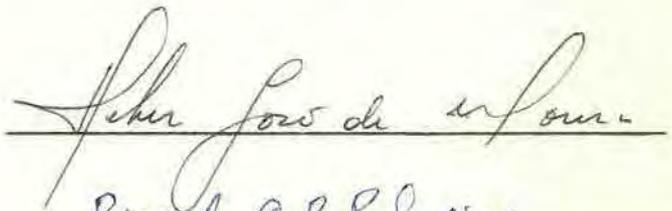


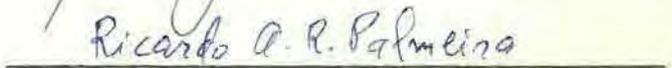
1. Classificação <i>INPE-COM.1/TPT</i>		2. Período <i>a partir de</i> 16.05.75	4. Critério de Distribuição:
3. Palavras Chave (selecionadas pelo autor)			interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
5. Relatório nº <i>INPE-650-TPT/001</i>	6. Data 16.05.75	7. Revisado por - <i>Heber José de Moura</i>	
8. Título e Sub-Título <i>Determinação de Limites de Confiança Bayesianos para a Função "Taxa de Falhas" da Distribuição de Weibull</i>		9. Autorizado por - <i>Fernando de Mendonça</i> Fernando de Mendonça Diretor Geral	
10. Setor <i>CES</i>	Código 4.05	11. Nº de cópias 10	
12. Autoria <i>Heber José de Moura</i>		14. Nº de páginas 107	
13. Assinatura Responsável <i>Heber José de Moura</i>		15. Preço	
16. Sumário/Notas <i>No presente trabalho determina-se um intervalo de confiança baseado na Inferência Bayesiana para a "taxa de falhas" da distribuição de Weibull. Investiga-se, ainda, a possibilidade de interpretar o resultado obtido também sob o ponto de vista da Estatística Clássica. Utilizam-se métodos numéricos e simulação por computador, conseguindo-se determinar limites baseados em estatísticas suficientes. Por intermédio de um teste, mostra-se que se consegue chegar a resultados passíveis de sofrer uma interpretação clássica, apesar de a teoria existente não o garantir.</i>			
17. Observações			

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento dos requisitos exigidos
para a obtenção do Título de Mestre em
Análise de Sistemas e Aplicações.

Heber José de Moura

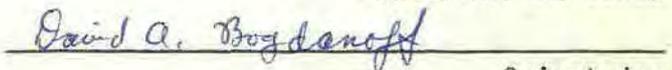


Dr. Ricardo A.R. Palmeira



Presidente da Banca

Dr. David A. Bogdanoff



Orientador

Dr. Carlos José Zamlutti



Membro da Banca

Dr. Celso de Renna e Souza



Membro da Banca

São José dos Campos, 09 de abril de 1975

A Mercês e

meus pais.

ÍNDICE

Abstractiv
Lista de Figuras	v
I - INTRODUÇÃO	1
II - CONSIDERAÇÕES GERAIS	5
III - METODOLOGIA	17
IV - COMPUTAÇÃO	33
V - APLICAÇÃO	49
VI - CONCLUSÃO	59
AGRADECIMENTOS	63
BIBLIOGRAFIA	65
APÊNDICE A	
APÊNDICE B	
APÊNDICE C	

ABSTRACT

Based on Bayesian Inference, a confidence interval for the failure rate of the Weibull distribution is obtained. The possibility of a classical interpretation for the results is also studied. Numerical methods and computer simulation are used, and confidence limits based on sufficient statistics are thus determined. Through a test, it is shown that one can also obtain results that may be interpreted by a classical point of view, despite that no warranties for such are give by existing theories.

LISTA DE FIGURAS

I.1 - Ilustração do Tipo Entrada/Saida para o Estudo Elaborado	2
II.1 - Exemplo de Distribuição do Tempo de Duração - censura tipo I	10
II.2 - Exemplo de Distribuição do Tempo de Duração - censura tipo II	11
II.3 - Exemplo de Distribuição do Tempo de Duração - censura tipo II progressiva	11
II.4 - Ilustração do Método de Investigação Utilizado	13
III.1 - Pontos da Densidade Marginal $\pi_1(\beta/t)$	22
III.2 - Determinação das Áreas Parciais sobre os Pontos da Densidade Marginal $\pi_1(\beta/t)$	23
III.3 - Pontos da Distribuição Marginal $F_1(\beta/t)$	24
III.4 - Ilustração do Processo de Busca Sequencial desenvolvido em torno dos Pontos de Máximo e Mínimo encontrados	31
IV.1 - Ordem dos diversos cartões referentes ao Programa Elaborado	34
A.1 - Representação das diversas formas da função "taxa de falhas"	A.8
A.2 - Algumas representações assumidas pela Densidade de Weibull, para diferentes valores de α e β	A.9
B.1 - Determinação da área pelo Método de Simpson	B.8
B.2 - Representação gráfica do processo de obtenção da raiz da equação	B.9

B.3 - Representação gráfica dos "Splines" Ajustantes	B.11
B.4 - Determinação da imagem inversa de r_0	B.18
B.5 - Representação da pesquisa por pontos sobre os valores de α e β	B.21
C.1 - Diagrama de bloco para apresentação do processo de verificação da propriedade "frequentista"	C.4
C.2 - Ilustração do teste sequencial de hipótese	C.7
C.3 - Intervalo de Confiança para a proporção de valores satisfatórios, segundo variações em t_0	C.9

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar um estudo relativo à determinação de um intervalo de confiança Bayesiano para a função "taxas de falhas" correspondente à distribuição de Weibull e a investigação dos limites de confiança com respeito à propriedade de frequência relativa ("frequentista") da estatística clássica. Com relação a tal investigação, será verificado se o intervalo obtido por métodos Bayesianos é passível de sofrer uma interpretação pelo ponto de vista da estatística clássica.

Serão usados para a elaboração do trabalho, essencialmente métodos referentes à Estatística Bayesiana, métodos numéricos e a simulação por computador. Depreende-se pelo exposto acima que será feito aqui uma tentativa de utilizar o computador para o cálculo de limites de confiança juntamente com os métodos numéricos, os quais muitas vezes dependem de grande número de iterações a fim de melhorar suas aproximações e conseqüentemente da rapidez de cálculo, que é proporcionada pelos modernos sistemas científicos de processamento eletrônico.

O processo aqui elaborado é de tal forma que, a partir de um conjunto de observações a respeito de uma variável aleatória "tempo de duração do elemento", são determinados limites de confiança a um determina

do nível de significância para a função "taxa de falhas" da distribuição de Weibull, a qual, como será posteriormente detalhado, permite calcular um indicador aproximado para a falha de um elemento em um dado intervalo de tempo. De uma maneira geral, o processo pode ser melhor visualizado através do esquema abaixo:

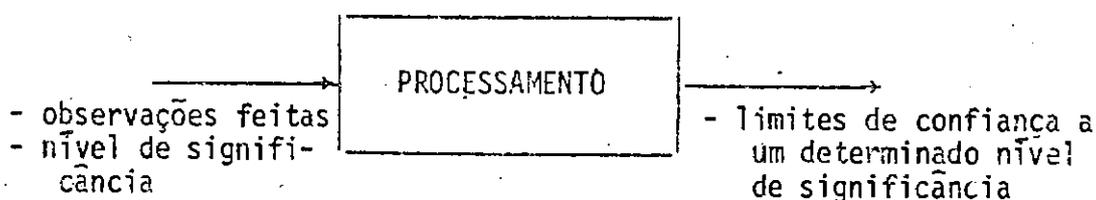


Fig. I.1 - Ilustração tipo Entrada/Saída para o presente trabalho

Será observado durante a leitura do trabalho que o mesmo apesar de ser essencialmente de natureza teórica (pela pretensão de contribuir ao campo da inferência estatística), possui uma larga aplicação prática, pois terá como "output" um programa elaborado em linguagem FORTRAN, projetado para o computador B-6700 em atual funcionamento no INPE. Tal programa segue o mesmo esquema da Fig. I.1 ou seja, terá por entrada um conjunto de observações e fornecerá um intervalo de confiança para a "taxa de falhas" da distribuição de Weibull.

Pretende ser também original no sentido de constituir-se em um método para a obtenção de limites de confiança baseados em estatísticas suficientes (o que não é possível de se obter mediante a utilização da estatística clássica), através da utilização de simulação e métodos numéricos.

Este trabalho é composto ao todo de seis capítulos e três apêndices, de acordo com a ordem abaixo apresentada:

I. Introdução

II. Considerações Gerais

III. Metodologia

IV. Computação

V. Aplicação

VI. Conclusão

Apêndice A

Apêndice B

Apêndice C

No segundo capítulo é apresentado o problema de uma forma global e são apresentados alguns aspectos importantes levados em consideração neste trabalho. Também é realizada nesta parte, a investigação concernente à propriedade frequentista do intervalo. No terceiro capítulo é apresentado todo o processo de obtenção do intervalo de confiança e equivale ao ao bloco "Processamento" da Figura I.1. A seguir (capítulo IV) são explicados alguns aspectos referentes ao programa elaborado, bem como a sua utilização por parte do usuário. No capítulo V é feito um exemplo de aplicação do processo descrito e são apresentados cópias dos resultados fornecidos através do computador. Finalmente são apresentadas algumas considera-

ções finais (capítulo VI) e os apêndices, os quais se dividem em:

Apêndice A - apresentação dos principais conceitos e definições referentes a métodos estatísticos.

Apêndice B - demonstrações formais dos resultados obtidos no decorrer do trabalho e descrição dos métodos numéricos utilizados.

Apêndice C - apresentação do teste por simulação para verificar se o intervalo obtido possui a propriedade "frequentista".

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nesta parte procurar-se-á apresentar, por um enfoque global, o trabalho aqui desenvolvido, a fim de possibilitar ao leitor uma melhor compreensão da metodologia a ser apresentada posteriormente.

O objetivo do presente trabalho é o de determinar um intervalo de confiança Bayesiano para a função "taxa de falhas" proveniente da distribuição de Weibull, através de métodos numéricos e simulação. Também pretende-se aqui fazer uma ligeira investigação relacionada à propriedade "frequentista" do intervalo obtido. Cabe observar que o termo simulação foi aqui utilizado no sentido de representar a geração de variáveis aleatórias através de um computador digital. A propriedade "frequentista" acima mencionada representa a propriedade característica dos intervalos de confiança obtidos através da estatística clássica, a qual afirma que os limites determinados deverão conter o verdadeiro valor do parâmetro em cerca de $\gamma\%$ das repetições realizadas (onde γ representa o nível de significância utilizada). Tal trabalho também pretende ser uma tentativa de utilização do computador eletrônico para determinar limites de confiança em casos onde tal determinação ou não é possível pelos métodos conhecidos ou é excessivamente difícil de ser realizada.

A aplicação do método Bayesiano para inferências estatísticas pressupõe a utilização de uma probabilidade "a priori". Neste trabalho, será utilizada uma particular distribuição "a priori" que permite investigar a respeito da propriedade "frequentista" do intervalo obtido. Entretanto, deve ser observado que o método aqui apresentado pode ser baseado em outras distribuições "a priori", as quais não necessariamente permitirão investigar o resultado obtido através do ponto de vista da estatística clássica, ou seja, analisar a propriedade "frequentista" do intervalo obtido. Assim sendo, deve ser esclarecido que o objetivo principal do presente trabalho é o de apresentar um método para a determinação de limites de confiança para a função "taxa de falhas" da distribuição de Weibull. A escolha da particular distribuição "a priori" é que permitiu realizar a investigação acima descrita.

