS DO PROBLEMA DE MÚLTIPLOS ENCONTROS

Denilson Paulo Souza dos Santos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 31 de agosto de 2005.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/MTC-m13@80/2005/11.18.18.58>>

INPE
São José dos Campos
2009

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO:

Presidente:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
Ciência e Tecnologia



INPE-15401-TDI/1415

APLICAÇÕES EM MANOBRAS ESPACIAIS DO PROBLEMA DE MÚLTIPLOS ENCONTROS

Denilson Paulo Souza dos Santos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 31 de agosto de 2005.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/MTC-m13@80/2005/11.18.18.58>>

INPE
São José dos Campos
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Denilson Paulo Souza dos.

Sa59ap Aplicações em manobras espaciais do problema de múltiplos encontros / Denilson Paulo Souza dos Santos. – São José dos Campos : INPE, 2009.

127 p. ; (INPE-15401-TDI/1415)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005.

Orientadores : Drs. Evandro MARconi Rocco, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado.

1. Manobras. 2. Manobras de naves espaciais. 3. Órbitas. 4. Veículos espaciais. I. Título.

CDU 629.7.017.3

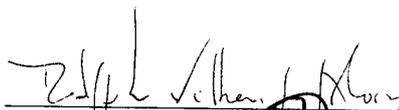
Copyright © 2009 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2009 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Mestre em

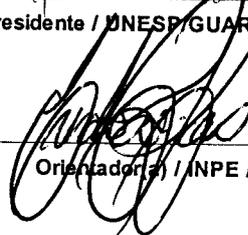
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Presidente / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Evandro Marconi Rocco



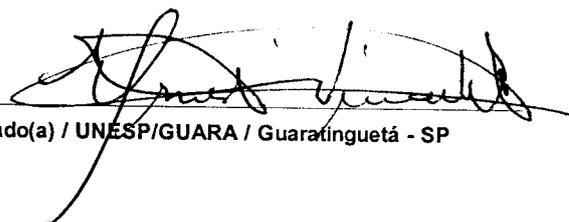
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de
Almeida Prado



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Ernesto Vieira Neto



Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): Denilson Paulo Souza dos Santos

São José dos Campos, 31 de agosto de 2005

“Dizer do que é, que não é ou do que não é, que é, é falso; ao passo que dizer do que é, que é ou do que não é, que não é, é verdadeiro”

Aristóteles

"De que irei me ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver".

Cauchy, Augustin Louis

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo (...).

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE pela oportunidade de estudos e utilização de suas instalações.

À CAPES pela confiança depositada financiando esta pesquisa.

Aos professores do INPE pelos conhecimentos compartilhados.

Ao prof.: Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, pelo apoio, dedicação e ajuda. Também agradeço pelo esforço em manter a chama do conhecimento viva nos mais jovens.

Ao prof.: Evandro Marconi Rocco pela dedicação e interesse no processo de ensino-aprendizagem e conclusão deste trabalho.

Aos professores Maria Hildete de Magalhães França, Antônio Delson C. de Jesus e Carloman Carlos Borges da UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA – UEFS pelo incentivo e apoio a minha vida acadêmica.

A meus pais, irmãos, amigos: Marcelo Moreira, Rolf Vargas, Silvânio Bezerra e Jean Paulo.

A minha companheira Heliene por ter me esperado nestas infinitas horas de ausência.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar manobras espaciais com mínimo consumo de combustível, de forma a tornar viáveis missões interplanetárias que necessitem sair e retornar de um mesmo corpo, o que chamamos de “Aplicação de Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontros”. Durante esta manobra, o veículo espacial pode realizar uma manobra gravitacionalmente assistida (*Swing-By*) e, com relação ao corpo principal, ganhar ou perder energia e velocidade para colocá-lo em uma outra órbita do interesse da missão. Para a dinâmica do problema, é assumido que os três corpos envolvidos são pontos de massa e não sofrem perturbações externas ao sistema. Estenderam-se as considerações feitas por Prado e Broucke (1993a) e generalizaram-se os ângulos de partida e chegada da espaçonave M_3 , abrangendo os casos não simétricos. As soluções são apresentadas em termos das anomalias verdadeira (v), excêntrica (η) e variação da velocidade (ΔV). Foram incluídas soluções em termos do semi-eixo maior (a) e foram mostradas alterações na velocidade (ΔV) e na energia (ΔE) devidas à passagem pelo corpo secundário. Sendo assim, os tópicos aqui estudados podem ser aplicados tanto em missões que partam e retornem ao mesmo corpo, como em uma missão que sai da Terra, pesquisa o espaço interplanetário e retorna à Terra, como para missões cujo objetivo seja efetuar uma alteração na energia do veículo espacial através de um *Swing-By* com o mesmo, como uma missão da Terra a Júpiter que ganhe energia com uma passagem pela própria Terra. Diversas órbitas de múltiplos encontros e inúmeros *Swing-By* foram simuladas.

APPLICATION OF SPACE MANEUVERS OF THE PROBLEM OF MULTIPLE ENCOUNTERS

ABSTRACT

The objective of this work is to study optimal space maneuvers that try to reduce the fuel consumption to make interplanetary missions possible. In this type of maneuver, the spacecraft leaves and comes back to the same body. This is called "Application of Space Maneuvers of the Problem of the Multiple Encounters". During a maneuver, the space vehicle accomplishes a Gravity Assisted maneuver (Swing-By), and with respect to the main body, gains or loses energy and velocity to place itself in another orbit of interest of the mission. For the dynamics of the problem, it is assumed that the three bodies involved are points of mass and do not suffer external disturbances. The considerations done by Prado and Broucke (1993a) and where extend, the departure and arrival angles of the spacecraft M_3 , were generalized to non-symmetrical cases. The solutions are shown in terms of the true anomaly (ν), eccentric anomaly (η) and velocity variation (ΔV). It is included solutions in terms of the semimajor axis (a) and the velocity variation (ΔV) and energy variation (ΔE) due to the passage by the secondary body. The topics studied here can be applied in missions that leave and come back to the same body, as in a mission that leaves the Earth, researches the interplanetary space and comes back to the Earth, as for missions whose objective is to make an alteration in the energy of the space vehicle through a Swing-By with the same body, like a mission going from the Earth to Jupiter that gains energy with a passage by the Earth. Several orbits of multiple encounters and Swing-By were simulated.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO	25
1.1 Introdução	25
1.2 Objetivos	25
1.3 Considerações	27
1.4 Organização do Trabalho	27
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
2.1 Transferência de Hohmann	31
2.2 Transferências Baseadas na Transferência de Hohmann	34
2.3 Transferência Bi-elíptica Tri-impulsiva	35
2.4 Problema de Lambert	36
2.5 Problema de Lambert com Mínimo ΔV	37
CAPÍTULO 3 - MANOBRAS DE UM CORPO QUE PARTE E RETORNA AO MESMO CORPO UTILIZANDO A ROTINA DE GOODING PARA RESOLVER O PROBLEMA DE LAMBERT	39
3.1 Descrição do Problema de Órbitas de Múltiplos Encontros	39
3.1.1 Abordagem de Hénon	40
3.1.2 Formulação Matemática do Problema	41
3.1.3 Desenvolvimento e Resultados	43
3.2.1 Implementação do Problema de Lambert	43
3.2.1.1 A Sub-rotina de Gooding	44
3.2.1.2 Descrição do Algoritmo de Resolução do Problema de Múltiplos Encontros e Swing-By	47
3.2.2 Simulação com os Parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_o = -3$ rad e $-3 \leq \psi \leq \psi_f = 4$ rad ...	49
3.2.3 Simulação com os Parâmetros: $e = 0,3$, $\psi_o = -3,5$ rad e $-3,5 \leq \psi \leq \psi_f = 4,5$ rad	58
3.2.4 Simulação com os Parâmetros: $e = 0,004$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f =$ $3,5$ rad	62
3.2.5 Simulação com os Parâmetros: $e = 0,6$, $\psi_o = -3$ rad e $-3 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad.	66

3.2.6 Simulação com os Parâmetros: $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad	70
3.2.7 Simulação com os Parâmetros: $e = 0$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3$ rad	74
3.3 Conclusões do Capítulo	78
CAPÍTULO 4 - MANOBRAS ASSISTIDAS POR GRAVIDADE – SWING-BY.....	81
4.1 Formulação Matemática do <i>Swing-By</i>	83
4.2 Hipóteses para um <i>Swing-By</i> na Terra	88
4.2.1 Implementação do <i>Swing-By</i> na Terra	89
4.2.2 <i>Swing-By</i> com os Parâmetros: $e = 0,4$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 4$ rad	90
4.2.3 <i>Swing-By</i> com os Parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3$ rad	96
4.3 Hipóteses Para um <i>Swing-By</i> em Júpiter	101
4.3.1 Implementação do <i>Swing-By</i> em Júpiter	102
4.3.2 <i>Swing-By</i> com os Parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad	102
4.3.3 <i>Swing-By</i> com os Parâmetros: $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad	107
4.3.4 <i>Swing-By</i> com os Parâmetros: $e = 0,5$, $\psi_o = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad	111
4.4 Conclusões do Capítulo	117
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	119
5.1 Conclusões Finais	119
5.2 Sugestões Para Extensão deste Trabalho	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

LISTA DE FIGURAS

2.1	- Colisão entre duas órbitas elípticas.....	31
2.2	- Transferência de Hohmann.....	33
2.3	- Transferência Bi-elíptica Tri-impulsiva.....	35
2.4	- Problema de Lambert.....	37
3.1	- Transferência de um corpo para o mesmo corpo.....	39
3.2	- ΔV vs. ψ , para $e = 0,1$	50
3.3	- ΔV Mínimo ($\Delta V < 0,01$).....	51
3.4	- Solução em termos do Semi-eixo maior (a).....	51
3.5	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).....	53
3.6	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,1$	53
3.7	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).....	54
3.8	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,1$	54
3.9	- ΔV vs. ψ , para $e = 0,3$	58
3.10	- ΔV Mínimo ($\Delta V < 0,01$).....	59
3.11	- Solução em termos do Semi-eixo maior (a).....	59
3.12	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).....	60
3.13	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,3$	60
3.14	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).....	61

3.15	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,3$	61
3.16	- ΔV vs. ψ , para $e = 0,004$	62
3.17	- ΔV Mínimo ($\Delta V < 0,01$).....	63
3.18	- Solução em termos do Semi-eixo maior (a).....	63
3.19	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).....	64
3.20	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,004$	64
3.21	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).....	65
3.22	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,004$	65
3.23	- ΔV vs. ψ , para $e = 0,6$	66
3.24	- ΔV Mínimo para $e = 0,6$	67
3.25	- Solução em termos do Semi-eixo maior (a).....	67
3.26	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).....	68
3.27	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,6$	68
3.28	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).....	69
3.29	- Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,6$	69
3.30	- ΔV vs. ψ , para $e = 0,9$	70
3.31	- ΔV Mínimo para $e = 0,9$	71
3.32	- Solução em termos do Semi-eixo maior (a).....	71
3.33	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).....	72
3.34	- Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,9$	72

3.35	-	Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).....	73
3.36	-	Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,9$	73
3.37	-	ΔV vs. ψ , para $e = 0$ (caso circular).....	74
3.38	-	ΔV Mínimo para $e = 0$	75
3.39	-	Solução em termos do Semi-eixo maior (a).....	75
3.40	-	Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).....	76
3.41	-	Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0$	76
3.42	-	Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).....	77
3.43	-	Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0$	77
4.1	-	<i>Swing-By</i>	83
4.2	-	Descrição da passagem do corpo M_3 pelo corpo M_2 , na realização do <i>Swing-by</i>	85
4.3	-	Geometria do <i>Swing-By</i>	86
4.4	-	Manobra de <i>Swing-By</i>	88
 <i>Swing-By</i> na Terra			
4.5	-	Varição da velocidade (ΔV) após o <i>Swing-By</i> . $e = 0,4$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.....	92
4.6	-	ψ vs. Varição da velocidade (ΔV) $e = 0,4$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.....	92
4.7	-	Varição da Energia (ΔE) após o <i>Swing-By</i> $e = 0,4$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.....	93

4.8	-	ψ vs. Variação da Energia (ΔE) $e = 0,4$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.....	93
4.9	-	ΔV total obtido na manobra de Swing-By no Problema de Múltiplos Encontros, para $e = 0,4$	94
4.10	-	Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,4$	95
4.11	-	Variação da Velocidade (ΔV) após o <i>Swing-By</i> $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.....	98
4.12	-	ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV) $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.....	98
4.13	-	Variação da Energia (ΔE) após o <i>Swing-By</i> $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.....	99
4.14	-	ψ vs. Variação da Energia (ΔE) $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.....	99
4.15	-	Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,1$	100

Swing-By em Júpiter

4.16	-	Variação da Velocidade (ΔV) após o <i>Swing-By</i> $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	104
4.17	-	ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV) $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	104
4.18	-	Variação da Energia (ΔE) após o <i>Swing-By</i> $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	105
4.19	-	ψ vs. Variação da Energia (ΔE) $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	105
4.20	-	Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,1$	106

4.21	-	Varição da Velocidade (ΔV) após o <i>Swing-By</i> e = 0,9, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	108
4.22	-	ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV) e = 0,9, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	108
4.23	-	Varição da Energia (ΔE) após o <i>Swing-By</i> e = 0,9, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	109
4.24	-	ψ vs. Variação da Energia (ΔE) e = 0,9, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	109
4.25	-	Saldo Positivo de ΔV obtido no <i>Swing-By</i> , para e = 0,9.....	110
4.26	-	Intervalo em que a Variação da Velocidade (ΔV) é máxima.....	112
4.27	-	Intervalo em que a Variação da Energia (ΔE) é máxima.....	112
4.28	-	Varição da Velocidade (ΔV) após o <i>Swing-By</i> e = 0,5, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	113
4.29	-	ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV) e = 0,5, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	113
4.30	-	Varição da Energia (ΔE) após o <i>Swing-By</i> e = 0,5, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	114
4.31	-	ψ vs. Variação da Energia (ΔE) e = 0,9, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	114
4.32	-	Ampliação da Variação da Energia vs. ψ para e = 0,5.....	115
4.33	-	Saldo Positivo de ΔV obtido no <i>Swing-By</i> , para e = 0,5.....	116

LISTA DE TABELAS

		pág
3.1	Soluções com $\Delta V < 0,01$	50
3.2	Soluções com $\Delta V < 0,01$	58
3.3	Soluções com $\Delta V < 0,001$	62
3.4	Soluções com $\Delta V < 0,01$	66
3.5	Soluções com $\Delta V < 0,1$	70
3.6	Soluções com $\Delta V < 0,001$	74
<i>Swing-By</i> na Terra		
4.1	<i>Swing-By</i> com $\Delta V > 0,24$ e = 0,4, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.....	90
4.2	<i>Swing-By</i> com $\Delta E > 0,242$ e = 0,4, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.....	91
4.3	<i>Swing-By</i> com $\Delta V > 0,2420$ e = 0,1, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,0$ rad.....	96
4.4	<i>Swing-By</i> com $\Delta E > 0,2301$ e = 0,1, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,0$ rad.....	97

Swing-By em Júpiter

4.5	<i>Swing-By</i> com $\Delta V > 1,2$ $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	102
4.6	<i>Swing-By</i> com $\Delta E > 0,870$ $e = 0,1$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	103
4.7	<i>Swing-By</i> com $\Delta V > 1,2863$ $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	107
4.8	<i>Swing-By</i> com $\Delta E > 1,148$ $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	107
4.9	<i>Swing-By</i> com $\Delta V > 1,2831$ $e = 0,5$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	111
4.10	<i>Swing-By</i> com $\Delta E > 1,02$ $e = 0,5$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.....	111

LISTA DE SÍMBOLOS

a	-	Semi-eixo maior da órbita de transferência
r	-	Raio da órbita de transferência
r_o	-	Raio da órbita inicial
r_f	-	Raio da órbita final
t_o	-	Tempo inicial
t_f	-	Tempo final
m	-	Massa
m_o	-	Massa inicial
m_f	-	Massa final
ΔV_o	-	Impulso inicial aplicado
ΔV_f	-	Impulso final aplicado
Δt	-	Variação do tempo
T	-	Período
O_0	-	Órbita inicial
P	-	Ponto de saída da astronave
Q	-	Ponto de chegada da astronave
S_3	-	Especifica se o corpo M_2 passa no periapsis (+1) ou apoapsis (-1) quando $\psi = 0$
X_n	-	Coordenada cartesiana X do corpo n no \mathfrak{R}^2
Y_n	-	Coordenada cartesiana Y do corpo n no \mathfrak{R}^2
R_n	-	Magnitude do vetor posição \vec{R} do corpo n
V_r	-	Velocidade radial
V_t	-	Velocidade transversal
C	-	Momento angular
ΔC	-	Variação do momento angular

E	-	Energia
e	.	Excentricidade
ΔV	-	Variação da velocidade
ΔE	-	Variação da energia
M_n	.	Corpo de massa n (primário, secundário, ...)
r_p	-	Raio do periapsis
\vec{V}_i, \vec{V}_0	-	Vetores velocidade do veículo espacial relativo à M_1 , antes e depois do encontro em um referencial inercial.
$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$	-	Vetores velocidade do veículo espacial em relação a M_2 , antes e depois do encontro.
\vec{V}_2	-	Velocidade de M_2 em relação a M_1 .
$ \vec{V}_\infty $	-	Magnitude da velocidade da nave espacial no infinito, antes ou depois do encontro.
E	-	Anomalia excêntrica
μ	-	Parâmetro gravitacional
ψ_0	-	Ângulo inicial da manobra
ψ_f	-	Ângulo limite máximo da manobra
ψ	-	Ângulo final de cada manobra
$\Delta\psi$	-	Variação do ângulo da manobra
θ_1	-	Ângulo de posição do ponto de partida da órbita
θ_2	-	Ângulo de posição do ponto de chegada da órbita
δ	-	Ângulo de deflexão
ψ_A	-	Ângulo de aproximação
ω	-	Velocidade angular
v	-	Anomalia verdadeira
η	-	Anomalia excêntrica

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

1.1 Introdução

O estudo e a exploração de ambientes espaciais são prioridades para os países que querem dominar e aprimorar tecnologias espaciais. Planejar e executar manobras em satélites artificiais que orbitam a terra são objetivos importantes nas atividades espaciais. A literatura sobre este tema é vasta e vários pesquisadores desenvolveram alternativas e soluções para estas questões, entretanto todos apresentam modelagens específicas para cada tipo e abordagem do problema. Reduzir o consumo de combustível na realização de uma manobra em um satélite artificial, por exemplo, garante um maior número de manobras, com um conseqüente prolongamento da vida útil do satélite. Para o programa espacial brasileiro, isto é de fundamental importância, pois aumenta o tempo de uso do engenho espacial, minimizando o custo por unidade de tempo.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudar Manobras Espaciais, em particular, manobras orbitais que envolvem órbitas de múltiplos encontros e que visem o menor consumo de combustível possível. Serão analisados modelos para a dinâmica do problema de órbitas de múltiplos encontros e estratégias para encontrar estas manobras.

O problema aqui estudado é a transferência de um veículo espacial de um corpo de volta ao mesmo corpo com o menor consumo de combustível possível. Inúmeras são as aplicações deste problema, tais como:

- i) Transferir um veículo espacial da Terra para uma viagem interplanetária e recolocá-lo na Terra, sem a necessidade de manobras durante o processo, implicando na otimização do consumo de combustível.
- ii) Transferir um veículo espacial da Lua para uma viagem, que pode incluir a passagem pela Terra, e recolocá-lo novamente na Lua.

- iii) Manobrar o veículo espacial para que ele retorne ao corpo principal e execute um *Swing-By* (Prado e Broucke, 1995b e 1996). Para alterar a sua energia e com isso, por exemplo, viajar ao Sistema Solar exterior.
- iv) Manobras de rendezvous (manobras em que se deseja que o veículo espacial saia das proximidades de um outro veículo espacial e volte a se aproximar deste veículo, depois de percorrer uma trajetória diferente, permanecendo ao seu lado).

Generalizando, o problema de manobras orbitais pode ser descrito da seguinte forma: transferir um veículo espacial entre duas órbitas dadas com o mínimo consumo de combustível possível. Isto é, sabendo o estado inicial de um veículo espacial (\vec{r}_0 (posição inicial), \vec{v}_0 (velocidade inicial) e m_0 (massa inicial) em t_0 (*instante inicial*)), mudar o seu estado para (\vec{r}_f, \vec{v}_f e m_f em t_f ($t_f \geq t_0$)) com mínimo consumo de combustível ($m_f - m_0$). Para obter esse resultado deve-se escolher os atributos de controle $\vec{u}(t)$ disponíveis no veículo (módulo, direção e o sentido dos impulsos), nos casos considerados neste trabalho.

Neste trabalho, será feito um estudo do Problema de Órbitas de Transferência de Hénon, utilizando a mesma técnica utilizada em Prado e Broucke, 1993. Neste artigo, foram consideradas órbitas com ângulos simétricos, isto é, o veículo espacial sai de um ângulo inicial e chega a um ângulo final que é simétrico em relação ao periapsis da órbita. Serão considerados ângulos de saída e chegada não simétricos e órbitas elípticas não axiais. Será também incluído um *Swing-By* quando do retorno do veículo espacial ao mesmo corpo, isto é, manobras de *Swing-By* no problema de múltiplos encontros.

As soluções serão dadas em termos das anomalias verdadeiras (v), excêntricas (η), semi-eixo maior (a), variação da velocidade (ΔV) e variação da energia (ΔE) das órbitas. Serão consideradas ainda, todas as possíveis órbitas de transferências. A inclusão de novas variáveis (anomalias verdadeiras (v), excêntricas (η), etc), para expressar as soluções do problema de múltiplos encontros mostra sua utilidade, pois os gráficos são mais simples com estas variáveis. As soluções serão apresentadas em forma de gráficos e tabelas.

Como resultado deste trabalho, espera-se obter um maior conhecimento sobre manobras espaciais do problema de órbitas de múltiplos encontros, que são manobras orbitais que partem de um corpo e retornam ao mesmo corpo, bem como produzir um software que possa ser utilizado em futuras missões pelo INPE. Trata-se de uma pesquisa de caráter teórico e computacional, não envolvendo a construção de nenhum tipo de “hardware”. Os métodos serão basicamente desenvolvimento teórico e implementação de software e simulações numéricas.

1.3 Considerações

Sendo assim, as principais contribuições deste trabalho podem ser resumidas como:

- 1) Desenvolver um algoritmo e implementar um programa com o objetivo de generalizar os ângulo de saída e chegada da manobra de Múltiplos Encontros, incorporando os casos não simétricos;
- 2) Esse novo algoritmo também deverá generalizar as órbitas do corpo M_2 para elípticas;
- 3) Incluir soluções em termos do elemento kepleriano semi-eixo maior (a);
- 4) Incluir um *Swing-By* do corpo M_3 em torno de M_2 , após o retorno de M_3 até as proximidades de M_2 no Problema de Múltiplos Encontros. Esse *Swing-By* é genérico, em qualquer sistema de primários.

1.4 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 desenvolve-se um levantamento bibliográfico dos principais tópicos de mecânica celeste aplicado aos problemas envolvendo transferências orbitais e manobras de veículos espaciais ótimas.

No Capítulo 3 aborda-se as manobras de múltiplos encontros, especificando quais os procedimentos e modelagens adotadas. Apresentam-se vários gráficos e tabelas, que são as soluções do problema proposto.

No Capítulo 4 estuda-se a aplicação das manobras gravitacionalmente assistidas no problema de órbitas de múltiplos encontros, isto é, inclusão da manobra de *Swing-By* no problema.

No Capítulo 5 encontram-se as conclusões deste presente trabalho e algumas sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura é vasta no que se refere aos problemas envolvendo transferências orbitais e manobras de veículos espaciais ótimas. Goddard, R. H. (1919) foi pioneiro em estudar o problema de transferência de um veículo espacial entre dois pontos. No seu trabalho foram propostas soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete a grandes altitudes. Sobre transferências orbitais, um trabalho clássico foi o de Hohmann (1925). O problema consiste em transferir um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre em um campo de força central (Newtoniano), obtendo como solução uma órbita de transferência elíptica bi-impulsiva. Esta solução é utilizada até hoje sob certas circunstâncias e até meados de 1959 foi considerada como solução final do problema.

Lawden (1953) descreveu uma solução teórica completa do problema de transferência orbital entre dois pontos com consumo mínimo de combustível. Este problema recebeu o nome Problema de Lawden devido ao seu empenho em resolvê-lo (Lawden 1953, 1955 e 1962). Lawden (1953, 1954) introduziu um novo conceito, o “primer vector”, que é o multiplicador de Lagrange associado ao vetor velocidade, para encontrar uma condição necessária para otimização de trajetórias impulsivas em função da magnitude deste vetor.

Hoelker e Silber (1959) e Sthernfeld (1959), independentemente, mostraram que a solução proposta por Hohmann é a solução ótima quando esta razão é maior que 11.93876 e a partir da qual a de Hohmann deixa de ser ótima e a transferência bi-elíptica tri-impulsiva é mais econômica. Gobertz e Doll (1969) mostraram transferências derivadas da bi-elíptica para os casos de transferências entre uma órbita circular e uma elíptica e entre órbitas elípticas co-axiais. Para uma manobra de transferência ótima entre duas órbitas coplanares existem duas possibilidades, no que se refere ao consumo mínimo de combustível: a do tipo Hohmann bi-impulsiva ou a tri-impulsiva passando pelo infinito. Ting (1960) mostrou que o acréscimo de mais impulsos finitos não consegue otimizar o consumo de combustível.

Vários trabalhos presentes na literatura utilizam a técnica do “primer-vector” desenvolvida por Lawden (1953, 1954). Em Lion e Handelsman (1968) a definição do

“primer-vector” estende-se à trajetórias não ótimas e ótimas, e foi estudada a implementação de mais um impulso para avaliar o quanto uma dada trajetória pode ser melhorada. Em Prussing (1969, 1970) as manobras de “rendezvous” com mínimo consumo de combustível são consideradas. Múltiplos impulsos são estudados para o caso onde o tempo gasto na transferência é especificado.

Com relação ao Problema de Trajetórias de Múltiplos Encontros, Hénon (1968) estudou as órbitas de colisão consecutiva, que são definidas como órbitas que se interceptam em dois pontos distintos, caracterizando as manobras de veículos espaciais que partem de um corpo e retornam para o mesmo corpo (Figura 2.1). Ele mostrou que se pode reduzir a solução a simples equações algébricas. Esta manobra passou a ser conhecida como Transferência de Hénon (Prado e Broucke, 1993). Famílias destas órbitas foram examinadas por Bruno (1981), Perko (1983), Hitzl e Hénon (1977a, 1977b) no problema de três corpos circular restrito.

Hitzl (1977) e outros investigaram a importância da relação entre a constante de Jacobi nas famílias de órbitas para o caso $\mu=0$ e a estabilidade na vizinhança das órbitas para $\mu > 0$. Hitzl buscava determinar consecutivos encontros entre M_3 (Figura 2.1) e as órbitas no problema restrito de três corpos para o caso $\mu=0$.

Com relação ao problema de Lambert, que será utilizado no presente trabalho, Gooding, R. H. (1990) introduz o termo geometria cinemática, que reflete a geometria do triângulo nas relações cinemáticas das soluções do Problema de Lambert, que consiste em: uma órbita não perturbada, sujeita a uma força de campo central (lei do inverso do quadrado da distância), sendo C o centro, conectado aos pontos P_1 e P_2 , onde é especificado o tempo de vôo $\Delta t = t_2 - t_1$. Sempre haverá pelo menos uma solução, e o número atual ($N > 1$, número de soluções inteiras) que depende da geometria cinemática do triângulo CP_1P_2 e do valor de Δt com ($t_2 > t_1$). Na geometria cinemática, a priori, é suposto que o triângulo CP_1P_2 é não degenerado, só que θ , o ângulo subtendido entre P_1P_2 e C , pertence ao intervalo $[0, \pi]$. Gooding (1990) Introduziu também o termo “Lambert invariance” que é um conceito que deriva do teorema de Lambert e a equivalente classificação dos triângulos. Este estudo foi baseado na abordagem de Lancaster et al. (1966 e 1969), estendendo os seguintes tópicos importantes: iterações, estimativas iniciais para o processo de iteração, exatidão universal e teste da subrotina. Segundo Lancaster et al. (1966 e 1969), o tempo de vôo é derivado de “x” e Gooding

(1990) substituiu Δt por T (período), onde $T = \left(\frac{8\mu}{s^3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$ e x é dado pela expressão

$x^2 = 1 - \frac{s}{2a}$. O autor afirma que o procedimento descrito é o primeiro publicado que

resolve o problema de Lambert em todas as situações.

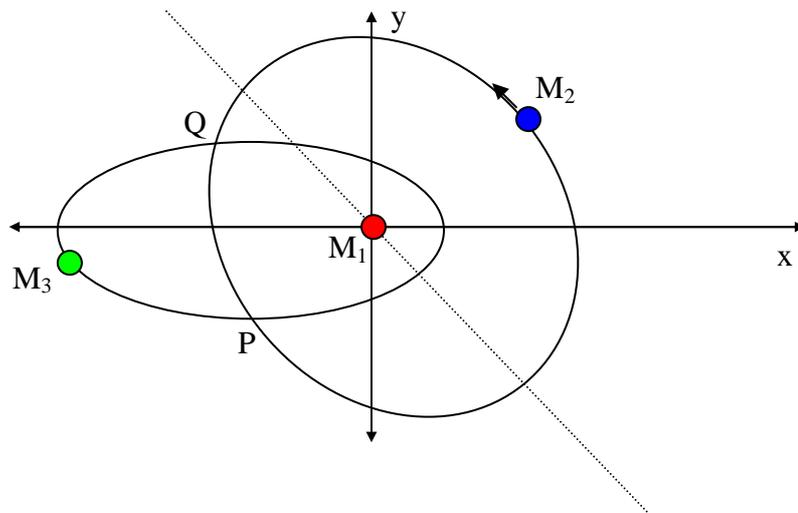


Figura 2.1 - Colisão entre duas órbitas elípticas

2.1 Transferência de Hohmann:

É uma transferência ótima bi-impulsiva entre órbitas circulares e coplanares, em um campo com a lei do inverso do quadrado da distância (campo gravitacional Newtoniano) com tempo livre (Marec, 1979). É a solução de menor consumo de combustível (menor ΔV), quando a razão dos raios das órbitas inicial e final é menor que 11,93876. Aplica-se um impulso na órbita inicial ΔV_0 que é calculado da forma mostrada abaixo (Chobotov, 1996):

Considere a equação vis-viva

$$V^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (2.1)$$

Aplicado ao problema temos:

$$V_0^2 = \mu \left[\frac{2}{r_0} - \frac{2}{r_0 + r_f} \right], \quad \text{onde } 2a = r_0 + r_f \Rightarrow a = r_0 \left(1 + \frac{r_f}{r_0} \right)$$

Assim,

$$V_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \left[\frac{2 \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \left(\frac{r_f}{r_0} \right)} \right]$$

Como $V_{c0}^2 = \frac{\mu}{r_0}$, então:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{V_0^2}{V_{c0}^2} &= \left[\frac{2 \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \left(\frac{r_f}{r_0} \right)} \right] \\ \Rightarrow \frac{V_0}{V_{c0}} &= \sqrt{\frac{2 \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}} \quad (2.2) \\ \Rightarrow \Delta V &= V_{c0} \left| \sqrt{\frac{2 \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \left(\frac{r_f}{r_0} \right)} - 1} \right| \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta V_0 = V_0 \left| \sqrt{\frac{2 \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \left(\frac{r_f}{r_0} \right)} - 1} \right|,$$

ΔV_0 é aplicado na direção do movimento. Após este impulso o veículo entra em uma órbita de transferência elíptica com periapsis r_0 e apoapsis r_f , (FIGURA 2.2).

Depois é aplicado o segundo impulso, quando o veículo está no apoapsis. A magnitude do segundo impulso é calculada de maneira análoga.

Sendo $r_0 + r_f = r_f \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{r_f}{r_0} \right)} \right)$, Temos:

$$\Delta V_f = V_0 \left| 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{r_f}{r_0} \right) + 1}}}{\sqrt{\frac{r_0}{r_f}}} \right| \quad (2.3)$$

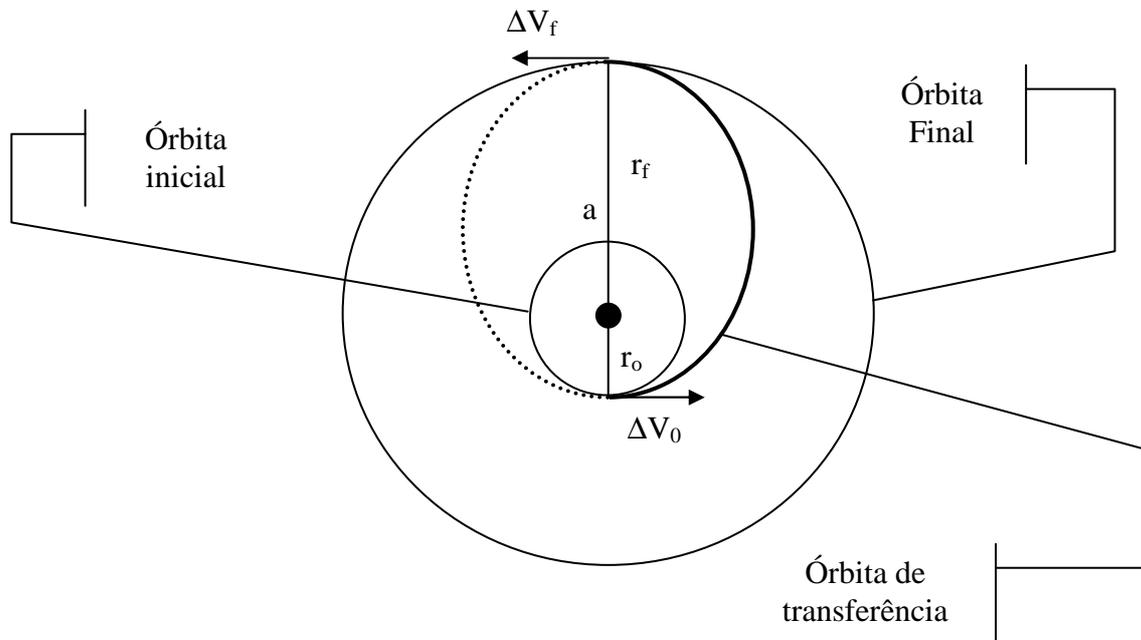


Figura 2.2 - Transferência de Hohmann.

Esse impulso faz o veículo entrar na órbita final com raio r_f . O tempo de transferência

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \left(\frac{r_f}{r_0} \right)}{2} \right)^{\frac{3}{2}} T_0$$

é a metade do período da órbita elíptica de transferência, onde T_0 é o período inicial da órbita.

2.2 Transferências baseadas na Transferência de Hohmann

Para transferências entre uma órbita circular de raio r_0 e uma órbita elíptica externa de periapsis r_p e apoapsis r_a ($r_0 < r_p$) ou de órbitas que se interceptam ($r_p < r_0 < r_a$) é ótima a solução que utiliza o apoapsis da órbita elíptica, pois o consumo de combustível é menor, o que foi constatado por Gobetz e Doll (1969) e Marshal (1965). O primeiro impulso é aplicado na órbita circular e eleva o veículo a uma órbita elíptica de periapsis r_0 e apoapsis r_a , coincidente com o apoapsis da órbita final desejada, nesse ponto aplica-se o segundo impulso, que aumenta o periapsis para r_p e completa a transferência.

Quando a órbita elíptica é interna a órbita circular ($r_0 > r_p$) é recomendável utilizar a manobra que passa pelo periapsis da órbita elíptica. A regra geral para transferências bi-impulsivas do tipo Hohmann entre órbitas coplanares é que se use a manobra que que passa pelo ponto mais distante do corpo central.

Para transferências entre duas órbitas elípticas co-axiais existem dois casos: órbitas alinhadas (periapsis do mesmo lado) e órbitas opostas (periapsis em lados opostos). Em ambos os casos a solução de menor consumo é a solução do tipo de Hohmann, com impulsos aplicados nos apsides. Para o caso de órbitas alinhadas a solução ótima é aquela que se utiliza do apoapsis de maior distância (Gobetz e Doll, 1969). No caso de órbitas opostas o problema é mais complexo e é preciso testar numericamente os dois casos para se encontrar uma solução. Se as órbitas forem não coaxiais não existem soluções prontas e faz-se necessário à utilização de métodos numéricos.

2.3 Transferência Bi-elíptica Tri-impulsiva

Hoelker e Silber (1959) mostraram que a transferência ótima entre duas órbitas circulares e coplanares é a Transferência de Hohmann apenas quando $\frac{r_f}{r_0} < 11,93876$, caso contrário à transferência bi-elíptica e tri-impulsiva pode apresentar um menor ΔV total. A manobra segue os seguintes passos, conforme mostra a Figura 4.

- 1) O primeiro impulso ΔV_0 é aplicado na órbita inicial para colocar o veículo espacial em uma órbita com periapsis r_0 e apoapsis r_1 ($r_1 > r_0$);
- 2) Quando o veículo estiver no apoapsis, aplica-se o segundo impulso ΔV_1 para aumentar a altura do periapsis para r_f ;
- 3) Enfim, aplica-se o terceiro impulso ΔV_f quando o veículo espacial está no periapsis e esse impulso circulariza o veículo em sua órbita final desejada.

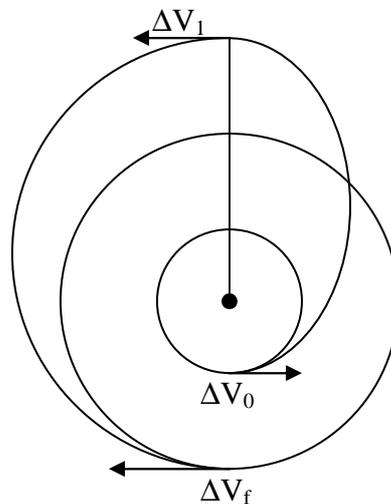


Figura 2.3 - Transferência Bi-elíptica Tri-impulsiva.

Os impulsos ΔV_0 , ΔV_1 e ΔV_f e o tempo Δt gasto na transferência são dados pelas seguintes equações (Rocco, 1999):

$$\begin{aligned}
\Delta V_0 &= \varepsilon_0 \left(\sqrt{\frac{2r_1}{1+r_1}} - 1 \right) \\
\Delta V_1 &= \left(\sqrt{\frac{2r_f}{r_1(r_f+r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{r_1(1+r_1)}} \right) \\
\Delta V_f &= \varepsilon_f \left(\sqrt{\frac{2r_f}{r_1(r_f+r_1)}} - r_f^{-\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde:

$$\varepsilon_0 = \text{sinal}(r_1 - 1)$$

$$\varepsilon_f = \text{sinal}(r_1 - r_f)$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\sqrt{2\mu}} \left(\sqrt{(r_0+r_1)^3} + \sqrt{(r_1+r_f)^3} \right)$$

O impulso total gasto nessa transferência diminui quando r_1 aumenta. Quando $r_1 \rightarrow \infty$ ocorre a transferência de mínimo ΔV , sendo chamada de transferência bi-parabólica, caracterizada pelo fato das duas órbitas de transferência passarem a ser parábolas. Sabe-se que para $\frac{r_f}{r_0} > 15,58178$ a transferência bi-elíptica é sempre superior ($\forall r_1 > r_f$) a de

Hohmann e dentro da faixa $11,93876 < \frac{r_f}{r_0} < 15,58178$ existe um valor mínimo limite de

r_1 que a transferência bi-elíptica deve se utilizar para ser mais eficiente do que a de Hohmann.