A função para a qual há interesse em se determinar o intervalo de confiança ou seja, a "taxa de falhas", foi aqui escolhida devido a sua larga utilização na Teoria da Confiabilidade de Sistemas (vide Apêndice A). Não obstante, outras funções tais como a média e a variância da distribuição de Weibull são passíveis de sofrer idêntico estudo e o método aqui proposto aplica-se igualmente às mesmas. A razão de ter sido utilizado o método de inferência Bayesiano é que, para o caso da distribuição de Weibull, os métodos clássicos não proporcionam estimativas suficientes para os parâmetros. Assim sendo, considere-se o método da máxima verossimilhança, o qual apresenta uma série de características com relação aos estimadores, tais como:

- . são assintoticamente eficientes
- . são consistentes
- . são funções de estatísticas suficientes (se estas existem)

É exatamente para esta última propriedade que nossa atenção se voltará. Considere-se por exemplo, a função de densidade normal $N(\mu, \sigma)$:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \text{EXP} \left[-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2 \right] ; \quad -\infty < x < +\infty$$

Neste caso, os estimadores de máxima verossimilhança para μ e σ são respectivamente:

$$\hat{\mu} \equiv \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

os quais são funções da estatística suficiente $(\sum_{i=1}^n x_i)$. Considere-se agora a função de densidade de Weibull $W(x, \alpha, \beta)$:

$$f(x, \alpha, \beta) = \beta x^{\beta-1} \text{EXP} \left[-(x/\alpha)^\beta \right] / \alpha^\beta ; \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0$$

Ao tentar obter os estimadores de α e β pelo método da máxima verossimilhança, defrontamo-nos com um sistema de equações transcendentais, onde

não é possível explicitar α e β como função de uma estatística suficiente. Realmente, pelos métodos clássicos não se conhece alguma maneira de obter estimativas baseadas em estatísticas suficientes para os parâmetros α e β da distribuição de Weibull e também para funções destes parâmetros. Assim sendo, há interesse em determinar um processo o qual se utilize de esta tísticas suficientes para a determinação de limites de confiança. Será visto, quando da apresentação da metodologia, que o método Bayesiano é ba seado em estatísticas de ordem, as quais são suficientes.

Como mencionado anteriormente, a escolha da distribuição de probabilidade "a priori" permite investigar o intervalo obtido, sob o ponto de vista clássico, isto é, com relação à propriedade frequentista. A distribuição "a priori" aqui utilizada foi a uniforme, tendo em vista os seguintes aspectos:

- . representa o caso onde nada se conhece aprioristicamente com respeito à inferência que vai ser feita. Isto naturalmente representa o caso mais comum na vida real
- . permite investigar a propriedade "frequentista" do intervalo de confiança a ser obtido.

Contudo, deve ser lembrado que o método aqui proposto aplica-se igualmente a outras distribuições "a priori", sem no entanto permitir necessariamente uma análise "frequentista".

A seguir serão apresentados alguns pontos julgados importantes para o presente trabalho, os quais foram objeto de estudo:

- Censura sobre as observações:

Quando de um experimento real a respeito do tempo de duração de um determinado elemento, acontece muitas vezes o que é tecnicamente chamado de censura nos resultados obtidos. Tal censura resulta em informações incompletas a respeito dos dados e como exemplo, suponha-se que esteja sendo feito um experimento a respeito do tempo de vida de 100 lâmpadas e o observador é um funcionário que trabalha durante 12 horas por dia. Suponhamos que ao fim de 12 horas queimaram-se 95 lâmpadas em tempos diversos e o observador retirou-se deixando 5 lâmpadas ainda em teste. No outro dia foi observado que todas as 5 lâmpadas haviam se queimado. Este é um caso de perda parcial de informação pois sabe-se apenas que o tempo de duração das 5 lâmpadas restantes é maior do que 12 horas, mas não é possível determinar o tempo exato de duração. Assim sendo, verifica-se que a censura consiste em um mecanismo que atua sobre o processo de observação dos dados, resultando em informações incompletas, ou seja, fazendo com que algumas das observações não sejam exatamente conhecidas. Observa-se que este é um caso bem frequente na vida real e os métodos estatísticos conhecidos não o consideram quando da sua utilização. Existem diversos tipos de censura, que são os seguintes:*

* É feita a hipótese (para todos os tipos de censura) de que todas as observações se iniciam em um mesmo tempo (t_0).

- tipo I - quando o experimento termina após o tempo t_k , sob quaisquer circunstâncias

Exemplo: suponha que são feitas 5 observações a respeito do tempo de duração de um elemento, de acordo com o gráfico abaixo:

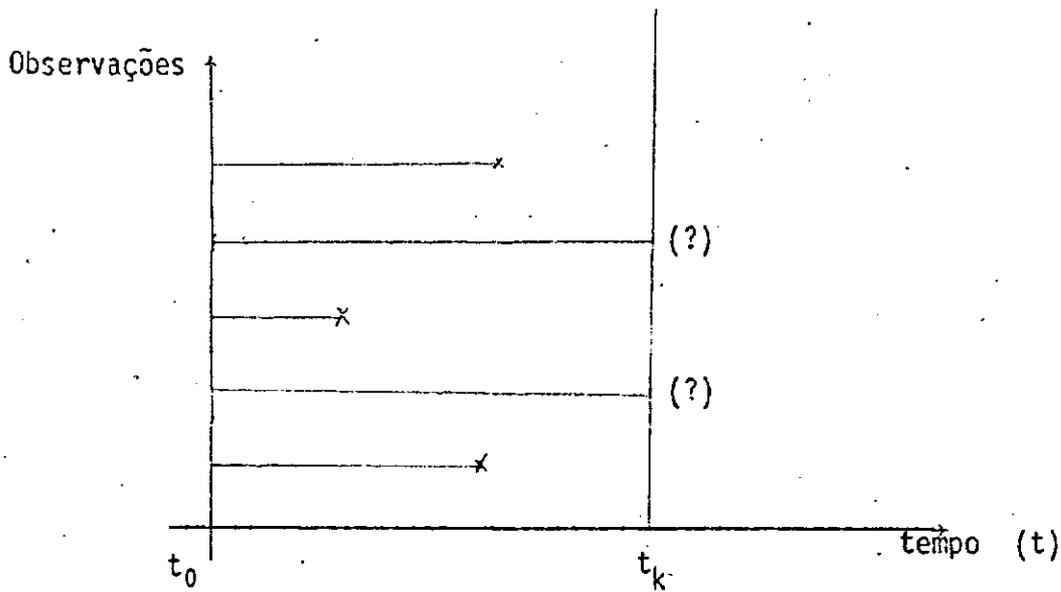


Fig. II.1 - Exemplo de distribuição do tempo de duração - censura tipo I

- tipo II - quando o experimento para após a k -ésima falha

Exemplo: suponha que estão sendo observados 5 elementos, cujos tempos de duração são dados pelo gráfico abaixo:

(seja $k = 2$)

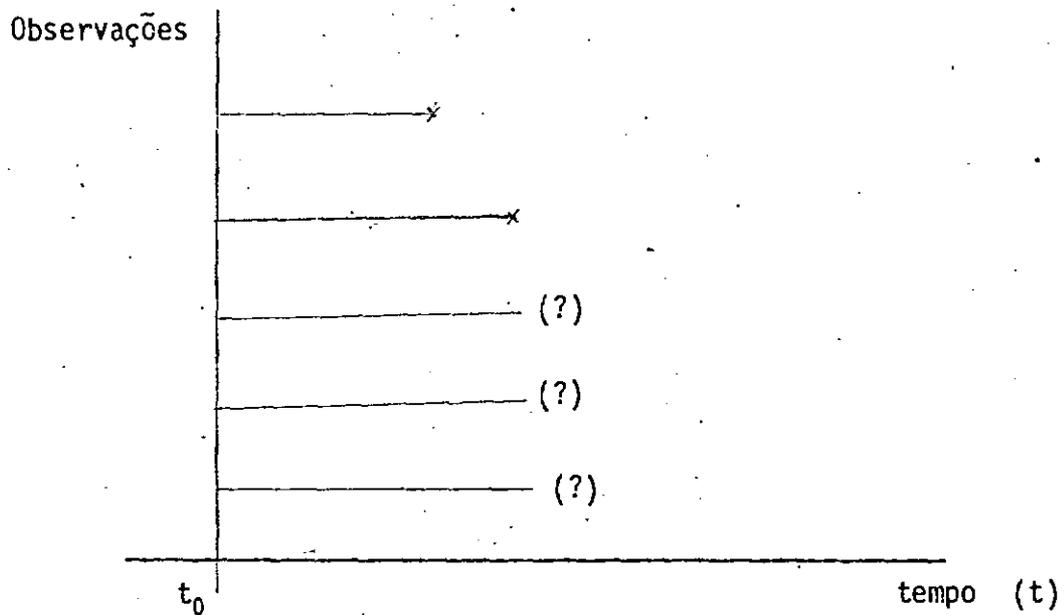


Fig. II.2 - Exemplo de Distribuição do tempo de duração - censura tipo II

Existe uma variação sobre a censura tipo II, a qual é chamada de censura tipo II progressiva, onde o experimento para após a k -ésima falha e pode recomeçar após m observações censuradas. Este é um tipo mais geral, o qual contém o de tipo II. Considerê-se por exemplo, 5 observações, $k = 2$ e $m = 2$:

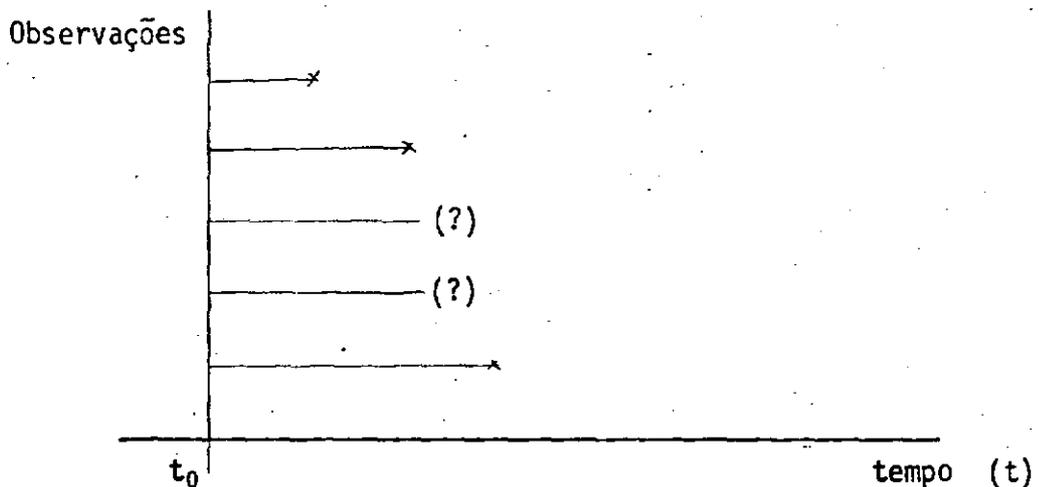


Fig. II.3 - Exemplo de Distribuição do tempo de duração - censura tipo II progressiva

- Arbitrária - quando não existe nenhuma maneira pré-determinada de realizar a censura, como por exemplo no caso do observador ter que terminar o experimento por uma ordem superior.

O estudo dos diversos tipos de censura permite concluir que apenas o de tipo II permite conservar fixo o número de observações não censuradas (ou censuradas) durante várias repetições do experimento, o que não é viável para a censura tipo I (por ser impossível prever o número de observações censuradas) assim como para a arbitrária. Assim sendo, desde que se está interessado em investigar a propriedade "frequentista" (o qual necessita da idéia de repetição do experimento) e como a censura de tipo II permite conhecer o número de observações censuradas, será este o tipo aqui escolhido para posterior estudo. Tal escolha porém deve-se apenas ao fato de se estar aqui interessado em investigar a propriedade "frequentista" e, para o caso de não haver tal interesse (ou seja, quando usadas outras distribuições "a priori" que não a uniforme) poderão ser considerados quaisquer dos tipos de censura acima descritos.

- Investigação da propriedade frequentista

A fim de analisar o aspecto referente à interpretação do intervalo de confiança obtido pelo ponto de vista da estatística clássica (ou seja, investigar a respeito da propriedade "frequentista"), o caminho mais natural seria o de utilizar o método clássico de inferência. Porém,

como já foi dito anteriormente, este não conduz a limites de confiança baseados em estatísticas suficientes e portanto utilizou-se de um outro caminho, que foi o da inferência Bayesiana juntamente com o método fiducial (para melhor descrição vide Apêndice A). A situação pode melhor ser apresentada pelo seguinte esquema:

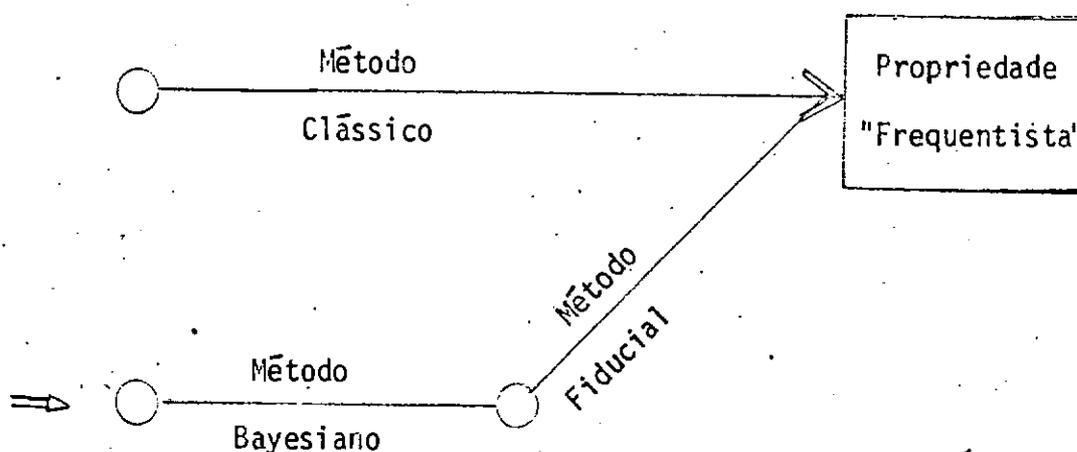


Fig. II.4 - Ilustração do método de investigação utilizado

Para iniciar tal investigação, torna-se necessária a utilização de um teorema devido a Hora e Buehler (1966):

- Teorema de Hora & Buehler:

Sejam (θ, σ) parâmetros de posição e escala com densidade fiducial e seja ψ uma função destes parâmetros. Se:

- i) $\psi(\theta, \sigma)$ é invariantemente estimável;
- ii) $P\left[\psi(\theta, \sigma) \leq \bar{\psi}\right] = \gamma$ possui uma única solução para cada γ ;
- iii) $\psi(a\theta + b, a\sigma)$ cresce sempre que $\psi(\theta, \sigma)$ cresce, então o intervalo de confiança para $\psi(\theta, \sigma)$ possui a propriedade "frequentista"

Observa-se que a fim de aplicar o teorema, torna-se necessário verificar as seguintes condições:

- a) os parâmetros cuja função será estimada devem ser de posição e escala.

Definição: Parâmetros de posição e escala - são aqueles que representam a localização e a dispersão de uma distribuição (por exemplo, a média e o desvio-padrão). A condição para que sejam de posição e escala é que os mesmos provenham de uma distribuição de uma variável aleatória x com a seguinte função de densidade:

$$f(x, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma} h\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right).$$

- b) (θ, σ) tenha densidade fiducial (para melhor entendimento, vide Apêndice B).

Considere-se a distribuição de Weibull, onde

$$f(t, \alpha, \beta) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right]/\alpha^\beta; \quad \alpha > 0; \beta > 0; t > 0 \quad (\text{II.1})$$

(função de densidade)

$$F(t, \alpha, \beta) = 1 - \text{EXP}\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (\text{função de distribuição}) \quad (\text{II.2})$$

Ora, pela simples inspeção à expressão (1) conclui-se que os parâmetros (α, β) não são de posição e escala. Sejam-porém, as seguintes transformações bi-unívocas:

$$\bar{z} = \ln t$$

$$\theta = \ln \alpha$$

$$\sigma = 1/\beta$$

Isto resulta (vide demonstração no Apêndice B) na seguinte função de densidade:

$$f(z, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left[\text{EXP}\left(-e^{\frac{z-\theta}{\sigma}}\right) \text{EXP}\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right) \right],$$

a qual é chamada de função de densidade da distribuição do valor extremo. Observa-se portanto que (θ, σ) são parâmetros de posição e escala, os quais são transformações bi-unívocas dos parâmetros originais (α, β) . Com relação à segunda condição é provado (vide Apêndice B) que a densidade conjunta "a posteriori" de (θ, σ) é fiducial para a distribuição "a priori" de $\frac{1}{\sigma}$, a qual corresponde à uniforme $\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)$, de acordo com as transformações acima apresentadas.

Assim sendo, ao se considerar os parâmetros (θ, σ) , tem-se as condições necessárias para a aplicação do teorema de Hora e Buehler, o qual necessita que a função obedeça às condições (i), (ii) e (iii). É mos

trado (Apêndice B) que a função equivalente à "taxa de falhas" (em termos de θ, σ) não é "invariantemente estimável" e portanto torna-se desnecessário examinar as condições seguintes do teorema, pois observa-se que o mesmo não garante a existência da propriedade "frequentista". Em assim sendo, verifica-se que a teoria existente não garante a interpretação pela estatística clássica, do intervalo obtido para a função "taxa de falhas". Porém, como o teorema de Hora & Buehler é da forma $(A \Rightarrow B)$ e como se sabe por um princípio de lógica que $(\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$ é falsa, é feito um teste por simulação (o qual encontra-se apresentado no Apêndice C) para verificar se o intervalo Bayesiano obtido é passível de sofrer uma interpretação clássica. Como também pode ser visto no Apêndice C o teste realmente mostrou a propriedade "frequentista" para o intervalo obtido e isto representa uma indicação de que se conseguiu uma maneira de obter um intervalo que satisfizesse tal propriedade. Não obstante, o resultado obtido deve servir para mostrar que a teoria relativa a esse aspecto deve ser ainda mais aprofundada, visto que a mesma é bastante recente e por conseguinte deve ser objeto de um mais intenso estudo.

Dessa maneira, foi apresentada a investigação a respeito da propriedade "frequentista" do intervalo de confiança para a "taxa de falhas" da distribuição de Weibull e a seguir será apresentado a metodologia de obtenção dos limites de confiança Bayesianos, a qual constitui o objetivo primordial do trabalho ora apresentado.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

De acordo com o que foi dito na Introdução, o processo aqui apresentado terá como entrada um conjunto de observações (censuradas de tipo II) e por saída um determinado intervalo de confiança para a "taxa de falhas". Será visto que aqui utilizaremos apenas a distribuição estatística de Weibull, mas que deve ser lembrada a íntima relação existente entre esta e a do Valor Extremo, a qual foi mostrada na parte anterior, através das transformações bi-unívocas sobre a variável aleatória e os parâmetros. Assim sendo, observa-se que para efeito de investigação "frequentista", toda a fundamentação teórica do trabalho é baseada em parâmetros de posição e escala. Porém, como já se conhece sobre a estreita relação entre a distribuição de Weibull e a do Valor Extremo apresentar-se-á a metodologia em termos da primeira, a qual é o objeto de estudo do presente trabalho.

Considere-se um conjunto de observações:

$$(t_1, t_2, t_3, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n),$$

onde n - número total de observações

k - número de observações não censuradas

$n-k$ - número de observações censuradas (tipo II)

Seja

$$f(t; \alpha, \beta) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right] / \alpha^\beta; \quad \alpha > \beta, \beta > 0; t > 0, \quad (\text{III.1})$$

a densidade de Weibull com parâmetros α e β .

Considere-se a distribuição "a priori" para os parâmetros (α, β) :

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta},$$

os quais são supostos independentes. A aplicação do teorema de Bayes a funções de densidade, a fim de determinar a distribuição "a posteriori" dos parâmetros, resulta em:

$$\pi(\alpha, \beta/t) = \frac{L(t/\alpha, \beta)g(\alpha, \beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(t/\alpha, \beta)g(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}, \quad (\text{III.2})$$

onde $L(t/\alpha, \beta)$ refere-se a função de verossimilhança, a qual representa a possibilidade de se ter a particular amostra, ou seja:

$$L(t/\alpha, \beta) = \underbrace{\left[\prod_{i=1}^k f(t_i; \alpha, \beta) \right]}_{(X)} \underbrace{\left[\prod_{i=k+1}^n (1 - F(t_i; \alpha, \beta)) \right]}_{(Y)}, \quad (\text{III.3})$$

onde (X) representa a densidade dos valores não censurados e (Y) representa a probabilidade dos valores censurados assumirem valores

maiores do que os obtidos na amostra.

Como

$$f(t; \alpha, \beta) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right] / \alpha^\beta, \text{ então:}$$

$$F(t; \alpha, \beta) = \int_0^t \frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right] dt = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^t \left[\frac{t}{\alpha}\right]^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt$$

fazendo $\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta = k \Rightarrow \frac{t}{\alpha} = k^{\frac{1}{\beta}} \therefore t = \alpha k^{\frac{1}{\beta}}$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^\beta} \beta t^{\beta-1} dt = dk \quad \therefore dt = \frac{\alpha^\beta dk}{\beta t^{\beta-1}} = \frac{\alpha dk}{\beta k(1-\frac{1}{\beta})}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(t) &= \int_0^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \frac{\beta}{\alpha} k^{(1-\frac{1}{\beta})} e^{-k} \frac{\alpha dk}{\beta k(1-\frac{1}{\beta})} = \int_0^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} e^{-k} dk = -e^{-k} \Big|_0^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} = \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \quad \therefore F(t) = 1 - \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right] \end{aligned}$$

Assim sendo, tem-se $1 - F(t) = \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right]$ e portanto,

$$L(t/\alpha, \beta) = \left[\frac{\beta^k}{\alpha^{\beta k}} \left[\prod_{i=1}^k t_i \right]^{\beta-1} e^{-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^k t_i^\beta} \right] \left[e^{-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{k+1}^n t_i^\beta} \right]$$

$$\therefore L(t/\alpha, \beta) = \frac{\beta^k}{\alpha^{\beta k}} \left[\prod_{i=1}^k t_i \right]^{\beta-1} \text{EXP}\left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right] \quad (\text{III.4})$$

$$\therefore \pi(\alpha, \beta/t) = \frac{\beta^k \left[\frac{k}{\pi t_i} \right]^{\beta-1} \text{EXP} \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum t_i^\beta \right]}{\alpha^{\beta k} \cdot \alpha^\beta} \underbrace{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^k \left[\frac{k}{\pi t_i} \right]^{\beta-1} \text{EXP} \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum t_i^\beta \right]}{\alpha^{\beta k} \cdot \alpha^\beta} d\alpha d\beta}_C$$

$$\therefore \pi(\alpha, \beta/t) = C \frac{\beta^{k-1} \left[\frac{k}{\pi t_i} \right]^\beta \text{EXP} \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum t_i^\beta \right]}{\alpha^{\beta k+1}} \quad (\text{III.5})$$

Como o valor C é constante para todos os valores de α, β , a expressão será deixada apenas em função de (α, β) , ou seja:

$$\pi(\alpha, \beta/t) \propto \frac{\beta^{k-1} \left[\frac{k}{\pi t_i} \right]^\beta \text{EXP} \left[-\alpha^{-\beta} \sum t_i^\beta \right]}{\alpha^{k\beta+1}} \quad (\text{III.6})$$