2.4 Problema de Lambert

O problema de Lambert é formulado da seguinte maneira: Dada uma órbita não perturbada, com uma lei de força do inverso do quadrado da distância (formulação Newtoniana), encontrar uma órbita que conecte dois pontos P e Q, com o tempo Δt especificado. Na literatura diversos pesquisadores resolveram este problema utilizando formulações distintas (Breakwell *et al* 1961; Battin, 1965 e 1968; Lancaster *et al* 1966; Prussing, 1979; Gooding, 1990).

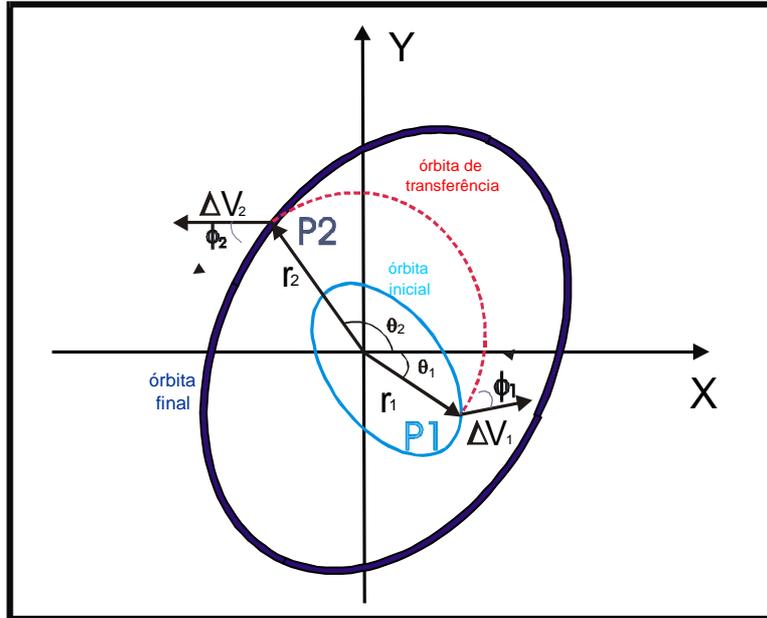


Figura 2.4 - Problema de Lambert.
 Fonte: Felipe, G., Prado, Beaugé (2002).

2.5 Problema de Lambert com mínimo ΔV

Suponha uma nave espacial em uma órbita Kepleriana que é chamada O_0 (a órbita inicial). Deseja-se transferir essa nave espacial para a órbita Kepleriana final O_2 , que é coplanar com a órbita O_0 . Para efetuar esta transferência, partimos do ponto $P_1(r_1, \theta_1)$. Neste ponto é aplicado um impulso de magnitude ΔV_1 que faz um ângulo ϕ_1 com a direção transversal local. A órbita de transferência cruza a órbita final no ponto $P_2(r_2, \theta_2)$, onde é aplicado um impulso com magnitude ΔV_2 , que faz um ângulo ϕ_2 com a direção local transversal. Agora, para definir o problema básico (o Problema de Lambert com ΔV mínimo) é necessário especificar o ângulo de posição θ_1 do ponto de partida da órbita O_0 (ponto P_1) e o ângulo de posição θ_2 do ponto de chegada da órbita O_2 (ponto P_2). Com estes pontos especificados e todos os elementos Keplerianos das duas órbitas conhecidas, é possível determinar os raios vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 no início e no fim da transferência. Então, o problema resume-se em encontrar a órbita de transferência que, conectando estes dois vetores e usando somente dois impulsos, requer o mínimo ΔV para a manobra. Este problema foi denominado por (Prado e Broucke, 1993) de “Problema de Lambert com mínimo ΔV ”.

CAPÍTULO 3

MANOBRAS DE UM CORPO DE VOLTA AO MESMO CORPO UTILIZANDO A ROTINA DE GOODING PARA RESOLVER O PROBLEMA DE LAMBERT

3.1 Descrição do Problema de Órbitas de Múltiplos Encontros

Chamemos de M_1 e M_2 os dois primários com massa $(1 - \mu)$ e μ , respectivamente, de um sistema de três corpos. M_2 está em órbita circular (versão original do problema estudado por Hénon (1968)) ou órbita elíptica (extensão feita por Howell (1987) e Howell e Marsh (1991)) ao redor de M_1 . O veículo espacial M_3 (terceiro corpo do sistema) deixa M_2 em um ponto $P(t = \psi_0)$, segue uma trajetória em torno de M_1 e encontra novamente com M_2 em um ponto $Q(t = \psi_f)$, onde $\psi_0, \psi_f \in [0, 2\pi]$, e os valores de ψ_0 e ψ_f não são necessariamente simétricos. A priori, será considerado $\mu_2 = 0$, isto é, desconsidera-se os efeitos da atração do corpo M_2 sobre o corpo M_3 na órbita de M_3 , implicando na redução do problema de três corpos para o problema de dois corpos. Assim pode-se utilizar as equações de Kepler no desenvolvimento das soluções. Serão utilizados dois impulsos na manobra de transferência. É assumido que os três corpos envolvidos são pontos de massa e não sofrem perturbações externas ao sistema.

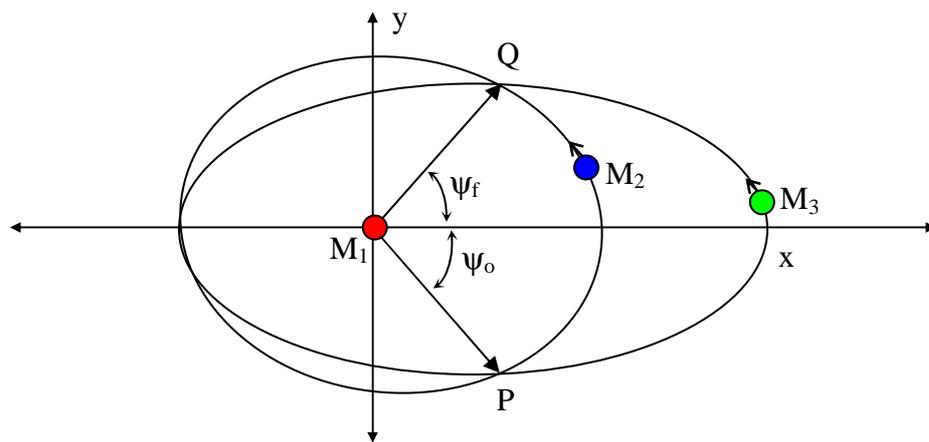


Figura 3.1 - Transferência de um corpo para o mesmo corpo.

Hénon (1968) estudou esse problema e publicou gráficos com soluções para o caso de órbitas circulares. Howel (1987) publicou soluções para o caso elíptico, onde as

transferências eram simétricas em relação ao perigeu. Prado e Broucke (1993a) publicaram soluções deste problema nas mesmas situações utilizando o método de Lambert para a solução do problema.

Neste trabalho estenderam-se as considerações feitas por Prado e Broucke (1993a) e generalizaram-se os ângulos de partida e chegada da espaçonave M_3 , abrangendo os casos não simétricos. Foram incluídas soluções em termos do semi-eixo maior (a) e foram simuladas diversas órbitas de múltiplos encontros. Os resultados foram analisados e dispostos em forma de tabelas e gráficos.

3.1.2 Abordagem de Hénon

A partir de uma análise da geometria do problema, temos:

Para o corpo M_2 , as coordenadas que definem a sua posição são:

$$\begin{cases} x_2 = \cos(t) \\ y_2 = \sin(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Para M_3 , as coordenadas que definem a posição do veículo são:

$$\begin{cases} x_3 = a(\cos(E) - e) \\ y_3 = a\sqrt{1 - e^2} \sin(E) \\ t = a^{\frac{3}{2}}(E - e\sin(E)) \end{cases} \quad (3.2)$$

onde (a , e , E , t) são elementos keplerianos da órbita do corpo.

Existem diferentes possibilidades para a órbita de M_3 ao redor de M_1 (Prado, 1993).

Analisando-as, podemos definir:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ se o periapse está na abscissa } \begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases} \\ \varepsilon' &= \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ se o sentido da órbita é } \begin{cases} \text{progressivo} \\ \text{retrógrado} \end{cases} \\ \varepsilon'' &= \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ se a passagem em } \psi = 0 \text{ é no } \begin{cases} \text{periapse} \\ \text{apoapse} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Utilizando esta formulação, as equações generalizadas para M_3 são:

$$\begin{cases} x_3 = \varepsilon a (\varepsilon' \cos(E) - e) \\ y_3 = \varepsilon \varepsilon' a \sqrt{1 - e^2} \varepsilon'' \sin(E) \\ t = a^{\frac{3}{2}} (E - \varepsilon'' e \sin(E)) \end{cases} \quad (3.4)$$

Para Resolver o problema igualamos as equações (3.1) com (3.4), sendo $t = \psi$ e $E = \eta$ (anomalia excêntrica) obtemos:

$$\begin{cases} \cos(\psi) = \varepsilon a (\varepsilon' \cos(\eta) - e) \\ \sin(\psi) = \varepsilon \varepsilon' a \sqrt{1 - e^2} \varepsilon'' \sin(\eta) \\ \psi = a^{\frac{3}{2}} (\eta - \varepsilon'' e \sin(\eta)) \end{cases} \quad (3.5)$$

Este conjunto de equações será usado para gerar as soluções do problema.

3.1.3 Formulação Matemática do Problema

O problema de Hénon (1968), formulado como um problema de Lambert, pode ser descrito como segue.

- i) A posição de M_3 em $t = \psi_0$ é o ponto P, ponto inicial da órbita de transferência. O vetor posição R_1 localiza o corpo M_3 no ponto P, que é especificado em função do ângulo ψ_0 , onde:

$$R_1 = \frac{a(1-e)^2}{1+e\cos(\psi_0)} \quad (3.6)$$

Isso vale tanto para M_2 quanto para M_3 , pois no momento inicial ($t = \psi_0$) M_2 e M_3 ocupam a mesma posição.

- ii) A posição de M_3 em $t = \psi_f$ é o ponto Q, ponto final da órbita. O vetor posição R_2 localiza o corpo M_3 no ponto Q, análogo ao item acima, é descrito pela equação:

$$R_2 = \frac{a(1-e)^2}{1+e\cos(\psi_f)} \quad (3.7)$$

- iii) O tempo total da transferência é dado por $\Delta t = \omega(\psi_f - \psi_0)$. Os ângulos e os tempos são iguais, pois foi considerado que a velocidade angular do sistema é unitária.
- iv) O ângulo total que o veículo leva para viajar de P até Q, para o caso de órbitas elípticas, pode assumir vários valores possíveis. Em primeiro lugar é preciso considerar duas possíveis soluções para a transferência: O menor ângulo entre P e Q (chamada de solução de menor caminho) e a outra que utiliza o maior ângulo entre os dois pontos (chamada de solução de maior caminho). Depois de considerar essas escolhas, leva-se em conta a possibilidade de várias revoluções para a transferência. Nessa condição, o veículo sai de P, completa uma ou mais revoluções em torno de M_1 e só depois chega a Q. Assim, combinando esses dois fatores, os possíveis valores para $\Delta\psi$ são $[\psi_f - \psi_0 + 2m\pi]$ e $[2\pi - (\psi_f - \psi_0) + 2m\pi]$. O número de revoluções “m” não é limitado superiormente e este problema possui infinitas soluções, exceto no caso de M_3 estar em órbita hiperbólica ou parabólica.

A solução do problema de Lambert é a órbita kepleriana que contém os pontos P e Q e que requer o tempo dado para a transferência $\Delta\psi = \psi_f - \psi_0$ para o veículo viajar entre esses dois pontos. Esta solução pode ser especificada de várias maneiras. Os vetores velocidade nos pontos P e Q nos fornecem duas possibilidades, dado que os vetores posição são conhecidos. Uma outra escolha são os elementos keplerianos da órbita de transferência. Neste trabalho serão implementadas e analisadas as três possibilidades, dado que todas elas são importantes para análise de uma missão.

Para obter os ΔV 's, os seguintes passos são utilizados:

- 1) Encontrar as componentes radial e transversal do vetor velocidade de M_2 em P e Q. Nota-se que elas também são componentes da velocidade de M_3 imediatamente antes do primeiro impulso e imediatamente após o segundo impulso, respectivamente, devido ao fato de que suas órbitas se encontram nesses pontos. Elas são obtidas pelas seguintes equações:

a) Velocidade Radial

$$V_r = \frac{e \sin(\nu)}{\sqrt{a(1-e^2)}} \quad (3.8)$$

b) Velocidade Transversal

$$V_t = \frac{1 + e \cos(\nu)}{\sqrt{a(1-e^2)}} \quad (3.9)$$

onde : ν – anomalia verdadeira

- 2) Encontrar uma órbita para M_3 que permita que ele deixe o ponto P e chegue ao ponto Q nos tempos dados (Solução do Problema de Lambert). Nesse momento o tempo de transferência também é conhecido.
- 3) Determinar as componentes do vetor velocidade nos pontos da órbita de transferência que foram encontrados acima. Estas são as componentes de velocidade para M_3 imediatamente após o primeiro impulso e imediatamente antes do segundo impulso. Na solução do Problema de Lambert será utilizada a sub-rotina desenvolvida por Gooding (1990).
- 4) Após a obtenção das componentes do vetor velocidade imediatamente antes e depois dos impulsos, é possível calcular a magnitude dos dois impulsos (ΔV_1 e ΔV_2) e somá-los para obter o impulso total requerido para a transferência (ΔV).

3.2 Desenvolvimento e Resultados

3.2.1 Implementação do Problema de Lambert

As soluções apresentadas são em termos das anomalias verdadeira (ν), excêntrica (η), semi-eixo maior (a) e variação da velocidade (ΔV). São dispostas da seguinte maneira:

1. Se o veículo passa no periapsis em $\psi = 0$:
 - a) $\underline{v} = v$
 - b) $\underline{\eta} = \eta$
2. Se o veículo passa no apoapsis em $\psi = \pi$:
 - a) $\underline{v} = v - \pi$
 - b) $\underline{\eta} = \eta - \pi$

Os métodos clássicos de manobras orbitais são baseados no modelo de propulsão com empuxo infinito. Na modelagem do Problema de múltiplos encontros utilizamos o empuxo infinito. É utilizada a versão que utiliza dois impulsos para completar a transferência de órbitas (Prado e Broucke, 1993a). Foram empregadas diversas excentricidades e vários ângulos iniciais e finais para a manobra. Como resultado obtivemos tabelas e gráficos das anomalias excêntricas (η) e verdadeiras (v), semi-eixo maior (a) e consumo de combustível (medido pelo ΔV). Foram considerados vários ângulos iniciais ψ para cada valor de excentricidade (e), o que pode ser verificado nos gráficos e tabelas que serão mostrados a seguir (Figura 3.1 - 3.43, Tabela 3.1 - 3.6).

3.2.1.1 A Sub-rotina de Gooding

A solução do problema de Lambert foi pesquisada por um longo período. A abordagem para solucionar este problema é estabelecer um conjunto de equações não lineares (do problema de dois corpos) e iniciar um processo iterativo para achar uma órbita que satisfaça todos os requisitos. Não se tem uma forma de solução pré-estabelecida para este problema. A maior dificuldade é escolher o melhor conjunto de equações e parâmetros para as iterações, de modo a garantir que a convergência aconteça em todos os casos.

A sub-rotina desenvolvida por Gooding (1990), que foi utilizada neste trabalho, é um procedimento que resolve o Problema de Lambert, que já foi utilizado com muito sucesso em Prado (1993). O segredo deste procedimento é devido ao uso de um método de iteração que faz as soluções convergirem rapidamente em todas as circunstâncias. O procedimento é extremamente eficiente, e é baseado no algoritmo de Lancaster et al. (1966 e 1969). Este algoritmo depende do valor de m (número de revoluções) para

escolher o valor inicial para o processo de iteração. Também são empregadas expansões em séries de potência.

Podemos resumir este algoritmo da sub-rotina original da seguinte forma:

1. Variáveis de entrada:

- a. R_1 – distância do ponto inicial ao centro de atração;
- b. R_2 – distância do ponto final ao centro de atração;
- c. θ - ângulo entre a posição inicial e final da transferência;
- d. Δt = tempo da transferência;
- e. μ - parâmetro gravitacional do corpo principal.
- f. m – o número de revoluções envolvidas na transferência;

2. Criação de um conjunto de variáveis que são utilizados no processo de iteração:

- a. θ_r - o ângulo θ , $\theta_r \in [0, 2\pi]$;
- b. q – parâmetro utilizado por Lancaster et al. (1966) na iteração:

$$q = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) \quad (3.10)$$

- c. c – distância entre os pontos envolvidos na transferência:

$$c^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(q) \quad (3.11)$$

- d. s – o semi-perímetro do triângulo formado pelo centro de força e os pontos inicial e final da transferência:

$$s = \frac{R_1 + R_2 + c}{2} \quad (3.12)$$

- e. equação que serve de parâmetro para eliminar erros numéricos durante o processo computacional:

$$1 - q^2 = \frac{c}{s} \quad (3.13)$$

- f. T – variável que substitui o tempo de transferência no processo de iteração:

$$T = \sqrt{\frac{8\mu}{s^3}} \Delta t \quad (3.14)$$

- g. x – parâmetro para a iteração:

$$x^2 = 1 - \frac{s}{2a} \quad (3.15)$$

Têm-se duas raízes da equação quadrática, gerando uma dupla possibilidade para a solução do problema de Lambert. Também é possível identificar o tipo da órbita de transferência analisando x :

- i) $|x| < 1$ para órbitas elípticas;
- ii) $x = 1$ para órbitas parabólicas;
- iii) $x > 1$ para órbitas hiperbólicas.

A possibilidade $x \leq -1$ não existem, porque o tempo para a transferência seria negativo.

3. Fornecer as soluções do problema em função das seguintes variáveis:

- a. $V_{R,1}$ – velocidade radial no ponto inicial da transferência;
- b. $V_{R,2}$ – velocidade radial no ponto final da transferência;
- c. $V_{T,1}$ – velocidade tangencial no ponto inicial da transferência;
- d. $V_{T,2}$ – velocidade tangencial no ponto final da transferência;

A sub-rotina de Gooding foi utilizada neste trabalho, e é descrita na literatura como um processo de grande sucesso para resolver o problema de Lambert. Detalhes do processo interno da sub-rotina podem ser encontrados em Gooding (1990) e em Prado (1993).

3.2.1.2 Descrição do Algoritmo de resolução do Problema de Múltiplos Encontros e Swing-By

O algoritmo para a resolução do Problema de Múltiplos Encontros é composto de um programa principal e de sub-rotinas na linguagem Fortran, incluindo a sub-rotina de Gooding (1990). O corpo principal do código foi desenvolvido durante este trabalho e pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Dados de entrada:
 - a. e – excentricidade da órbita do corpo M_3 ;
 - b. S_3 - especifica se o corpo M_2 passa no periapsis (+1) ou apoapsis (-1) quando $\psi = 0$;
 - c. passos da manobra em função de ψ ;
 - d. m - número de revoluções ao redor do primário;
 - e. ψ_0 – ângulo inicial das manobras;
 - f. ψ_f – ângulo máximo das manobras;
 - g. r_p - distância de máxima aproximação durante o encontro, entre M_2 e M_3 (*Swing-by*).
2. Calcular os parâmetros da órbita da manobra de Múltiplos Encontros:
 - a. Calcular a cada instante a posição dos corpos M_2 e M_3 ;
 - b. Calcular a cada instante a velocidade dos corpos M_2 e M_3 ;
 - c. Calcular a cada instante os elementos Keplerianos da órbita de M_3 .
3. Calcular os parâmetros do Swing-By, aproveitando os valores do Problema de Múltiplos Encontros. Estes parâmetros são:

- a. δ - ângulo de deflexão;
 - b. $|\vec{V}_\infty|$ - magnitude da velocidade da nave espacial no infinito, antes ou depois do encontro;
 - c. ψ_A - ângulo de aproximação.
4. Fornecer os parâmetros da órbita atingida após o *Swing-By*, em função das condições iniciais da manobra:
- a. semi-eixo maior (a);
 - b. anomalia excêntrica (η);
 - c. anomalia verdadeira (v);
 - d. consumo de combustível (ΔV) na manobra de Múltiplos Encontros;
 - e. variação na energia (ΔE);
 - f. variação na velocidade (ΔV).

Este algoritmo foi desenvolvido para fornecer soluções para o Problema de Múltiplos encontros e *Swing-By* conforme descrito em detalhes no Capítulo 4. A sub-rotina de *Swing-by* foi totalmente desenvolvida e implementada no presente trabalho.

3.2.2 Simulação com os parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_o = -3$ e $-3 \leq \psi \leq \psi_f = 4$ rad

As soluções serão dadas em função de ψ , que é o ângulo final de cada manobra. O ângulo ψ pertence ao intervalo que vai do valor inicial da manobra (ψ_o) até o ângulo (ψ_f) que é o limite máximo da manobra, estes parâmetros do intervalo são fornecidos como entrada na simulação. Para cada conjunto de manobras simuladas, serão apresentados tabelas e gráficos que contêm as soluções do Problema de Múltiplos Encontros.

A Tabela 3.1 mostra soluções em que a variação da velocidade (ΔV) no Problema de Múltiplos Encontros é mínima. O ângulo ψ é utilizado para gerar as soluções em termos das anomalias verdadeiras (v), excêntricas (η) e a variação da velocidade (ΔV), como já fora descrito anteriormente.

A Figura 3.2 mostra a variação da velocidade (ΔV) em função de ψ , no Problema de Múltiplos Encontros. Este gráfico (Figura 3.2) retrata os valores do ΔV no decorrer do tempo da manobra. Os valores possuem uma característica de formar famílias de soluções. Nota-se que as soluções não são únicas, porque o veículo pode dar várias revoluções ao redor do primário. Até seis revoluções foram incluídas nestas simulações. Verifica-se que existem pontos em que o ΔV é máximo e pontos em que assume valores mínimos locais, que é o objeto de estudo neste capítulo.

A Figura 3.3 fornece soluções encontradas para o Problema de Múltiplos Encontros com baixo consumo de combustível. Estes valores estão em uma faixa considerada mínima. Neste gráfico (Figura 3.3), para excentricidade $e = 0,1$, temos valores onde $\Delta V < 0,01$.

Na Figura 3.4 encontram-se as soluções que mostram o semi-eixo maior (a) como função de ψ , para a excentricidade da órbita de transferência $e = 0,1$. Nota-se, também, a formação de famílias de soluções e verifica-se que estas soluções não são únicas, para um único valor do ângulo final de cada manobra ψ , pois podem ser encontradas mais de uma solução.

TABELA 3.1 - Soluções com $\Delta V < 0,01$.

$e = 0,1$	Anomalia Verdadeira	Anomalia Excêntrica	Varição da Velocidade
ψ (rad)	v (rad))	η (rad)	ΔV
2,997	1,9975	1,9973	0,00169
2,998	1,9984	1,9982	0,001127
2,999	1,9992	1,9991	0,000564
-1,011	1,991	1,9918	0,001854
-1,01	1,9918	1,9926	0,001684
-1,009	1,9926	1,9933	0,001513
-1,008	1,9934	1,994	0,001344
-1,007	1,9942	1,9948	0,001174
-1,006	1,9951	1,9955	0,001005
-1,005	1,9959	1,9963	0,000837
-1,004	1,9967	1,997	0,000669
-1,003	1,9975	1,9978	0,000501
-1,002	1,9984	1,9985	0,000334
-1,001	1,9992	1,9993	0,000167
0,995	2,9959	2,9955	0,001928
0,996	2,9967	2,9964	0,001542
0,997	2,9975	2,9973	0,001156
0,998	2,9984	2,9982	0,000771
0,999	2,9992	2,9991	0,000385

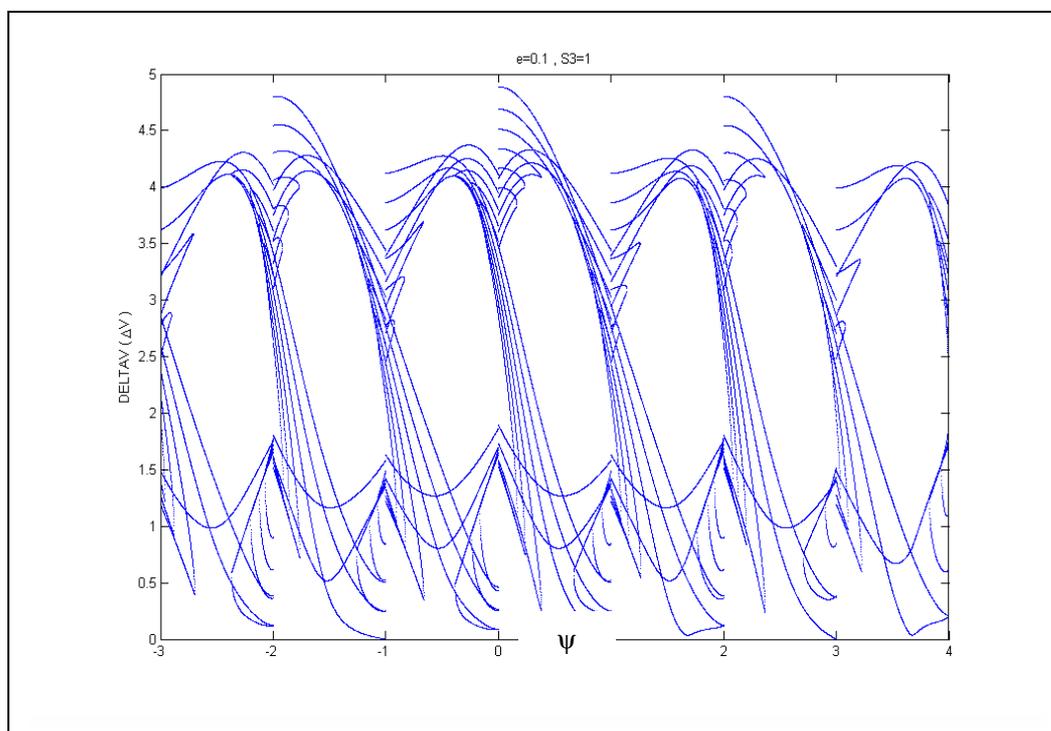


Figura 3.2 - ΔV vs. ψ , para $e = 0,1$.

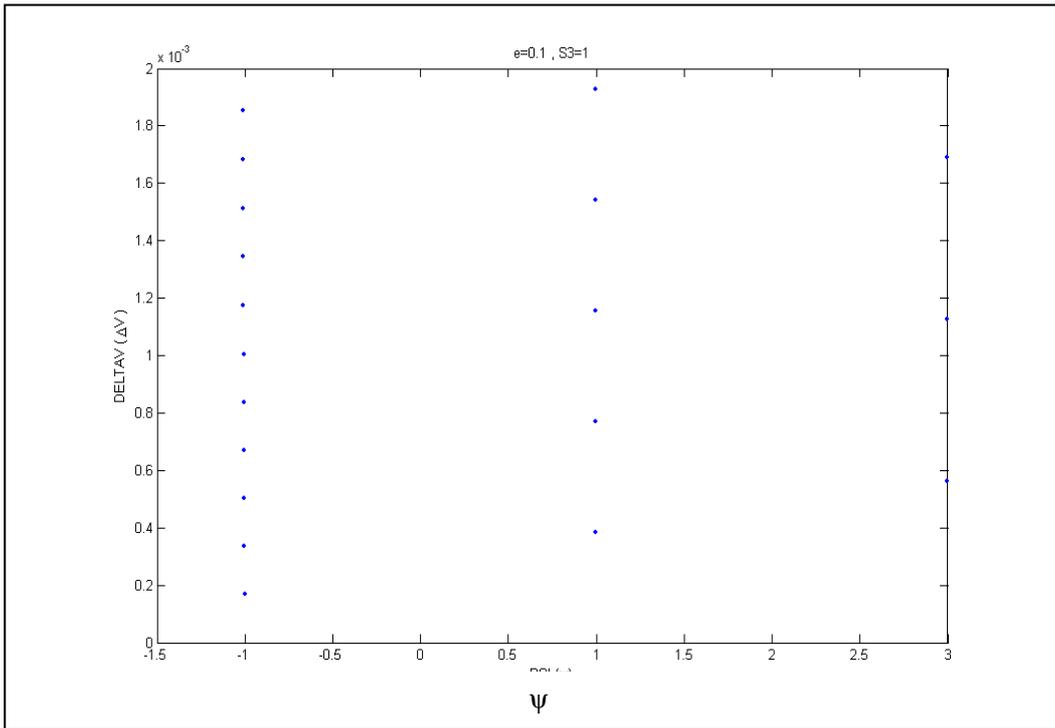


Figura 3.3 - ΔV Mínimo ($\Delta V < 0,01$).

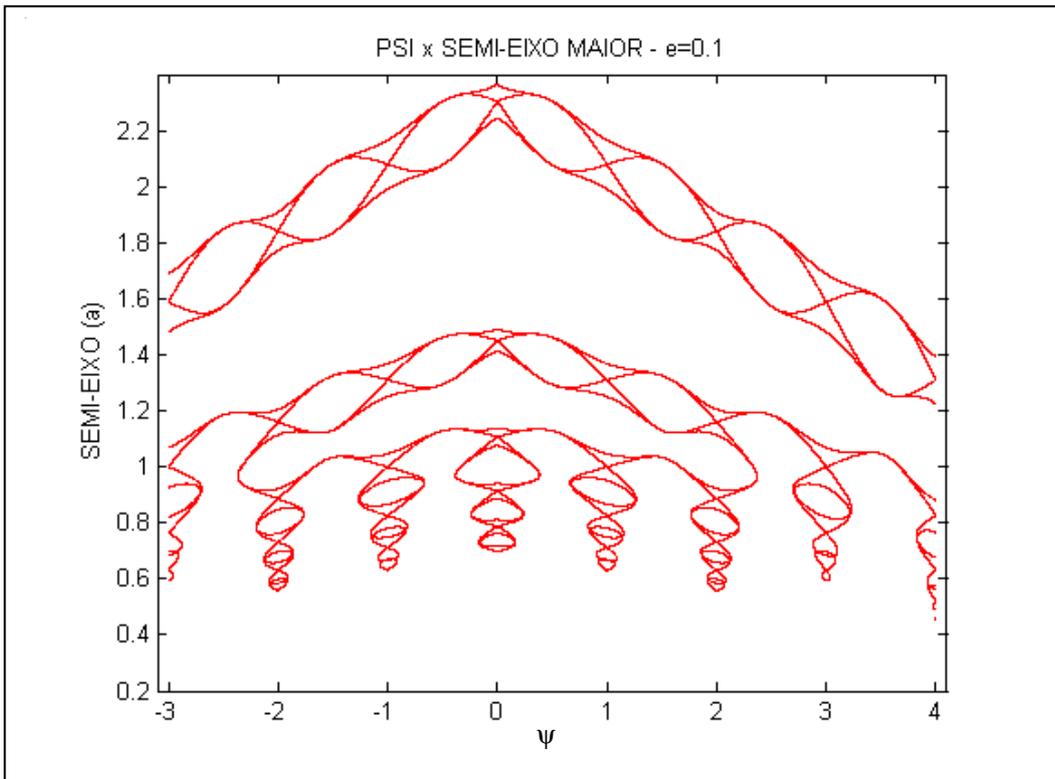


Figura 3.4 – Solução em termos do Semi-eixo maior (a).

As soluções em termos da anomalia verdadeira (v) são verificadas nas Figuras 3.5 e 3.6. Na Figura 3.5 encontram-se as soluções tridimensionais, tendo como parâmetros: o ângulo da inicial da manobra ψ_0 , o ângulo final de cada manobra ψ e a anomalia verdadeira (v). Estas soluções agrupam-se em forma de placas de soluções, e cada placa segue o mesmo padrão mudando o ângulo inicial da manobra ψ_0 . Nesta Figura (Figura 3.5) verifica-se a formação de família de soluções que seguem o mesmo padrão no decorrer do tempo de transferência $\Delta t = \Delta\psi$.

Observa-se que a Figura 3.6 mostra quatro quadros que representam as soluções variando o valor inicial de ψ . Cada quadro apresenta os valores da anomalia verdadeira (v) em função ψ .

As Figuras 3.7 e 3.8 mostram as soluções em termos da anomalia excêntrica (η). Considerações análogas aos parágrafos anteriores podem ser feitas em relação a estas figuras.

Verifica-se que as soluções apresentadas não são únicas e dependem dos parâmetros de entrada, que são o ângulo inicial da manobra ψ_0 , o ângulo máximo das manobras ψ_f , a excentricidade (e) da órbita de transferência e os passos da manobra. Importante salientar que os valores que são apresentados para a variação da velocidade (ΔV) estão em unidades canônicas.

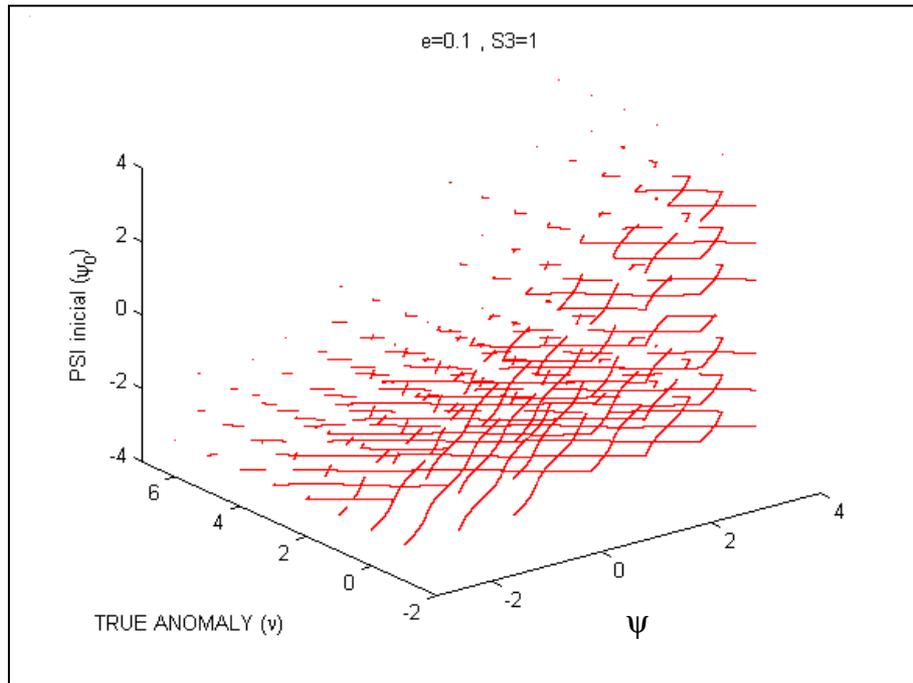


FIGURA 3.5 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).

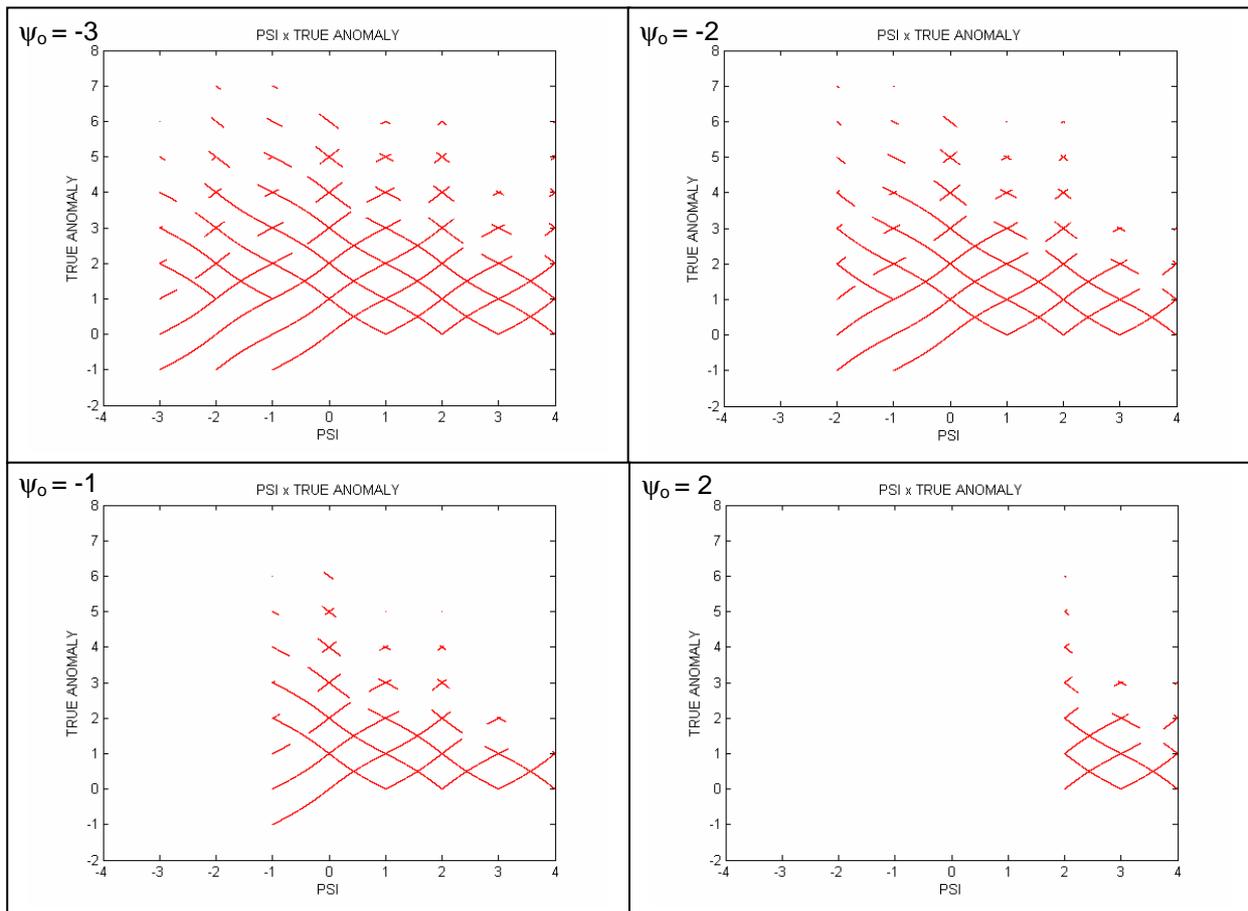


FIGURA 3.6 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,1$.

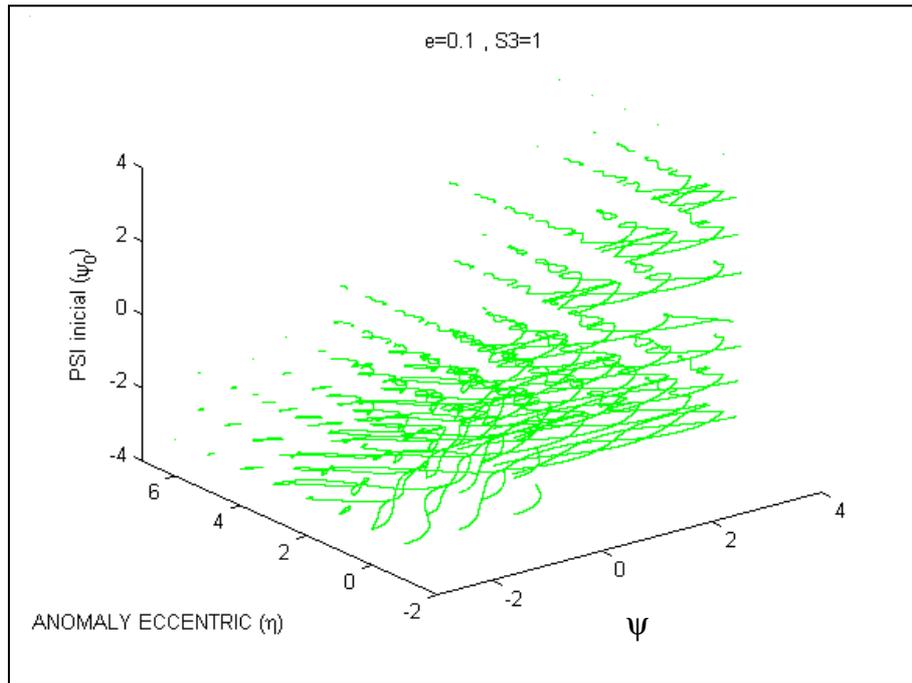


FIGURA 3.7 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).