A densidade marginal de β pode ser obtida através da integração de (6) com relação a α , ou seja,

$$\pi_1(\beta/t) = \int_0^{+\infty} C \frac{\beta^{k-1} \left(\frac{k}{\pi t_i} \right)^\beta e^{-\alpha^{-\beta} \left(\sum t_i^\beta \right)}}{\alpha^{k\beta+1}} d\alpha = \underbrace{C \beta^{k-1} \left(\frac{k}{\pi t_i} \right)^\beta}_{C_1} \int_0^{+\infty} \alpha^{-(\beta k+1)} e^{-\alpha^{-\beta} \left(\sum t_i^\beta \right)} d\alpha$$

Fazendo

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\alpha^\beta} = z \Rightarrow \alpha^\beta z = \sum_{i=1}^n t_i^\beta \quad \therefore \quad \alpha = \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{z} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\therefore - \frac{(\sum_{i=1}^n t_i^\beta) \beta \alpha^{\beta-1}}{\alpha^{2\beta}} d\alpha = - \left[\sum_{i=1}^n t_i^\beta \right] \beta \alpha^{-(\beta+1)} d\alpha = dz$$

$$\therefore d\alpha = - \frac{(\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^{\frac{1}{\beta}} z^{-(1+1/\beta)}}{\beta} dz$$

Substituindo na expressão da integral, vem:

$$\begin{aligned} \pi_1(\beta/t) &= C_1 \int_0^{+\infty} \frac{(\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^{-(k+1/\beta)}}{z^{-(k+1/\beta)}} \cdot \frac{e^{-z} z^{-(1+1/\beta)} (\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^{1/\beta}}{\beta} dz = \\ &= \frac{C_1 (\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^{-k}}{\beta} \underbrace{\int_0^{+\infty} z^{k-1} e^{-z} dz}_{\Gamma(k)} = C \frac{\beta^{k-1} (\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^k}{\beta (\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^k} \Gamma(k) \end{aligned}$$

Considerando apenas o que é função de β , vem:

$$\pi_1(\beta/t) \propto \frac{\beta^{k-2} (\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^k}{(\sum_{i=1}^n t_i^\beta)^k} \quad \text{(III.7)}$$

A fim de determinar exatamente a densidade marginal de β , sabe-se que:

$$C_2 \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{k-2} (\sum t_i)^k}{(\sum t_i \beta)^k} d\beta = 1 ,$$

onde $C_2 = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{\beta^{k-2} (\sum t_i)^k}{(\sum t_i \beta)^k} d\beta}$; Tal constante \bar{c} chamada de "constante normalizadora".

A integração da expressão do denominador \bar{c} possível mediante a aplicação do método de Simpson (vide Apêndice B) e possibilita desta forma determinar pontos da densidade marginal de β , conforme pode ser visto pelo gráfico abaixo:

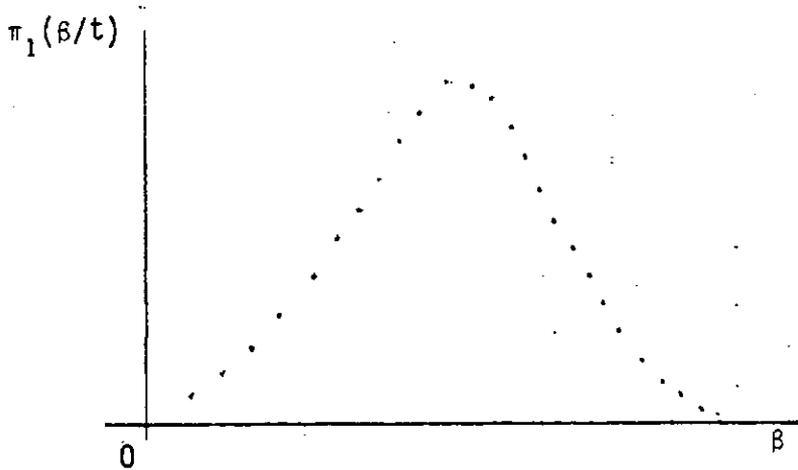


Fig. III.1 - Pontos da densidade marginal $\pi_1(\beta/t)$

O próximo passo é o de determinar a função de distribuição marginal de β .

Como

$$F(x) = \int_0^x f(w) dw ,$$

então podem ser obtidos alguns pontos da função de distribuição pelo cálculo das áreas parciais, através novamente do método de Simpson, segundo o esquema abaixo:

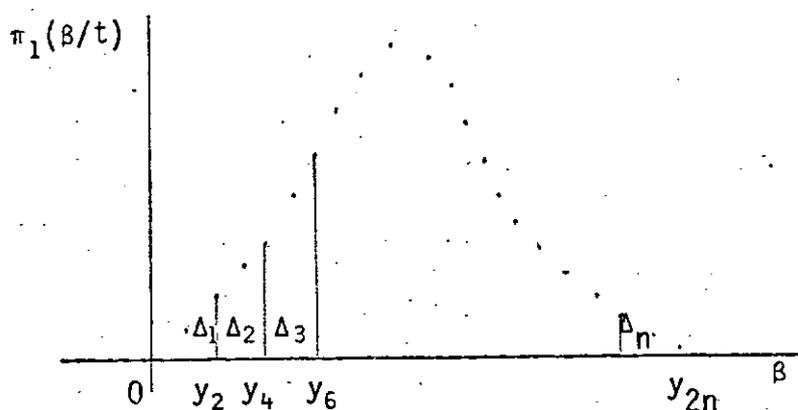


Fig. III.2 - Determinação das áreas parciais sobre os pontos da densidade marginal $\pi_1(\beta/t)$

onde Δ_i representa a área calculada por cada três pontos pertencentes à densidade marginal de β . Assim,

$$\Delta_1 = P(y_0 \leq \hat{\beta} \leq y_2) = C_2 \left[\frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \right]$$

$$\Delta_2 = P(y_2 \leq \hat{\beta} \leq y_4) = C_2 \left[\frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) \right]$$

...

$$\Delta_n = P(y_{2n-2} \leq \hat{\beta} \leq y_{2n}) = C_2 \left[\frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \right]$$

Mas como deseja-se determinar alguns valores da função de distribuição, então:

$$F_1(y_2) = P(\hat{\beta} \leq y_2) = \Delta_1$$

$$F_1(y_4) = P(\hat{\beta} \leq y_4) = \Delta_1 + \Delta_2$$

...

$$F_1(y_{2n}) = P(\hat{\beta} \leq y_{2n}) = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 1$$

Desse modo são determinados pontos da distribuição acumulada marginal de β e tem-se portanto:

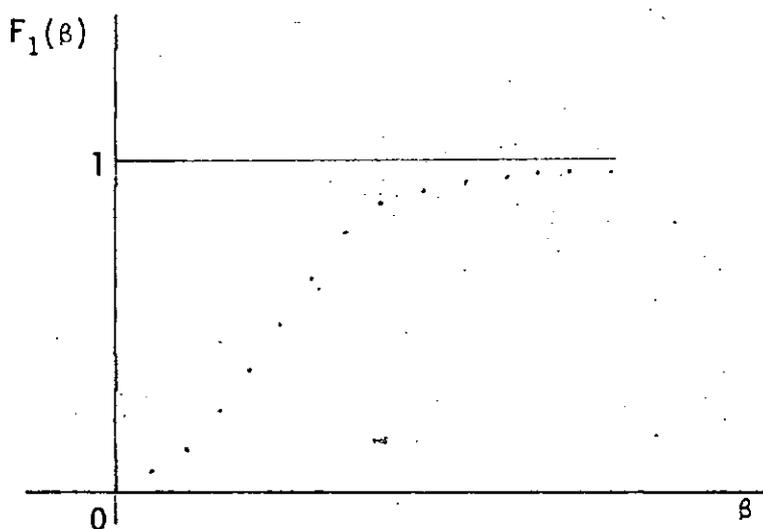


Fig. III.3 - Pontos da distribuição marginal $F_1(\beta/t)$

Como existe a necessidade de serem gerados valores aleatórios da variável β , torna-se necessário o ajustamento de tais pontos através de uma função matemática. O método utilizado foi o ajustamento por "Splines" quadráticos (vide Apêndice B), tendo em vista o comportamento dos pontos em pequenos intervalos. Portanto, é possível agora efetuar a geração de variáveis aleatórias β , a qual foi realizada através do "método da Transformação Inversa", o qual se acha apresentado em detalhes no Apêndice B.

A seguir procurar-se-á determinar a distribuição da variável aleatória α condicionada à variável β :

sabe-se que
$$\pi_2(\alpha/\beta, t) = \frac{\pi(\alpha, \beta/t)}{\pi_1(\beta/t)}$$

$$\therefore \pi_2(\alpha/\beta, t) = \frac{\beta^{k-1} \binom{k}{\pi t_i} \text{EXP} \left[-\alpha^{-\beta} \sum_i^n t_i^\beta \right]}{\alpha^{\beta k+1}} = \frac{\beta^{k-1} \binom{k}{\pi t_i}^\beta \text{EXP} \left[-\alpha^{-\beta} \sum_i^n t_i^\beta \right] \left[\sum_i^n t_i^\beta \right]}{\alpha^{\beta k+1} \beta^{k-2} \binom{k}{\pi t_i}^\beta \left(\sum_i^n t_i^\beta \right)^k}$$

$$\therefore \pi_2(\alpha/\beta, t) = \frac{\beta \left(\sum_i^n t_i^\beta \right)^k \text{EXP} \left[-\alpha^{-\beta} \sum_i^n t_i^\beta \right]}{\alpha^{\beta k+1}} \quad (\text{III.8})$$

A próxima etapa é determinar a função de distribuição de α condicionada a β . Para tal, considere-se:

$g_2(\cdot)$ - função de densidade da variável aleatória \tilde{y}

$G_2(\cdot)$ - função de distribuição da variável aleatória \tilde{y}

$\pi_2(\cdot)$ - função de densidade da variável aleatória $\hat{\alpha}$ condicionada a $\hat{\beta}$

$F_2(\cdot)$ - função de distribuição da variável aleatória $\hat{\alpha}$ condicionada a $\hat{\beta}$

seja $\tilde{y} = \hat{\alpha}^{-\beta}$

$$\begin{aligned} \therefore G_2(y) &= P(\tilde{y} \leq y) = P\left[\frac{1}{\hat{\alpha}^\beta} \leq y\right] = P\left[\hat{\alpha}^\beta \geq \frac{1}{y}\right] = P\left[\hat{\alpha} \geq \left(\frac{1}{y}\right)^{1/\beta}\right] = \\ &= 1 - P\left[\hat{\alpha} \leq \left(\frac{1}{y}\right)^{1/\beta}\right] = 1 - F_2\left[\left(\frac{1}{y}\right)^{1/\beta}\right] \end{aligned}$$

derivando $G_2(y)$ com relação a y , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dG_2(y)}{dy} &= G_2'(y) = g_2(y) = -\pi_2\left[\left(\frac{1}{y}\right)^{1/\beta}\right] \left[-\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{y}\right)^{(1/\beta-1)} \frac{1}{y^2}\right] = \\ &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{y}\right)^{(1/\beta+1)} \pi_2\left[\left(\frac{1}{y}\right)^{1/\beta}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore g_2(y) \propto \left[\sum_{i=1}^n t_i^\beta\right]^k y^{k-1} \text{EXP}\left[-y \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right]$$

$$\therefore g_2(y) = \frac{\left[\sum_{i=1}^n t_i^\beta\right]^k y^{k-1} \text{EXP}\left[-y \sum_{i=1}^n t_i^\beta\right]}{(k-1)!} \quad \text{(III.9)}$$

- densidade "gama" (Γ) com parâmetros $\left(\sum_{i=1}^n t_i^\beta\right)$ e k .

Como se sabe que a função de distribuição de uma variável aleatória Γ é dada por (no caso de k inteiro positivo):

$$G_2(y) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{[(\sum_{i=1}^n t_i^\beta)y]^j}{j!} \right\} \text{EXP} \left[-y \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right], \quad (\text{III.10})$$

então segue que:

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) &= P(\hat{\alpha} \leq \alpha) = P(\hat{\alpha}^{-\beta} \geq \alpha^{-\beta}) = 1 - G_2(\alpha^{-\beta}) = \\ &= \text{EXP} \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right] \sum_{j=0}^{k-1} \frac{[\sum_{i=1}^n t_i^\beta]^j}{\alpha^\beta} / j! \end{aligned}$$

e assim,

$$F_2(\alpha) = \text{EXP} \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right] \sum_{j=0}^{k-1} \frac{[\sum_{i=1}^n t_i^\beta]^j}{\alpha^\beta} / j! \quad (\text{III.11})$$

Portanto, é possível agora gerar valores para a variável aleatória α . Des-
sa maneira, são gerados valores aleatórios de β (pelo processo indicado
anteriormente) e a partir destes, são gerados valores de α (também pelo
"método da Transformação Inversa") da seguinte maneira:

seja u um número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1:

$$\therefore \text{EXP} \left[-\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right] \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\alpha^\beta} \right]^j / j! = u$$

Tal expressão deve ser resolvida para α . Seja $x = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{\alpha^\beta}$; então:

$$e^{-x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} = u$$

A fim de resolver tal equação para x , será utilizado o método de Newton, (vide Apêndice B), dado que o mesmo converge rapidamente para a solução e que a função dada é tal que permite explicitar facilmente sua derivada.

Desse modo, tem-se:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\therefore f(x_i) = e^{-x_i} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_i^j}{j!} - u$$

$$e f'(x_i) = -e^{-x_i} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_i^j}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_i^{j-1}}{(j-1)!} \right]$$

$$\therefore f'(x_i) = -e^{-x_i} \frac{x_i^{k-1}}{(k-1)!}$$

e portanto,

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\left[e^{-x_i} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_i^j}{j!} - u \right] (k-1)!}{e^{-x_i} x_i^{k-1}} \quad (\text{III.12})$$

Dessa forma, ao gerar-se um número aleatório uniforme (0, 1), podem ser determinados valores x_i até que

$$\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < r,$$

onde r representa o erro relativo máximo admissível. Portanto, ao obter-se um valor x_v , é possível determinar

$$\alpha = \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{x_v} \right]^{1/\beta} \quad (\text{III.13})$$

Deste modo, é possível se obter uma série de valores gerados (α_i, β_i) .

A próxima etapa consiste em calcular os valores $\pi(\alpha, \beta/t)$ os quais resultam na substituição dos (α, β) na expressão (6). Como

$$\pi(\alpha, \beta/t) = \frac{\beta^{k-1} (\pi t_i)^k \text{EXP} \left[-\alpha^{-\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right]}{\alpha^{k\beta+1}}, \text{ então sabe-se que}$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \pi(\alpha, \beta/t) \cdot d\alpha \, d\beta = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} C \frac{\beta^{k-1} (\prod t_i)^k \text{EXP}[-\alpha^{-\beta} \sum t_i^\beta]}{\alpha^{k\beta+1}} d\alpha \, d\beta = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{k-1} (\prod t_i)^k \text{EXP}[-\alpha^{-\beta} \sum t_i^\beta]}{\alpha^{k\beta+1}} d\alpha \, d\beta} = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{\beta^{k-2} (\prod t_i)^k}{(\sum t_i^\beta)^k} d\beta} \quad (\text{III.14})$$

Observa-se que a integral do denominador já foi anteriormente calculada quando da determinação da densidade marginal de β e seja p o seu valor. Assim, tem-se $C = \frac{1}{p}$ e dessa maneira é possível calcular uma série de valores $\pi_i(\alpha_i, \beta_i/t)$. Tais valores podem ser ordenados e tem-se,

$$\pi_1(\alpha, \beta/t) < \pi_2(\alpha, \beta/t) < \dots < \pi_m(\alpha, \beta/t)$$

Como o objetivo é determinar um intervalo de confiança para $h(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}$ (taxa de falhas), a um dado nível de significância, o problema se resume então em obter:

$$\min \left[\frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \right] \quad \text{e} \quad \max \left[\frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \right] \quad (\text{III.15})$$

sujeito às restrições: $[(\alpha, \beta) : \pi(\alpha, \beta/t) \geq q]$,

onde $q = \pi(1-\gamma)M$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > 0$$

Tem-se aqui um problema de otimização, em que os métodos mais conhecidos não são aplicáveis devido a função objetivo e a região viável não satisfazerem as condições de concavidade e convexidade exigidas (vide Apêndice B). Portanto será utilizado um método de pesquisa por pontos e busca sequencial, que consiste basicamente em selecionar os (α, β) gerados que satisfazem $\pi(\alpha, \beta/t) \geq q$ e dentre esses determinar os que minimizam e maximizam a taxa de falhas. A fim de se obter uma maior aproximação dos valores máximo e mínimo, foi feito um "reticulado" em torno de tais valores, segundo o esquema abaixo:

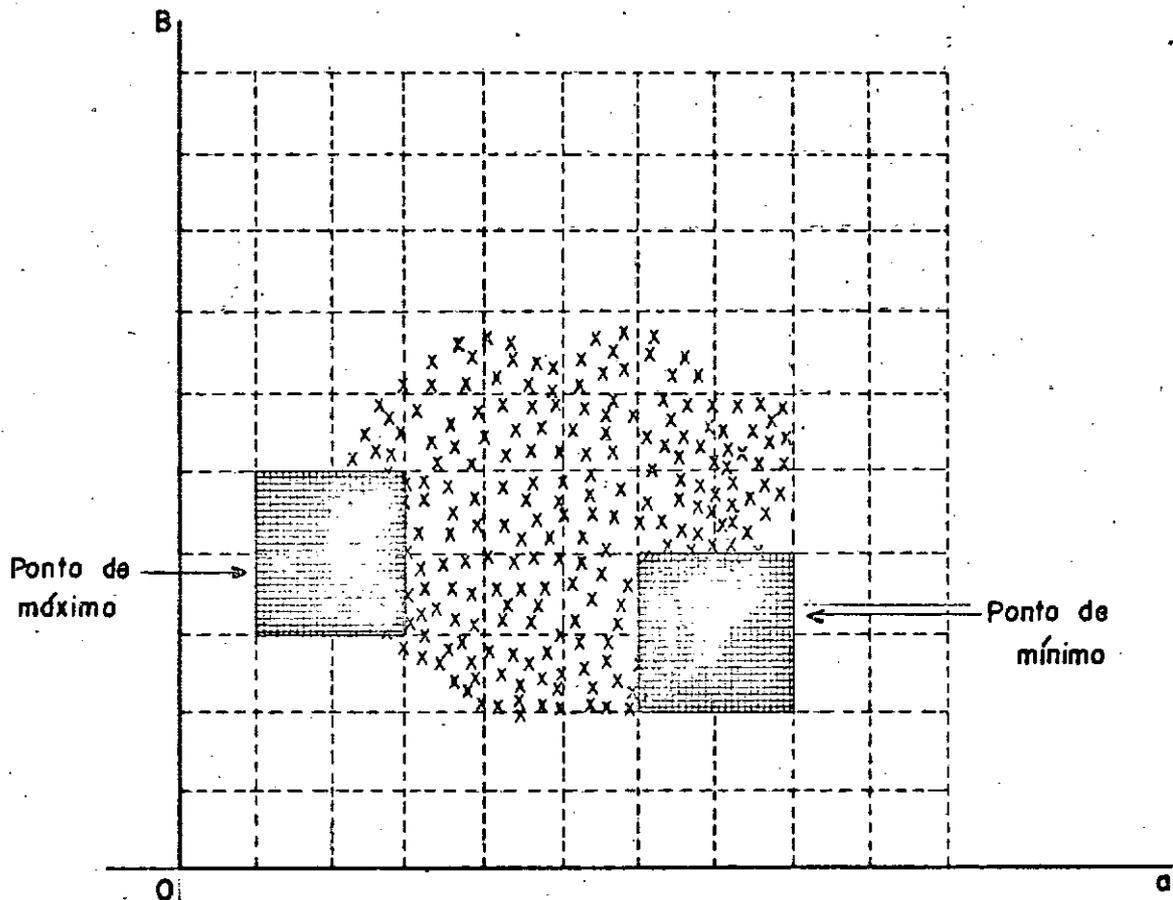


Fig. III.4 - Ilustração do processo de busca sequencial desenvolvido em torno dos pontos de máximo e mínimo encontrados

- foi realizada uma primeira "busca" (---) sobre os valores viáveis a fim de se identificar outras possíveis regiões de máximo e mínimo. Tal não foi verificado e isto permite saber que os verdadeiros máximo e mínimo estão em torno dos determinados pela pesquisa dos pontos.
- foi feito um segundo "reticulado" em torno dos pontos de máximo e mínimo, a fim de se ter uma melhor aproximação para esses valores e também para uniformizar os limites inicialmente obtidos, tendo em vista que os mesmos sofrem uma ligeira variação, dependente do número de pares aleatórios gerados.

Deve ser observado que tal análise já foi realizada e portanto não será necessário procedê-la toda vez em que se aplicar este método, pois como será visto nos aspectos referentes à computação, o programa elaborado realiza a pesquisa por pontos e a reticulado sobre os pontos de máximo e mínimo, obtendo dessa maneira o resultado final que é o intervalo de confiança para a "taxa de falhas" da distribuição de Weibull.

Conforme observado no Capítulo II, será feito um teste por simulação para verificar se o resultado obtido possui a propriedade "frequentista". Tal será mostrado no Apêndice C, onde poderá ser observado que os limites encontrados pelo método apresentado possuem tal propriedade. A seguir são apresentados alguns aspectos referentes ao programa elaborado.

CAPÍTULO IV

COMPUTAÇÃO

Nesta parte será apresentado o programa em linguagem FORTRAN, o qual tem por entrada os dados amostrais do usuário e como saída, limites de confiança para a taxa de falhas. A saída do programa é feita de forma detalhada, de acordo com as diversas etapas do processamento, as quais são as mesmas já apresentadas na metodologia. Assim, serão fornecidos em sequência:

1) Dados de Entrada - onde serão listados os dados de entrada do usuário apenas para efeito de conferência visual.

2) Valor da Constante de Normalização - que corresponde ao valor de

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{k-2} (\sum_{i=1}^n t_i)^{\beta k}}{(\sum_{i=1}^n t_i)^{\beta k}} d\beta, \text{ calculada através do Método de Simpson}$$

3) Pontos da Densidade e Distribuição de β - apresenta-se em forma de tabela, as ordenadas das funções de densidade e distribuição marginais de β .

4) Gráficos - os quais são feitos pela impressora e se referem às funções de densidade e distribuição marginais de β .

5) Determinação dos "Splines" Ajustantes - são apresentados os "Splines" quadráticos utilizados entre cada dois pontos da distri

buição acumulada, os quais constituem o ajustamento feito a tais pontos.

- 6) Intervalo de Confiança para a "Taxa de Falhas" - são apresentados os limites inferior e superior do intervalo, o nível de significância adotado e o tempo no qual se deseja calcular a "taxa de falhas".