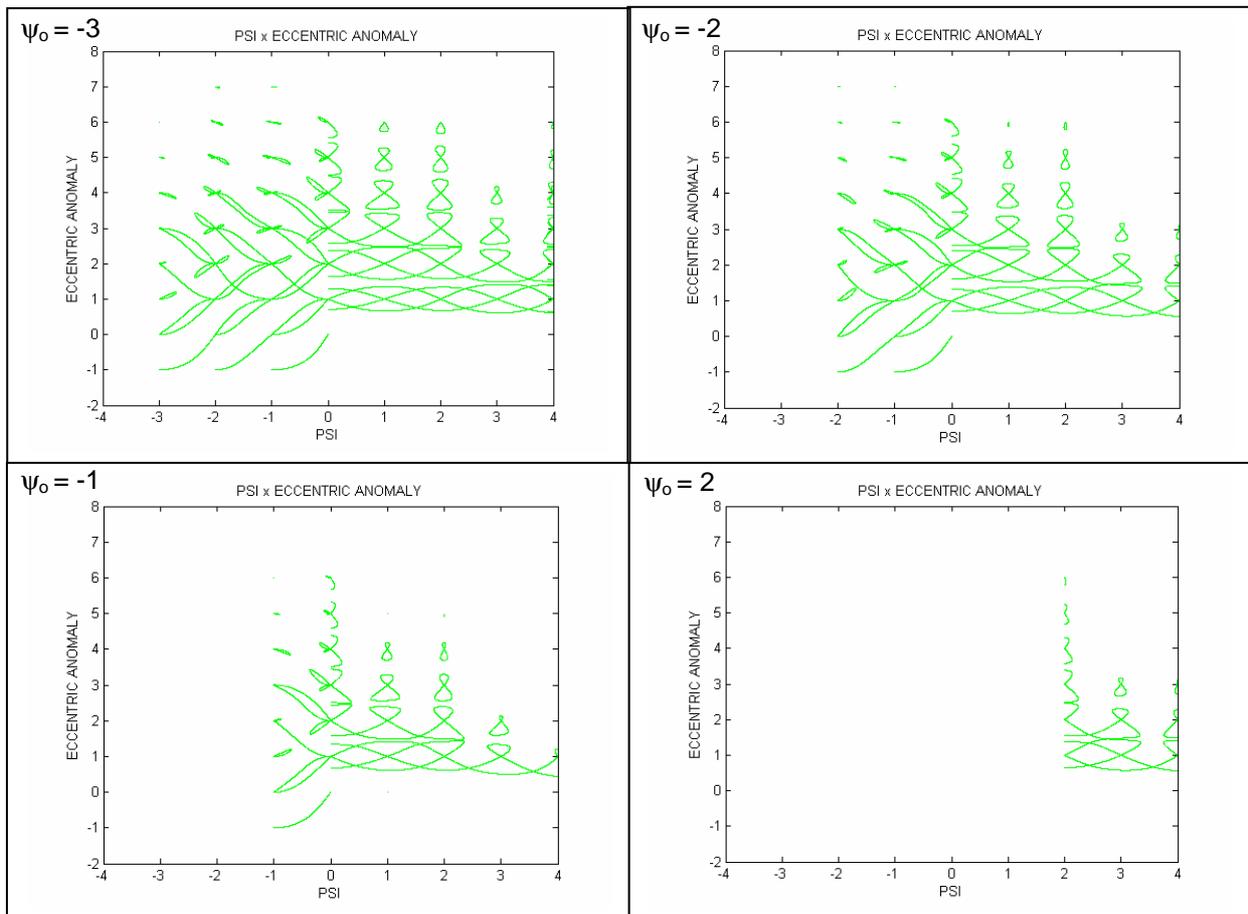


FIGURA 3.8 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,1$.

As Tabelas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 mostram que, para cada valor do ângulo ψ , os valores em que os ΔV 's são mínimos, e seus respectivos valores das anomalias verdadeiras (v) e excêntricas (η). Formando um conjunto de informações úteis para consulta e análise dos parâmetros obtidos nas simulações. Estes valores de ΔV (variação da velocidade) foram agrupados dentro de uma faixa considerada mínima. No caso da Tabela 3.6 ($e = 0$), estes valores estão na faixa em que $\Delta V < 0,001$ e na Tabela 3.5 ($e = 0,9$), a faixa de valores é $\Delta V < 0,1$. Estas soluções foram encontradas nas simulações, estão em unidades canônicas e estes valores são mínimos se comparados com outros trabalhos que mediram estes índices de performance (Prado e Brouke, 1993a).

Nas soluções com mínimo ΔV (Figuras 3.3, 3.10, 3.17, 3.24, 3.31 e 3.38), após inúmeras simulações, foi verificado que o crescimento do valor da excentricidade ($0 \leq e < 1$) da órbita de múltiplos encontros produz uma menor quantidade de soluções mínimas. Para a excentricidade $e = 0,9$ (seção 3.2.6) o ΔV assume valores muito alto ($\Delta V \approx 18$, em unidades canônicas) (Figura 3.30) comparando com os casos em que as excentricidades são menores (Seções 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.7). A variação da velocidade (ΔV) na Tabela 3.5 ($e = 0,9$) comparando com a Tabela 3.6 ($e = 0$, órbita circular), mostra que a diferença é muito grande entre os valores máximos e mínimos, mostrando que quanto menor forem as excentricidades ($(e \rightarrow 0)$ tendendo a zero), menores serão os valores para o ΔV , que mede o consumo de combustível.

Analisando os valores dos ΔV 's (Figuras 3.2, 3.9, 3.16, 3.23, 3.30 e 3.37), nota-se que existem regiões em que não foram encontradas soluções, formando figuras que vão se repetindo no decorrer do tempo de execução da manobra ($\Delta t = \psi_f - \psi_o$), mostrando infinitas soluções que dependem dos ângulos iniciais e finais da manobra. Estes lugares em que não há pontos são regiões em que não existem parâmetros que satisfaçam os requisitos para solução deste problema. Lembrando que os valores numéricos da variação da velocidade (ΔV) apresentados neste trabalho estão em unidades canônicas.

As Figuras 3.4, 3.11, 3.18, 3.25, 3.32 e 3.39, mostram soluções em termos do elemento Kepleriano semi-eixo maior (a). Foi verificado que ocorre o mesmo comportamento no decorrer das simulações. Ocorre a formação de família de soluções agrupadas por regiões. Existem regiões em que não foram encontradas soluções, porque o algoritmo utilizado neste presente trabalho procura os pontos que satisfazem a geometria do

problema, buscando melhores soluções para resolver o Problema de Múltiplos Encontros. Nota-se também que, para o mesmo valor do ângulo ψ , podemos encontrar soluções não únicas, o que pode ser visualizado na Figura 3.4, com $e = 0,1$, $\psi_o = -3$ rad e $\psi_f = 4$ rad. Considerações análogas podem ser estendidas para as outras excentricidades e outros parâmetros iniciais (Figuras 3.11, 3.18, 3.25, 3.32 e 3.39).

As soluções dadas em termos da anomalia verdadeira (v) (Figuras 3.5, 3.12, 3.19, 3.26, 3.33 e 3.40), que mostra em três dimensões as soluções, incluindo o ângulo inicial (ψ_o). Estas figuras formam placas de soluções com espaçamento do ângulo inicial (ψ_o), mostrando que variando o ângulo inicial (ψ_o) as soluções seguem bem comportadas, isto é, mantém o padrão de continuidade das soluções. Independente do ângulo inicial da manobra as soluções tendem a formar figuras no mesmo padrão. Considerações análogas podem ser feitas em relação as soluções em termos da anomalia excêntrica (Figuras 3.7, 3.14, 3.21, 3.28, 3.35 e 3.42), em que nota-se também o padrão de continuidade das soluções.

Nas soluções em termos da anomalia verdadeira (v) (Figuras 3.5, 3.6, 3.12, 3.13, 3.19, 3.20, 3.26, 3.27, 3.33, 3.34, 3.40 e 3.41), comparando as soluções das simulações com excentricidades altas (s 3.33 e 3.34) com as soluções com o valor de excentricidade próximos ou iguais a zero (Figuras 3.19, 3.20, 3.40 e 3.41), verifica-se que as soluções, nos casos $e \approx 0$ (próximas a zero), formam retas que se interceptam, e com o crescimento da excentricidade ($e \rightarrow 1$) as soluções adquirem um formato mais curvilíneo, os pontos se encontram mais agrupados, formando famílias de soluções mais próximas dos valores inteiros do ψ (Figuras 3.36). Estes valores da anomalia verdadeira (v) podem ser utilizados junto com os outros parâmetros da órbita para uma possível análise de missão.

No caso das soluções dadas em termos da anomalia excêntrica (η) (Figuras 3.7, 3.8, 3.14, 3.15, 3.21, 3.22, 3.28, 3.29, 3.35, 3.36, 3.42 e 3.43), as soluções no decorrer do tempo de execução da manobra formam, também, famílias agrupadas em torno de valores de ψ , nas Figuras 3.29 e 3.36 ($e = 0,6$ e $e = 0,9$, respectivamente), as famílias vão se agrupando em torno dos seguintes valores: $\psi \approx -2$ rad ($-114,59^\circ$), $\psi \approx 0$ rad (0°) e $\psi \approx 2$ rad ($114,59^\circ$). Comparando com a órbita circular (Figura 3.43, $e = 0$), as anomalias excêntricas vão se agrupando em torno dos valores inteiros de ψ mostrando

que quando a excentricidade da órbita de transferência vai aumentando ($e \rightarrow 1$), as soluções se agrupam em regiões mais próximas, concentrando as soluções. Conclui-se que quando a excentricidade aumenta, as soluções se agrupam em torno de valores do ângulo final de cada manobra ψ , permitindo lugares onde as soluções são mais propícias e regiões proibitivas.

Estas soluções são importantes para o estudo destes tipos de manobras de colisão, porque o objetivo principal é buscar o mínimo consumo de combustível e a órbita que o proporciona. Esta órbita é fornecida através dos elementos Keplerianos da órbita de transferência (anomalia excêntrica (η), anomalia verdadeira (v), excentricidade (e), semi-eixo maior (a) e tempo de transferência ($\Delta t = \Delta\psi$)) fornecidos como solução do problema de múltiplos encontros, neste trabalho.

3.2.3 Simulação com os parâmetros: $e = 0,3$, $\psi_0 = -3,5$ e $-3,5 \leq \psi \leq \psi_f = 4,5$ rad

TABELA 3.2 - Soluções com $\Delta V < 0,01$.

$e = 0,3$	Anomalia Verdadeira	Anomalia Excêntrica	Variação da Velocidade
ψ (rad)	v (rad)	η (rad)	ΔV
3,999	1,9981	1,9986	0,001909
-2,001	1,9981	1,9973	0,001873
1,999	2,9981	2,9986	0,001888
-0,001	2,9981	2,9973	0,001872
2,999	1,9994	1,9992	0,001098
-1,002	1,9989	1,9992	0,001749
-1,001	1,9994	1,9996	0,000874
0,998	2,9989	2,9985	0,001949
0,999	2,9994	2,9992	0,000974
1,999	1,9981	1,9986	0,001909
-0,001	1,9981	1,9973	0,001873
2,999	0,99944	0,99923	0,00161
0,999	1,9994	1,9992	0,001098
2,999	0,99944	0,99923	0,00161
0,999	1,9994	1,9992	0,001098
1,999	1,9981	1,9986	0,001909
2,999	1,9994	1,9992	0,001098
3,999	1,9981	1,9986	0,001909

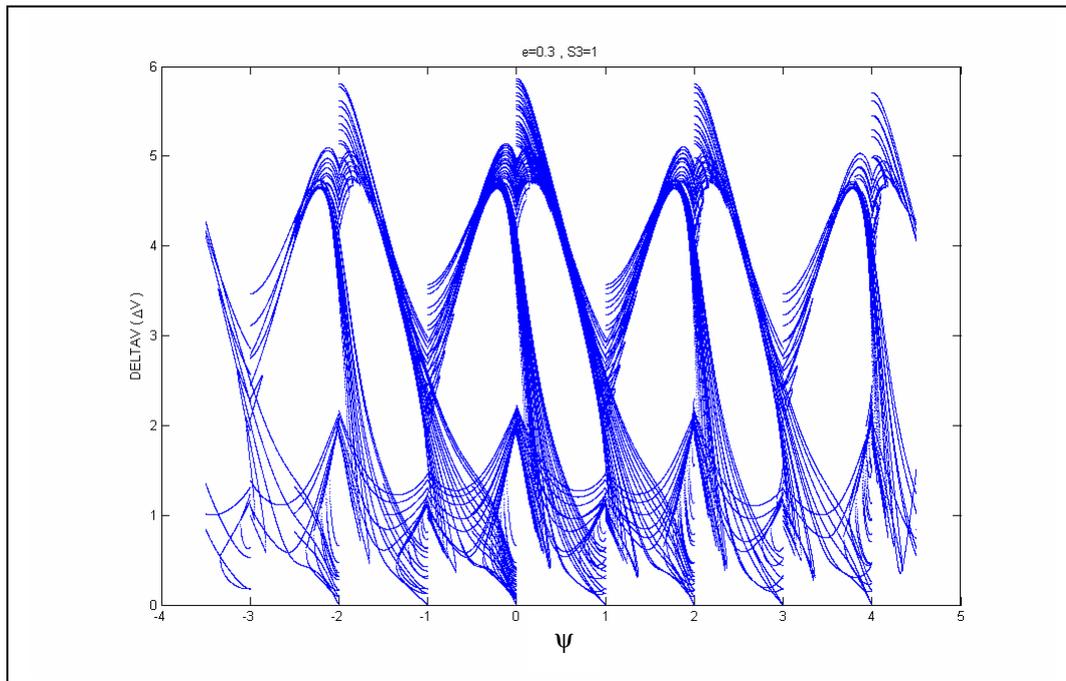


FIGURA 3.9 - ΔV vs. ψ , para $e = 0,3$.

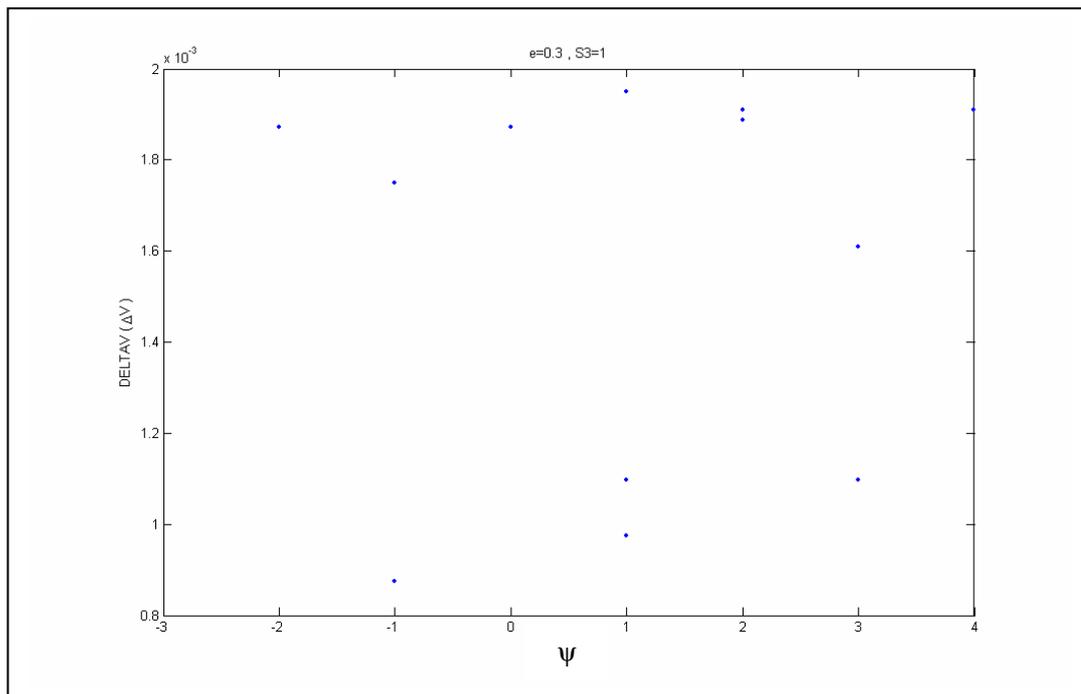


FIGURA 3.10 - ΔV Mínimo ($\Delta V < 0,01$).

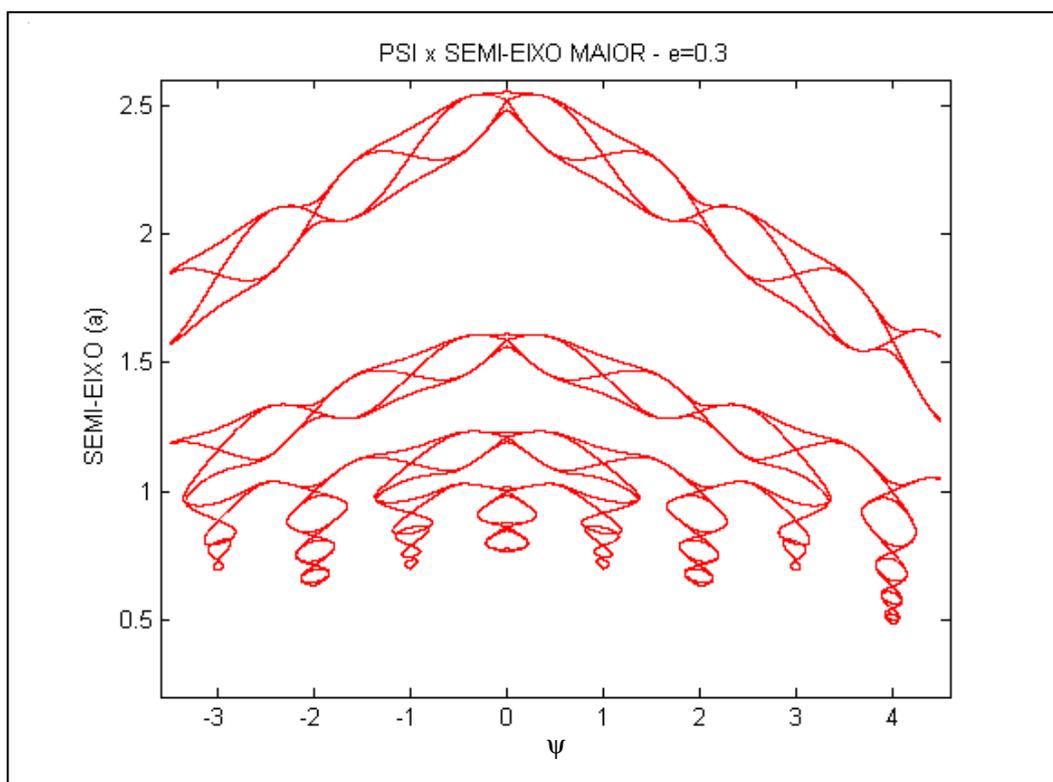


FIGURA 3.11 – Solução em termos do Semi-eixo maior (a).

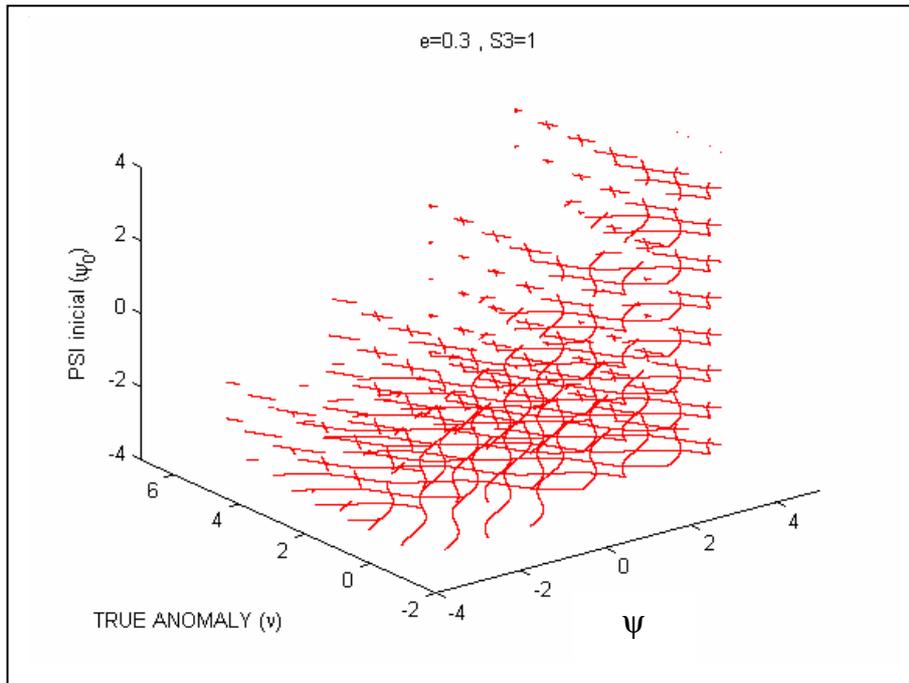


FIGURA 3.12 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).

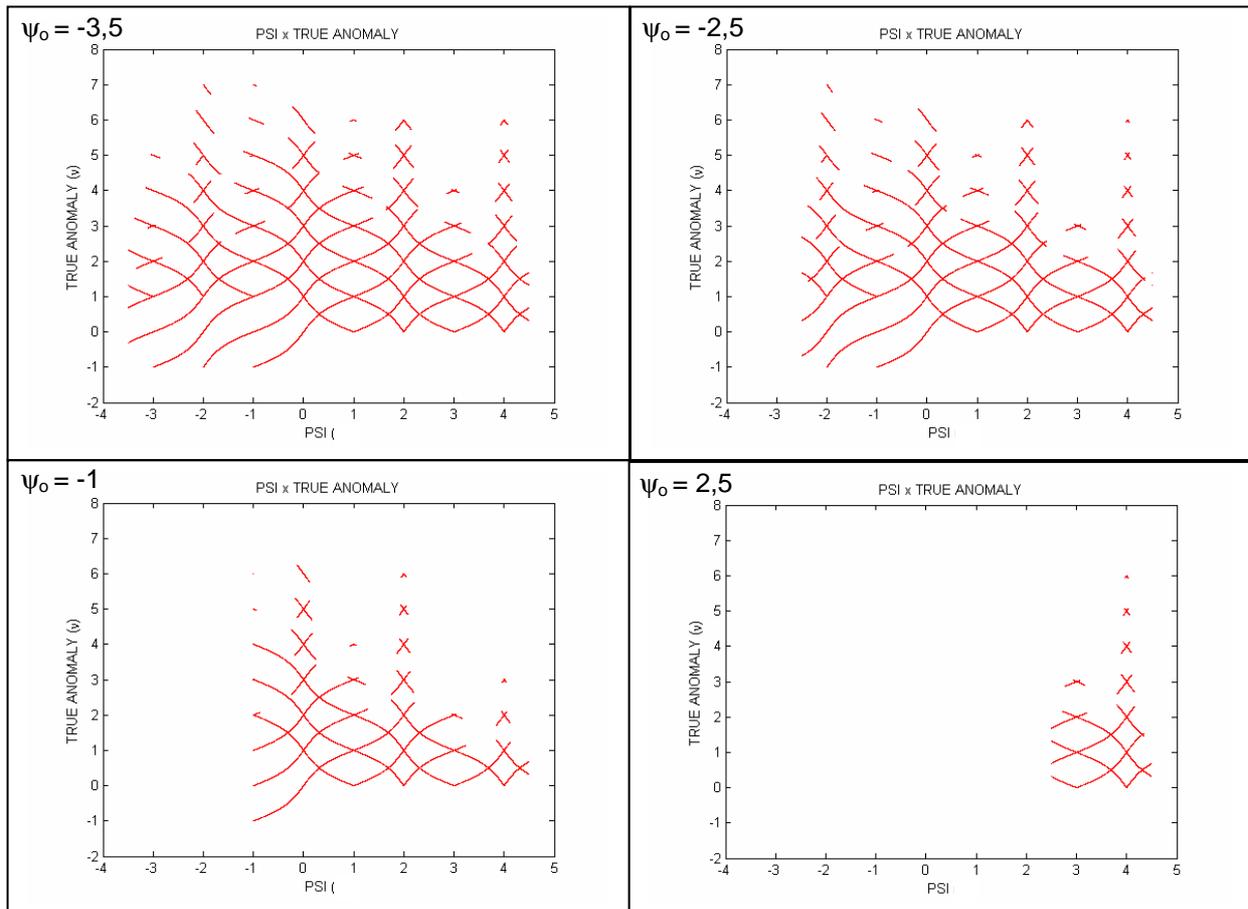


FIGURA 3.13 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,3$.

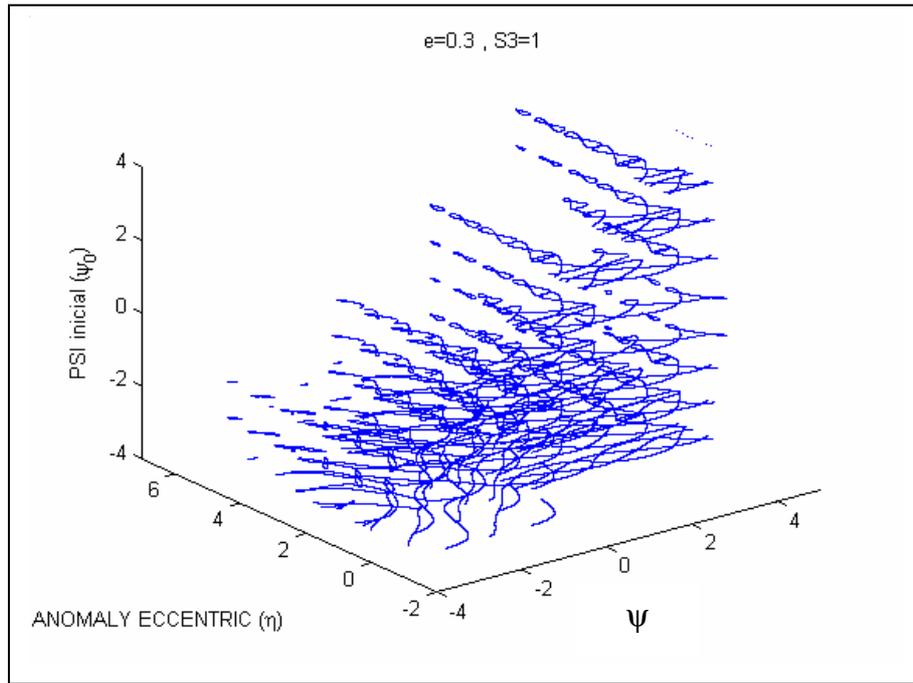


FIGURA 3.14 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).

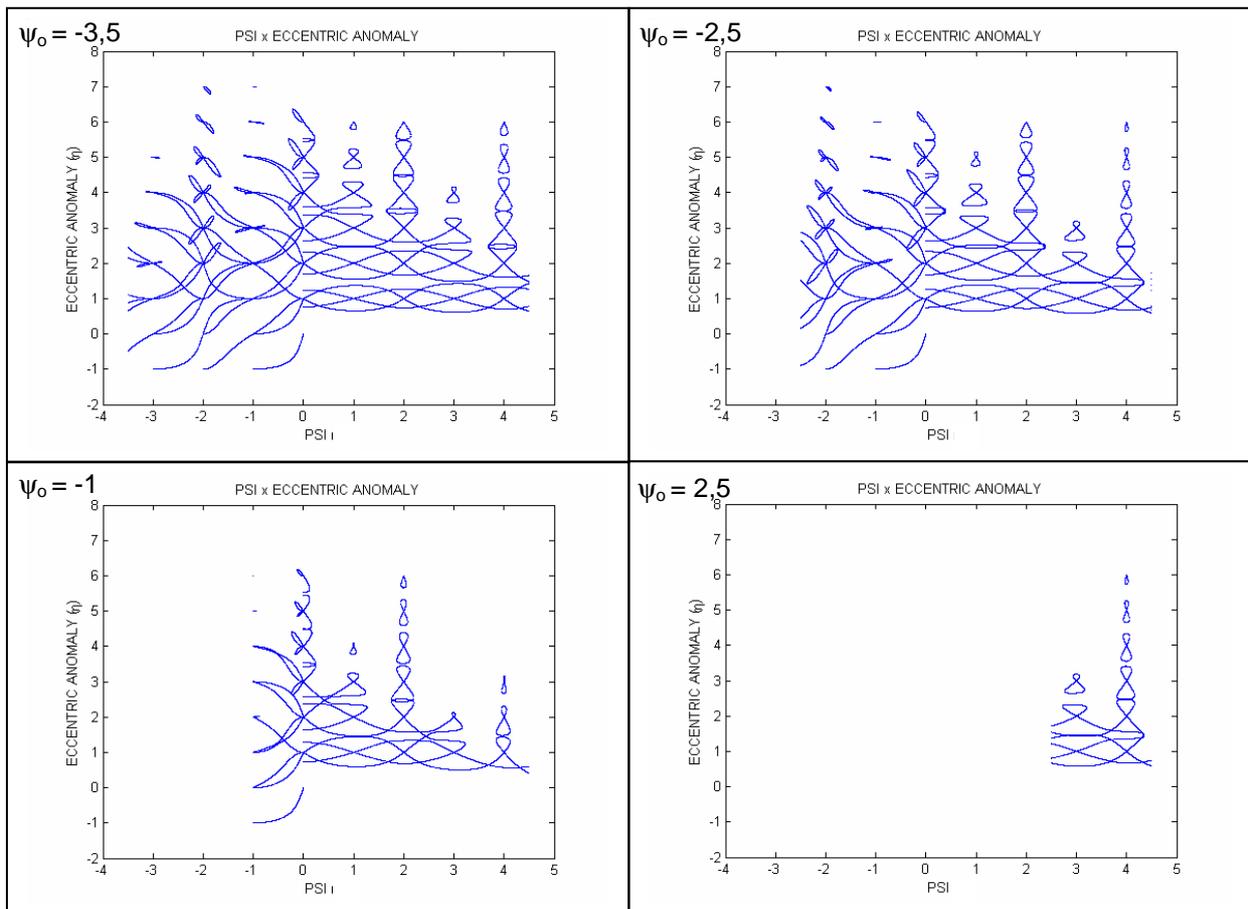


FIGURA 3.15 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,3$.

3.2.4 Simulação com os parâmetros: $e = 0,004$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad

TABELA 3.3 - Soluções com $\Delta V < 0.001$.

$e = 0,004$	Anomalia Verdadeira	Anomalia Excêntrica	Varição da Velocidade
ψ (rad)	v (rad)	η (rad)	ΔV
-0,001	1,999	1,999	0,000112
-0,001	0,99901	0,99901	0,000167
-0,002	1,998	1,998	0,000223
-0,003	1,997	1,997	0,000334
-0,004	1,996	1,996	0,000446
0,667	2,6648	2,6658	0,000344
0,999	1,999	1,999	0,000498
-1,001	0,99899	0,99899	0,000166
-1,002	0,99798	0,99797	0,000332
-1,003	0,99698	0,99696	0,000497
1,667	1,6692	1,668	0,000489
1,667	1,6692	1,668	0,000489
-2,001	0,99901	0,99901	0,000167
-2,002	0,99802	0,99802	0,000334
2,667	1,6648	1,6658	0,00049

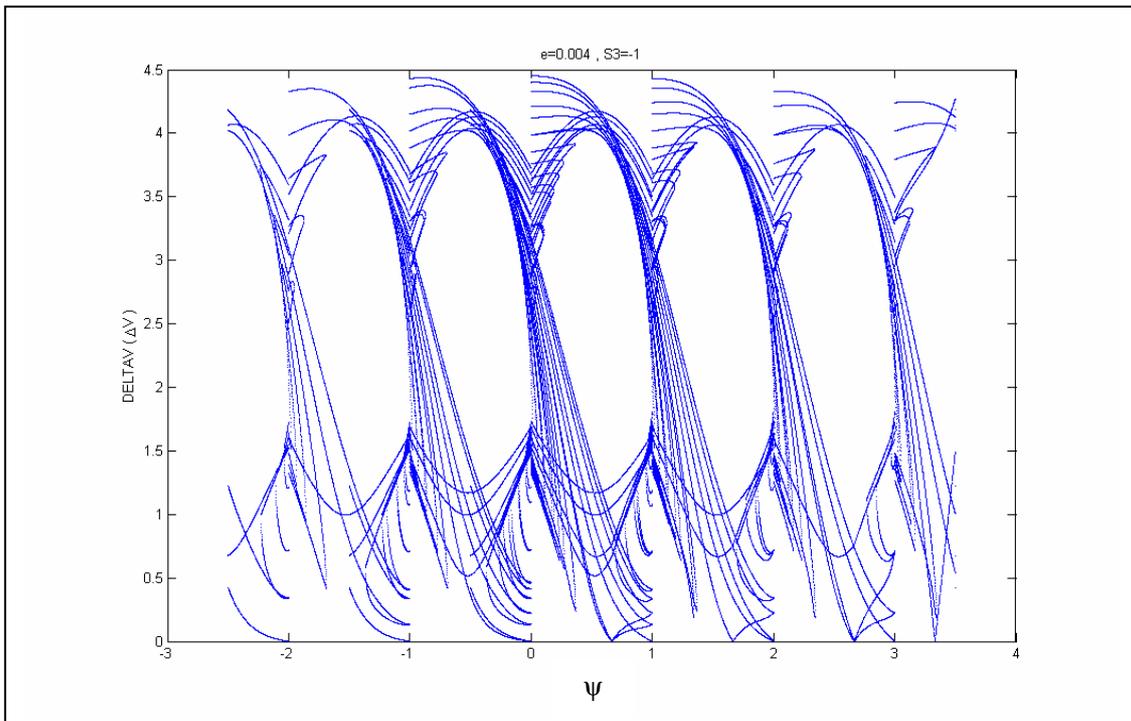


FIGURA 3.16 - ΔV vs. ψ , para $e = 0,004$.

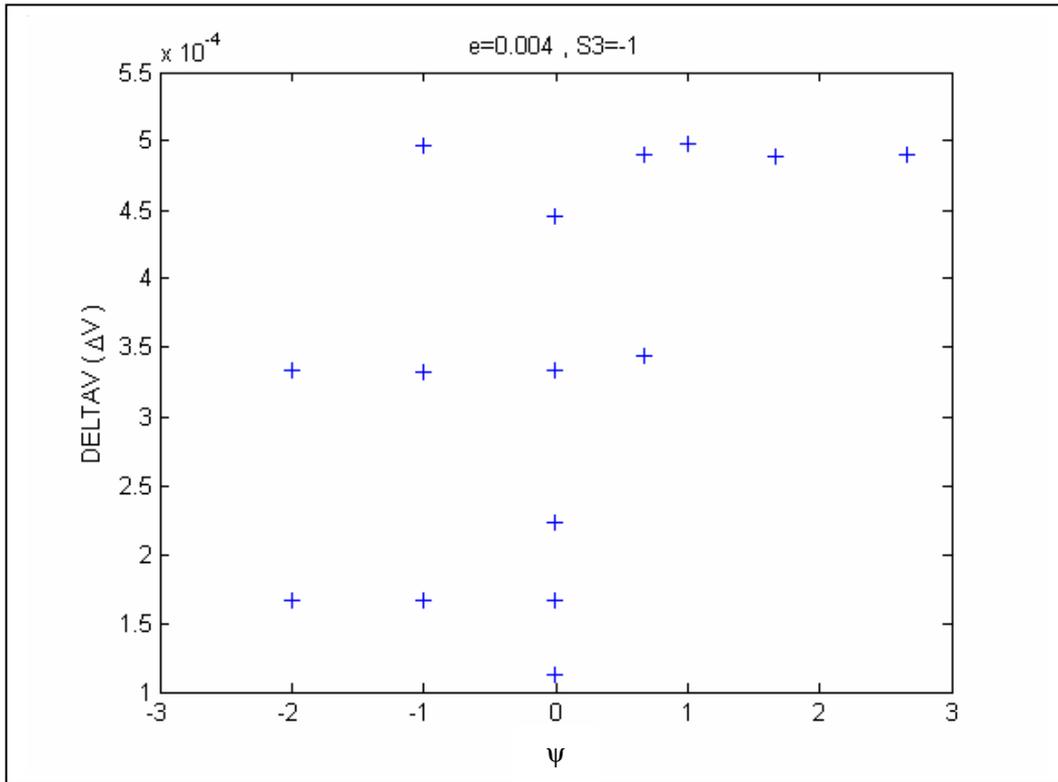


FIGURA 3.17 - ΔV Mínimo ($\Delta V < 0,01$).

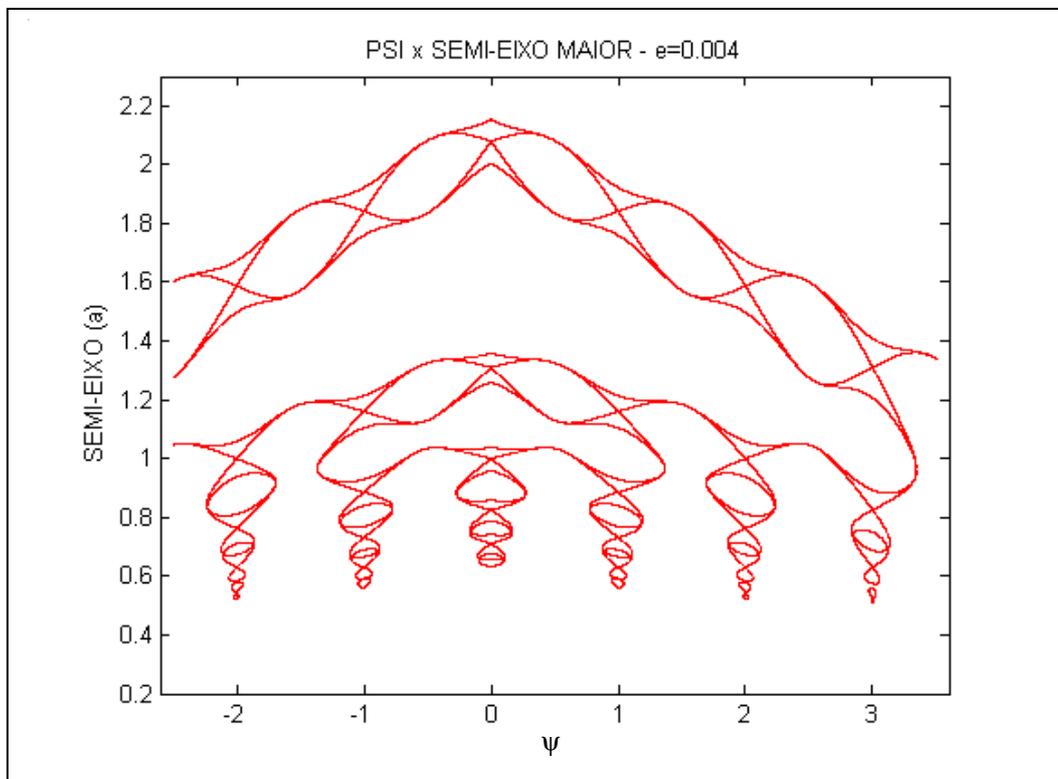


FIGURA 3.18 – Solução em termos do Semi-eixo maior (a).

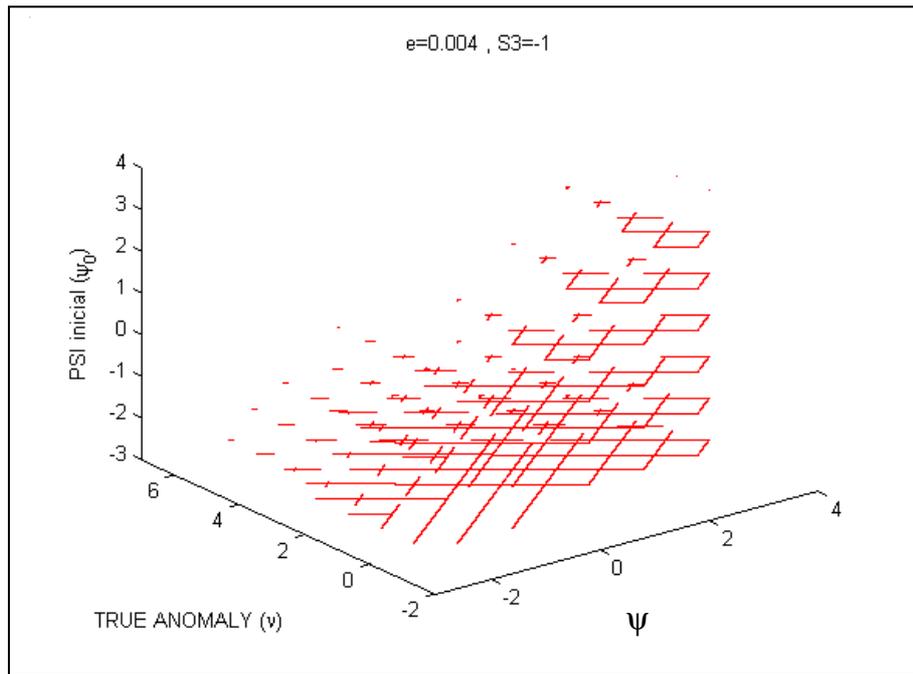


FIGURA 3.19 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).

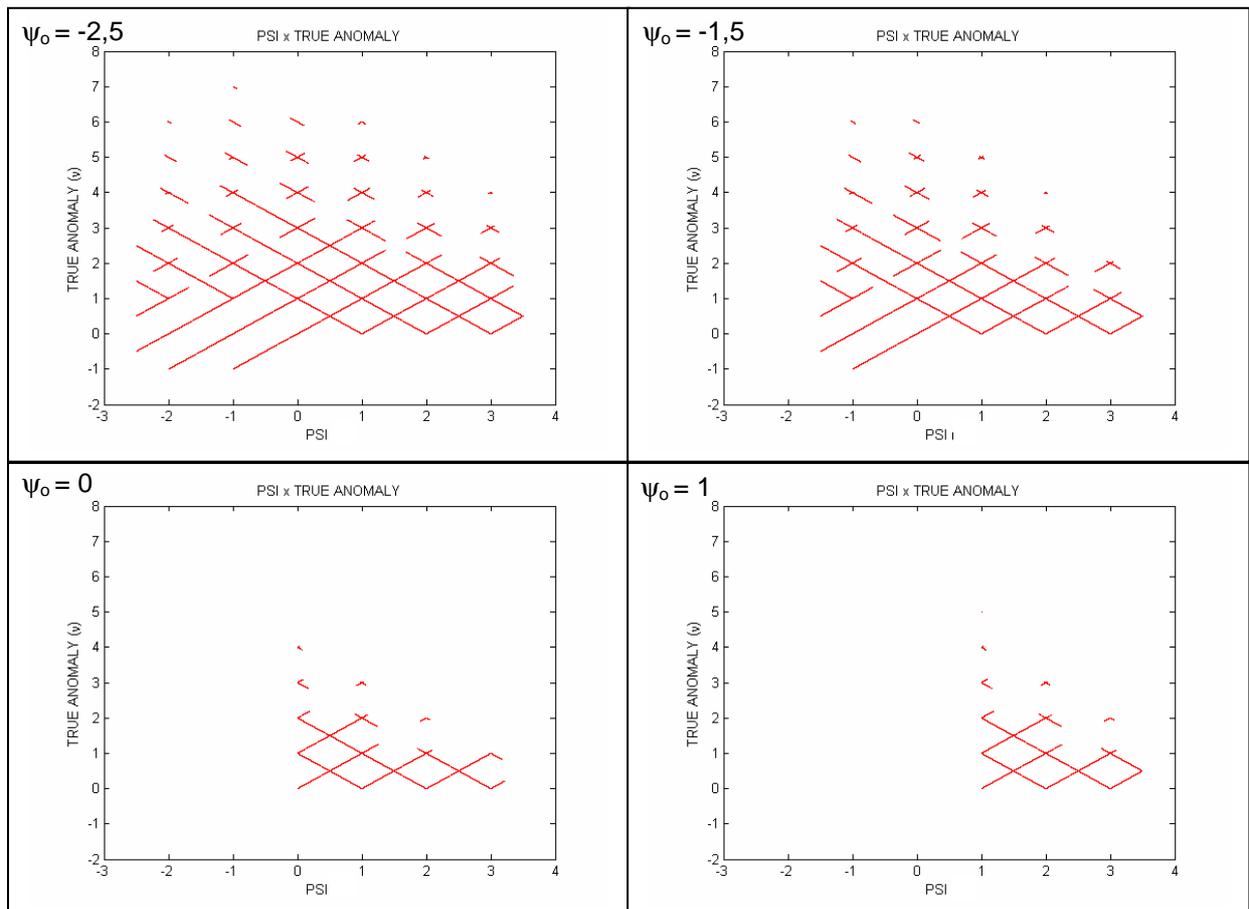


FIGURA 3.20 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,004$.

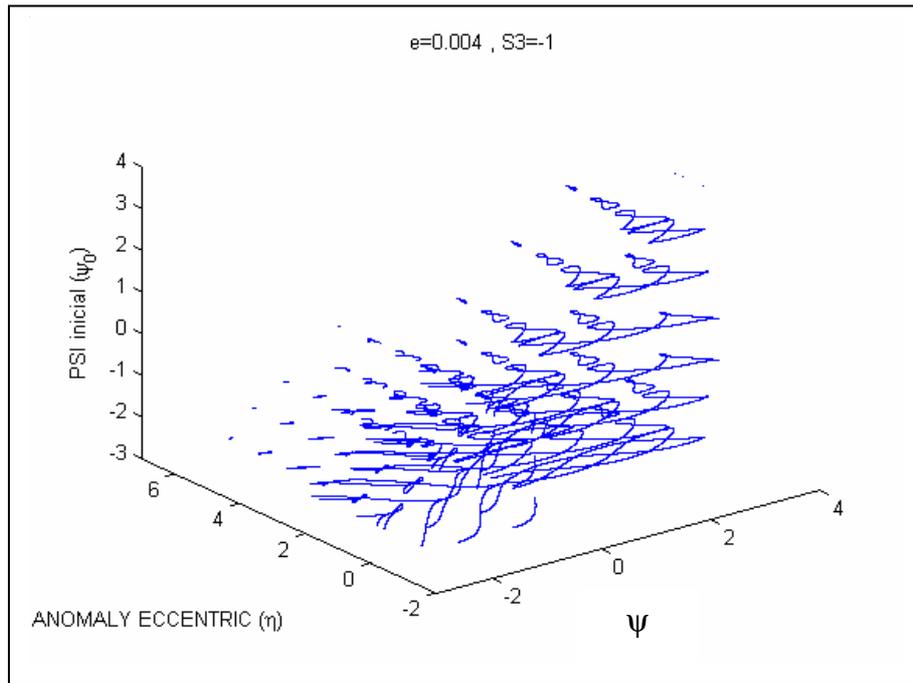


FIGURA 3.21 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).

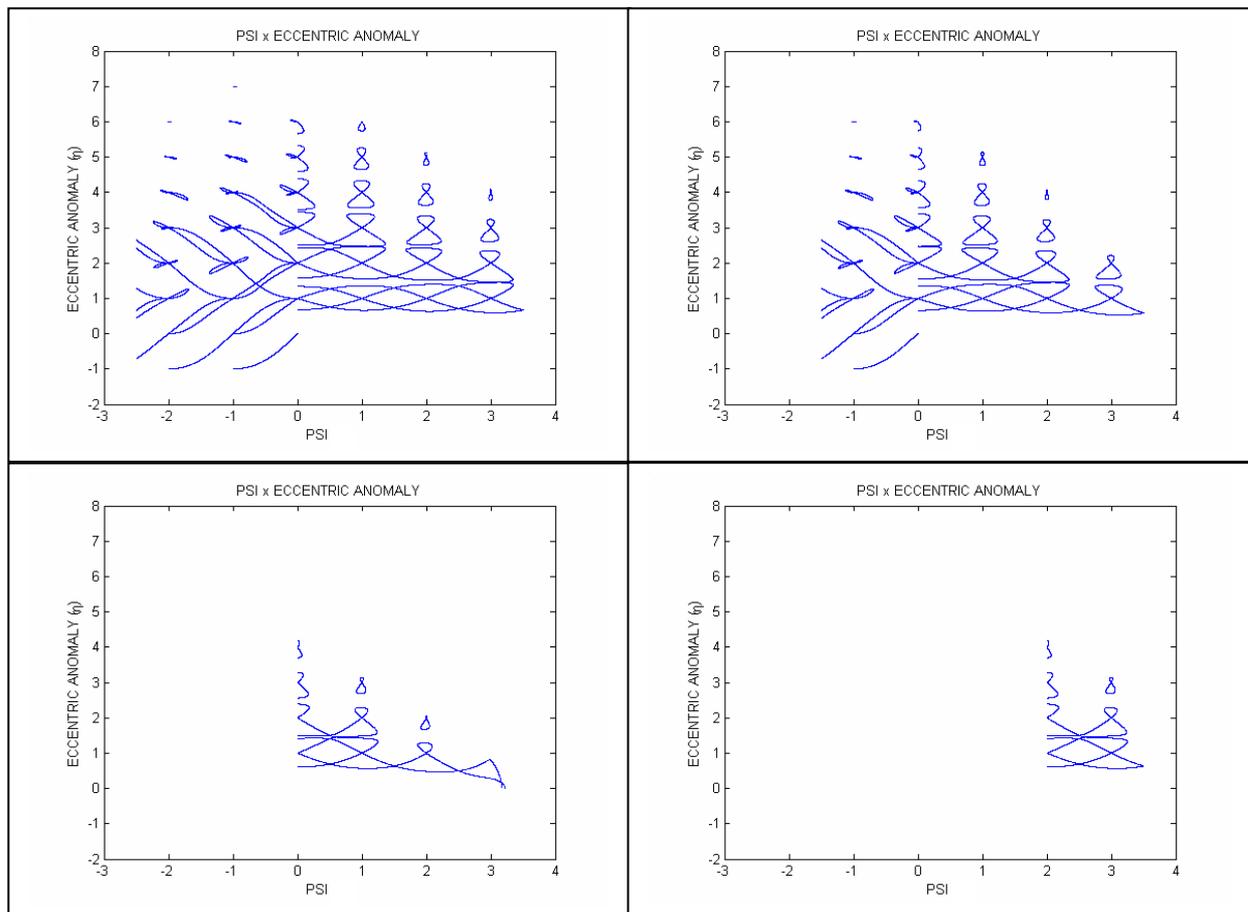


FIGURA 3.22 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,004$.

3.2.5 Simulação com os parâmetros: $e = 0,6$, $\psi_0 = -3$ e $-3 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad

TABELA 3.4 - Soluções com $\Delta V < 0.01$.

$e = 0,6$	Anomalia Verdadeira	Anomalia Excêntrica	Varição da Velocidade
ψ (rad)	v (rad)	η (rad)	ΔV
-0,0005	1,9975	1,995	0,009425
-0,0005	0,9975	0,995	0,009425
0,9975	1,9992	1,9984	0,008481
0,998	1,9994	1,9988	0,006784
0,9985	1,9995	1,9991	0,005088
0,999	1,9997	1,9994	0,003391
0,9995	1,9998	1,9997	0,001695
-1,001	0,99969	0,99984	0,003257
-1,0015	0,99953	0,99977	0,004886
-1,002	0,99938	0,99969	0,006515
-1,0025	0,99922	0,99961	0,008145
-1,003	0,99906	0,99953	0,009774
1,9995	1,9975	1,9988	0,009427
-2,0005	0,9975	0,995	0,009425
2,9975	0,99922	0,99845	0,00951
2,998	0,99938	0,99876	0,007609
2,9985	0,99953	0,99907	0,005708
2,999	0,99969	0,99938	0,003806
2,9995	0,99984	0,99969	0,001903

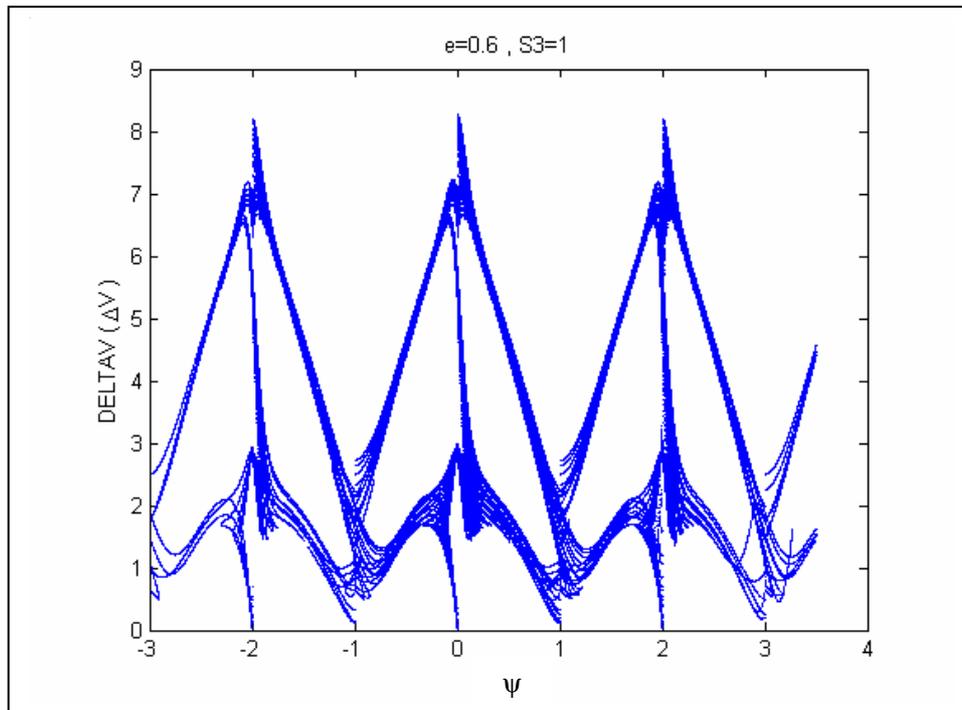


FIGURA 3.23 - ΔV vs. ψ , para $e = 0,6$.

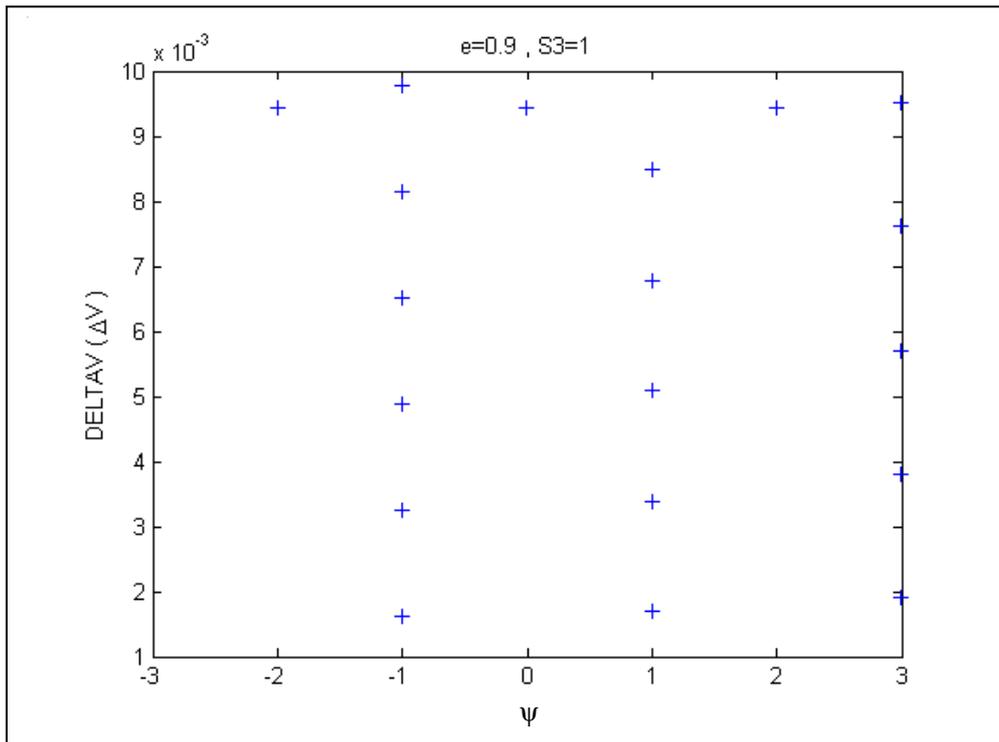


FIGURA 3.24 - ΔV Mínimo para $e = 0,6$.

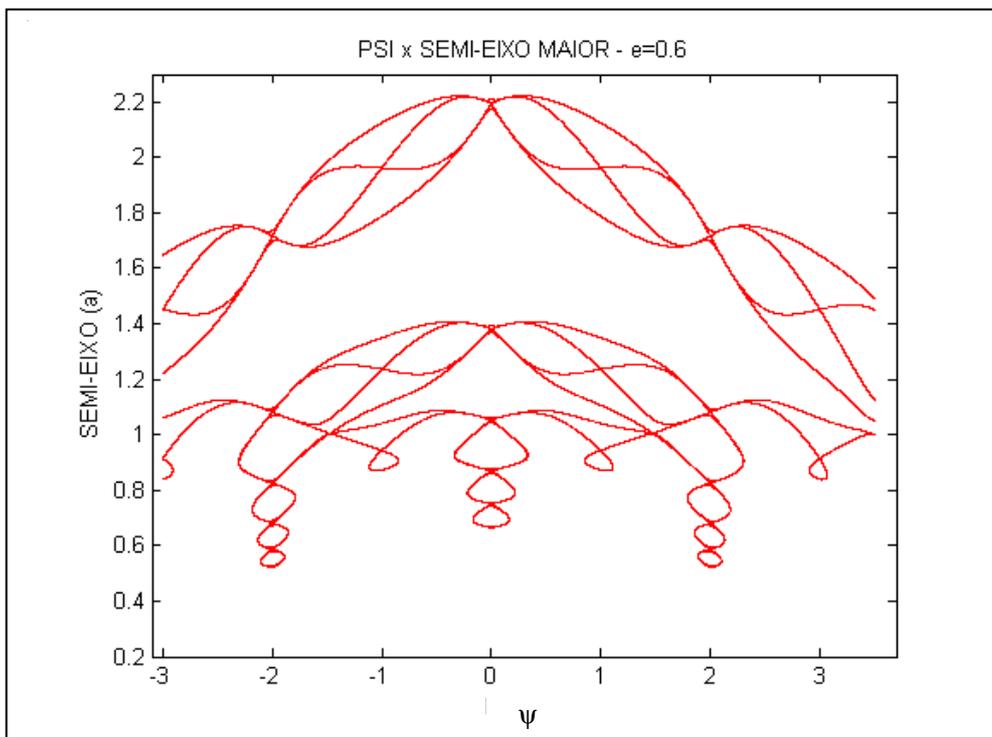


FIGURA 3.25 – Solução em termos do Semi-eixo maior (a).

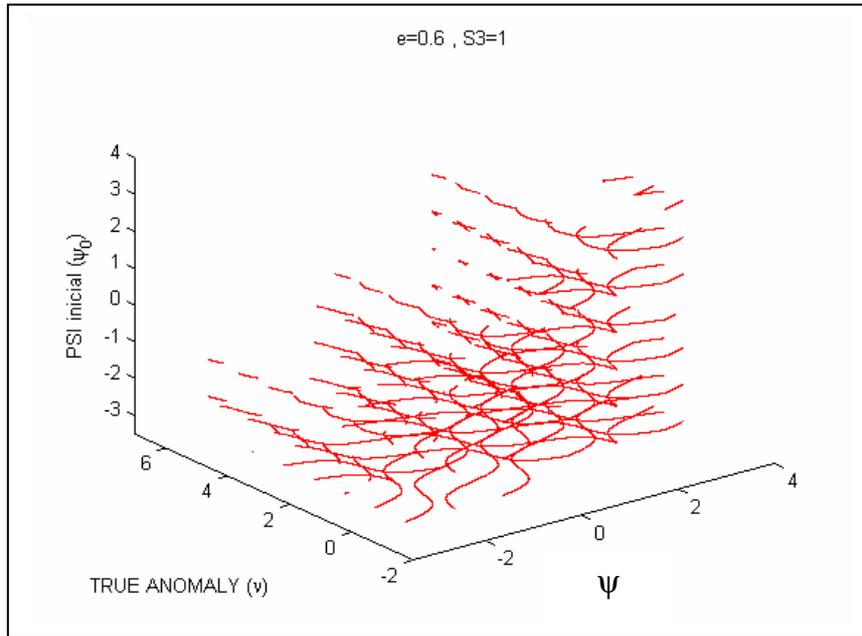


FIGURA 3.26 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).

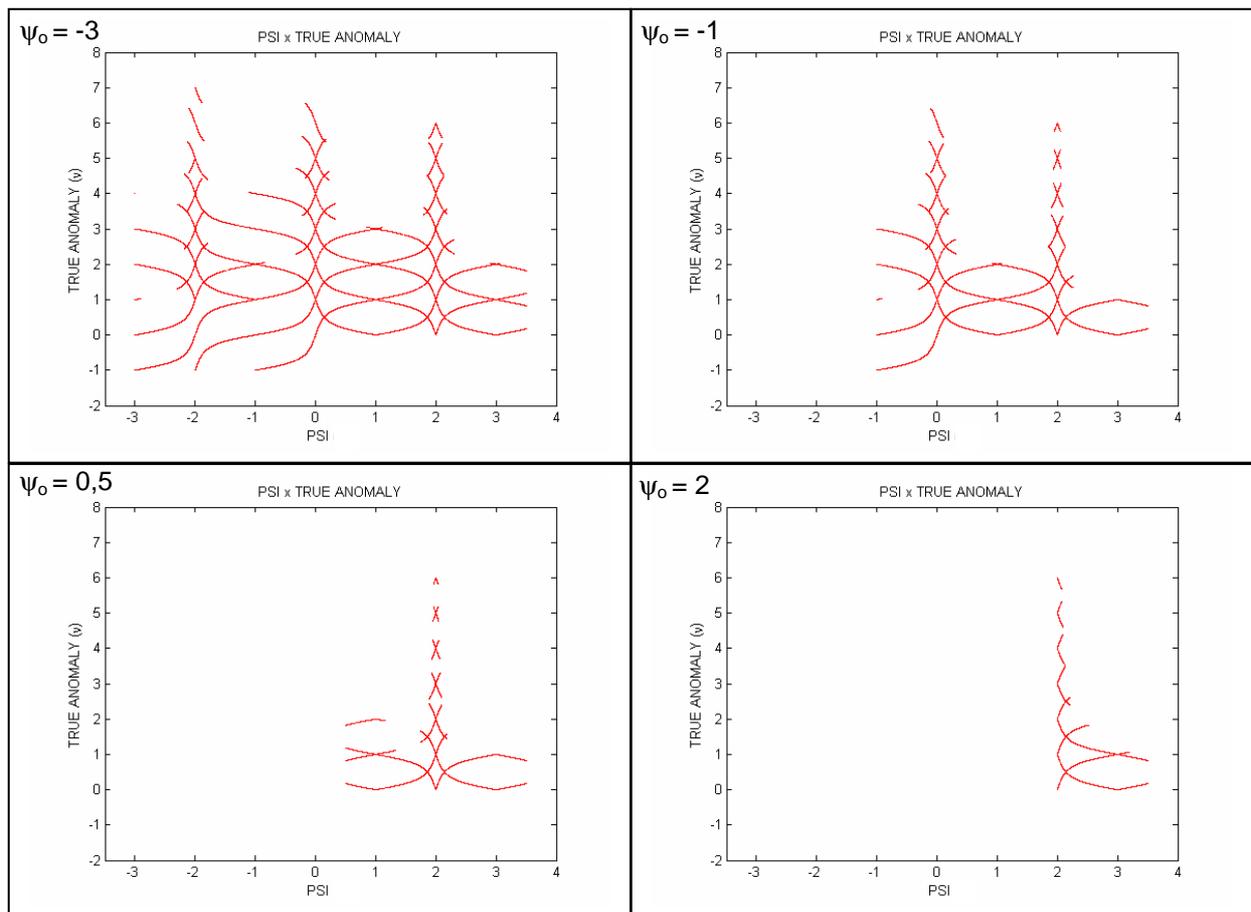


FIGURA 3.27 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,6$.

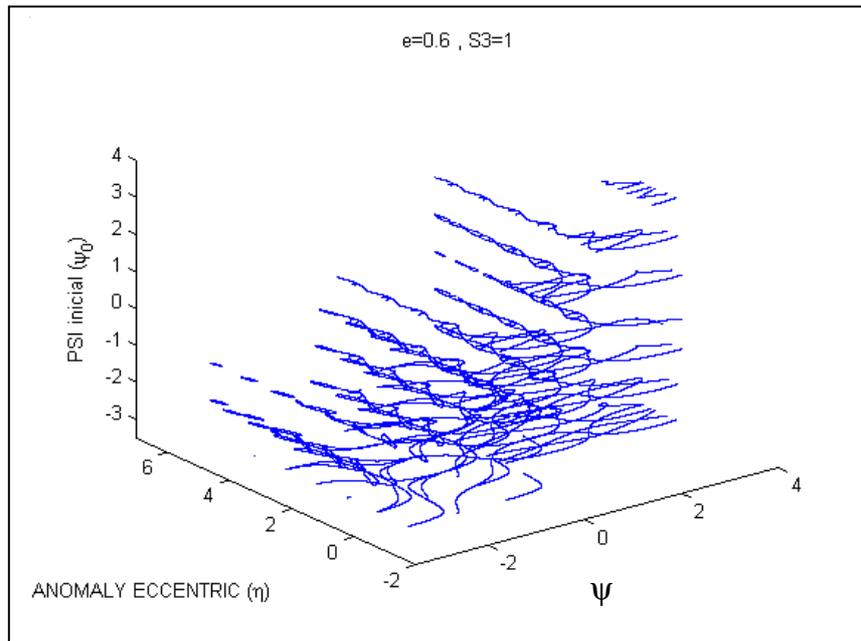


FIGURA 3.28 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).

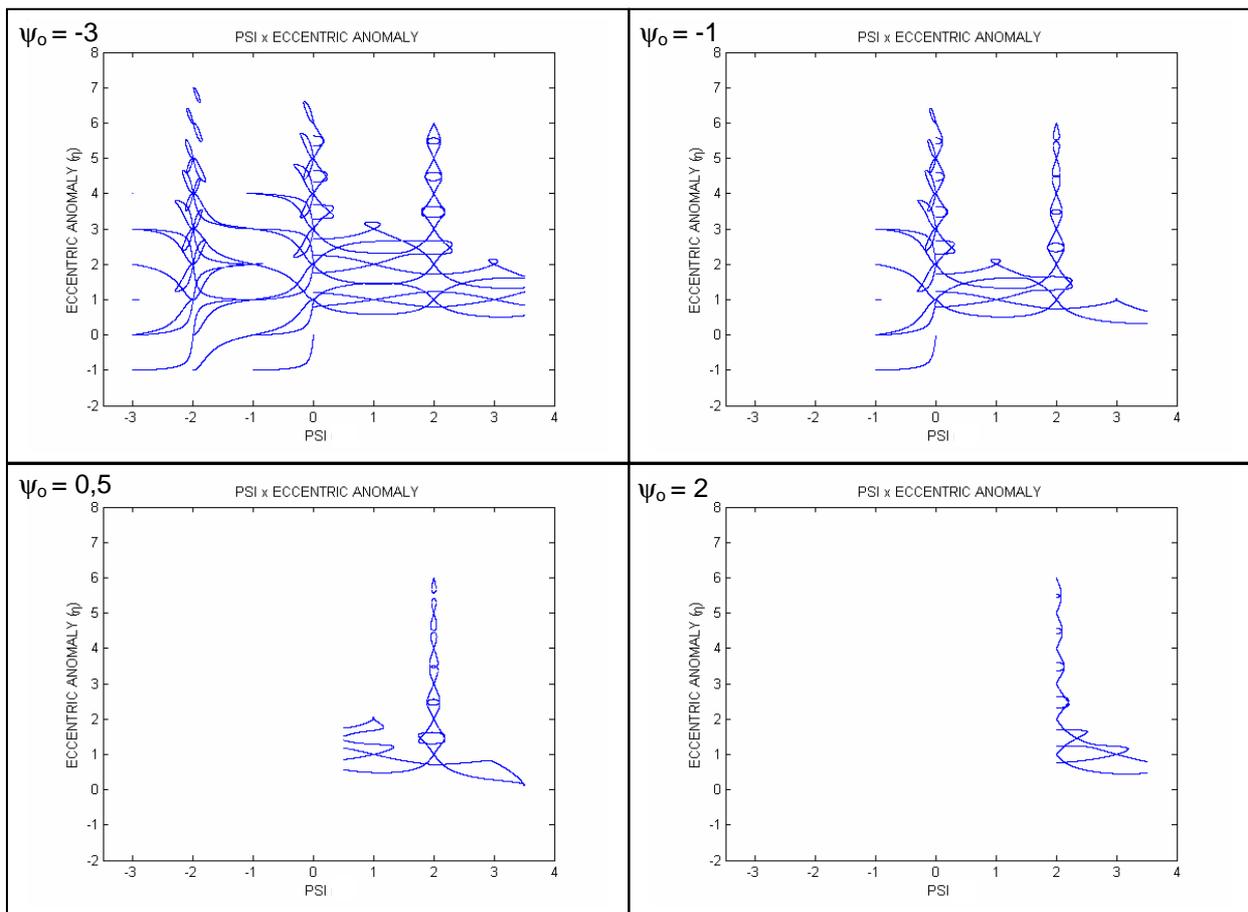


FIGURA 3.29 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,6$.

3.2.6 Simulação com os parâmetros: $e = 0,9$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad

TABELA 3.5 - Soluções com $\Delta V < 0,1$.

$e = 0,9$	Anomalia Verdadeira	Anomalia Excêntrica	Varição da Velocidade
ψ (rad)	v (rad)	η (rad)	ΔV
2	1	1	0,084484
2	3	3	0,071497

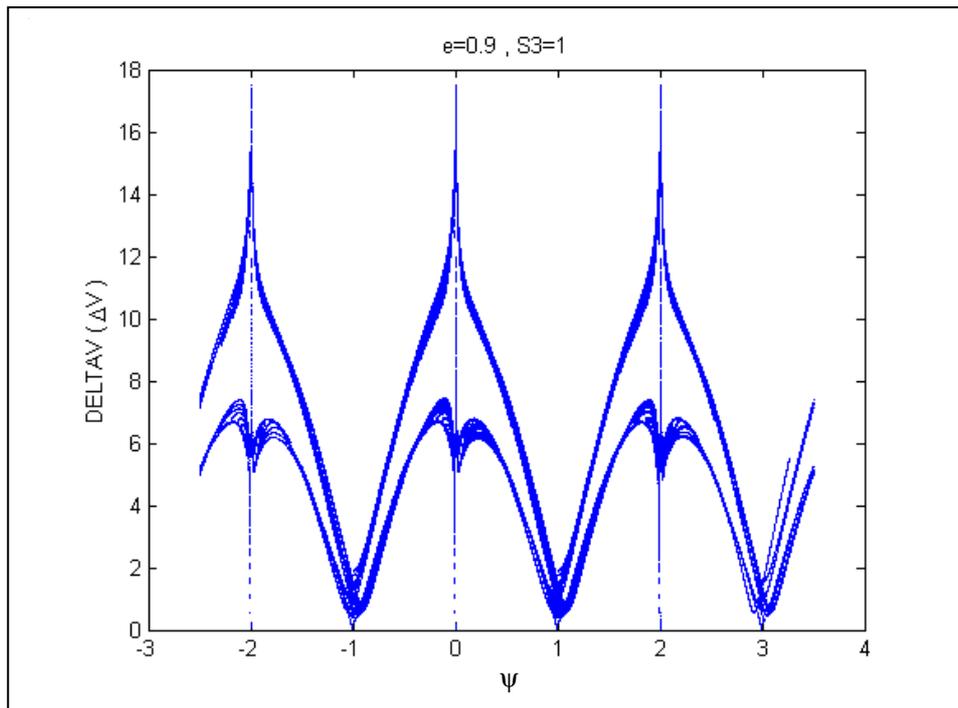


FIGURA 3.30 - ΔV vs. ψ , para $e = 0,9$.

Nas Figuras 3.30 e 3.31, e Tabela 3.5 nota-se que não existem soluções com $\Delta V < 0,01$. Entretanto, para $\Delta V < 0,1$, foram encontradas duas soluções (Tabela 3.5). Estas soluções mostram que a excentricidade da órbita do primário M_3 exerce uma grande influência na manobra de colisão. Quanto mais excêntrica for a órbita de M_3 maior será o consumo de combustível (medido por ΔV).

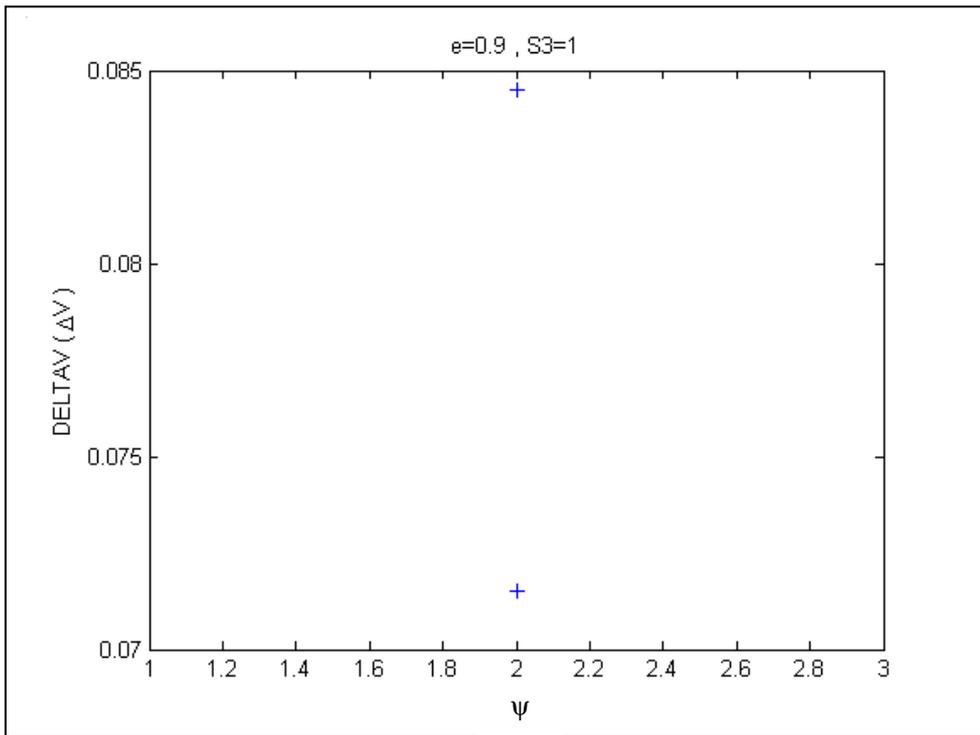


FIGURA 3.31 - ΔV Mínimo para $e = 0,9$.

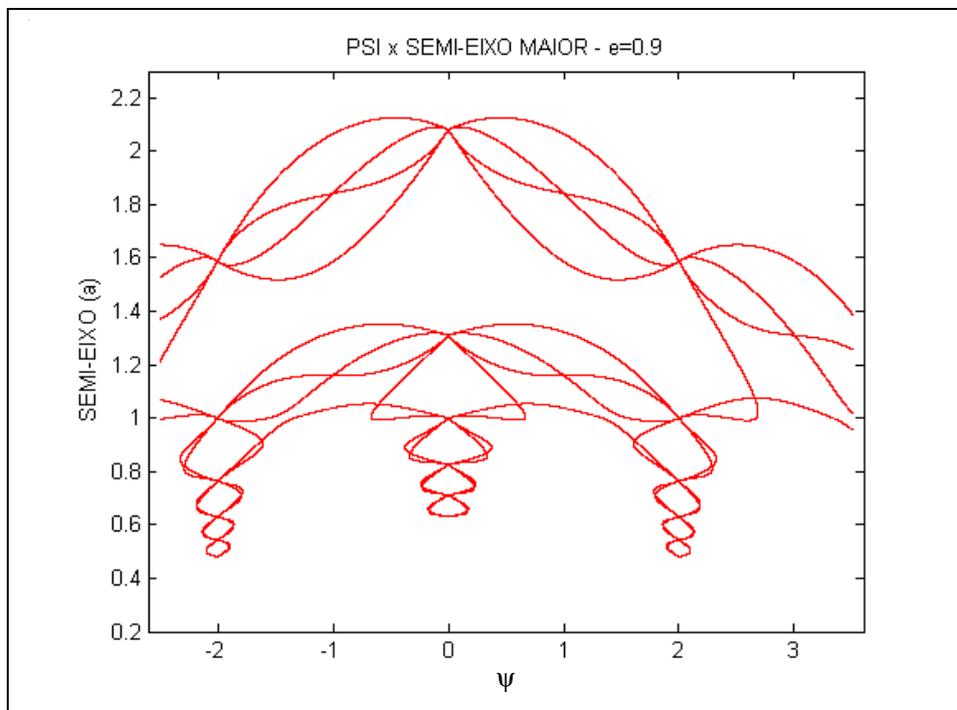


FIGURA 3.32 – Solução em termos do Semi-eixo maior (a).

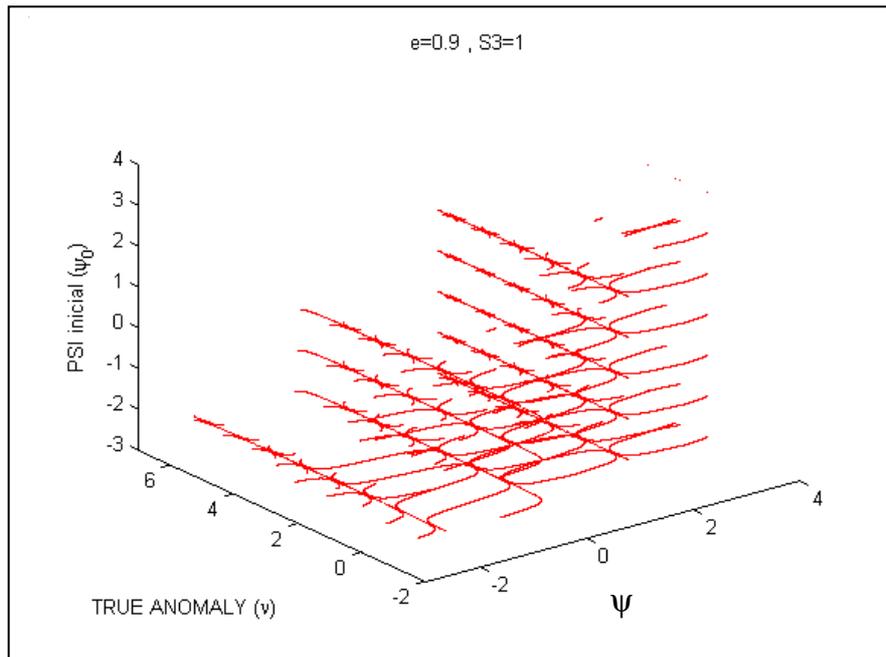


FIGURA 3.33 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).