O programa utilizado compõe-se de 1 programa principal e 4 sub-rotinas de acordo com o seguinte esquema:

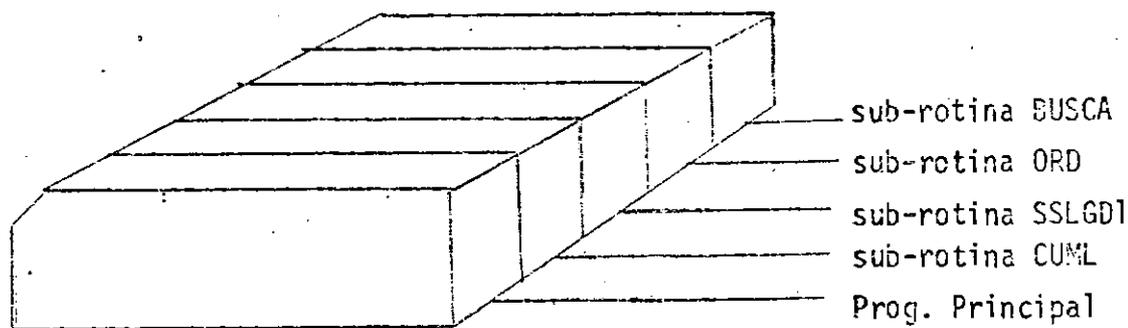


Fig. IV.1 - Ordem dos diversos conjuntos de cartões referentes ao programa elaborado

Os dados de entrada do usuário, os quais devem ser perfurados em dois cartões, são:

1º cartão: (parâmetros)

N	(Formato I4) - nº de valores de Y - (podê ser feito igual a 33)	cols (1/ 4)
M	(Formato I4) - nº de valores aleatórios gerados - recomenda-se entre 1000 e 2000	cols (5/ 8)
N1	(Formato I4) - nº total de observações (t_i) do usuário	cols (9/12)
K	(Formato I4) - nº de valores (t_i) não censurados	cols (13/16)
M2	(Formato I4) - nº max. de iterações para o método de Newton - até 20	cols (17/20)
F1	(Formato F6.2) - numerador da amplitude do intervalo - igual a 2	cols (21/26)
F2	(Formato F6.2) - denominador da amplitude do intervalo - igual a 12	cols (27/32)
Z	(Formato F6.2) - valor para inicialização da intrínseca RANDOM - qualquer	cols (33/38)
ZZ	(Formato F6.2) - valor para inicialização da intrínseca RANDOM - $\neq Z$	cols (39/44)
V	(Formato F6.2) - erro relativo max. admissível - recomenda-se 0.01	cols (45/50)
TEMPO	(Formato F6.2) - tempo escolhido para a "taxa de falhas"	cols (51/56)
SIGN	(Formato F6.2) - nível de <u>significância</u> escolhido para o intervalo de confiança	cols (57/62)

2º cartão: (valores das observações)

T(I) - (Formato F3.0) - devem ser perfuradas inicialmente todas as observações não censuradas (da menor para a maior) e em seguida as censuradas (também da menor para a maior). Não deve haver qualquer espaço entre as mesmas.

O usuário também deve observar alguns parâmetros do cartão DIMENSION, que são:

T(N1) - onde N1 é o número total de observações;

PI(M)
ALFA(M) } - onde M é o número de pares (α , β) gerados aleatoriamente
BETA(M)

Pode acontecer que durante o processamento saia a seguinte mensagem: "****# NUMERO DE ITERAÇÕES ESGOTADO ****#". Isto significa que a convergência pelo método de Newton ultrapassou M2 vezes. Pode se usar um valor maior para M2 e caso persista a mensagem, aumentar o valor de X(!) (uma variável encontrada no programa principal, a qual tem o valor inicial de 5).

Quando da saída do intervalo de confiança, podem aparecer as seguintes indicações ao lado dos limites determinados:

- 1) "(VALOR ORIGINAL)" ou
- 2) "(VALOR APÓS A BUSCA SEQUENCIAL)"

Isto deve apenas indicar ao usuário que a busca sequencial conseguiu de terminar um valor melhor do que o da pesquisa por pontos (no caso de (2)) ou não o fez (no caso de (1)).

O tempo de processamento de tal programa é da ordem de 20 minutos e observa-se que o mesmo pode ser ainda melhorado, dado que o autor não é especialista em programação. A seguir é apresentado o programa completo, o qual acha-se dimensionado para o exemplo a ser dado na próxima parte:

FILE IS 0006 LONG
 FILE IS 0006 LONG
 START OF SEGMENT 002
 FORMAT SEGMENT 004 IS 0054 LONG.

```

FILE 5=615
FILE 6=ELLE
DIMENSION Y(70),A(70),R(70),C(70),X(20),T(4),PI(1000),ALFA(1000),H
: IETAL(1000),YFF(70),TF(1000),TFAL(1000),ETAC(6),XER(6)
DOUBLE PRECISION IF,SUM,X,HA,RE,HI,BO,SUM,WP,PI,XPT1,XPT2,XPT3,XP
IT,XPTS,XPTA,PIAR,XFBET,XFAT,XBUC,ALFA,BETA,TFAL
C OBTENCAO DA CONSTANTE NORMALIZADORA-METODO DE SIMPSON**
C OBTENCAO DAS OBTENIDAS DA DENSIDADE BETA-GRAFICO
C OBTENCAO DOS PONTOS DA DISTRIBUICAO BETA-GRAFICO
C GERACAO DAS VARIAVEIS BETA E ALFA(CONDICOVIDADAS A BETA)
C DETERMINACAO DOS VALORES VIAVELS-METODO DE BUSCA
C .....N-NUMERO DE LIMITES DE CONFIANCA PARA A TAXA DE FALHAS
C .....M-NUMERO DE VALORES ALEATORIOS GERADOS
C .....N1-NUMERO TOTAL DE VALORES OBSERVADOS
C .....K-NUMERO DE VALORES NAO CENSURADOS
C .....M2-SUMADO MAXIMO DE ITERACOES PARA O METODO DE NEWTON
C .....F1-F2-NUMERADOR E DENOMINADOR DA AMPLITUDE DO INTERVALO (DT=F1/F2)
C .....Z1-Z2-VALORES PARA INICIALIZACAO DA FUNCAO INTRINSECA RANDOM
C .....V-TEMPO RELATIVO MAXIMO ADMISSIVEL
C .....TEMPO-TEMPO CORRESPONDENTE A TAXA DE FALHAS
C .....SIGN-NIVEL DE SIGNIFICANCIA DESEJADO
READ(5)M,M1,K,M2,F1,F2,Z1,Z2,V,TEMPO,SIGN
1 FORMAT(5I4,7E6.2)
READ(5)Z39)T(C1),I=1,M1)
39 FORMAT(6F3.0)
1020 READ(5,1020)(XER(I),I=1,6),(ETA(J),J=1,6)
WRITE(6,9052)M,M1,K,M2,F1,F2,Z1,Z2,V,TEMPO,SIGN(I,T(I),I=1,M1)
9052 FORMAT(1,/,/,10X,1, DAJDS DE ENTRADA',/,13X,M=,I4,/,13X,M=,
14,/,13X,M1=,I4,/,13X,M2=,I4,/,13X,Z1=,F9.3,/,13X,Z2=,F9.3,/,
213X,F2=,F9.3,/,13X,Z=,F9.3,/,13X,ZZ=,F9.3,/,13X,V=,F9.3,/,
313X,TEMPO=,F9.3,/,13X,SIGN=,F9.3,/,13X,OBSERVACUES',6I2X,/,T
4,12,/,1,/,F7.2))
CALL CURE(VI,K,66,T,1,12,CONST,YFF)
DO 1013 I=1,33
IMP=2*I
1013 Y(I)=YFF(INP)
KAR=K*I
XPAI=1
DO 600 KRA=1,K
KFAT=XFAT+T(KRA)
DT=F1/F2
A(I)=0
B(I)=0
C(I)=Y(I)/(DT**2)
DO 3 I=2,M
BRC=(Y(I-1)-Y(I))*C(I-1)+2*(I-1)*DT+C(I-1))*DT
A(I)=Y(I-1)+((I-1)*BRC)-((I-1)*Y(I)-(I-1)*(2+I-1)*BRC))
B(I)=(Y(I)-Y(I-1))*C(I-1)+2*(I-1)*BRC)/DT
3 C(I)=-BRC/(DT**2)
10M/5,
IFIM=5*I0
KY=M+1
KK=(10+I)*5

```

```

DO 14 LL=XK,XXX
A(LL)=0
B(LL)=0
C(LL)=0
14 WRITE(6,9056)
9056 FORMAT(1,'//,10X',V, DETERMINACAO DOS SPLINES AJUSTANTES',//)
P=0
DO 5 L=1,I0
JP=(5*L)-4
JS=5*L
11 WRITE(6,6)(J,J=JP,JS),(JA(J),J=JP,JS),(JB(J),J=JP,JS),(JC(J),J=
1JP,JS)
6 FORMAT(//,1X,'SPLINE=ORDEM',3X,5(I2,18X),//,14X,5('A(',I2,')')=','F
112.4,2X)//,1X,'COEFICIENTES=',5('B(',I2,')')=','F12.4,2X)//,14X,5('C
2(',I2,')')=','F12.4,2X))
IF(P)/8,7
9 IF(L-10)5,9,7
9 IF(CFIN-N)10,7,7
10 JP=ICFIN+1
JS=(I4+1)*5
P=P+1
GO TO 11
5 CONTINUE
7 WRITE(6,40)
40 FORMAT(1,'10X',VI, VALORES DE ALFA E BETA
1X,'ALFA(DADO BETA)',5X,'NUM.AL.(ALFA)',5X,'NUM.AL.(BETA)',4X,'NUM
2ERO DE ITERACOES (METODO DE NEWTON)',//)
DO 16 JK=1,M
R=RANDOM(Z)
DO 17 KJ=2,N
IF(CH-Y(KJ))18,18,17
18 BUND=(R(KJ))*2-(4.*C(KJ))*A(KJ)*R)
DISCM=SQRT(ARSHUND)
BETACKJ=(-R(KJ)+DISCH)/(2.*C(KJ))
GO TO 38
17 CONTINUE
38 RR=RANDOM(ZZ)
2004 DO 500 I=1,M2
II=1+I
SUM=0
DO 501 J=1,KAR
FATEL1
DO 502 L=1,J
FAFEF=L
501 SUM=SUM+((X(I)**J)/FATEL)
SUMA=SUM+1.
QP=DEXP(X(I))
BA=1./QP
DE=X(I)**KAB
BTEB=SUMA
GO=BA*ME
X(I)=X(I)+((RI-RR)*FAT)/80
503 EMQJM=DARS(X(I+1)-X(I))/X(I+1)
IF(ERROR-V)505,500,500
500 CONTINUE
WRITE(6,100)
100 FORMAT(/,20X,'***NUMERO DE ITERACOES ESGOTADO***',)
GO TO 310
505 ISM=II
VALUM=X(ISA)