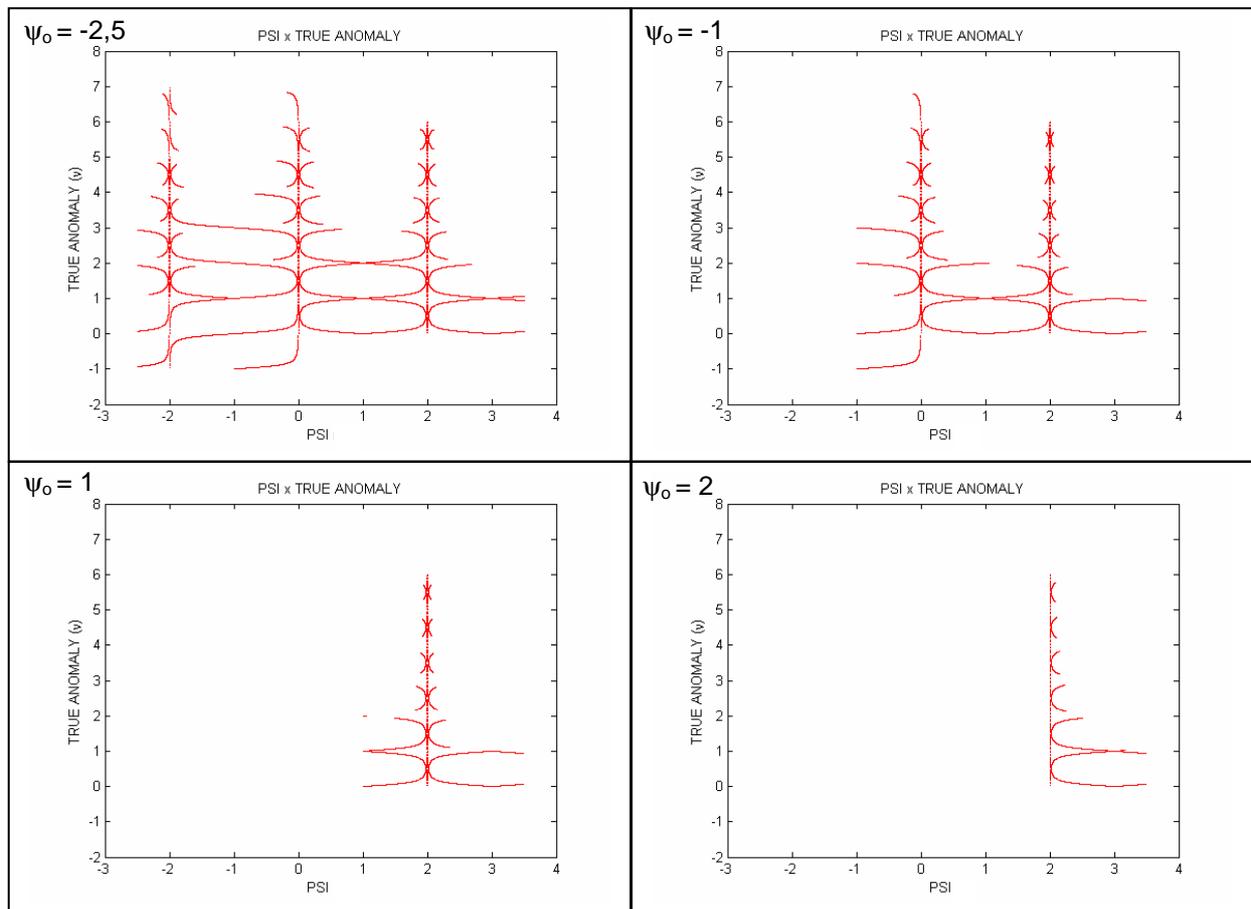


FIGURA 3.34 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0,9$.

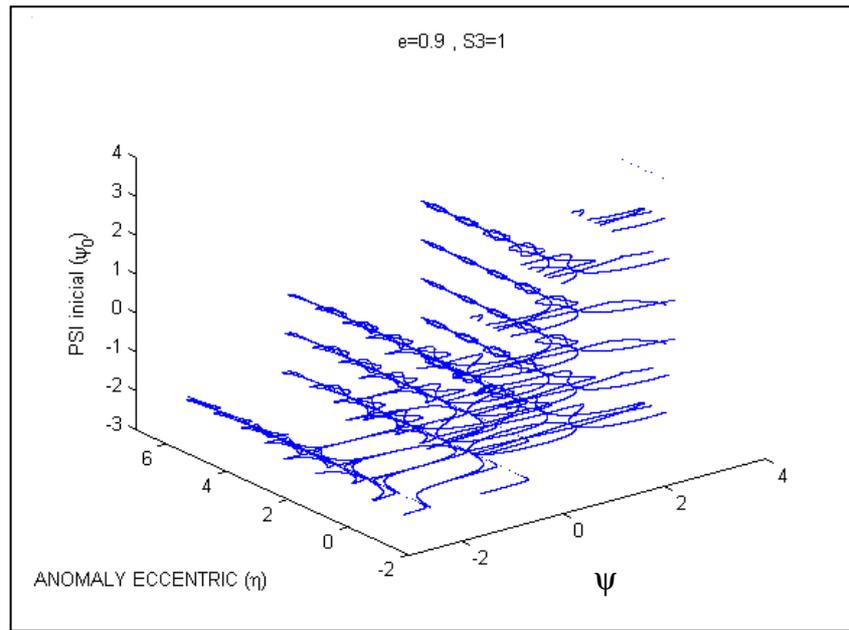


FIGURA 3.35 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).

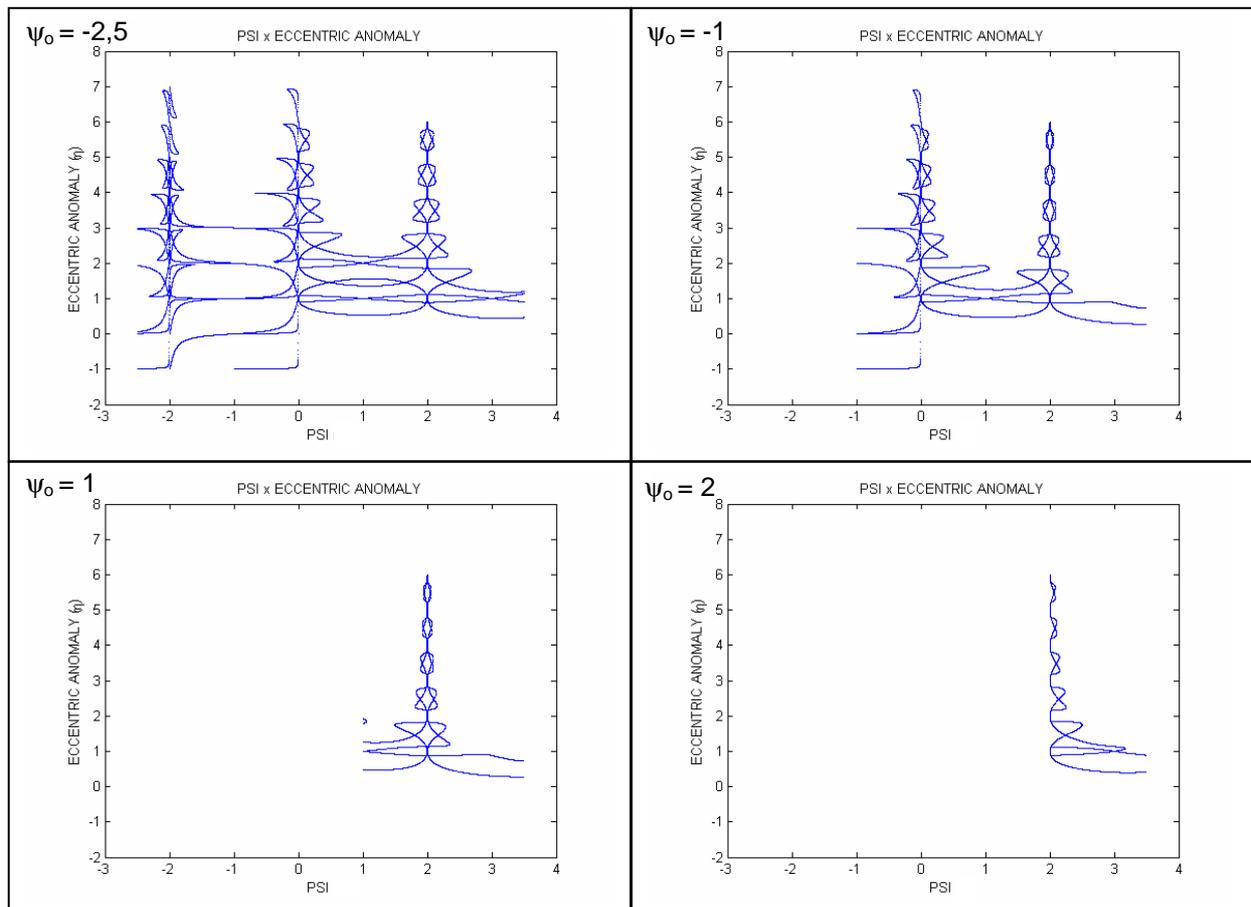


FIGURA 3.36 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0,9$.

3.2.7 Simulação com os parâmetros: $e = 0$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3$ rad

TABELA 3.6 - Soluções com $\Delta V < 0,001$.

$e = 0$	Anomalia Verdadeira	Anomalia Excêntrica	Varição da Velocidade
ψ (rad)	v (rad)	η (rad)	ΔV
-1,203	0,797	0,79689	0,000846
-1,202	0,798	0,79793	0,000562
-1,201	0,799	0,79896	0,00028
-1,199	0,801	0,80104	0,000278
-1,198	0,802	0,80207	0,000554
-1,197	0,803	0,80311	0,000828
0,932	1,932	1,932	0,000717
0,933	1,933	1,933	0,000179
0,934	1,934	1,934	0,000358
0,935	1,935	1,9349	0,000893
1,767	0,767	0,76692	0,000597
1,832	1,832	1,8321	0,000984
1,833	1,833	1,833	0,000245
1,834	1,834	1,8339	0,000489
1,999	0,999	0,999	0,000998
2,667	0,667	0,66687	0,000857
2,933	0,933	0,93302	0,000354
2,934	0,934	0,93396	0,000708

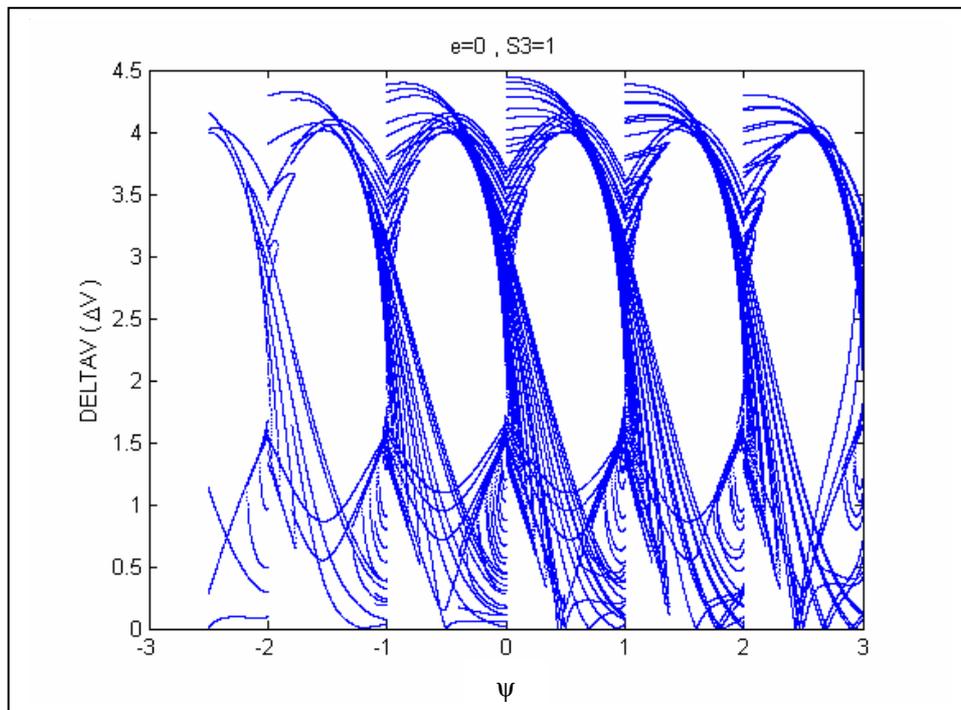


FIGURA 3.37 - ΔV vs. ψ , para $e = 0$ (caso circular).

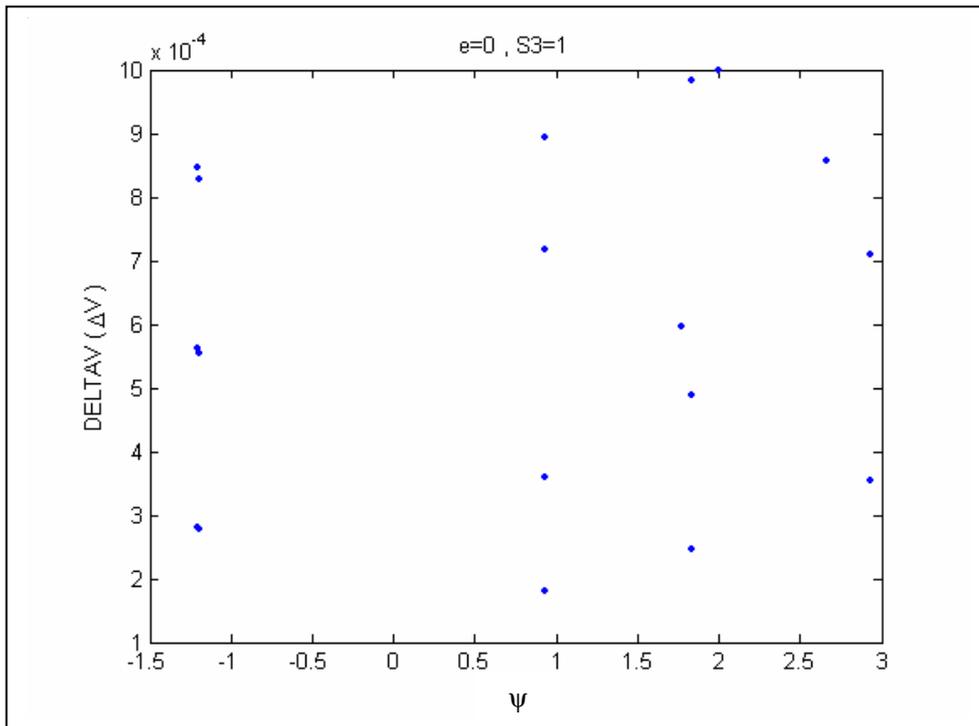


FIGURA 3.38 - ΔV Mínimo para $e = 0$.

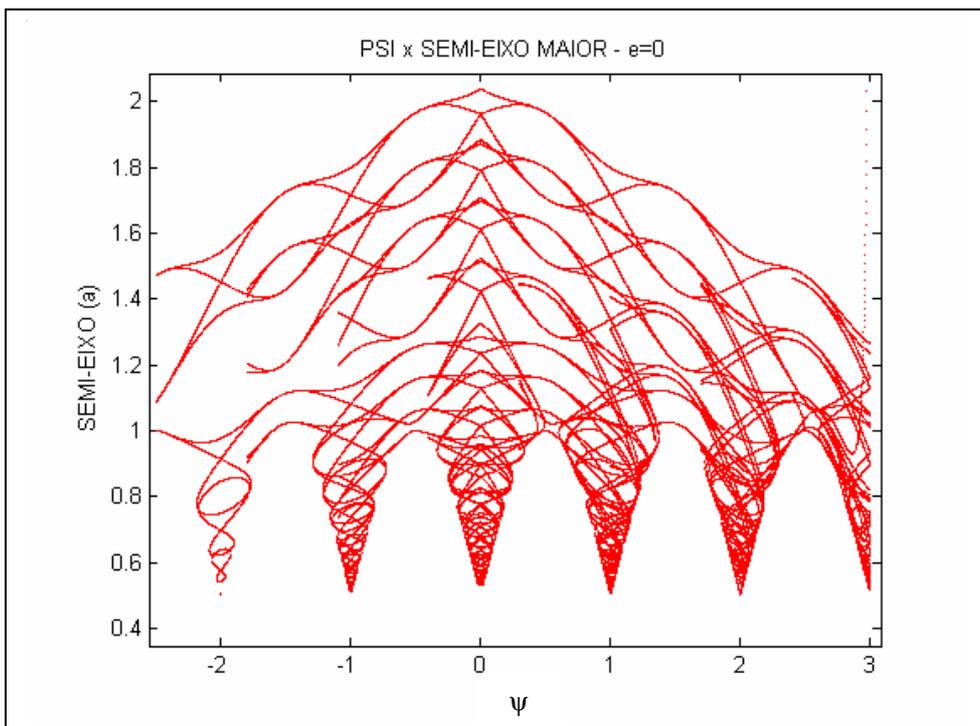


FIGURA 3.39 – Solução em termos do Semi-eixo maior (a).

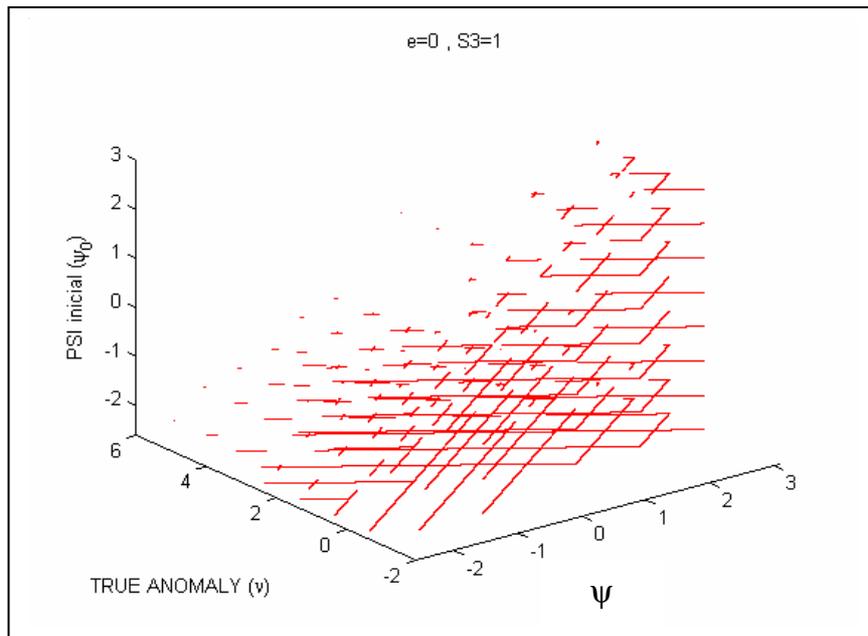


FIGURA 3.40 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v).

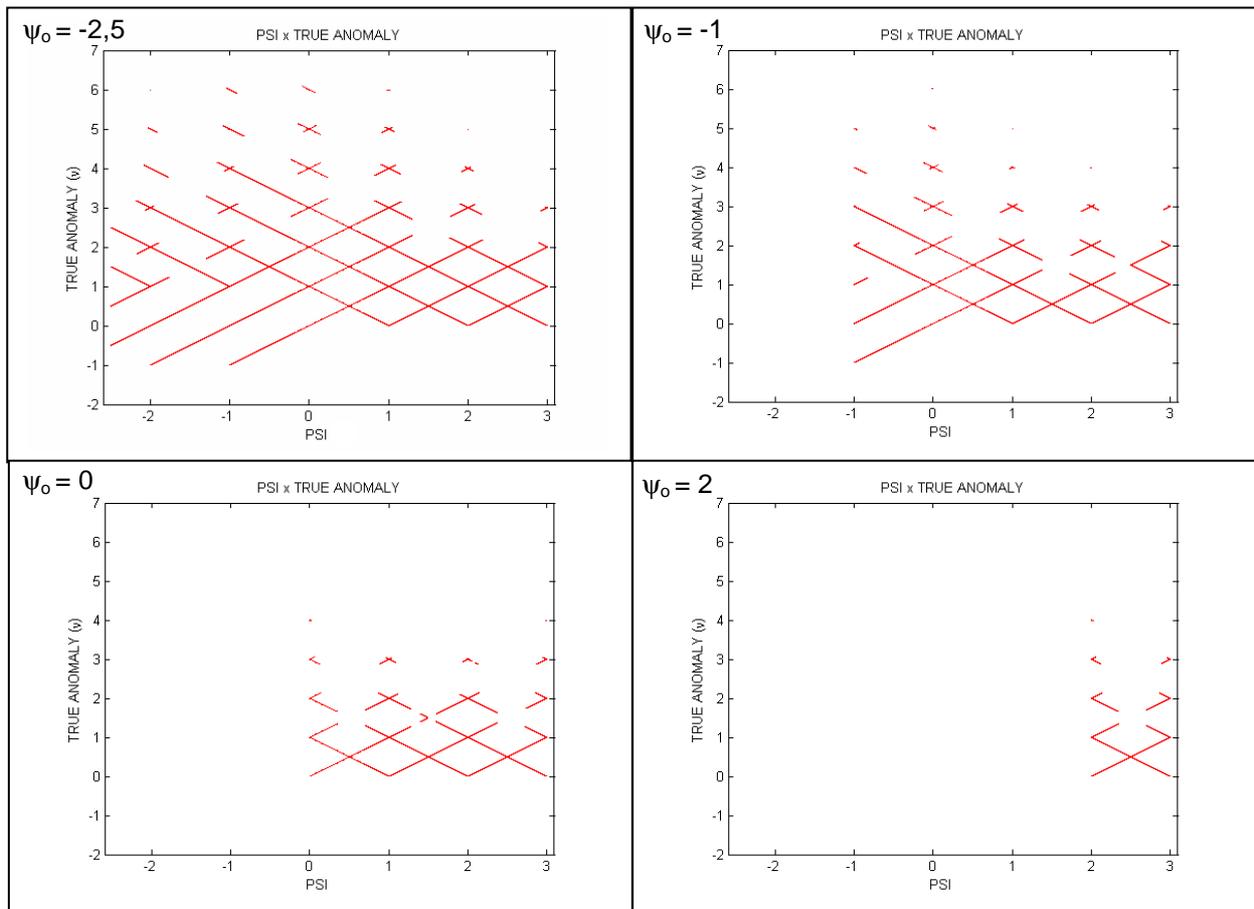


FIGURA 3.41 - Solução em termos da Anomalia Verdadeira (v) para $e = 0$.

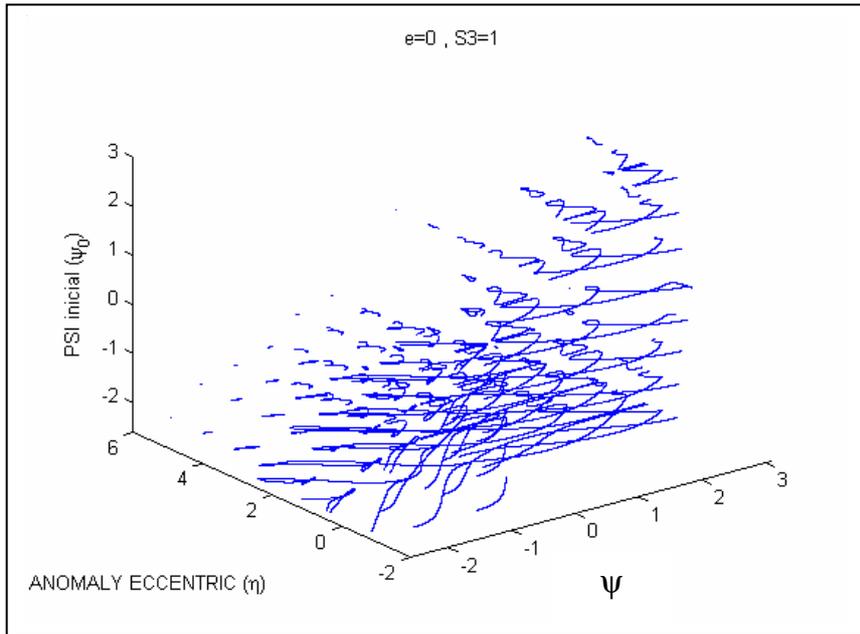


FIGURA 3.42 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η).

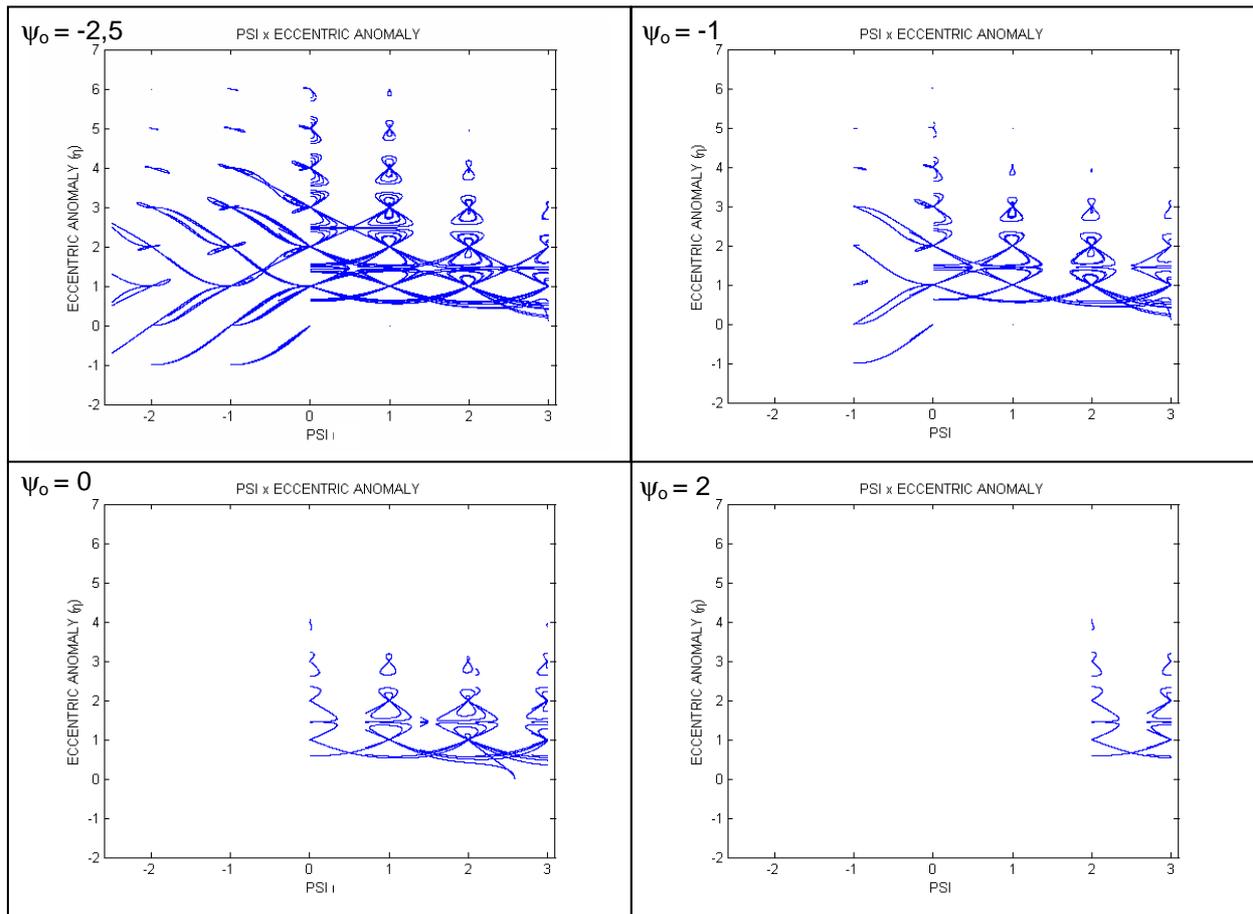


FIGURA 3.43 - Solução em termos da Anomalia Excêntrica (η) para $e = 0$.

3.3 Conclusões do Capítulo

Diversos tempos de transferência ($\Delta t = \psi_f - \psi_o$) foram simulados. Entre inúmeras órbitas de transferência, acham-se pequenas famílias de soluções onde o ΔV requerido para a transferência é muito pequeno, próximo a zero. Estas órbitas de transferência são soluções ótimas locais, pois o consumo de combustível para esta transferência é mínimo. As soluções com mínimo ΔV (próximo a zero) fornecem órbitas candidatas a futuras missões que necessitam deste parâmetro minimizado.

Utilizando um grande número de simulações, é possível entender a influência do ângulo de aproximação, tais como, ganho ou perda de energia do veículo espacial resultando, conseqüentemente, na redução do combustível e do aproveitamento da passagem para elevar ou reduzir a velocidade do veículo espacial.

Os resultados das simulações com várias excentricidades mostraram que órbitas com excentricidades pequenas são mais vantajosas para a execução da manobra de Múltiplos Encontros, pois o consumo de combustível é menor quando comparado ao consumo de combustível das órbitas com excentricidades altas ($e \rightarrow 1$). Quanto mais excêntrica for a órbita de M_3 maior será o consumo de combustível do veículo espacial para sair e retornar ao corpo M_2 . Isso implica em soluções melhores (com ΔV mínimo) para órbitas com excentricidades pequenas e circulares ($e = 0$).

Existem inúmeras soluções para este problema de múltiplos encontros, descrito anteriormente, como o problema de um corpo que sai de outro corpo e retorna a este corpo novamente (Figura 3.1). As soluções do Problema de Múltiplos Encontros, apresentadas neste trabalho, fornecem parâmetros tais como a anomalia verdadeira (Figuras 3.6, 3.13, 3.20, 3.27, 3.34 e 3.41); anomalia excêntrica (Figuras 3.8, 3.15, 3.22, 3.29, 3.36 e 3.43); semi-eixo-maior (Figuras 3.4, 3.11, 3.18, 3.25, 3.32 e 3.39) e excentricidades para a obtenção de órbitas com baixo consumo de combustível, que é medido pelo ΔV (Figuras 3.2, 3.9, 3.16, 3.23, 3.30 e 3.37).

Nas soluções dadas em termos do semi-eixo maior (a) verificou-se que elas mantêm o mesmo padrão das soluções no decorrer das simulações. Ocorre a formação de famílias de soluções agrupadas por regiões.

Em posse desses dados, um analista de missões pode buscar informações para tomar decisões sobre quais as melhores estratégias a serem adotadas para futuras missões que envolvam manobras espaciais que necessitem sair de um corpo e retorná-lo ao mesmo corpo, com a minimização do consumo de combustível, com os pontos de saída e chegada do veículo espacial e o tempo de transferência pré-fixados.

CAPÍTULO 4

MANOBRAS ASSISTIDAS POR GRAVIDADE – *SWING-BY*

Os métodos modernos de estudos de trajetórias espaciais baseiam-se em dois conceitos importantes: captura gravitacional e manobras assistidas por gravidade. Neste capítulo será abordado o uso da manobra conhecida usualmente como manobra de *Swing-By*. Será mostrado um tratamento matemático desse problema dentro de uma dinâmica de dois corpos. Essa abordagem é usualmente conhecida como “patched conics”.

Em meados do século XIX, os astrônomos e matemáticos já conheciam este tipo de manobra gravitacionalmente assistida, chamada de *Swing-By*. Posteriormente, foram encontradas equações analíticas e resultados numéricos que descrevem o *Swing-By*, especialmente no problema de captura de cometas por Júpiter (Broucke, 1988; Broucke e Prado, 1993b).

No início da década de 60, no JPL (Jet Propulsion Laboratory), M. Minovich (1961) estudou este problema e preparou um documento que explicava os cálculos das alterações na energia e no semi-eixo maior de uma manobra gravitacionalmente assistida de *Swing-By* para uma órbita elíptica. Recentemente, uma revisão bem detalhada do trabalho de Minovich foi efetuada por Dowling et. al. (1990 e 1991).

Numerosas Aplicações são conhecidas no âmbito da Astronáutica (Prado, 2001):

- 1) 1972: Pioneer 10 para Júpiter /exterior do sistema solar;
- 2) 1973: Pioneer 11 para Júpiter /Saturno /exterior do sistema solar;
- 3) 1973 – 1974: Mariner 10 para Vênus / Mercúrio / Mercúrio;
- 4) 1977: Voyager para Júpiter /Saturno/Urano/Netuno/exterior do sistema solar;
- 5) 1990: Ullisses para Júpiter / Sol/ fora da eclíptica;

A utilização da manobra assistida por gravidade (*Swing-By*) é considerada muito importante na otimização dos custos de uma missão. *Swing-By* é uma manobra em que o veículo espacial se utiliza de uma passagem próxima a um corpo celeste para ganhar ou perder energia, velocidade e momento angular (Prado, 1993b).

As manobras assistidas por gravidade (*Swing-By*) podem ser utilizadas para a redução de consumo de combustível em missões que requerem um escape da Terra, como é o caso de viagens interplanetárias. Nesse caso o veículo parte da Terra com energia suficiente apenas para entrar em uma órbita elíptica que cruze com a órbita de um outro corpo celeste (Lua, Júpiter, Saturno, etc) e a partir daí as alterações gravitacionais da energia completam a missão.

4.1 Formulação Matemática do *Swing-By*

Como já foi dito anteriormente, o modelo simples da dinâmica de dois corpos é utilizado na presente abordagem (Prado, 2001). Considera-se que o sistema é formado por três corpos (Fig 4.1):

1. O corpo M_1 , massivo, localizado no centro de massa do sistema cartesiano;
2. M_2 , um corpo menor, que pode ser um planeta ou um satélite de M_1 , em órbita kepleriana em torno de M_1 ;
3. Um corpo M_3 , um veículo espacial com massa infinitesimal, viajando em uma órbita cônica ao redor de M_1 , quando faz um encontro com M_2 .

Este encontro altera a órbita de M_3 e, por definição, considera-se que as órbitas de M_1 e M_2 não se alteram.

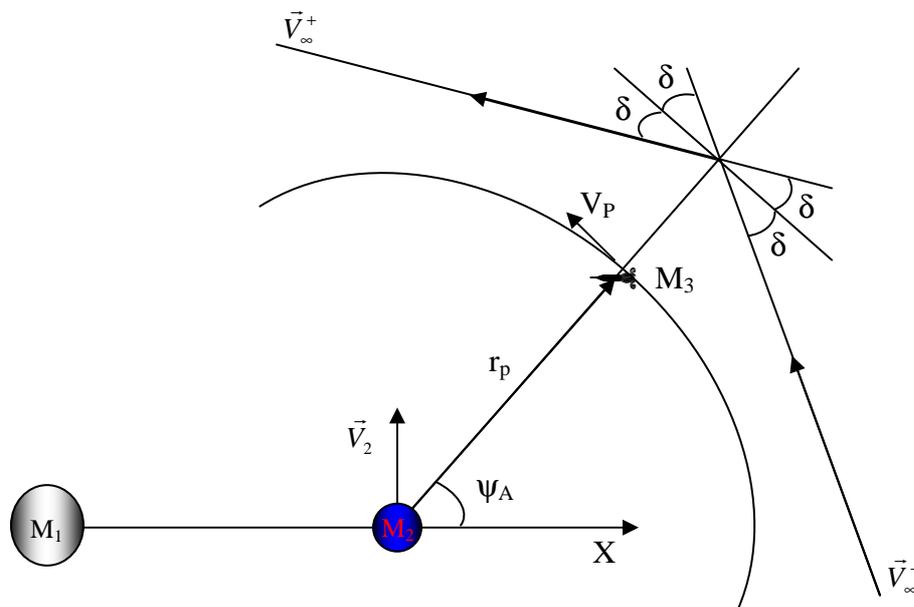


FIGURA 4.1 - *Swing-By*.

As variáveis que descrevem a manobra de *Swing-By*, utilizadas por Broucke (1988), são:

- 1) δ : ângulo de deflexão, que pode ser facilmente encontrado na literatura e é

$$\text{dado por (Broucke, 1988) } \delta = \arcsen \left(\frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} \right);$$

- 2) $|\vec{V}_\infty^-|$: magnitude da velocidade da nave espacial no infinito com relação a M_2 , antes ou depois do encontro;
- 3) r_p : distância de máxima aproximação durante o encontro, entre M_2 e M_3 ;
- 4) ψ_A : ângulo de aproximação.

O método “*patched conics*”, tem as seguintes etapas:

- 1ª) Desconsidera-se o efeito gravitacional de M_2 e é tomado como órbita kepleriana o movimento de M_3 em torno de M_1 .
- 2ª) Supõe-se que M_3 entra na esfera de influência de M_2 (local onde o corpo M_2 possui uma força gravitacional de maior intensidade agindo em M_3). Então se calcula \vec{V}_∞^- a partir da equação: $\vec{V}_\infty^- = \vec{V}_i - \vec{V}_2$. O efeito de M_1 é desconsiderado. O movimento de M_3 ao redor de M_2 é hiperbólico. Nesta órbita hiperbólica M_3 é desviada por M_2 e seu vetor velocidade (com relação a M_2) gira um ângulo de 2δ , mantendo sua magnitude constante. Então, o veículo cruza novamente a esfera de influência de M_2 e a abandona retornando a uma órbita kepleriana em torno de M_1 . Neste ponto, a velocidade \vec{V}_∞^+ é dada por: $\vec{V}_\infty^+ = \vec{V}_0 - \vec{V}_2$.

Onde (Figura 4.2):

- \vec{V}_2 - velocidade de M_2 em relação a M_1 ;

- $\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$ - vetores velocidade do veículo espacial em relação a M_2 , antes e depois do encontro;
 - \vec{V}_i, \vec{V}_0 - vetores velocidade do veículo espacial relativo à M_1 , antes e depois do encontro em um referencial inercial;
 - δ - metade do ângulo da curvatura (ângulo entre \vec{V}_∞^- e \vec{V}_∞^+);
- 3ª) Enfim, dentro destas condições o veículo espacial entra em uma nova órbita kepleriana ao redor de M_1 e o *Swing-By* está completo.

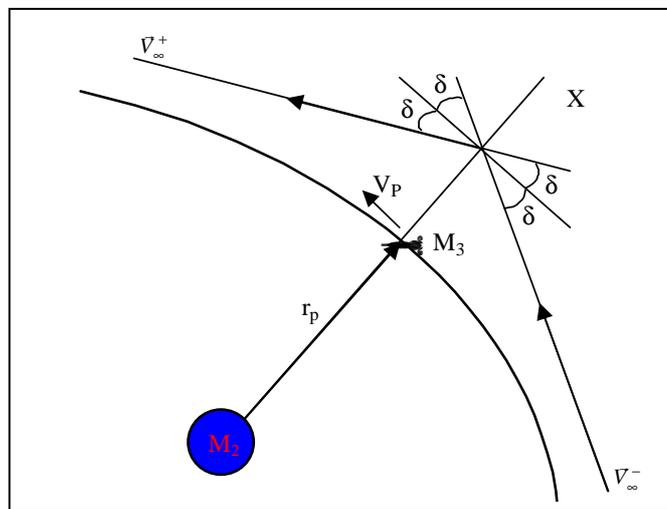


FIGURA 4.2 – Descrição da passagem do corpo M_3 pelo corpo M_2 , na realização do *Swing-by*.

A variação da velocidade é uma grandeza de grande importância para a análise do problema, sendo dada por $\Delta\vec{V} = \vec{V}_0 - \vec{V}_i$, que representa a diferença entre as velocidades inerciais antes e depois da manobra de *Swing-By* (Prado, 2001). Utilizando geometria simples (Figura 4.4) é possível demonstrar que $\Delta V = |\Delta\vec{V}| = 2|\vec{V}_\infty| \sin(\delta) = 2V_\infty \sin(\delta)$ e que $\Delta\vec{V}$ faz um ângulo $\Psi_A + 180^\circ$ com a linha M_1 - M_2 (Figura 4.2). Analisando geometricamente o problema, conclui-se que as componentes verticais e horizontais dos incrementos da velocidade são dadas por:

$$1) \Delta\dot{X} = -2V_\infty \sin(\delta)\cos(\Psi_A); \quad (4.1)$$

$$2) \Delta\dot{Y} = -2V_\infty \sin(\delta)\sin(\Psi_A). \quad (4.2)$$

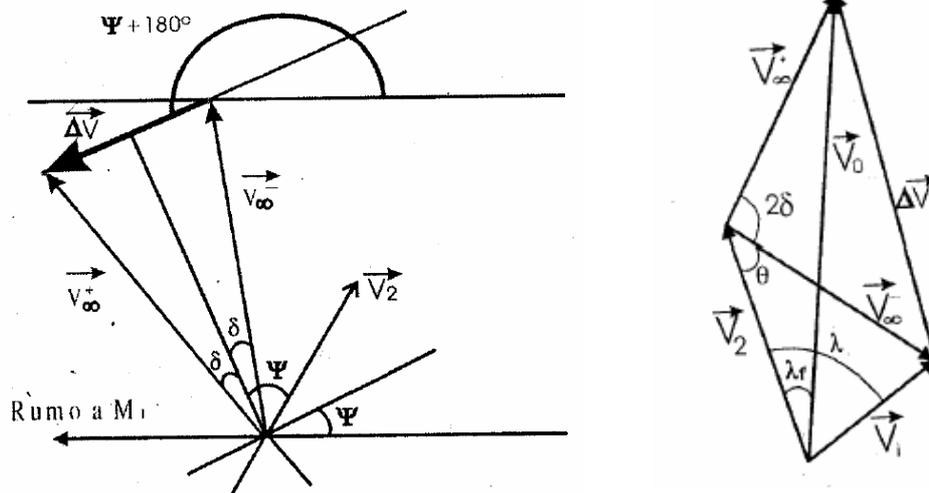


FIGURA 4.3 - Geometria do *Swing-By*
 FONTE: Prado (2001)

A segunda grandeza importante para a análise é o momento angular. Partindo da sua definição podemos escrever que $\Delta C = X(\Delta\dot{Y}) + (\Delta X)\dot{Y} - Y(\Delta\dot{X}) - (\Delta Y)\dot{X}$ para sua primeira variação. Utilizando a condição de contorno de que o encontro é instantâneo ($\Delta X = \Delta Y = 0$) e que $t = 0$, $X = R$ e $Y = 0$, a equação do momento angular se torna $\Delta C = R\Delta\dot{Y}$, e substituindo na equação de $\Delta\dot{Y}$ obtemos: $\omega\Delta C = -2V_2 V_\infty \sin(\delta)\sin(\Psi_A)$.

Uma terceira grandeza derivada aqui é a variação da energia. Podendo ser adquirida por subtração direta da energia antes e após o encontro, e escrita da seguinte forma:

$$1) E_- = \left[\frac{(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)}{2} \right]; \quad (4.3)$$

$$2) E_+ = \left[\frac{(\dot{X} + \Delta\dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2}{2} \right]. \quad (4.4)$$

Calculando a variação
 $\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \text{sen}(\delta) [2V_\infty \text{sen}(\delta) - (\dot{X} \cos(\Psi_A) + \dot{Y} \text{sen}(\Psi_A))]$. Simplificando esta equação (Broucke, 1988) temos:

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \text{sen}(\delta) \text{sen}(\Psi_A) \quad (4.5)$$

Olhando para as equações acima, um resultado fundamental pode ser encontrado:

$$\Delta E = \omega \Delta C \quad (4.6)$$

Algumas conseqüências importantes dessas equações podem ser derivadas estudando a equação para variação da energia. Os parâmetros $|\vec{V}_2|$ e $|\vec{V}_\infty|$ são quantidades positivas, assim como o $\text{sen}(\delta)$ (porque $0^\circ < \delta < 90^\circ$). Então, o único parâmetro que afeta o sinal de ΔE é o $\text{sen}(\psi_A)$ (Prado, 1995).

Para valores de ψ_A no intervalo $0^\circ < \psi_A < 180^\circ$, ΔE é negativo (decrece em energia) e, para ψ_A no interalo $180^\circ < \psi_A < 360^\circ$, ΔE é positivo (aumenta em energia).

Então, as conclusões finais são:

- 1) Se o *swing-by* ocorre na frente de M_2 ($0^\circ < \psi_A < 180^\circ$), há um decréscimo na energia de M_3 com uma perda máxima quando $\psi_A = 90^\circ$;
- 2) Se o *swing-by* ocorre atrás de M_2 ($180^\circ < \psi_A < 360^\circ$), há um aumento na energia de M_3 com um ganho máximo quando $\psi_A = 270^\circ$.

4.2 Hipóteses para um *Swing-By* na Terra

Como exemplo para as trajetórias de Múltiplos Encontros, vamos estudar o problema de um veículo espacial que sai da terra, viaja pelo espaço interplanetário, e retorna a terra, efetuando um *Swing-By*. As hipóteses utilizadas são:

- 1) O sistema é formado por dois corpos principais em órbita elíptica e um terceiro corpo de massa desprezível se movendo sob a ação de forças gravitacionais;
- 2) A nave espacial sai de P, cruza a linha horizontal (Sol - Terra), passa pelo apsis e vai para Q, onde ocorre o encontro (Figura 4.4);

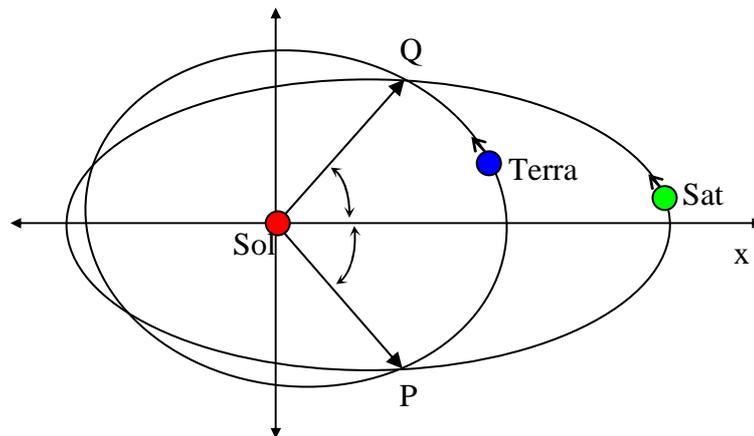


FIGURA 4.4 – Manobra de *Swing-By*.

- 3) Ocorrerão variações da energia, velocidade e do momento angular do veículo espacial devido a esse encontro;
- 4) Usamos o sistema de unidades canônicas. Isto implica que:
 - a) Unidade de distância é a distância entre M_1 (Sol) e M_2 (Terra);
 - b) Velocidade angular ω de rotação de M_1 e M_2 é unitária;

- c) Massa de $M_2 = \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ e de M_1 é $(1 - \mu)$, assim sendo, a massa total é unitária;
- d) Constante gravitacional é um;
- e) $\mu_t = 2,9970165E-6$ (Terra);
- f) A origem do sistema é situada no centro de massa.

A origem do sistema é situada no centro de massa. O eixo horizontal é a linha M_1 e M_2 e o eixo vertical é perpendicular ao horizontal. As equações dinâmicas utilizando o sistema de unidades canônicas descritas acima podem ser encontradas em Prado (2001).

4.2.1 Implementação do *Swing-By* na Terra

Após a manobra do veículo espacial no Problema de Múltiplos Encontros, aproveita-se a passagem do corpo M_3 próximo ao primário M_2 e faz-se um *Swing-By* para ganhar energia. Foram feitas algumas simulações deste problema para o caso Terra Satélite, considerando a distância de aproximação do veículo espacial de 1,2 rt (raios terrestres).

4.2.2 Swing-By com os Parâmetros: $e = 0,4$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 4$ rad

TABELA 4.1 - *Swing-By* com $\Delta V > 0,24$.

$e = 0,4$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 4$ rad		Ângulo		Variação da Velocidade	Variação da Energia
		de Aproximação			
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
-0,7960	-45,6074	5,0949	291,9135	0,24202780	0,22454090
-0,7950	-45,5501	5,0953	291,9386	0,24202780	0,22450211
-0,7940	-45,4928	5,0957	291,9636	0,24202780	0,22446200
-0,3910	-22,4026	6,4028	366,8513	0,24202780	-0,02887198
-0,7910	-45,3210	5,0140	287,2809	0,24202780	0,23110285
-0,7900	-45,2637	5,0147	287,3201	0,24202780	0,23105401
-0,7890	-45,2064	5,0154	287,3595	0,24202780	0,23100397
-0,3790	-21,7151	6,3707	365,0144	0,24202780	-0,02115400
-0,7960	-45,6074	4,8967	280,5631	0,24202780	0,23792614
-0,7950	-45,5501	4,8978	280,6207	0,24202780	0,23788218
-0,7940	-45,4928	4,8988	280,6783	0,24202780	0,23783700
-0,7930	-45,4356	4,8998	280,736	0,24202780	0,23779193
-0,3660	-20,9703	6,3354	362,9897	0,24202780	-0,01262500
-0,3500	-20,0535	6,2890	360,3359	0,24202780	-0,00141900
-0,7960	-45,6074	5,0949	291,9135	0,24202780	0,22454090

A Tabela 4.1 mostra soluções com ΔV 's máximos encontrados como solução para o problema proposto. Para determinados valores de ângulos ψ encontramos valores de ganhos máximos (medido pelo ΔV e ΔE). Nota-se que as soluções não são únicas. Encontram-se nas Tabelas 4.1 e 4.2 diversos ângulos ψ em que os valores do ΔV e do ΔE são máximos.

TABELA 4.2 - *Swing-By* com $\Delta E > 0,242$.

$e = 0,4$ $\psi_0 = -2,5 \text{ rad}$ $\psi_f = 4 \text{ rad}$		Ângulo de Aproximação		Varição de Velocidade	Varição de Energia
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
Rad	graus	rad	graus		
-0,579	-33,1743	4,702196	269,416	0,242018	0,242006
-0,578	-33,1170	4,705935	269,6302	0,242013	0,242008
-0,577	-33,0597	4,709691	269,8454	0,242008	0,242007
0,817	46,8107	4,722055	270,5538	0,242015	0,242004
0,818	46,8679	4,721046	270,496	0,242016	0,242007
0,819	46,9252	4,720038	270,4383	0,242017	0,24201
0,82	46,9825	4,719034	270,3807	0,242019	0,242013
0,821	47,0398	4,718033	270,3234	0,24202	0,242016
0,822	47,0971	4,717035	270,2662	0,242021	0,242018
0,823	47,1544	4,71604	270,2092	0,242022	0,24202
0,824	47,2117	4,715047	270,1523	0,242023	0,242022
0,825	47,2690	4,714058	270,0956	0,242024	0,242023
0,826	47,3263	4,713071	270,0391	0,242024	0,242024
0,827	47,3836	4,712088	269,9828	0,242025	0,242025
0,828	47,4409	4,711107	269,9265	0,242026	0,242026
0,829	47,4982	4,71013	269,8706	0,242026	0,242026
0,83	47,5555	4,709156	269,8148	0,242027	0,242025
0,831	47,6128	4,708184	269,7591	0,242027	0,242025
0,832	47,6701	4,707216	269,7036	0,242028	0,242024
0,833	47,7274	4,706251	269,6483	0,242028	0,242023
0,834	47,7847	4,705288	269,5931	0,242028	0,242022
0,835	47,8420	4,704329	269,5382	0,242028	0,24202
0,836	47,8993	4,703373	269,4834	0,242028	0,242018
0,837	47,9566	4,70242	269,4288	0,242028	0,242016
0,838	48,0139	4,70147	269,3744	0,242028	0,242014
0,839	48,0712	4,700524	269,3202	0,242028	0,242011
0,84	48,1285	4,69958	269,2661	0,242028	0,242008
0,841	48,1858	4,69864	269,2122	0,242028	0,242005
0,842	48,2430	4,697702	269,1585	0,242027	0,242001
1,973	113,0446	4,699659	269,2706	0,242024	0,242004

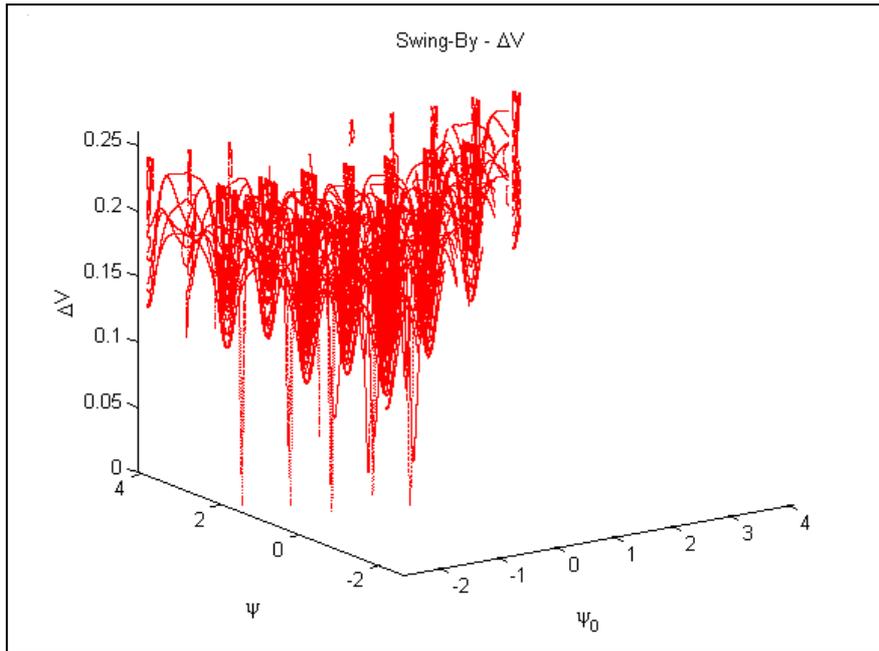


FIGURA 4.5 - Variação da velocidade (ΔV) após o *Swing-By* $e = 0,4$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.

Nos gráficos e tabelas (Figuras 4.5 e 4.6, Tabelas 4.1 e 4.2) visualizam-se a variação da velocidade (ΔV) e percebe-se que existe uma variação notável entre o valor máximo de ganho ($\Delta V \approx 0,24202780$) e o valor em que o corpo adquire um ganho mínimo ($\Delta V \approx 0,08$).

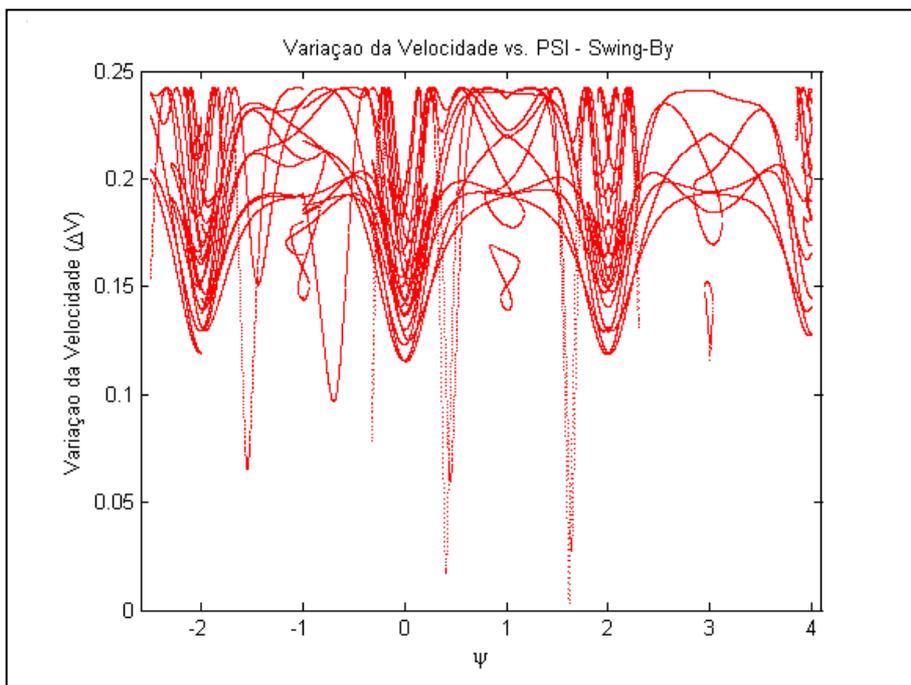


FIGURA 4.6 – ψ vs. Variação da velocidade (ΔV), $e = 0,4$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.

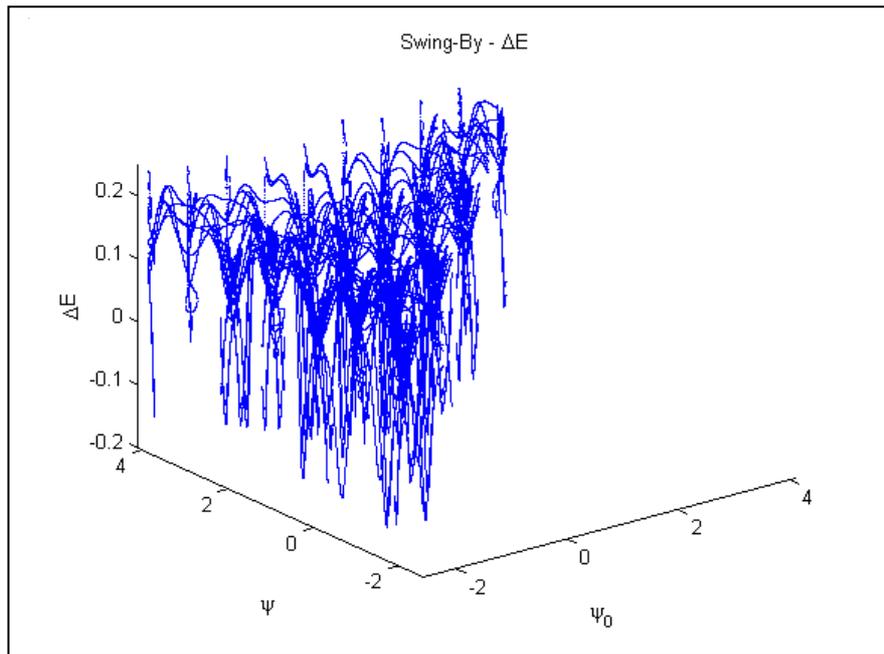


FIGURA 4.7 - Variação da Energia (ΔE) após o *Swing-By* $e = 0,4$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.

Analogamente, nos gráficos e tabelas da variação da energia ΔE (Figuras 4.7 e 4.8, Tabela 4.2), encontramos pontos de máximo ($\Delta E \approx 0,242026$) e de mínimo ($\Delta E \approx -0,15$). Os ângulos ψ em que a manobra consegue um maior ganho de energia fica em torno de $47,4^\circ$, com um ângulo de aproximação (ψ_A) em torno de $269,8^\circ$.

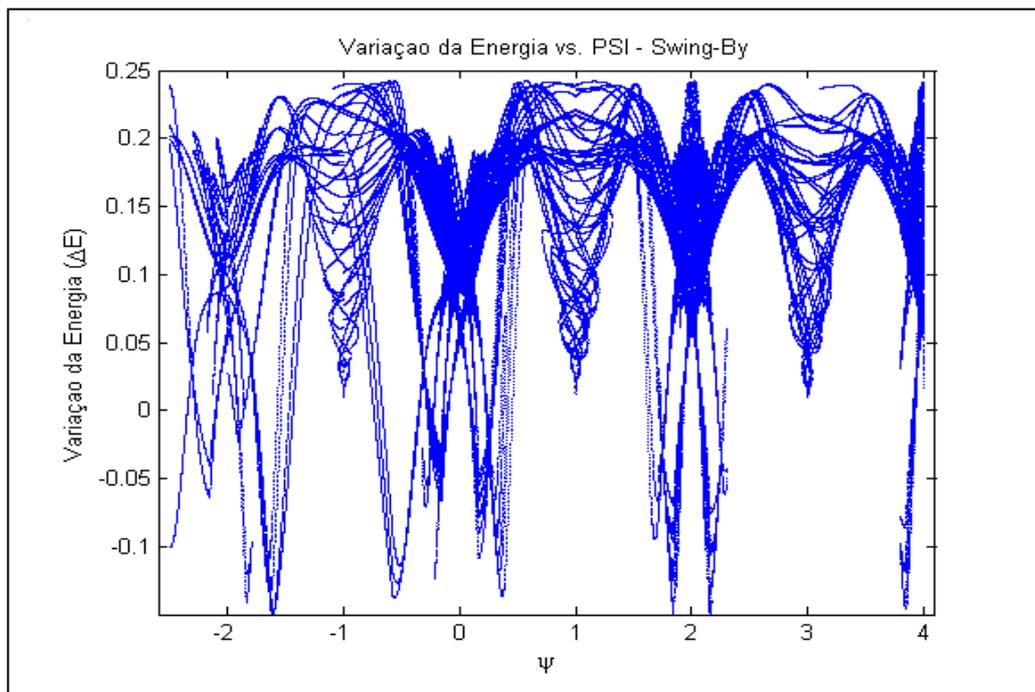


FIGURA 4.8 – ψ vs. Variação da Energia (ΔE), $e = 0,4$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 4$ rad.

As Figuras 4.9 e 4.10 apresentam o saldo da variação da velocidade, isto é, o valor do ΔV total, que é o resultado do valor do ΔV obtido no *Swing-By* menos o ΔV gasto com a manobra de Múltiplos Encontros.

Na Figura 4.9 temos o saldo do ΔV em função do ângulo ψ . Nota-se que a maioria das soluções mostradas nesse gráfico são negativas. Estas soluções representam os valores de ψ em que uma missão, que visa o mínimo consumo de combustível, não será proveitosa, pois o ΔV adquirido no *Swing-By* na Terra é menor que o ΔV gasto para realizar a manobra de Múltiplos Encontros.

Verifica-se na Figura 4.10 o saldo positivo do ΔV em função do ângulo final de cada manobra ψ . Este gráfico apresenta as soluções em que o ΔV total obtido é positivo, para a simulação com a excentricidade $e = 0,4$.

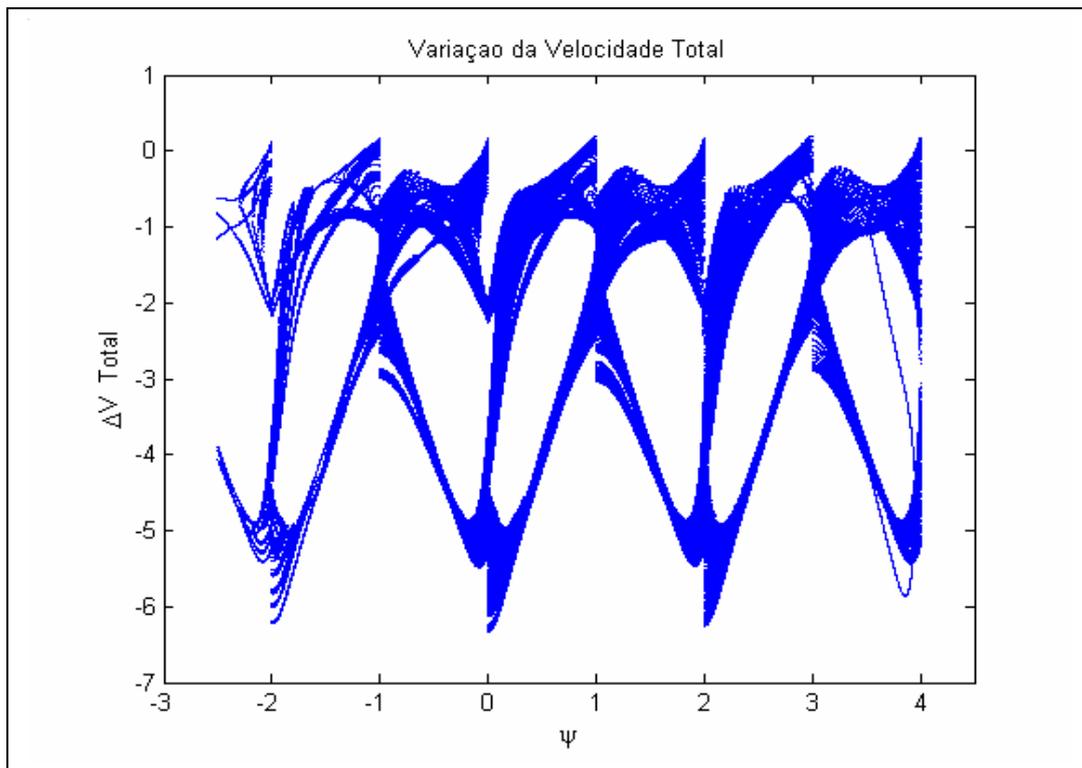


FIGURA 4.9 - ΔV total obtido na manobra de *Swing-By* no Problema de Múltiplos Encontros, para $e = 0,4$.

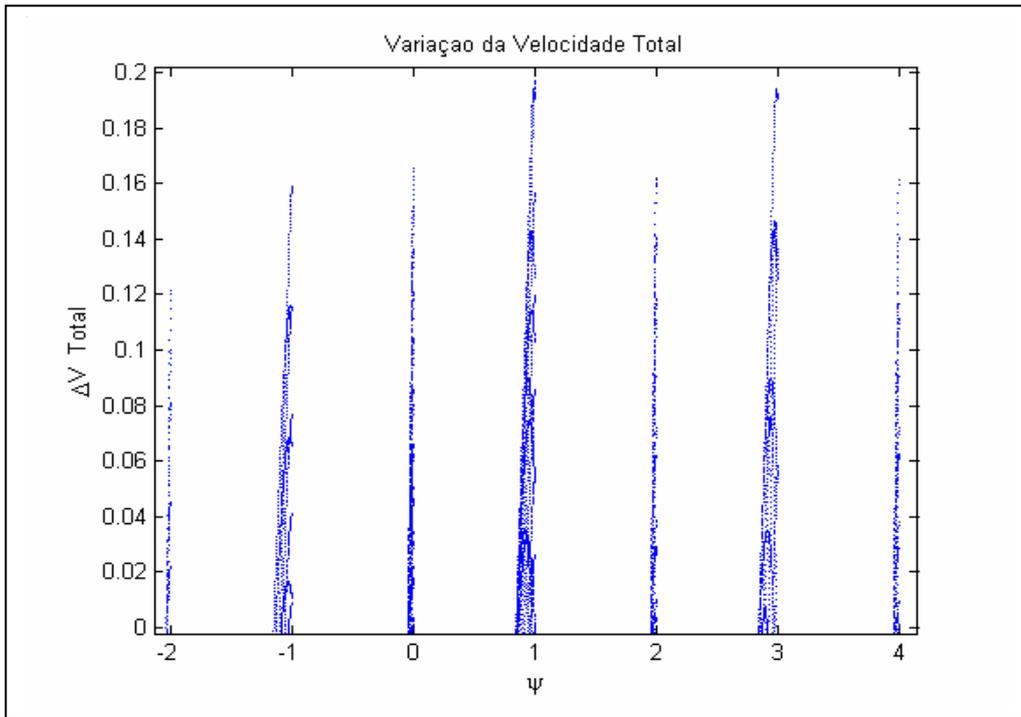


FIGURA 4.10 - Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,4$.

4.2.3 Swing-By com os Parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3$ rad

Nesta Seção, são mostrados os gráficos e tabelas da variação da velocidade (ΔV) e variação da energia (ΔE) para um *Swing-By* na Terra, com os seguintes parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,0$ rad.

TABELA 4.3 - *Swing-By* com $\Delta V > 0,2420$.

$e = 0,1$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 3,0$ rad		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
0,1620	9,2819	6,1860	354,4319	0,242028	0,023484
0,1630	9,3392	6,1855	354,4027	0,242028	0,023606
0,1640	9,3965	6,1850	354,3736	0,242028	0,023729
0,1650	9,4538	6,1845	354,3445	0,242028	0,023851
0,1660	9,5111	6,1840	354,3154	0,242028	0,023973
0,1670	9,5684	6,1835	354,2863	0,242028	0,024096
0,2330	13,3499	6,0513	346,7123	0,242028	0,055628
0,2340	13,4072	6,0512	346,7104	0,242028	0,055636
0,2350	13,4645	6,0512	346,7086	0,242028	0,055643
0,2360	13,5218	6,0512	346,7067	0,242028	0,055651
2,4670	141,3487	6,0903	348,9457	0,242028	0,046406
2,7980	160,3136	4,1427	237,3569	0,242028	0,203799
2,8370	162,5481	4,0337	231,1147	0,242028	0,188396
2,9590	169,5382	4,1326	236,7825	0,242028	0,20248
2,2030	126,2226	6,1655	353,2566	0,242028	0,02842
2,2040	126,2799	6,1650	353,2294	0,242028	0,028534
2,2050	126,3372	6,1645	353,2021	0,242028	0,028648
2,2060	126,3945	6,1641	353,175	0,242028	0,028762
2,2070	126,4518	6,1636	353,1478	0,242028	0,028876
2,2600	129,4885	6,0533	346,8277	0,242028	0,055154
2,2610	129,5458	6,0533	346,8268	0,242028	0,055157
2,2620	129,6031	6,0533	346,8260	0,242028	0,05516

TABELA 4.4 - *Swing-By* com $\Delta E > 0,2301$.

$e = 0,1$ $\psi_o = -2,5 \text{ rad}$ $\psi_f = 3,0 \text{ rad}$		Ângulo de Aproximação		Varição da Velocidade	Varição da Energia
$\psi \text{ (rad)}$		$\psi_A \text{ (rad)}$		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
-0,0010	-0,05730	4,56146	261,35241	0,232789	0,230143
-0,0020	-0,11459	4,55777	261,14093	0,232917	0,230139
-0,0030	-0,17189	4,55406	260,92853	0,233046	0,230131
2,7590	158,07906	4,58426	262,65869	0,23207	0,230168
2,7600	158,13635	4,57967	262,39548	0,232235	0,230193
2,7610	158,19365	4,57507	262,13243	0,2324	0,230212
2,7620	158,25094	4,57049	261,86950	0,232564	0,230226
2,7630	158,30824	4,56590	261,60674	0,232727	0,230234
2,7640	158,36553	4,59036	263,00808	0,231847	0,230123
2,7650	158,42283	4,55674	261,08180	0,23305	0,230233
2,7650	158,42283	4,58518	262,71129	0,232034	0,230159
2,7660	158,48013	4,55216	260,81961	0,233211	0,230224
2,7670	158,53742	4,57482	262,11759	0,232406	0,23021
2,7680	158,59472	4,54302	260,29599	0,23353	0,230189
2,7690	158,65201	4,56445	261,52372	0,232774	0,230232
2,7700	158,70931	4,53390	259,77339	0,233846	0,230131
2,7700	158,70931	4,55927	261,22676	0,232958	0,230232
2,7710	158,76661	4,55408	260,92979	0,23314	0,230225
2,7720	158,82390	4,54890	260,63277	0,233322	0,230211
2,7890	159,79793	4,57647	262,21224	0,232325	0,230182
2,7900	159,85522	4,57137	261,92038	0,232507	0,230199
2,7910	159,91252	4,56628	261,62857	0,232688	0,230208
2,7920	159,96982	4,56119	261,33671	0,232868	0,230211
2,7930	160,02711	4,55609	261,04490	0,233047	0,230206
2,7940	160,08441	4,55100	260,75304	0,233225	0,230195
2,7950	160,14170	4,54591	260,46123	0,233403	0,230176

O valor máximo da variação da energia (ΔE) (Tabela 4.4) não está vinculado ao valor máximo da variação da velocidade (ΔV) (Tabela. 4.3). Pode-se notar que a variação da energia ΔE é maior quando o ângulo de aproximação ψ_A é cerca de 260° , e é menor quando $\psi_A \approx 48,91^\circ$ (Figura 4.14).

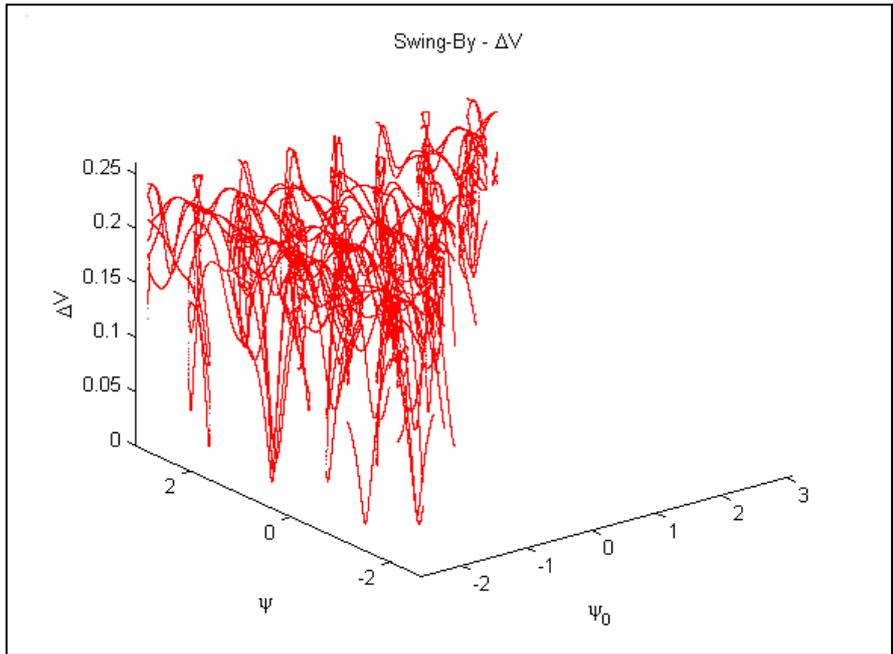


FIGURA 4.11 - Variação da Velocidade (ΔV) após o *Swing-By* $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.

Nas Figuras 4.11 e 4.12, nota-se que o ΔV mantém um comportamento semelhante ao das Figuras 4.5 e 4.6 com excentricidade igual a 0,4, diferindo nos ΔV 's que tem uma média de valores maior (Figura 4.12). Quanto mais excêntrica for a órbita do veículo espacial M_3 , menores valores de ΔV 's se obtém.

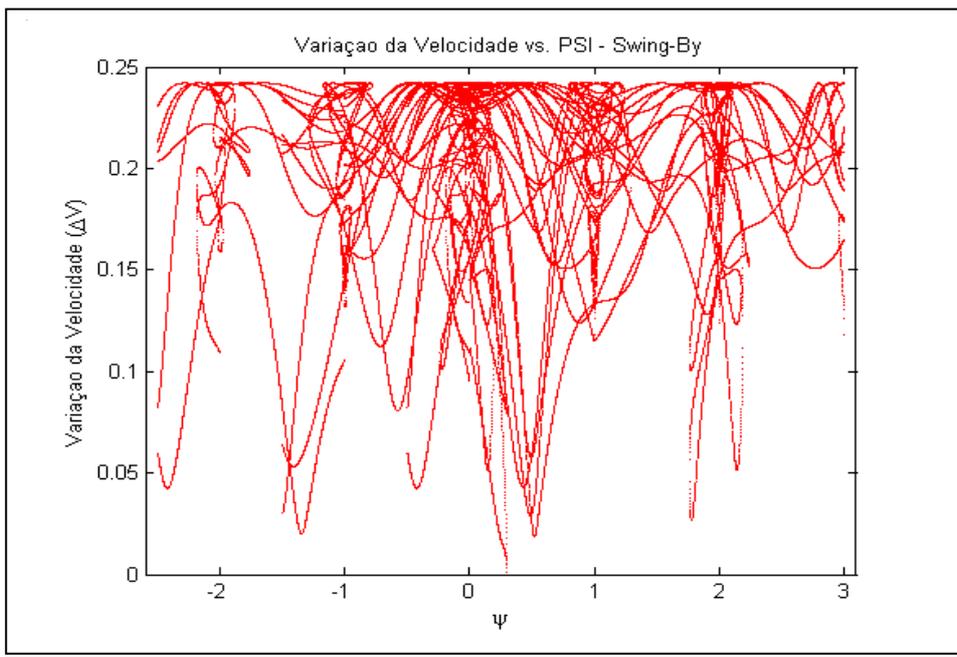


FIGURA 4.12 – ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV), $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.

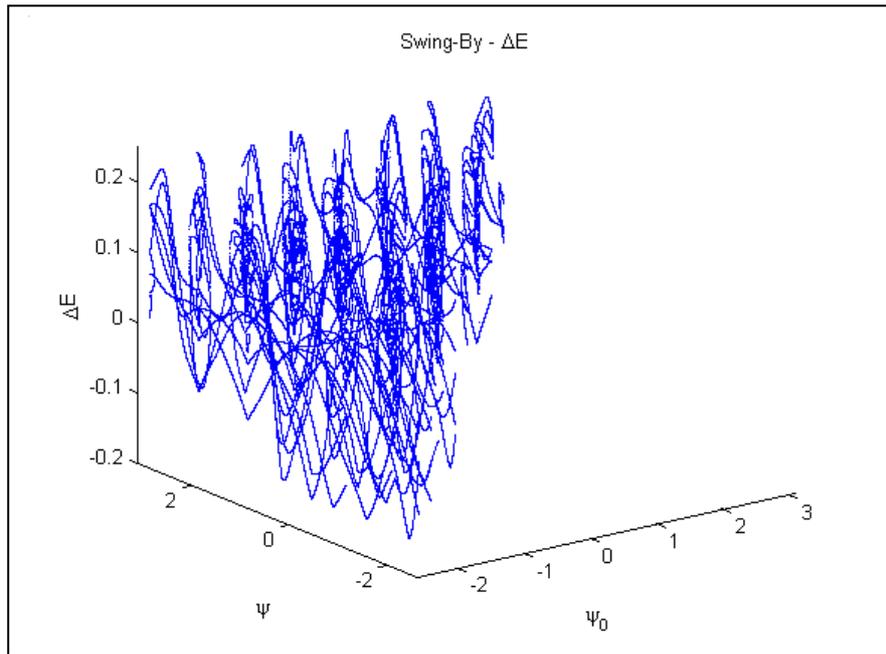


FIGURA 4.13 - Variação da Energia (ΔE) após o *Swing-By* $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.

Na simulação do *Swing-By* na Terra com uma órbita bastante excêntrica (Figuras. 4.13 e 4.14) mostra que a média dos valores da variação da energia (ΔE) diminui visivelmente (Figuras. 4.8 e 4.14).

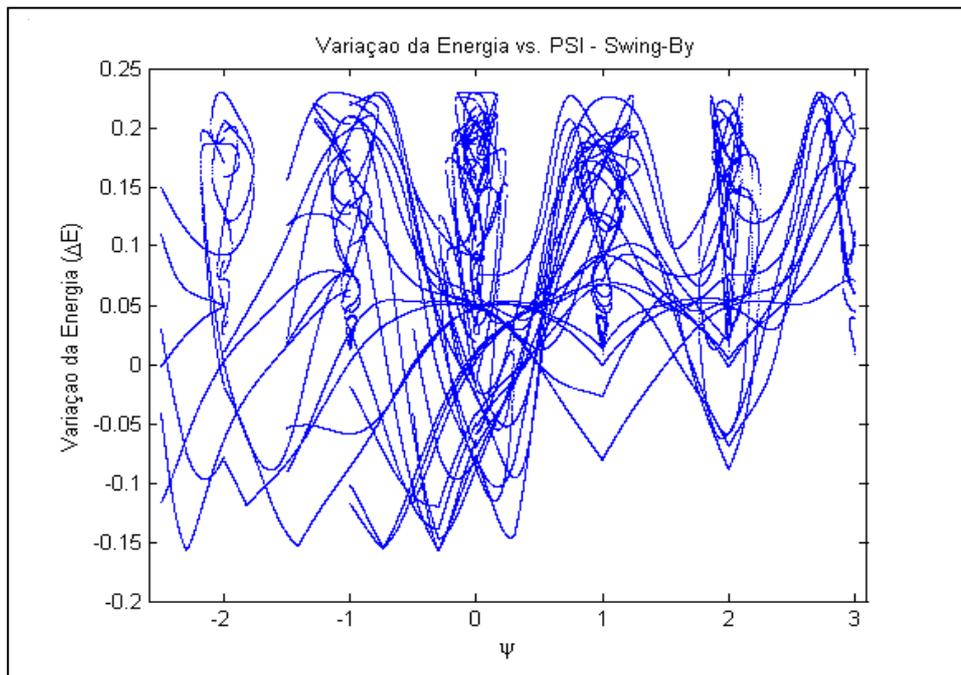


FIGURA 4.14 – ψ vs. Variação da Energia (ΔE), $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3$ rad.