```

C 0021009C14
C 0021009E10
C 0021009F13
C 002100A110
C 002100A114
C 002100A414
C 002100A812
C 002100A910
C 002100AA10
C 002100AA14
C 002100AD13
C 002100CC11
C 002100D312
C 002100D312
C 002100D312
C 002100D413
C 002100D715
C 002100D914
C 002100DC15
C 002100DE10
C 002100DE13
C 002100E114
C 002100E810
C 002100EA11
C 002100EF15
C 002100F114
C 002100F315
C 002100F712
C 002100F913
C 002100FF11
C 002100FC10
C 002100FD12
C 002100FE14
C 002100FF13
C 0021010110
C 0021010114
C 0021010110
C 0021010613
C 0021010C15
C 0021010E10
C 0021011012
C 0021011113
C 0021011414
C 0021011610
C 0021011712
C 0021011815
C 0021012010
C 0021012110
C 0021012311
C 0021012712
C 0021012715
C 0021012814

```

SUMT=0
DO 37 ITO=1,N1
  37 SUMT=SUMT+(1(ITO))*BETA(JK)
  2003 XJR=(1./BETA(JK))*(ALOG(SUMT)-ALOG(VALOR))
  ALFA(JK)=XJR(XUR)
  XREF=XFAT*BETA(JK)
  ARUC=0
  DO 601 KRA=1,N1
    601 XHUC=XHUC+(KRA)**BETA(JK)
    PIAB=BETA(JK)**KRA
    XPT1=ALFA(JK)**KRA
    XPT2=(1./XPT1)
    XPT3=DEXP(XPT2*XHUC)
    XPT4=PIAB*XREF*XPT3
    XPT5=XBETA(JK)*1.
    XPT6=ALFA(JK)**XPT5
    PI(JK)=(XPT4/XPT6)*CONST
  16 CONTINUE
  905 CALL ORD(PI,M,HMIN,HMAX)
  310 IBI=(1.-SIGN)*M
  PIVOT=PI(IBI)
  IPONT=0
  DO 1001 JK=1,M
    XREF=XFAT*BETA(JK)
    XHUC=0
    DO 701 KRA=1,N1
      701 XHUC=XHUC+(KRA)**BETA(JK)
      PIAB=BETA(JK)**KRA
      XPT1=ALFA(JK)**KRA
      XPT2=(1./XPT1)
      XPT3=DEXP(XPT2*XHUC)
      XPT4=PIAB*XREF*XPT3
      XPT5=XBETA(JK)*1.
      XPT6=ALFA(JK)**XPT5
      PI(JK)=(XPT4/XPT6)*CONST
    IF(PI(JK)=PIVOT)1001,1002,1002
  1002 IPONT=IPONT+1
  ALFA(IPONT)=ALFA(JK)
  BETA(IPONT)=BETA(JK)
  YFAL(IPONT)=(BETA(IPONT)*(TEMPO*(BETA(IPONT))-1.))/(ALFA(IPONT)**
  18BETA(IPONT))
  1001 CONTINUE
  CALL XIWDTF(ALFA,BETA,IPONT,HINF,BSUP,XINAL,XINBE,XAXAL,XAXBZ)
  WRITE(6,1003)TEMPO,SIGN
  1004 FURMAT(1./10,7X,INTERVALO DE CONFIANCA PARA A TAXA DE FALHAS
  1./10X,TEMPO,E10.4//10X,NIVEL DE SIGNIFICANCIA,E10.4)
  FATOR=0.05
  AMINI=XINAL-(XINAL*FATOR)
  AMAXI=XINAL+(XINAL*FATOR)
  BMINI=XINBE-(XINBE*FATOR)
  BMAXI=XINBE+(XINBE*FATOR)
  AIAL=AMAXI-AMINI
  AIBE=BMAXI-BMINI
  WRITE(6,1003)BINF,BSUP,XINAL,XINBE,XAXAL,XAXBZ,AMINI,AMAXI,BMINI,B
  1005 FURMAT(1009.4)
  CALL BUSCA(AMINI,BMINI,AIAL,AIBE,100,100,XFAT,N1,T,K,PIVOT,CONST)
  TEMPO=PIVOT
  CALL JRD(TE,ICONT,HMIN,HMAX)
  IF(HMIN-HINF)1009,1010,1010
  1009 WRITE(6,1011)HMIN,(ETA(J),J=1,6)

```

```

C 002:012A:1
C 002:012A:5
C 002:012C:0
C 002:0132:3
C 002:0137:0
C 002:0139:1
C 002:013C:3
C 002:013D:2
C 002:013E:0
C 002:0144:3
C 002:0147:4
C 002:014H:3
C 002:014C:5
C 002:014E:5
C 002:015D:4
C 002:015J:1
C 002:0156:1
C 002:015B:5
C 002:015U:0
C 002:015D:5
C 002:015F:4
C 002:0161:1
C 002:0161:5
C 002:0163:0
C 002:016A:5
C 002:016B:0
C 002:016E:3
C 002:0171:4
C 002:0175:3
C 002:0176:5
C 002:017A:5
C 002:017A:4
C 002:017D:1
C 002:018D:1
C 002:0182:5
C 002:0183:5
C 002:0185:1
C 002:0187:2
C 002:0189:5
C 002:019D:2
C 002:0192:5
C 002:0195:0
C 002:019B:1
C 002:01A3:2
C 002:01A3:2
C 002:01A3:2
C 002:01A5:3
C 002:01A7:1
C 002:01A8:5
C 002:01AA:3
C 002:01AC:1
C 002:01AD:3
C 002:01AE:5
C 002:01BF:0
C 002:01C6:2
C 002:01C6:2
C 002:01C6:5
C 002:01C6:4
C 002:01D1:3
C 002:01D2:5

```

```
GO TO 1012
1010 WRITE(6,1011)BINP,(XER(I),I=1,6)
1012 AMIN2=AXAL*(XAXAL*FATOR)
      AMAX2=XXAL*(XAXAL*FATOR)
      UMIN2=XXHE*(XAXHE*FATOR)
      BMAX2=YAXHE*(XAXHE*FATOR)
      AIAL=AXX2-AMIN2
      AIRE=AXY2-BMAX1
      CALL HJSCAC(MIN2,UMIN2,AIAL*(BE,100,100,XFAT,NL,T,K),PIVOT,CONST,F
      TEMPO,IF,ICONT)
      CALL URD(TF,ICONT,MMIN,HMAX)
      IF(HMAX-BSUP)1017,1017,1018
1018 WRITE(6,1016)HMAX,(ETA(J),J=1,6)
      GO TO 1019
1017 WRITE(6,1016)BSUP,(XER(I),I=1,6)
      GO TO 1019
1011 FORMAT(12X,'LIMITE INFERIOR ',F14.7,2X,'(',',6A5,')')
1016 FORMAT(12X,'LIMITE SUPERIOR ',F14.7,2X,'(',',6A5,')')
1019 STOP
      END

FORMAT SEGMENT 003 IS 000E LONG.
FORMAT SEGMENT 005 IS 00AB LONG.
SEGMENT 002 IS 0268 LONG
```

START OF SEGMENT 000

```

SUBROUTINE CUMLCN,K,MAT,F1,F2,CONST,YFF
DIMENSION T(20),SUMT(200),Y(200),YF(200),YFF(200),Z(200),Z(200),P(2
IFCN=0)I2=11,I2
12 M4=M-2
M4=M-1
M4=M-1
EVEN=0
UDD=0
PRD=1.
ITT=ALOG10(F2)
DO 2 I=1,M
PP=ALOG10(PRDT)
DO 4 J=1,M
SUMT(J)=0
DO 3 I=1,N
R(I)=T(I)*F1/F2
Z(J)=((A-2)*(ALOG10(J)-ITT))+((J*PP)/F2)+(K*ALOG10(SUMT(J)))
P(J)=10**Z(J)
DO 100 L=1,M4+2
EVEN=EVEN+(4.*P(L))
DO 101 LL=2,M4+2
AREA=0
DO 102 M=1,LL
AREA=(EVEN+0.5)*P(M)/(3.*F2)
CONST=1./ARFA
WRITE(6,9053)AREA
9053 FORMAT(///,10X,'II. CONSTANTE DE NORMALIZACAO',//,14X,'VALOR',E
115.7)
DO 103 J=1,M
Y(J)=P(J)/AREA
YF(2)=((M*Y(1)+Y(2)))/(3.*F2)
DO 3 J=4,M+2
YF(J)=((Y(J-2)+4*Y(J-1)+Y(J)))/(3.*F2)
DO 10 J=4,M+2
YFF(J)=YFF(J-2)+YF(J)
WRITE(6,9054)
9054 FORMAT(1,/,10X,'III. PONTOS DA DENSIDADE E DISTRIBUICAO DE BETA'
1,///)
WRITE(6,202)
202 FORMAT(///,43X,'*****'//,47X,'X',5X,'
IDENSIDADE',6X,'F(X)',//,43X,'*****'//,47X,'X',5X,'
OU 200 J=2,4+2
X(J)=J/12.
200 WRITE(6,201)(X(J),Y(J),YFF(J))
201 FORMAT(5X,F5.3,3X,F9.7,3X,F9.7,/)
NPNON=6
WRITE(6,9055)
9055 FORMAT(1,/,10X,'IV. GRAFICOS',//)
WRITE(6,210)
210 FORMAT(///,42X,'PONTOS DA DENSIDADE MARGINAL DE BETA',//)
CALL SSGO1(X,Y,NPNON)
DO 211 J=1,M
WRITE(6,211)
211 Y(J)=YFF(J)
211 FORMAT(1,/,42X,'PONTOS DA FUNCAO DE DISTRIBUICAO DE BETA',//)
CALL SSGO1(X,Y,NPNON)
11 RETURN
END

```

```

C 000:0000:0
C 000:0000:0
C 000:0000:0
C 000:0001:1
C 000:0002:4
C 000:0004:0
C 000:0004:4
C 000:0005:2
C 000:0006:0
C 000:0007:3
C 000:0009:0
C 000:0009:5
C 000:0010:0
C 000:0011:3
C 000:0013:0
C 000:0017:4
C 000:001E:5
C 000:0026:4
C 000:002C:4
C 000:002E:0
C 000:0033:0
C 000:0034:0
C 000:0039:0
C 000:003C:4
C 000:003D:5
C 000:0044:2
C 000:0044:2
C 000:0044:2
C 000:0045:0
C 000:004A:1
C 000:004E:0
C 000:004F:0
C 000:0058:2
C 000:005A:2
C 000:005C:0
C 000:0063:2
C 000:0067:2
C 000:0067:2
C 000:0067:2
C 000:0068:2
C 000:0058:2
C 000:006H:2
C 000:006D:0
C 000:006F:1
C 000:007D:4
C 000:007E:3
C 000:0082:2
C 000:0082:2
C 000:0086:2
C 000:0086:2
C 000:0088:5
C 000:008A:0
C 000:008F:1
C 000:0093:2
C 000:0093:2
C 000:0095:5
C 000:0096:2

```

FORMAT SEGMENT 00E IS 0009 LONG.
FORMAT SEGMENT 00B IS 0062 LONG.
SEGMENT 00D IS 00B5 LONG

START OF SEGMENT 011

```

C 011:000010
C 011:000010
C 011:000010
C 011:000010
C 011:000010
C 011:000010
C 011:000015
C 011:000212
C 011:000315
C 011:000510
C 011:000610
C 011:000710
C 011:000F13
C 011:001015
C 011:001211
C 011:001215
C 011:001510
C 011:001515
C 011:001614
C 011:001712
C 011:001810
C 011:001A13
C 011:001C13
C 011:001F13
C 011:002015
C 011:002915
C 011:002A13
C 011:002H10
C 011:002C13
C 011:002011
C 011:003112
C 011:003714
C 011:003913
C 011:003A15
C 011:003A15
C 011:003D12
C 011:003F12
C 011:004013
C 011:004311
C 011:004314
C 011:004413
C 011:004610
C 011:004C11
C 011:004F11
C 011:005311
C 011:005510
C 011:005911
C 011:005H12
C 011:005D10
C 011:006411
C 011:006513
C 011:006911
C 011:007311
C 011:007811
C 011:007512
C 011:007811
C 011:007C10
C 011:007C14
C 011:008113
C 011:008613