Na Figura 4.15 em que mostra o saldo do ΔV , verifica-se que a quantidade de valores do ΔV total obtida com a manobra completa é maior, quando comparado com a simulação com excentricidade $e = 0,4$ (Figura 4.10).

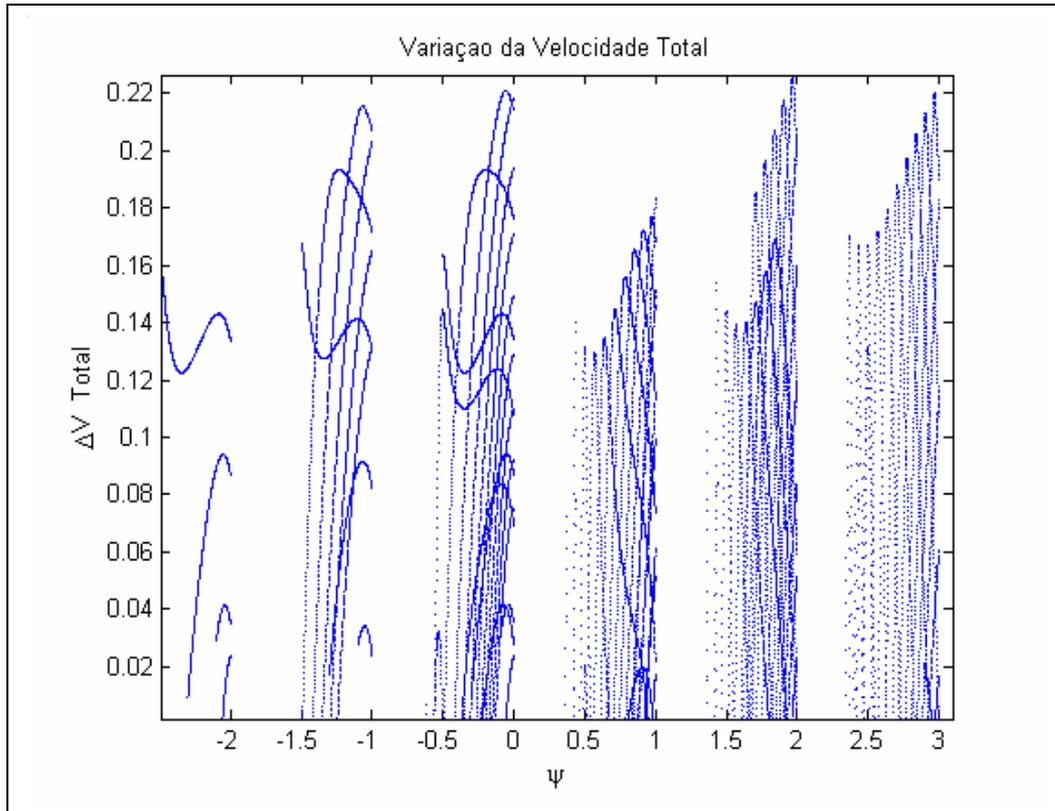


FIGURA 4.15 - Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,1$.

4.3 Hipóteses para um *Swing-By* em Júpiter

Foram feitas considerações análogas ao *Swing-By* na Terra, com os seguintes parâmetros:

Usamos o sistema de unidades canônicas. Isto implica que:

- a) Unidade de distância é a distância entre M_1 (Sol) e M_2 (Júpiter);
- b) Velocidade angular ω de rotação de M_1 e M_2 é unitária;
- c) Massa de $M_2 = \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ e de $M_1 = (1 - \mu)$. Assim sendo, a massa total do sistema é unitária;
- d) Constante gravitacional é um;
- e) $\mu_t = 9,47368421E-2$ (Júpiter);
- f) A origem do sistema é situada no centro de massa;

Será suposto que a distância do periapsis (r_p) pode ser controlada, os parâmetros da órbita inicial do veículo (ψ_0 e ψ_f) são os valores iniciais do problema de múltiplos encontros, que após a passagem do corpo M_3 (veículo espacial) próximo ao primário M_2 (Júpiter) ocorrerá a manobra de *Swing-By*. A velocidade do corpo $|\vec{V}_\infty|$ é obtida a partir da órbita inicial do veículo espacial e da órbita do planeta Júpiter. O planeta é tomado como uma massa puntiforme, e serão desprezados os torques externos ao corpo, agindo sobre o corpo M_3 somente a força gravitacional de M_1 (método conhecido na literatura como *patched conics* (Prado, 2001)).

As equações dinâmicas, utilizando o sistema de unidades canônicas descritas acima, podem ser encontradas em Prado e Broucke (2000).

4.3.1 Implementação do *Swing-By* em Júpiter

Nesta seção serão mostrados resultados de simulações numéricas de um *Swing-by* em Júpiter. Serão analisadas novamente as variações da velocidade (ΔV) e as variações da energia (ΔE) em função do ângulo final da manobra ψ . Dentre os parâmetros de simulação foi considerado a distância de aproximação do veículo espacial no *Swing-By* $1,2r_j$ (raio de Júpiter) $\approx 5,725019385545e-4$. Foram efetuadas simulações com um tempo da manobra maior, sem que tenha ocorrido alteração significativa nos resultados.

4.3.2 *Swing-By* com os Parâmetros: $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad

TABELA 4.5 - *Swing-By* com $\Delta V > 1,2$.

$e = 0,1$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 3,5$ rad		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
2,001	114,648855	3,8952	223,17852	1,2022	0,82262
2,999	171,830043	3,8745	221,992498	1,2159	0,81346
3,001	171,944634	3,877	222,135737	1,2144	0,81472
-1,001	-57,3530753	3,8902	222,892041	1,2053	0,82042
0,999	57,2384837	3,8911	222,943608	1,2047	0,82077
1,999	114,534263	3,8795	222,278977	1,2119	0,81532
2,001	114,648855	3,8801	222,313354	1,2116	0,81562
2,999	171,830043	3,8607	221,201816	1,2222	0,80505
3,001	171,944634	3,8607	221,201816	1,2222	0,80509
1,999	114,534263	3,8882	222,77745	1,2113	0,82266
2,001	114,648855	3,8871	222,714425	1,2119	0,82209
2,999	171,830043	3,8857	222,63421	1,2125	0,82121
3,001	171,944634	3,8817	222,405027	1,2146	0,81913
1,999	114,534263	3,89	222,880582	1,2067	0,82113
2,999	171,830043	3,8857	222,63421	1,2125	0,82121
3,001	171,944634	3,8817	222,405027	1,2146	0,81913
1,999	114,534263	3,89	222,880582	1,2067	0,82113
1,999	114,534263	3,8882	222,77745	1,2113	0,82266
2,001	114,648855	3,8871	222,714425	1,2119	0,82209
2,999	171,830043	3,8607	221,201816	1,2222	0,80505
3,001	171,944634	3,8607	221,201816	1,2222	0,80509
1,999	114,534263	3,8795	222,278977	1,2119	0,81532
2,001	114,648855	3,8801	222,313354	1,2116	0,81562
2,999	171,830043	3,8745	221,992498	1,2159	0,81346

Novamente os resultados numéricos mostram que o maior ganho para a variação da velocidade (ΔV) não implica no maior ganho da variação da energia (ΔE) (Tabelas 4.5 e 4.6).

TABELA 4.6 - *Swing-By* com $\Delta E > 0,870$.

$e = 0,1$ $\psi_0 = -2,5 \text{ rad}$ $\psi_f = 3,5 \text{ rad}$		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
2,999	171,83	4,133113	236,8099	1,039688	0,870072
3	171,8873	4,120623	236,0943	1,049802	0,87129
3,001	171,9446	4,129204	236,586	1,042867	0,870495
2,984	170,9706	4,128897	236,5684	1,043271	0,870655
2,985	171,0279	4,119532	236,0318	1,05083	0,871503
2,986	171,0852	4,10982	235,4753	1,058608	0,872168
2,987	171,1425	4,099721	234,8967	1,066628	0,872626
2,988	171,1998	4,089182	234,2929	1,074917	0,872845
2,989	171,2571	4,078141	233,6603	1,08351	0,872787
2,99	171,3144	4,066519	232,9944	1,092448	0,872403
2,991	171,3717	4,054213	232,2893	1,101785	0,871632
2,992	171,429	4,04109	231,5374	1,111588	0,870389
3,01	172,4603	4,038714	231,4013	1,113359	0,870128
3,011	172,5176	4,048402	231,9563	1,106162	0,871148
3,012	172,5749	4,057576	232,482	1,099265	0,871895
3,013	172,6322	4,06631	232,9824	1,09263	0,872411
3,014	172,6895	4,074661	233,4609	1,086224	0,872727
3,015	172,7468	4,082678	233,9202	1,08002	0,87287
3,016	172,8041	4,090397	234,3625	1,073998	0,872859
3,017	172,8614	4,097853	234,7897	1,068139	0,872713
3,018	172,9187	4,105072	235,2033	1,062427	0,872446
3,019	172,976	4,112077	235,6047	1,05685	0,872069
3,02	173,0333	4,118888	235,9949	1,051395	0,871594
3,021	173,0905	4,125523	236,3751	1,046053	0,871027
3,022	173,1478	4,131996	236,7459	1,040814	0,870378

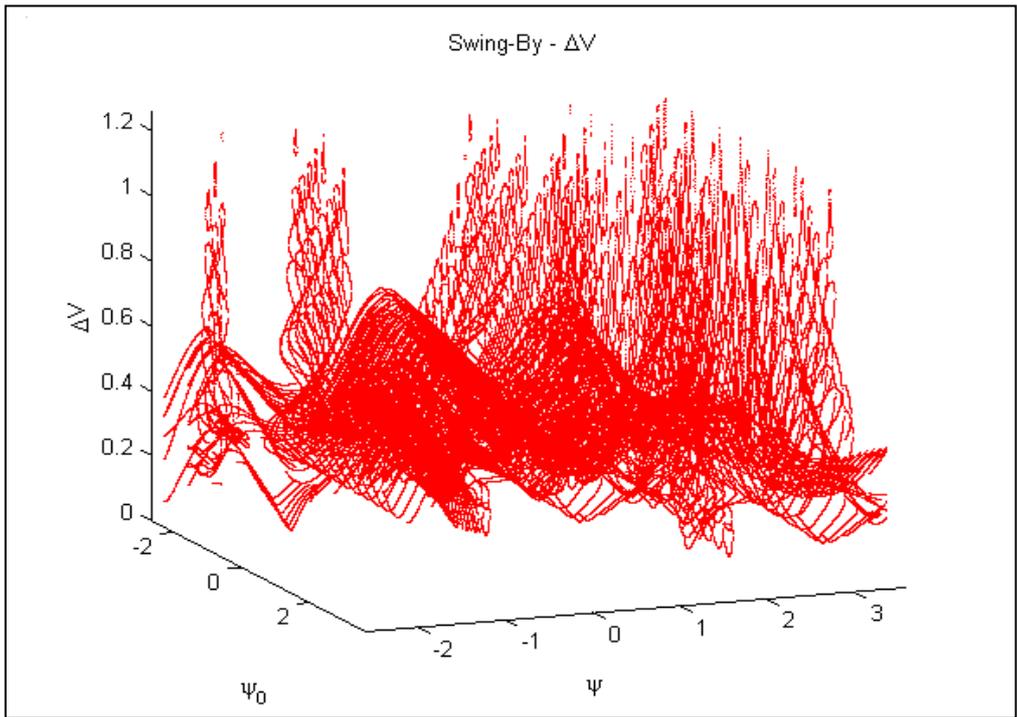


FIGURA 4.16 - Variação da Velocidade (ΔV) após o *Swing-By* $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

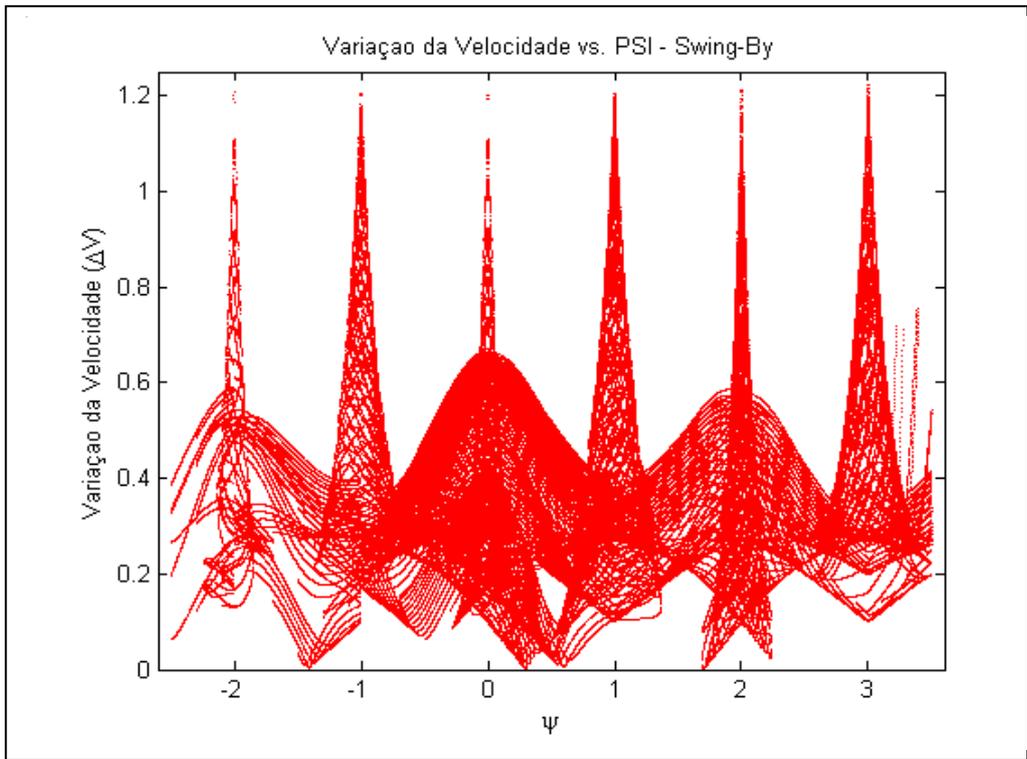


FIGURA 4.17 – ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV), $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

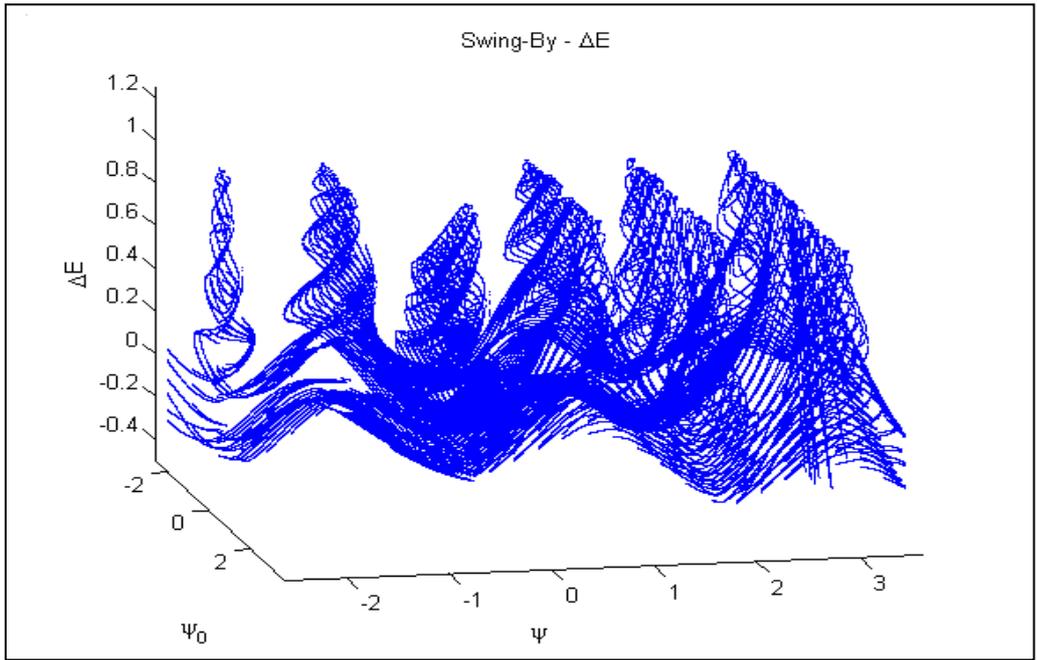


FIGURA 4.18 - Variação da Energia (ΔE) após o *Swing-By* $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

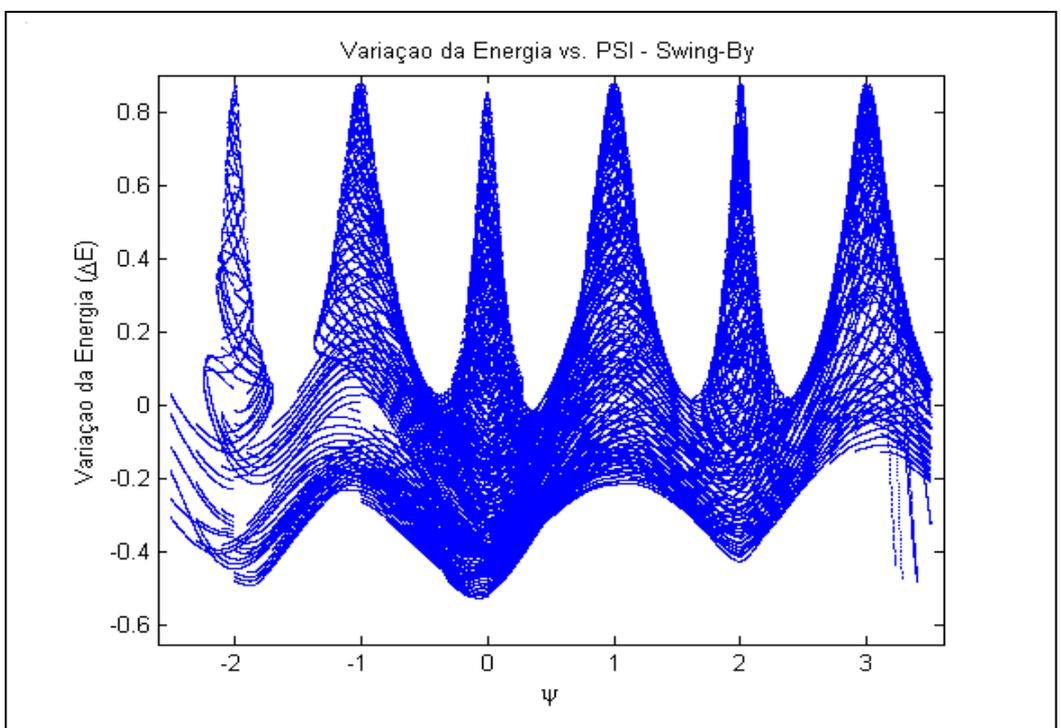


FIGURA 4.19 – ψ vs. Variação da Energia (ΔE), $e = 0,1$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

Para cada excentricidade simulada, foram encontrados soluções com ângulos distintos (Tabelas 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8) para os valores ótimos do ΔV e do ΔE . Nota-se também, que o ganho ΔV é diretamente proporcional à excentricidade da órbita do veículo espacial M_3 , isto é, quanto mais excêntrica a órbita simulada ($e \rightarrow 1$) maior o ΔV encontrado (Tabelas 4.5 – 4.10). Percebe-se nas Figuras 4.17 e 4.19 a formação de picos de valores e o número de picos é exatamente seis, que é o número de revoluções da simulação.

Na Figura 4.20 verifica-se o saldo positivo do ΔV total adquirido com manobra completa, isto é, *Swing-By* após a manobra de Múltiplos Encontros.

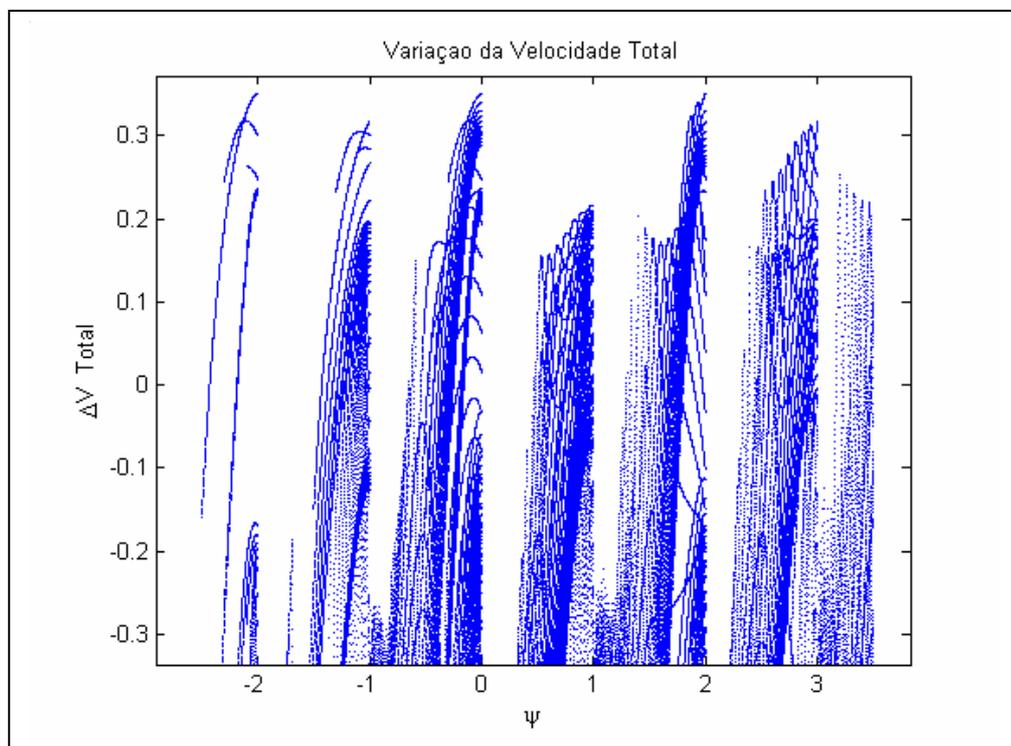


FIGURA 4.20 - Saldo Positivo de ΔV obtido no *Swing-By*, para $e = 0,1$.

4.3.3 *Swing-By* com os Parâmetros: $e = 0,9$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad

TABELA 4.7 - *Swing-By* com $\Delta V > 1,2863$.

$e = 0,9$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 3,5$ rad		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
		Ψ_A			
Ψ		Ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
-0,046	-2,63561	6,55551	375,60323	1,28639	-0,34600
-0,045	-2,57831	6,54763	375,15145	1,28639	-0,33622
0,103	5,90147	5,24427	300,47477	1,28639	1,10867
0,105	6,01606	5,24425	300,47362	1,28639	1,10869
1,901	108,91928	5,24433	300,47780	1,28639	1,10864
1,916	109,77871	5,36842	307,58764	1,28639	1,01936
1,92	110,00790	5,36556	307,42366	1,28639	1,02160
1,924	110,23708	5,36237	307,24088	1,28639	1,02409
2,089	119,69088	5,24461	300,49396	1,28639	1,10846
2,09	119,74818	5,24438	300,48101	1,28639	1,10860

TABELA 4.8 - *Swing-By* com $\Delta E > 1,148$.

$e = 0,9$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 3,5$ rad		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
		Ψ_A			
Ψ		Ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
2,292	131,32193	4,82564	276,48892	1,15561	1,14820
2,293	131,37922	4,82347	276,36436	1,15533	1,14821
2,294	131,43652	4,82130	276,23991	1,15505	1,14821
2,295	131,49381	4,81913	276,11552	1,15478	1,14821
2,296	131,55111	4,81696	275,99125	1,15451	1,14821
2,297	131,60841	4,81479	275,86709	1,15425	1,14820

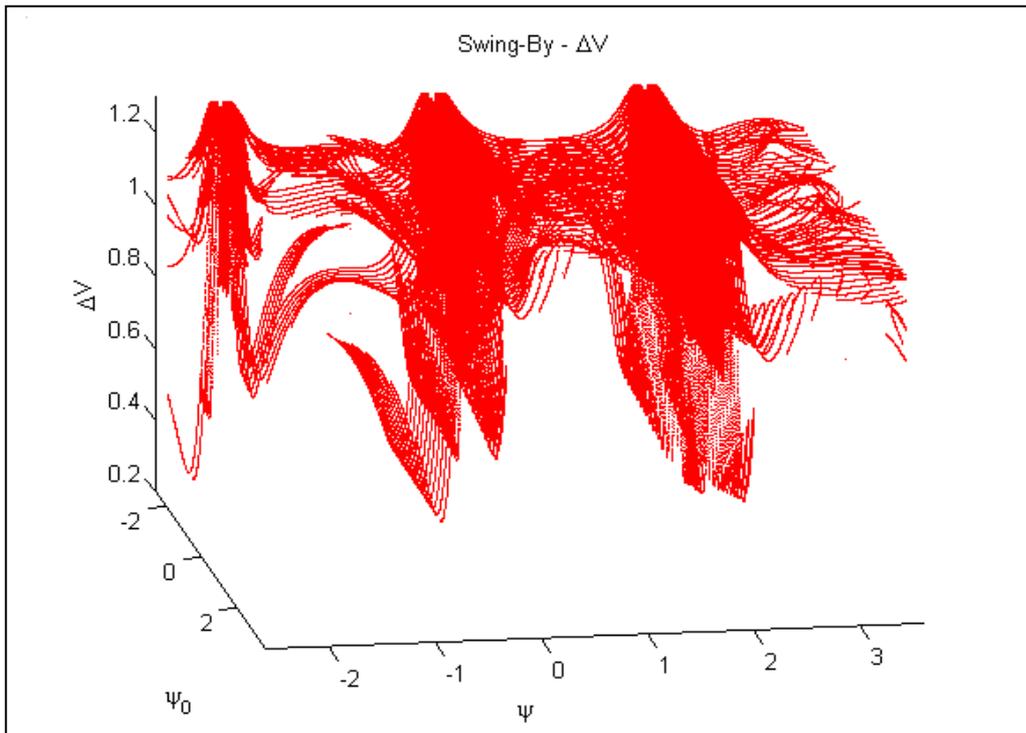


FIGURA 4.21 - Variação da Velocidade (ΔV) após o *Swing-By* $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

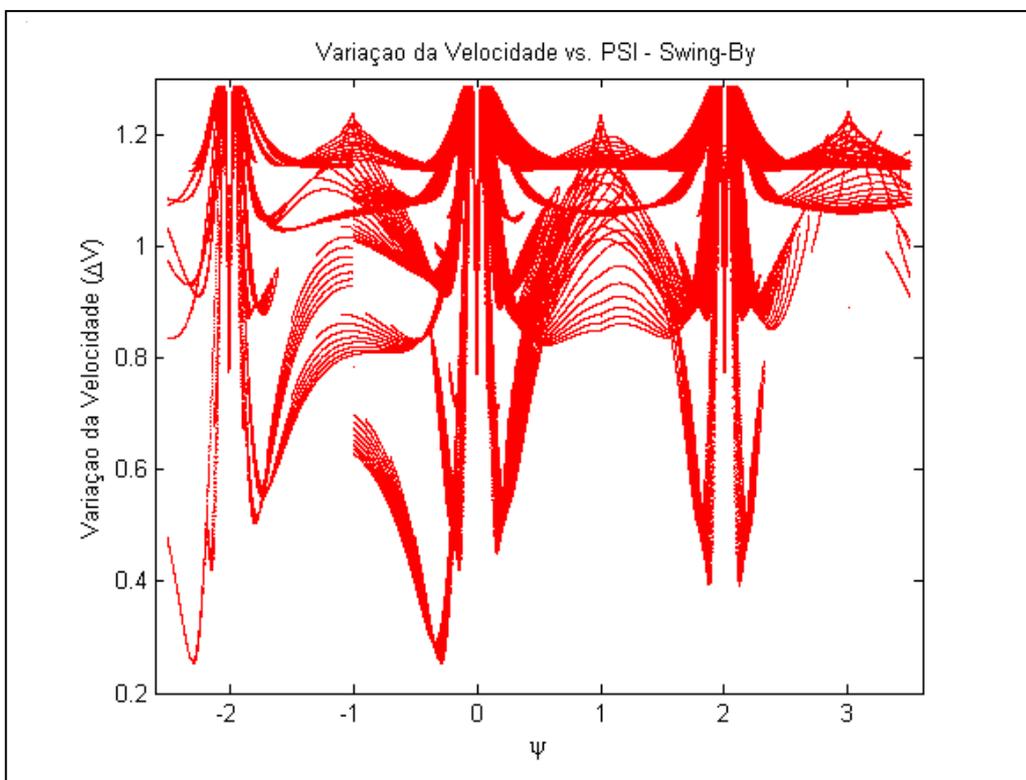


Fig 4.22 – ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV), $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

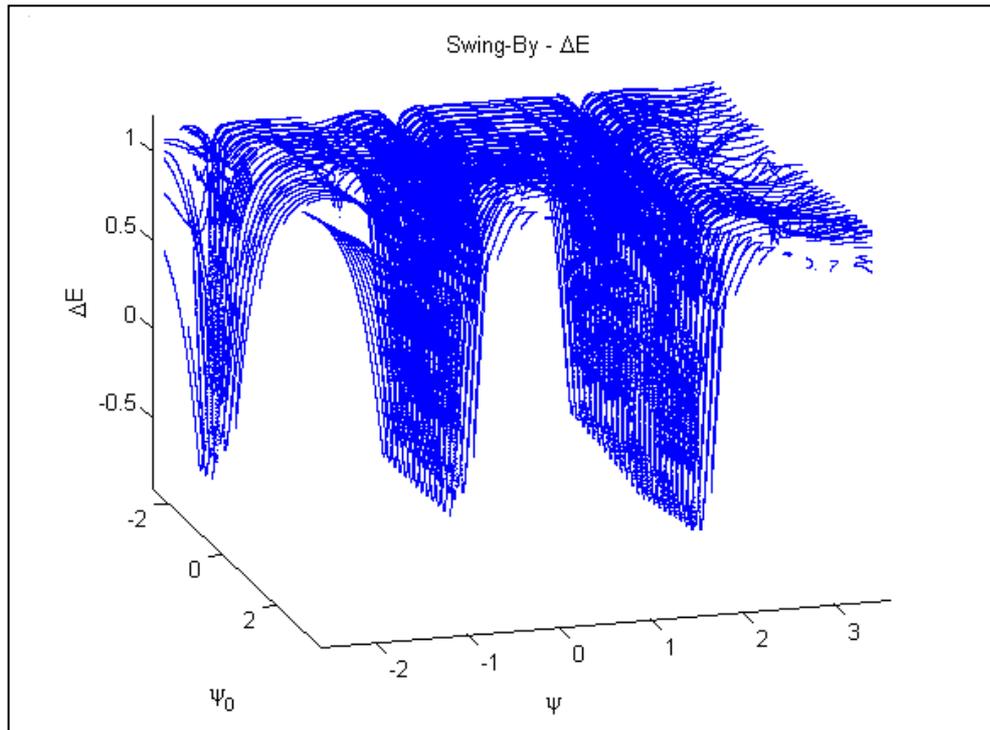


FIGURA 4.23 - Variação da Energia (ΔE) após o *Swing-By* $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

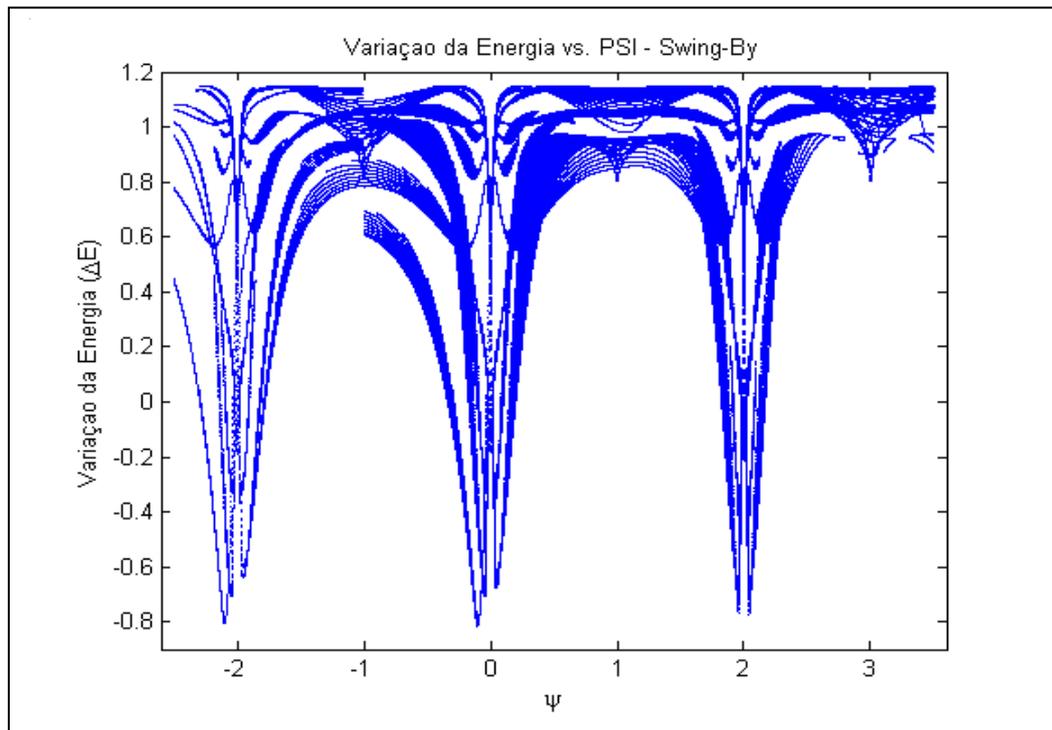


FIGURA 4.24 – ψ vs. Variação da Energia (ΔE), $e = 0,9$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

Verifica-se na Figura 4.25 que existem pontos em que o ΔV total para $e = 0,9$ é maior quando comparado com a simulação com $e = 0,1$ (Figura 4.20). Estas soluções apresentam ângulos ψ em que a manobra de Múltiplos Encontros com *Swing-By* é bastante eficiente, pois haverá uma considerável economia de combustível.

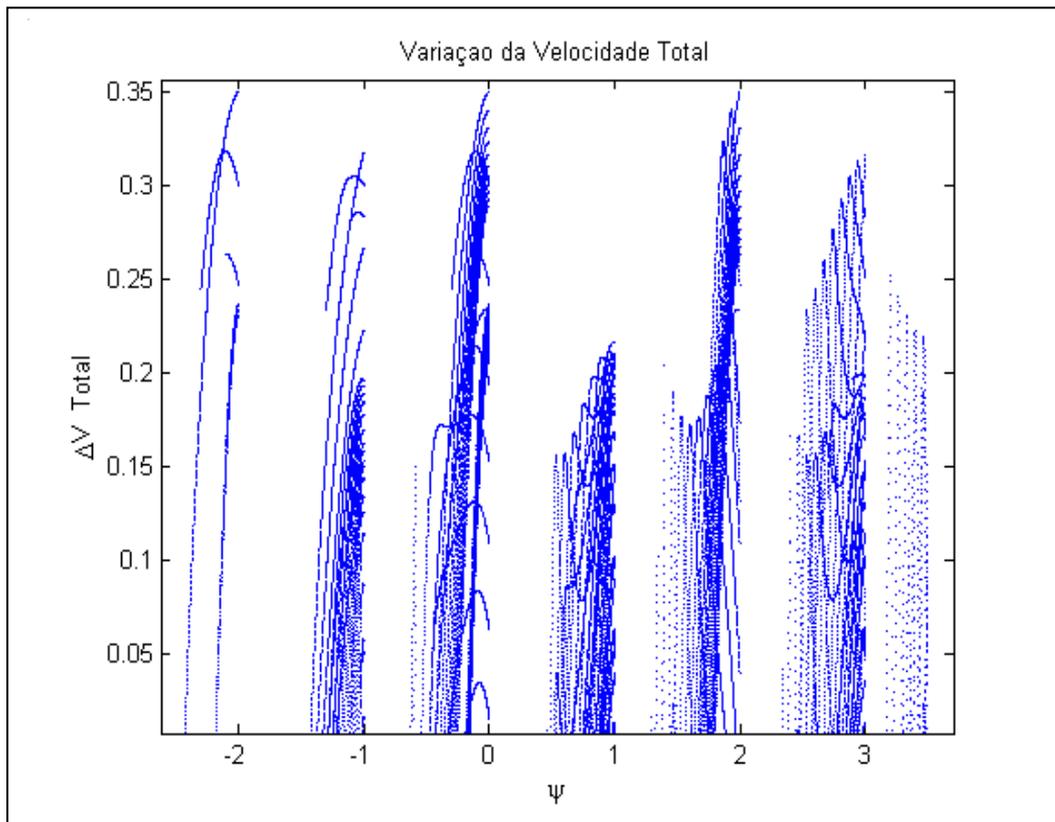


FIGURA 4.25 - Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,9$.

4.3.4 Swing-By com os Parâmetros: $e = 0,5$, $\psi_0 = -2,5$ e $-2,5 \leq \psi \leq \psi_f = 3,5$ rad

TABELA 4.9 - *Swing-By* com $\Delta V > 1,2831$.

$e = 0,5$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 3,5$ rad		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
0,005	0,28648	5,74636	329,24235	1,283127	0,656202
0,006	0,34377	5,74579	329,20940	1,283134	0,656839
0,007	0,40107	5,74523	329,17714	1,283138	0,657462
0,008	0,45837	5,74467	329,14557	1,283139	0,658069
0,009	0,51566	5,74414	329,11475	1,283137	0,65866
0,01	0,57296	5,74361	329,08461	1,283131	0,659237
0,011	0,63025	5,7431	329,05516	1,283122	0,659798

Na Tabela 4.9 acima, podemos notar que o ganho máximo na variação da velocidade (ΔV) é maior ($\Delta V = 1,283127$) quando comparado com a simulação com excentricidade $e = 0,1$ ($\Delta V = 1,212491$) (Tab. 4.5). Todos os valores em unidades canônicas. Os valores dos ganhos (ΔV e ΔE) para a manobra de *Swing-By* em Júpiter (Seção 4.3) são muitos maiores do que os valores simulados para a manobra na Terra (Seção 4.2), o que já era esperado, pois a atração gravitacional que o corpo sofre por Júpiter é muito maior do que a atração sofrida pelo corpo nas proximidades do planeta Terra.

TABELA 4.10 - *Swing-By* com $\Delta E > 1,02$.

$e = 0,5$ $\psi_0 = -2,5$ rad $\psi_f = 3,5$ rad		Ângulo de Aproximação		Variação da Velocidade	Variação da Energia
ψ		ψ_A		ΔV	ΔE
rad	graus	rad	graus		
-0,854	-48,9306	4,45983	255,5294	1,056809	1,023283
-0,853	-48,8733	4,461409	255,6199	1,056381	1,023284
-0,852	-48,816	4,462989	255,7104	1,055952	1,023282
-0,842	-48,243	4,456065	255,3137	1,057847	1,023286
-0,841	-48,1858	4,458534	255,4552	1,057174	1,023293
-0,84	-48,1285	4,461062	255,6	1,056487	1,023296
-0,839	-48,0712	4,463658	255,7488	1,055783	1,023292
-0,838	-48,0139	4,466339	255,9024	1,055057	1,023281

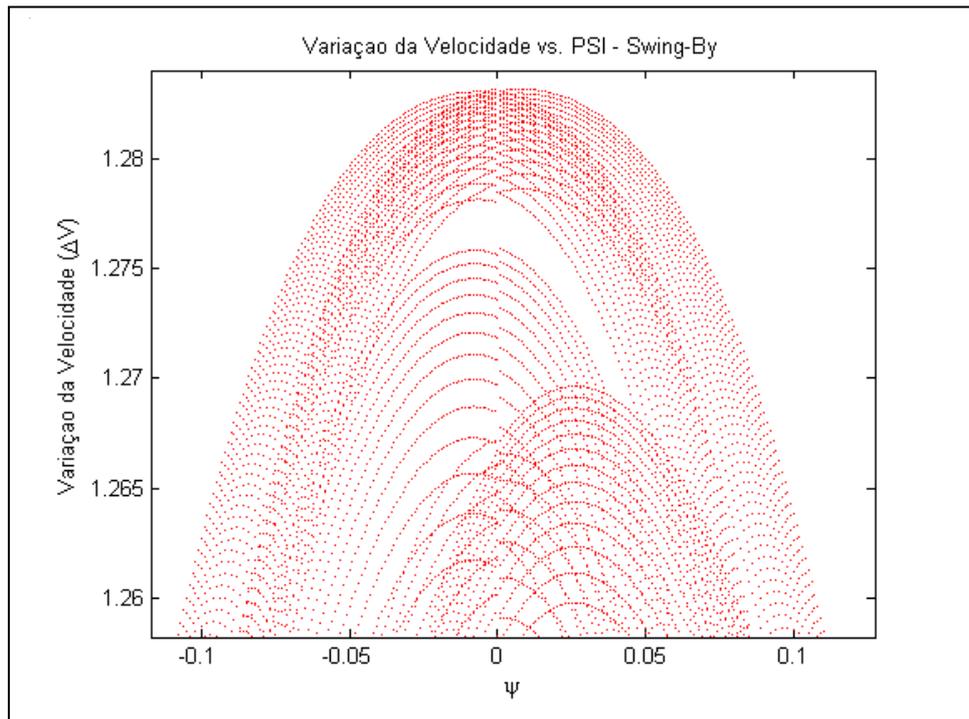


FIGURA 4.26 – Intervalo em que a Variação da Velocidade (ΔV) é máxima.

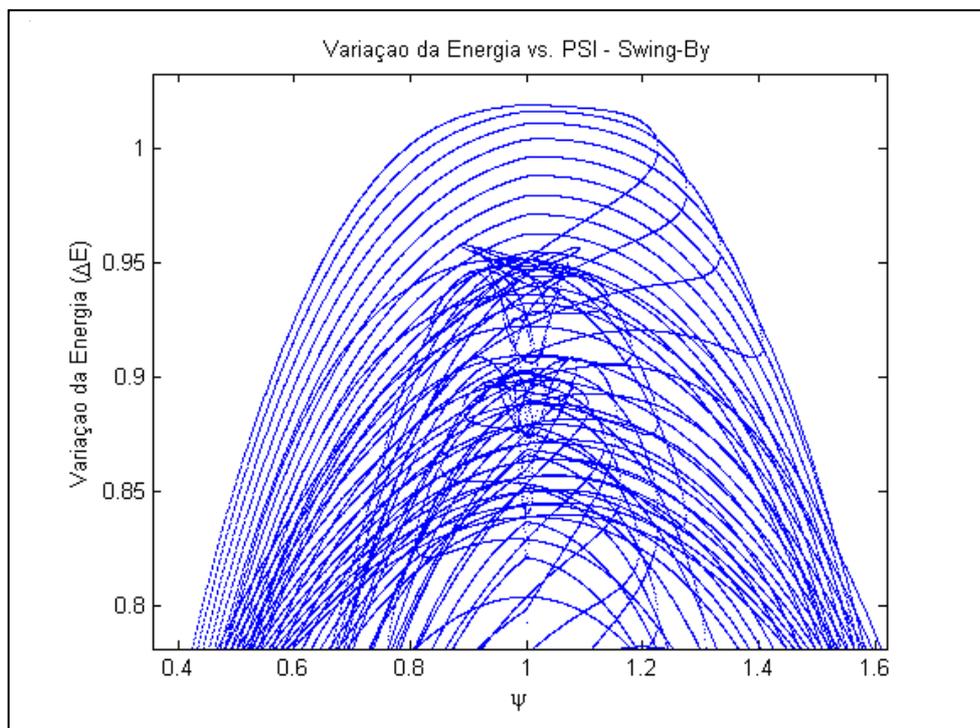


FIGURA 4.27 – Intervalo em que a Variação da Energia (ΔE) é máxima.

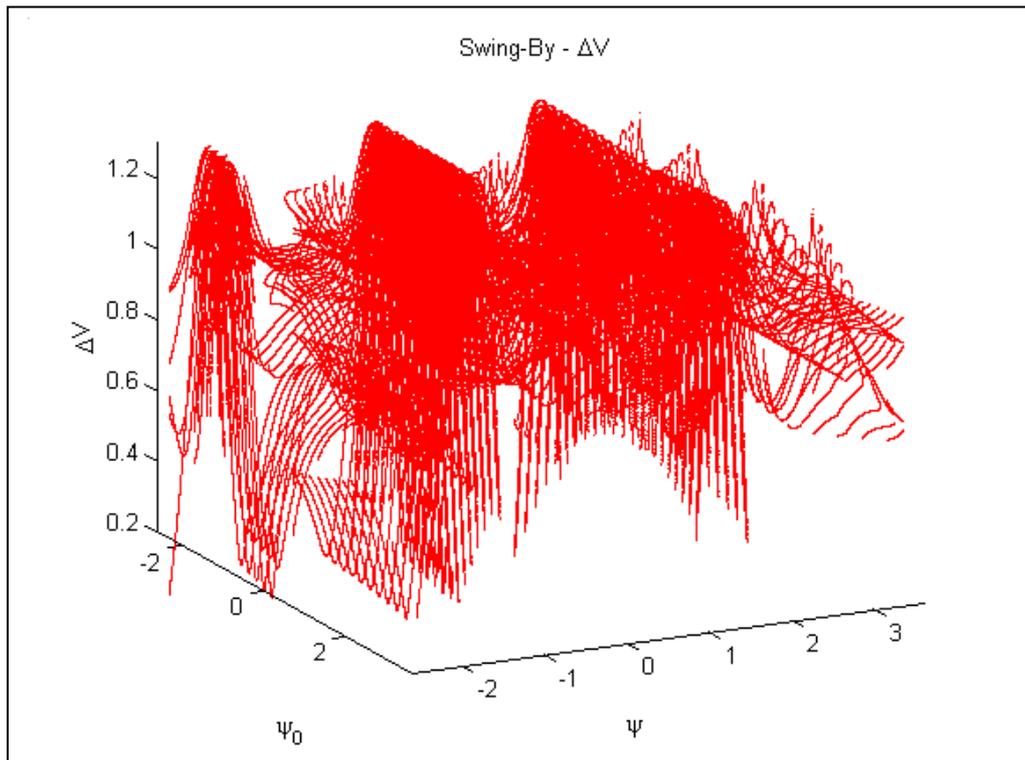


FIGURA 4.28 - Variação da Velocidade (ΔV) após o *Swing-By* $e = 0,5$, $\psi_o = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

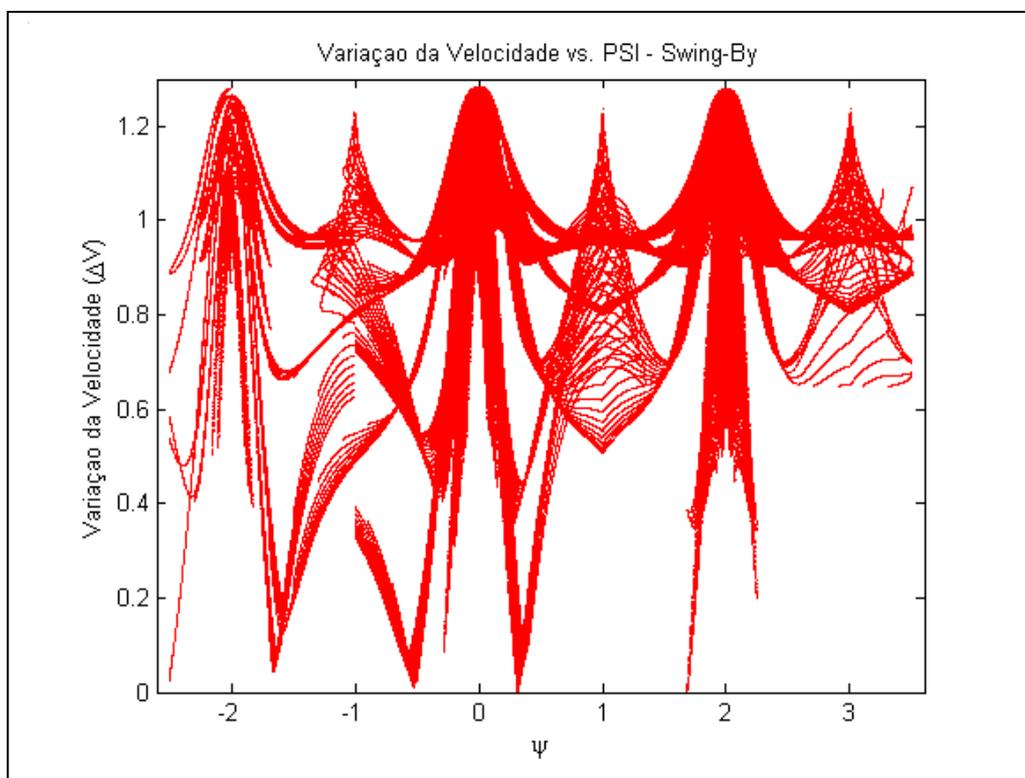


FIGURA 4.29 – ψ vs. Variação da Velocidade (ΔV), $e = 0,5$, $\psi_o = - 2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad

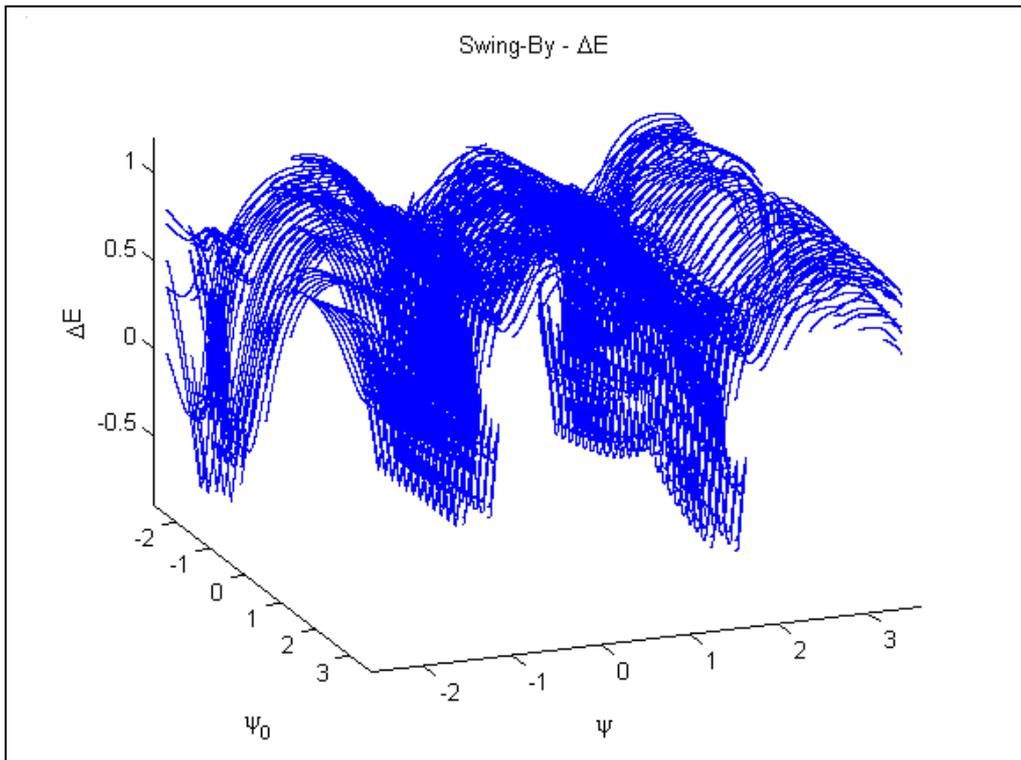


FIGURA 4.30 - Variação da Energia (ΔE) após o *Swing-By* $e = 0,5$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

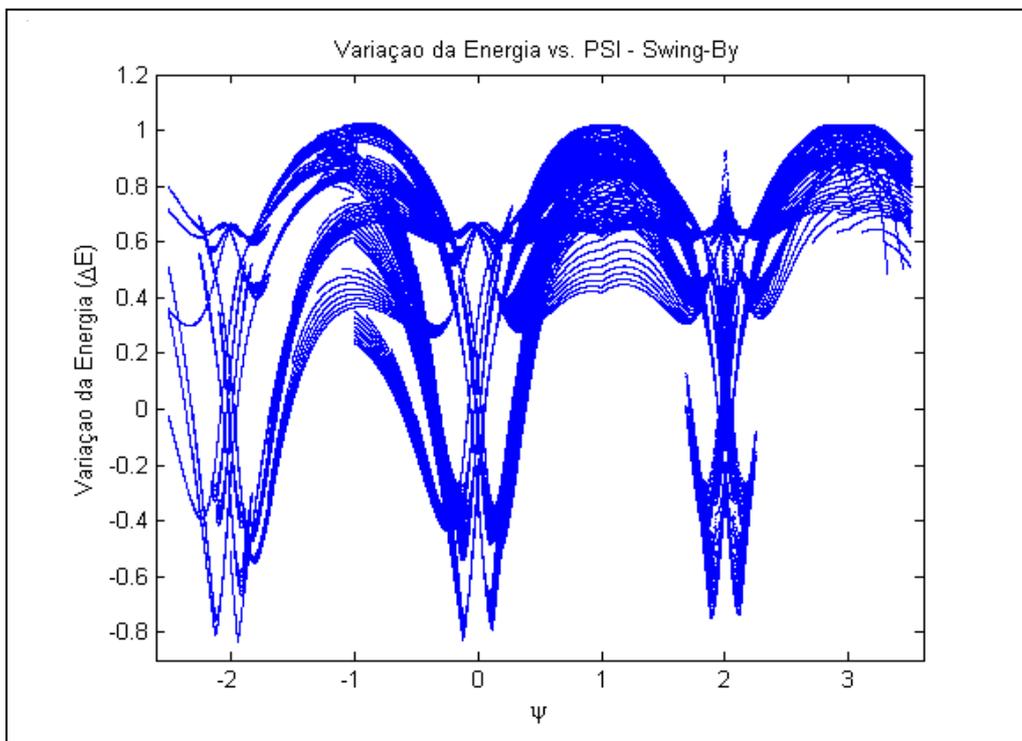


FIGURA 4.31 – ψ vs. Variação da Energia (ΔE), $e = 0,5$, $\psi_0 = -2,5$ rad e $\psi_f = 3,5$ rad.

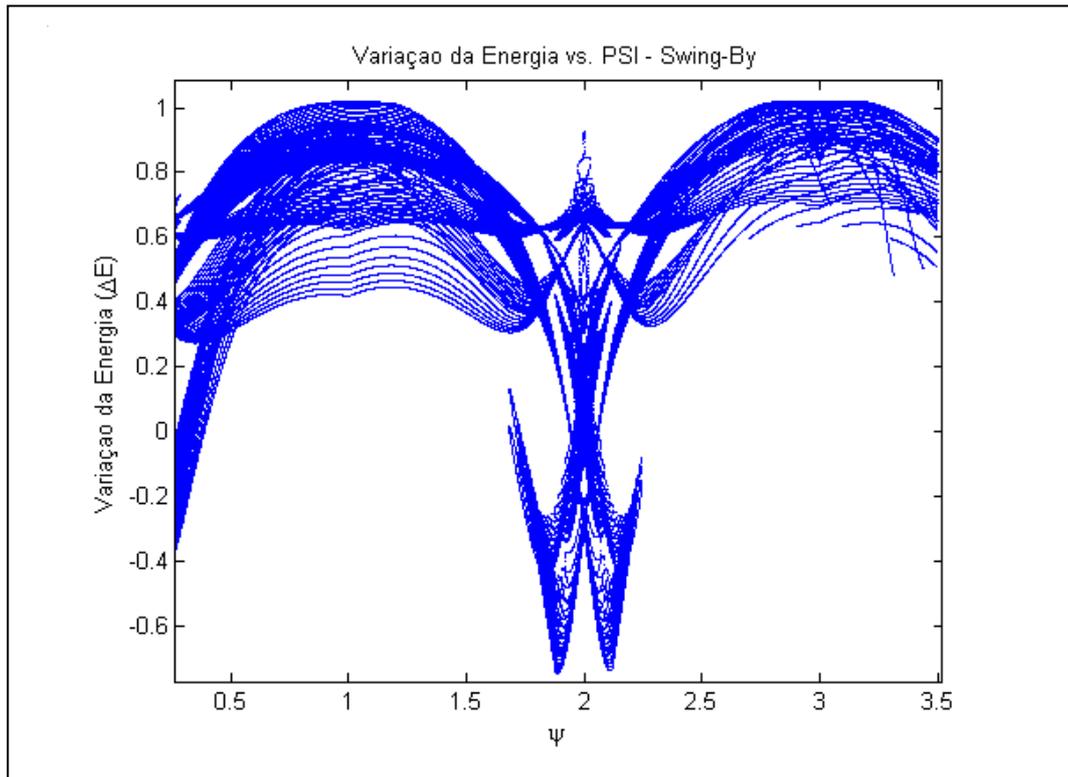


FIGURA 4.32 – Ampliação da Variação da Energia vs. ψ para $e = 0,5$.

A Figura 4.32 apresenta de forma ampliada a Figura 4.31, colocando em evidência um intervalo de valores de ψ em que existe a formação de uma figura magnífica, que representa uma família de soluções da variação da energia (ΔE).

Na figura abaixo (Figura 4.33), nota-se que o saldo positivo do ΔV total adquire seus maiores valores, comparados com as Figuras 4.20 e 4.25, com excentricidades $e = 0,1$ e $e = 0,9$, respectivamente. A diferença de valores entre eles é muito grande, $\Delta V \approx 1$ (unidade canônica), mostrando que a manobra com a excentricidade $e = 0,5$, garante uma melhor economia de combustível para a manobra de *Swing-By* após a manobra de Múltiplos Encontros.

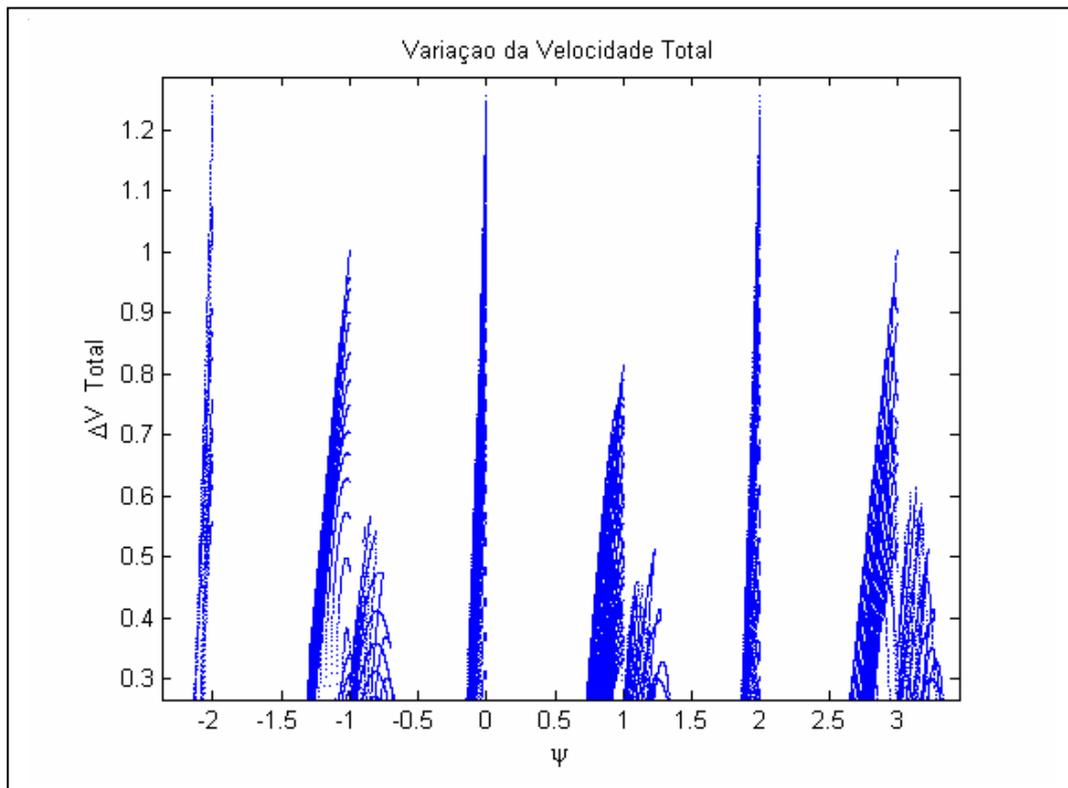


FIGURA 4.33 – Saldo Positivo de ΔV obtido no Swing-By, para $e = 0,5$.

Nas simulações realizadas neste trabalho, foram confirmados os fatos de que:

- i) Se o *Swing-By* ocorre por trás do corpo M_2 ($180^\circ < \psi_A < 360^\circ$), existe um ganho de energia (Tabela. 4.5 - 4.10, Figuras 4.16 – 4.33);
- ii) Se o *Swing-By* ocorre na frente do corpo M_2 ($0^\circ < \psi_A < 180^\circ$), existe uma perda de energia (Felipe, G., 2000; Prado, 2001) (Figuras 4.16 – 4.33).

Nas Tabelas 4.5 – 4.10, para o caso do *Swing-By* em Júpiter (Seção 4.3), verifica-se que os valores dos maiores ganhos na energia (ΔE) estão dentro desta faixa de valores. A Tabela 4.7 mostra valores em que o ganho na energia (ΔE) é negativo, e o valor do ângulo de aproximação da manobra de *Swing-by* é de $\psi_A \approx 15^\circ$, confirmando o que já era previsto. No caso da simulação de uma manobra de *Swing-by* utilizando a Terra (Seção 4.2, Tab. 4.1), também pode ser verificado este argumento.

Do problema de dois corpos, sabemos que:

- i) Quando a energia é negativa, a órbita é fechada (órbita elíptica), isto é, o veículo espacial permanece sempre a uma distância finita do corpo central, existindo a possibilidade do corpo permanecer orbitando M_2 ;
- ii) Quando a energia é positiva, a órbita é aberta (hiperbólica), cuja distância ao corpo central (semi-eixo maior (a)) tende ao infinito com o passar do tempo.

Sendo assim, nem sempre o ganho na energia (ΔE), indica a nova órbita da astronave, pois é o somatório da energia da astronave ($E_i + \Delta E$) que vai estabelecer a sua órbita após a manobra. Aqui E_i é a energia da astronave antes de fazer o *Swing-By*.

Nas Tabelas 4.2, 4.4, 4.6, 4.8 e 4.10, foi dado ênfase aos maiores ganhos na energia (ΔE), pois o objetivo principal deste capítulo é analisar os ganhos máximos de energia (ΔE) e de velocidade (ΔV) devido a manobra de *Swing-By* no Problema de Múltiplos Encontros. As Figuras 4.7, 4.8, 4.13, 4.14, 4.18, 4.19, 4.23, 4.24, 4.30 e 4.31, mostram os valores do ângulo da manobra ψ que fornecem soluções com ΔE maiores e menores que zero, podendo ser verificados os valores em que se obtêm órbitas abertas ou fechadas. Nestas figuras pode ser verificado, também, que excentricidades altas produzem maiores ganhos na energia (ΔE) e na velocidade (ΔV).

A manobra de *Swing-By* realizada em Júpiter (seção 4.3) produz um ganho significativo na velocidade e na variação da energia de uma astronave, podendo lançá-la em uma órbita distante, ao gosto da missão, pois o ganho na velocidade e na energia permitiria uma economia razoável de combustível, que é um dos objetivos propostos pela manobra de *Swing-by*.

4.4 Conclusões do Capítulo

A manobra gravitacional assistida (*Swing-By*) pode proporcionar ao veículo espacial uma considerável variação de velocidade e de energia, reduzindo assim os custos de uma missão. Nos gráficos e tabelas mostrados nas Seções 4.2.1 e 4.3.1, nota-se que o *Swing-By* é uma poderosa ferramenta e pode ser utilizada também em missões interplanetárias que saiam de um corpo e necessitem retornar a este corpo posteriormente.

Baseado nos dados numéricos simulados neste trabalho deduz-se que o ganho na variação da velocidade (ΔV) e na variação da energia (ΔE) é diretamente proporcional à excentricidade (e) da órbita do veículo espacial M_3 . Lembrando que os valores numéricos dos ganhos na variação da velocidade (ΔV) e na variação da energia (ΔE) apresentados neste trabalho como solução do problema de *Swing-By*, estão em unidades canônicas.

Os valores dos ganhos (ΔV e ΔE) para a manobra de *Swing-By* em Júpiter (Seção 4.3) são muitos maiores do que os valores simulados para a manobra na Terra (Seção 4.2), o que já era esperado, pois a atração gravitacional que o corpo sofre por Júpiter é muito maior do que a atração sofrida pelo corpo nas proximidades do planeta Terra.

A manobra de Múltiplos Encontros gasta uma quantidade de combustível para ser realizada, pois é uma manobra impulsiva. A manobra de *Swing-By* pode alterar de forma positiva a velocidade da astronave, podendo gerar um saldo positivo de ΔV após a manobra. A diferença desses ΔV 's mostra se a missão foi proveitosa, isto é, se após as manobras houve perda ou ganho na velocidade. As simulações mostraram que existe esta possibilidade e foram encontrados vários ângulos em que as soluções geram ΔV 's positivos.

Foram verificados que:

1. Excentricidades próximas a zero ($e \rightarrow 0$), produzem gastos menores nas manobras de Múltiplos Encontros, entretanto produzem ganhos pequenos nas manobras de *Swing-By*. Os saldos são pequenos também.
2. Excentricidades altas ($e \rightarrow 1$), produzem gastos maiores nas manobras Múltiplos Encontros, entretanto produzem ganhos grandes nas manobras de *Swing-By*. Os saldos também são pequenos.
3. Excentricidades médias ($e \approx 0,5$), produzem gastos médios nas manobras de Múltiplos Encontros, e ganhos médios nas manobras de *Swing-By*. Porém, os saldos são bastantes altos, se comparado às outras excentricidades.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões Finais

O objetivo deste trabalho foi estudar manobras espaciais que visem otimizar o consumo de combustível para tornar viáveis missões interplanetárias que necessitem sair e retornar a um determinado corpo, o que chamamos de “Aplicação de Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontros”. Após esta suposta passagem, o veículo espacial também pode realizar uma manobra gravitacionalmente assistida de *Swing-By*, alterando energia e velocidade para colocá-lo em uma outra órbita do interesse da missão. Para a dinâmica do problema foi assumido que os três corpos envolvidos são pontos de massa e não que sofrem perturbações externas ao sistema.

O algoritmo desenvolvido e utilizado neste trabalho, incluindo o uso da rotina de Gooding para resolver o problema de Lambert, mostrou eficácia na resolução do Problema de Múltiplos Encontros que descrevem manobras que saem de um corpo e voltam para o mesmo corpo, fazendo em seguida um *Swing-By* para lançá-lo em uma outra órbita. Utilizando manobras bi-impulsivas e buscando a otimização do consumo de combustível nesta manobras, o procedimento descrito neste trabalho foi simulado numericamente e as soluções gráficas foram feitas com ajuda de softwares bastante precisos.

Na modelagem do Problema de múltiplos encontros utilizamos empuxo infinito e utilizam dois impulsos para completar a transferência de órbitas.

Entre inúmeras órbitas de transferência simuladas acham-se pequenas famílias de soluções onde o ΔV requerido para a transferência é muito pequeno, próximo a zero. Estas órbitas de transferência são soluções ótimas locais, pois o consumo de combustível para esta transferência é mínimo na região. As soluções com mínimo ΔV (próximo a zero) fornecem órbitas candidatas a futuras missões que necessitam deste parâmetro minimizado.

Utilizando um grande número de simulações é possível entender a influência do ângulo de aproximação ψ , tais como, ganho ou perda de energia (ΔE) do veículo espacial resultando, conseqüentemente, na redução do combustível e aproveitamento da passagem para elevar ou reduzir a velocidade do veículo espacial.

Os resultados das simulações com várias excentricidades mostraram que órbitas com excentricidades pequenas ($e \rightarrow 0$) são mais vantajosas para a execução da manobra de Múltiplos Encontros, pois o consumo é consideravelmente menor comparado com consumo das órbitas com grandes excentricidades. Quanto mais excêntrica for a órbita de M_3 , maior será o consumo de combustível do veículo espacial para sair e retornar ao corpo M_2 , implicando em soluções melhores (com ΔV mínimo) para órbitas com excentricidades pequenas e circulares ($e = 0$).

Nas soluções em termos do semi-eixo maior (a) foi verificado que ocorre a formação de uma família de soluções agrupadas por regiões. Existem regiões em que não foram encontradas soluções, devido à geometria do problema.

Nas soluções em termos da anomalia verdadeira (v), verifica-se que as soluções, nos casos $e \approx 0$ (próximas a zero), formam retas que se interceptam, e com o crescimento da excentricidade ($e \rightarrow 1$) as soluções adquirem um formato mais curvilíneo, com os pontos ficando mais agrupados, formando famílias de soluções mais próximas dos valores inteiros do ângulo da manobra ψ .

As soluções em termos da anomalia excêntrica (η), no decorrer do tempo de execução da manobra, formam também famílias agrupadas em torno de valores de ψ , mostrando que quando a excentricidade da órbita de transferência vai aumentando ($e \rightarrow 1$), as soluções se agrupam em regiões mais próximas, concentrando as soluções. Conclui-se que, quando a excentricidade aumenta, as soluções se agrupam em torno de valores do ângulo da manobra ψ , permitindo lugares onde as soluções são mais propícias e regiões proibitivas.

Após a manobra do veículo espacial no Problema de Múltiplos Encontros, aproveita-se a passagem do corpo M_3 próximo ao primário M_2 e faz-se um *Swing-By* para alterar energia e velocidade. Foram feitas algumas simulações deste problema para os casos: Terra-Satélite, considerando a distância de aproximação do veículo espacial de 1.2 rt

(raios terrestres) $\approx 5,11631193e-5$ (unidades canônicas); Júpiter-Satélite, considerando a distância de aproximação do veículo espacial $1.2 r_j$ (raio de Júpiter) $\approx 5,725019385545e-4$ (unidades canônicas).

Foram encontrados resultados numéricos que favorecem o uso das manobras de Múltiplos Encontros com Swing-By em missões interplanetárias. Estes resultados mostram excentricidades de órbitas em que o consumo de combustível na manobra é mínimo.

Os resultados numéricos mostram que o ganho na variação da velocidade (ΔV) e na variação da energia (ΔE) é diretamente proporcional à excentricidade (e) da órbita do veículo espacial M_3 . Os valores numéricos dos ganhos na variação da velocidade (ΔV) e na variação da energia (ΔE) foram apresentados como solução do problema de *Swing-By*. Foram efetuados simulações com um tempo de manobra maior, sem que tenha ocorrido alteração significativa nos resultados.

5.2 Sugestões Para Extensão deste Trabalho

Diversas sugestões podem ser feitas para a continuação e aprofundamento dos tópicos abordados neste trabalho. Podendo ser citados os seguintes:

- i) Elaboração de outros métodos para a resolução do Problema de Múltiplos Encontros;
- ii) Resolução de mais problemas de otimização utilizando Manobras de Múltiplos Encontros com *Swing-By*;
- iii) Desenvolvimento e/ou implementação de outros métodos, com mais de três impulsos, para manobras orbitais com o objetivo de comparar com os resultados aqui obtidos.
- iv) Implementação de problemas utilizando Manobras de Múltiplos Encontros com *Swing-By* múltiplos;
- v) Elaboração e implementação do Problema de Múltiplos Encontros na Dinâmica do Problema Restrito de Três corpos (PRTC).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Battin, R.H. **Astronautical guidance**. New York; McGraw-Hill, 1965.

Battin, R.H. A new solution for Lambert's problem. In: INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS, 19., 1968, Oxford, **Proceedings**: Pergamon, 1968. p. 131-150. v. 2.

Breakwell, J.V.; Gillespie, R.W.; Ross, S. Researches in interplanetary transfer. **Journal of American Rocket Society**, v. 31, p. 201-208, 1961.

Broucke, R.A. The celestial mechanics of gravity assist. **AIAA Journal**, Paper 88-4220, 1988.

Bruno, A. D. On periodic flybys of the moon. **Celestial Mechanics**, v. 24, p. 255-268, 1981.

Chobotov, V.A. **Orbital motion**. 2. ed.. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.

Dowling, R. L.; Kosmann, W. J.; Minovitch, M. A.; Ridenoure, R. W., 1991, Gravity Propulsion Research at UCLA and JPL, 1962-1964. In: CONGRESS OF THE INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL FEDERATION, 41., Dresden, GDR. **Proceedings...**Dresden: [s.n], Oct. 1991. p. 6-12.

Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. Optimal maneuvers in three-dimensional swing-by trajectories. In: Prado, A.F.B.A. (ed.). **Advances in Space Dynamics**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2000. p. 84-97. ISBN: 85-901487-1-8.

Gobetz, F. W.; Doll, J. R. A survey of impulsive trajectories. **AIAA Journal**, v. 7, p. 801-834, 1969.

Goddard, R. H. A method of reaching extreme altitudes. **Smithsonian Institute Public Miscelanea Collect**, v. 71, n. 2, 1919.

Gooding, R. H. A Procedure for the Solution of Lambert's orbital boundary-value problem. **Celestial Mechanics**, v. 48, p. 145-165, 1990.

Hénon, M. Sur les orbites interplanétaires qui rencontrent Deux fois la Terre. **Bull. Astron.** v. 3, p. 377-402, 1968.

HITZL, D.L. Generating orbits for stable close encounter periodic solutions of the restricted problem. **AIAA Journal**, v. 15, p. 1410-1418, 1977.

Hitzl, D.L.; Hénon, M. Critical generating orbits for second species periodic solutions of the restricted problem. **Celestial Mechanics**, v. 15, p. 421-452, 1977.

Hitzl, D.L.; Hénon, M. The stability of second periodic orbits in the restricted problem ($m=0$)," **Acta Astronautica**, v. 4, p. 1019-1039, 1977b.

Hohmann, W. **Die erreichbarkeit der himmelskorper**. Oldenbourg, Munique: [s.n.], 1925.

Hoelker, R.F.; Silber, R. **The bi-elliptic transfer between circular coplanar orbits**. Alabama: Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Jan. 1959. (DA Tech Memo 2-59).

Howell, K. C.; Consecutive collision orbits in the limiting case $\mu=0$ of the elliptic restricted problem. **Celestial Mechanics**, v. 40, p. 393-407, 1987.

Howell, K.C.; Marsh, S.M. A General timing condition for consecutive collision orbits in the limiting Case $\mu=0$ of the elliptic restricted problem. **Celestial Mechanics**, v. 52, p. 167-194, 1991.

Kuga, H. K. Introdução a determinação de órbitas e manobras orbitais. In: Prado, A. F. B. A.; Kuga, H. K. (Eds). **Fundamentos de tecnologias espaciais**. São José dos Campos – SP: INPE , 2001. p. 38-49

Lancaster, E.R; Blanchard, R.C. A unified form of Lambert's theorem. Washington: NASA Technical Note D-5368, 1969.

Lancaster, E.R.; Blanchard, R.C.; Devaney, R.A. A Note on Lambert's theorem. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 3, p. 1436-1438, 1966.

- Lawden, D.F. Minimal rocket trajectories. **ARS Journal**, v. 23, n. 6, p. 360-382, 1953.
- Lawden, D. F. Fundamentals of space navigation. **JBIS**, v. 13, p. 87-101, 1954.
- Lawden, D. F. Optimal programming of rocket thrust direction. **Astronautica Acta**, v. 1, n. 1, p. 41-56, 1955.
- Lawden, D.F. Impulsive transfer between elliptical orbits. In: Leitmann, G. (ed.). **Optimization techniques.**, New York: Academic Press, p. 323-351, 1962.
- Lion, P.M.; Handelsman, M. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. **AIAA Journal**, v. 6, n. 1, p. 127-132, 1965.
- Marchal, C., Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifférente), **Astronautica Acta**, v. 11, p. 432-445, 1968.
- Marec, J.P. **Optimal space trajectories**. New York, NY: Elsevier, 1979.
- Minovich, M. A. A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories. **JPL Tec. Memo 312-130**, Aug. 23 1961, 47 pp.
- Perko, L.M. (1974), Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem: Existence and Asymptotic Approximation. **Siam J. Appl. Math.**, Vol. 27, pp. 200-237.
- Prado, A. F. B. A. and Broucke R. A.; Study of Hénon's Orbit Transfer Problem Using the Lambert Algorithm. **AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol 17, number 5, 1993a, pages 1075-1081.
- Prado, A. F. B. A.; **Transferências de Órbitas com Aplicações a Trajetórias Interplanetárias**. Fundamentos de Tecnologias Espaciais, Prado, A. F. B. A. and Kuga, H. K., Editores, pg. 171-197, INPE São José dos Campos – SP, 2001.
- Prado, A. F. B. A.; **Optimal Transfer and Swing-By Orbits in the Two-and Three-Body Problems**, (Dissertation presented to the Faculty to the Graduate School of the University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy the University of Texas at Austin). São José dos Campos, INPE, 1993, (INPE-5572-TAE/022).

Prado, A.F.B.A. e Broucke, R., **A Study of the Effects of Jupiter in Space Trajectories**. Advances in Space Dynamics, A. F. Bertachini A. Prado, Editor, pp. 63-83 (2000). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. ISBN: 85-901487-1-8.

Prado, A.F.B.A. e Broucke, R.A. The Problem of Transfer Orbits from one Body Back to the Same Body. **Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 82: Space Flight Mechanics**, Part II, Editores: Robert G. Melton, Lincoln J. Wood, Roger C. Thompson, Stuart J. Kerridge, 1993b, pp.1241-1260 (INPE-5599-PRE/1814).

Prado, A.F.B.A. e Rios-Neto, A. Um Estudo Bibliográfico sobre o Problema de Transferências de Órbitas. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, Vol. XV, No. 1, 1993, pp. 65-78 (INPE-5601-PRE/1816).

Prado, A.F.B.A. e Vieira-Neto, E. Orbital Maneuvers Using Gravitational Capture. **Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences**. Vol. 3: New Trends in Dynamics and Control, 2000, J.M. Balthazar, P.B. Gonçalves, R.M.F.L.R.F. Brasil, Editors, pp. 109-128 (2000). ISBN: 85-900351-3-1.

Prado, A.F.B.A. A Study of Powered *Swing-B*". Spaceflight Dynamics, 1995, pp. 243-253. **Cépaduès-Éditions**, Toulouse, França. ISBN: 2.85428.388.0. (INPE-5659-PRE/1834).

Prussing, J. E. Optimal four-impulse fixed-time Rendezvous in the vicinity of a circular orbits", **AIAA Journal**, vol. 7, n. 5, 1969, pp. 928-935.

Prussing, J. E. Optimal two- and three-impulse fixedtime Rendezvous in the vicinity of a circular orbit", **AIAA Journal**, vol. 8, n. 7, pp. 1221-1228.

Prussing, J. E. Geometrical Interpretation of the Angles α and β in Lambert's Problem. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 2, 1970, pp. 442-443.

Rocco, E.M., Prado, A.F.B.A., Souza, M.L.O. Bi-Impulsive Orbital Transfers Between Non-Coplanar Orbits with Time Limit. **Applied Mechanics in the Americas**, Vol. 6, 1999, pp. 259-262. Editores: Djenane Pamplona, Charles Steele, Hans I. Weber, Paulo B. Gonçalves, Iwona Jasiuk, Luiz Bevilacqua. ISBN: 85-900726-1-4.

Sthernfeld, A. Soviet space science. New York, **Basic Books Inc.**, 1959. p.109-111.

Ting, L., Optimum Orbital Transfer by Several Impulses. **Astronautical Acta**, Vol. 6, No. 5, 1960, pp. 256-265.