```

```

SUBROUTINE SSLGDI(X,Y,NPUN)
DIMENSION X(1),Y(1),LINMAC(51),ORDABC(500,103),XNDME(7),YNDME(8),FU
INDME(42)
DATA XNDME,YNDME/1HA,1HR,1HC,1HT,1HS,1HS,1HA,1HD,1HR,1HE,1HE,1HN,
1HA,1HD,1HA/
CDD(S=101,
I=NDNPUN+2
JRD=CDDIS+2,
CDDIS=CDDIS-1,
DU 10 I=1,10RD
DU 10 J=1,10RD
ORDABC(I,J)=1H
YMAX=Y(1)
YMIN=Y(1)
ISS=0
SIGNAL=SIGM(1),X(1))
IF(SIGNAL,LF,0.) GO TO 12
IYEIXD=IORD
ISS=1
DU 20 I=1,NPUN
IF(X(I),FO,0.) GO TO 14
IF(1,EM,1,0R,ISS,EN,1) GO TO 16
SIGNAL=SIGM(I),X(I))
IF(SIGNAL,GT,0.) GO TO 16
IYEIXD=FLOAT(I-1)+X(I-1)/X(I)+X(I-1))*2.5
ISS=1
GO TO 16
IYEIXD=I+2
ISS=1
YMAX=MAX(YMAX,Y(I))
YMIN=MIN(YMIN,Y(I))
IF(YMIN,GT,0.) YMIN=0.
YINFER=MAX(YMIN
IXPUSI=(FLOAT(JORD)-7.)/2.*2.
IYPUSI=(FLOAT(JORD)-8.)/2.*2.
IF(YIN,GE,0.) GO TO 70
IYEIXD=YIN+CDDIS/YINFER*3.
GO TO 80
IYEIXD=3
DU 90 I=3,10RD
IF(I,NE,IYPOSTI,AND,I,LE,(IXPUSI*6)) ORDABC(I,1)=XNDME(I-IXPUSI+1)
ORDABC(I,3)=1HD
ORDABC(I,JRD)=1HD
IF(IYEIXD,GT,(JRD-2)) GO TO 90
ORDABC(I,IYEIXD)=1HI
CONTINUE
DU 100 J=3,JORD
IF(J,SE,IYPOSTI,AND,J,LE,(IYPOSTI*7)) ORDABC(I,J)=YNDME(J-IYPOSTI+1)
IF(J,EO,IYEIXD) GO TO 95
ORDABC(I,J)=1HD
ORDABC(IORD,J)=1HU
IF(IYEIXD,LE,NPUN) ORDARC(IYEIXD,J)=1H=
CONTINUE
IF(IYEIXD,LE,NPUN) ORDARC(IYEIXD,IYEIXD)=1HO
DEL=1.
DU 120 I=3,IQD
IF(Y(I-2),LT,0.) DEL=1.4
J=Y(I-2)-Y(I)*CDDIS/YINFER+DEL*2.
ORDABC(I,J)=1H=

```



```

C 011:00C2:0
  START OF SEGMENT 013
C 013:0000:0
C 013:0000:0
C 013:0000:0
C 013:0000:0
C 013:0001:2
C 013:0002:0
C 013:0003:0
C 013:0006:4
C 013:0009:0
C 013:000C:1
C 013:000E:1
C 013:000F:2
C 013:0011:3
C 013:0012:4
C 013:0014:1
C 013:0016:3
C 013:0017:0
  SEGMENT 013 IS 0020 LONG

```

```

C  SUBROUTINA DE ORDENACAD
  SUBROUTINE ORD(A,M,HMIN,HMAX)
  DIMENSION A(1)
  DOUBLE PRECISION A
  NR=M-1
  4  IIT=0
     DO 1 I=1,MN
     IF(A(I)-A(I+1))1,1,2
  2  TP=A(I)
     A(I)=A(I+1)
     A(I+1)=TP
     IIT=IIT+1
  1  CONTINUE
     IF(IIT)4,3,4
  3  HMIN=A(1)
     HMAX=A(N)
     RETURN
  END

```

SUBROTINA DE BUSCA
C 013:0020:0
START OF SEGMENT 014

SUBROUTINE BUSCA(XINAL,XINBE,AIAL,AIBE,IAL,IBE,XFAT,ANI,T,K,PIVOT,C
10MSI,TEMPO,TF,ICONT)
DIMENSION T(1),A(120),B(120),G(120),P(120),TF(10000),AV(120),HV(120)
DOUBLE PRECISION XFBEI,PIAR,XPT1,XPT2,XPT3,XPT4,XPT5,XPT6,Q1,TF,XF
1AT

KAN=K-1
FTAL=AIAL/IAL
FTHE=AIBE/IBE
ICA=IAL+1
IC9=IBE+1
ICONT=0
ITOT=0
DO 1 I=1,ICA
A(I)=XINAL*(I-1)*FTAL
DO 1 J=1,IC9
I(0)=IYOT+1
B(J)=XINBE*(J-1)*FTBE
XFBEI=XFAT*B(J)
XHUC=0

701 XHUC=XHUC+(T(KRA)*B(J))
PIAR=(C(J))*KAB
XPT1=A(I)*B(J)
XPT2=(1./XPT1)
XPT3=DEXP(XPT2*XHUC)
XPT4=PIAR*XFBET*XPT3
XPT5=(K+H(J))+1.
XPT6=A(I)*XPT5
IF(XPT5)>5.4

5 WRITE(6,6)A(I),B(J),XPT1,XPT2,XPT3,XPT4,XPT5,1,J
6 FORMAT(7F14.5,2I3)
GO TO 1
4 W(I,J)=(XPT4/XPT6)*CONST
IF(G(I,J)-PIVOT)1,2,2
2 AV(I)=A(I)
BV(J)=B(J)
ICONT=ICONT+1
TF(ICON)=B(J)*(TEMPO*(B(J)-1.))/(A(I)*B(J))

1 CONTINUE
WRITE(6,3)FTAL,IAL,FTHE,IBE
3 FORMAT('1',/10X,'1X,VALORES VIAVEIS DE ALFA E BETA= MET. DE BUSCA
1 SEQUENCIAL',/,'15X','FATOR DE NUM. DE',/,'15X','VARIACAO INTERVAL
2US',/,'7X','ALFA',/,'F9.4,7X,13,/,/,'7X','BETA',/,'F9.4,7X,13,/,/)
1 WRITE(6,100)ITOT
1001 FORMAT(5X,16)
RETURN
END

FORMAT SEGMENT 015 IS 0006 LONG.
FORMAT SEGMENT 010 IS 0030 LONG.
SEGMENT 014 IS 0096 LONG

```

SUBROTINA DE IDENTIFICACAO DOS ALFA E BETA OTIMOS
SUBROUTINE XIND(TFAL,ALFA,BETA,IPONT,BINF,BSUP,XINAL,XINHE,XAXAL,X
IAASE)
DIMENSION TFAL(1),ALFA(1),BETA(1)
DOUBLE PRECISION TFAL,ALFA,BETA
IN=IPONT-1
3 IND=0
DO 1 I=1,IN
1 IF(TFAL(I)-TFAL(I+1))1,1,2
2 TF=TFAL(I)
TA=ALFA(I)
TB=BETA(I)
TFAL(I)=TFAL(I+1)
ALFA(I)=ALFA(I+1)
BETA(I)=BETA(I+1)
TFAL(I+1)=TF
ALFA(I+1)=TA
BETA(I+1)=TB
IND=IND+1
1 CONTINUE
4 IF(IND).GT.4,3
XINAL=ALFA(1)
XINHE=BETA(1)
BSUP=TFAL(IPONT)
XAXAL=ALFA(IPONT)
XAYBE=BETA(IPONT)
RETURN
END.
C 014:0096:0
START OF SEGMENT 016
C 016:0000:0
C 016:0000:0
C 016:0000:0
C 016:0000:0
C 016:0001:2
C 016:0002:0
C 016:0003:0
C 016:0006:4
C 016:0009:0
C 016:000B:2
C 016:0000:4
C 016:00010:5
C 016:00014:0
C 016:00017:1
C 016:0001B:1
C 016:0001D:1
C 016:0001E:3
C 016:00020:4
C 016:0021:5
C 016:0023:2
C 016:0024:5
C 016:0026:2
C 016:0028:4
C 016:0020:2
C 016:0020:5
SEGMENT 016 IS 00JF LONG

```

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO

Considere-se os seguintes dados referentes a observações sobre o tempo de duração de um elemento:

$$t_1 = 38$$

$$t_2 = 88$$

$$t_3 = 96$$

$$t_4 = 118$$

$$t_5 = 118 \text{ (censurado)}$$

$$t_6 = 178$$

Observa-se que $n=6$ e $k=5$ e de acordo com a metodologia apresentada torna-se necessário calcular a "constante normalizadora" através do método de Simpson. O processo foi o seguinte:

- observou-se que para $\beta > 66$ os valores de $\frac{\beta^{k-2} (\sum t_i)^k}{(\sum t_i^\beta)^k}$ tendiam a zero e portanto considerou-se $[0,66]$ como o intervalo de integração. Deve ser ressaltado o fato que foi feito o teste com várias amostras e foi verificada esta mesma tendência. Não obstante, tal intervalo de integração pode variar e o limite superior pode ser al-

terado. Em termos de programação isto implica em trocar o parâmetro 66 da declaração CALL CUML (programa principal) por um valor $R > 66$ e fazer N (parâmetro de entrada) = $R/2$, onde R deve ser um valor par.

- considerou-se intervalos de amplitude $1/12$, os quais resultaram em satisfatórias aproximações a um nível de 4 decimais.

O valor de tal integral foi $0,270879 \times 10^{-3}$ e permitiu dessa forma a obtenção dos pontos da densidade marginal de β . Com base nestes, foi novamente aplicado o método de Simpson, a fim de se calcular a área compreendida entre cada três pontos da função de densidade. A soma dessas áreas resultou nos pontos da distribuição acumulada, os quais foram conseqüentemente em número de 33. Em seguida foram calculados os 33 "Splines" ajustantes; os quais permitiram a geração aleatória das variáveis β .

O próximo passo foi o de gerar variáveis aleatórias α a partir das β e isto necessitou do método de Newton para a obtenção de raízes de uma equação. Foi usado 5 como valor inicial para a aplicação do método, o qual apesar de testado para diversas amostras, pode ser modificado para o particular problema em questão. Como dito na parte anterior, isto equivale em termos de programação a mudar o valor da variável $X(1)$ (no programa principal). Usou-se 0,01 como o máximo erro relativo admissível, isto é: $\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < 0,01$.

Com os valores gerados de (α, β) , foi feito o cálculo das densidades conjuntas $\pi(\alpha, \beta/t)$, as quais foram em seguida ordenadas e calculado então qual o valor de $\pi_{(1-\gamma)^M}(\alpha, \beta/t)$, onde γ é o nível de significância, o qual foi feito aqui igual a 0,90. O valor de M (número de valores aleatórios gerados) foi aqui considerado como 1000, o qual com base nos testes, provou satisfazer a condição de "espalhamento".*

A etapa seguinte consistiu em fazer a pesquisa por pontos e a busca sequencial, da seguinte maneira:

- foram separados todos os pontos (α, β) tais que $\pi(\alpha, \beta/t) \geq \pi_{(1-\gamma)^M}$, os quais formam a região viável.
- com os pontos da região viável, determinou-se o máximo e o mínimo de $h(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}$, onde t (tempo) foi aqui tomado como 100. Sejam $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ os pontos de máximo e $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ os pontos de mínimo.
- considerou-se um retângulo da forma $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha} \pm 0,05\bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \pm 0,05\bar{\beta} \end{array} \right.$ para os pontos de máximo e $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} \pm 0,05\underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \pm 0,05\underline{\beta} \end{array} \right.$ para os pontos de mínimo. Tais segmentos foram divididos em 50 pontos cada, sendo assim considerados 2500 pontos dentro de cada retângulo. Isto permitiu obter valores ainda mais aproximados perto dos máximos e mínimos obtidos pela pesquisa dos pontos.

* Significa que os pontos gerados "cobrem" todo o espaço da variável aleatória, não havendo desse modo, perigo de tendenciosidade em uma dada região.

Desse modo foi obtido o intervalo de confiança ao nível de 0,90 de significância, que foi $[0,453648 \times 10^{-2}; 0,3392632 \times 10^{-1}]$.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para este exemplo, na forma estabelecida pelo programa FORTRAN elaborado:

I. DADOS DE ENTRADA

N= 33
 M= 600
 N1= 6
 K= 5
 M2= 50
 F1= 2.000
 F2= 12.000
 Z= 137.400
 ZZ= 274.220
 V= 0.010
 TEPD= 100.000
 SIGN= 0.900
 RESERVACOES: T(1)= 38.00 T(2)= 86.00 T(3)= 96.00 T(4)= 118.00 T(5)= 178.00 T(6)= 118.00

II. CONSTANTE DE NORMALIZACAO

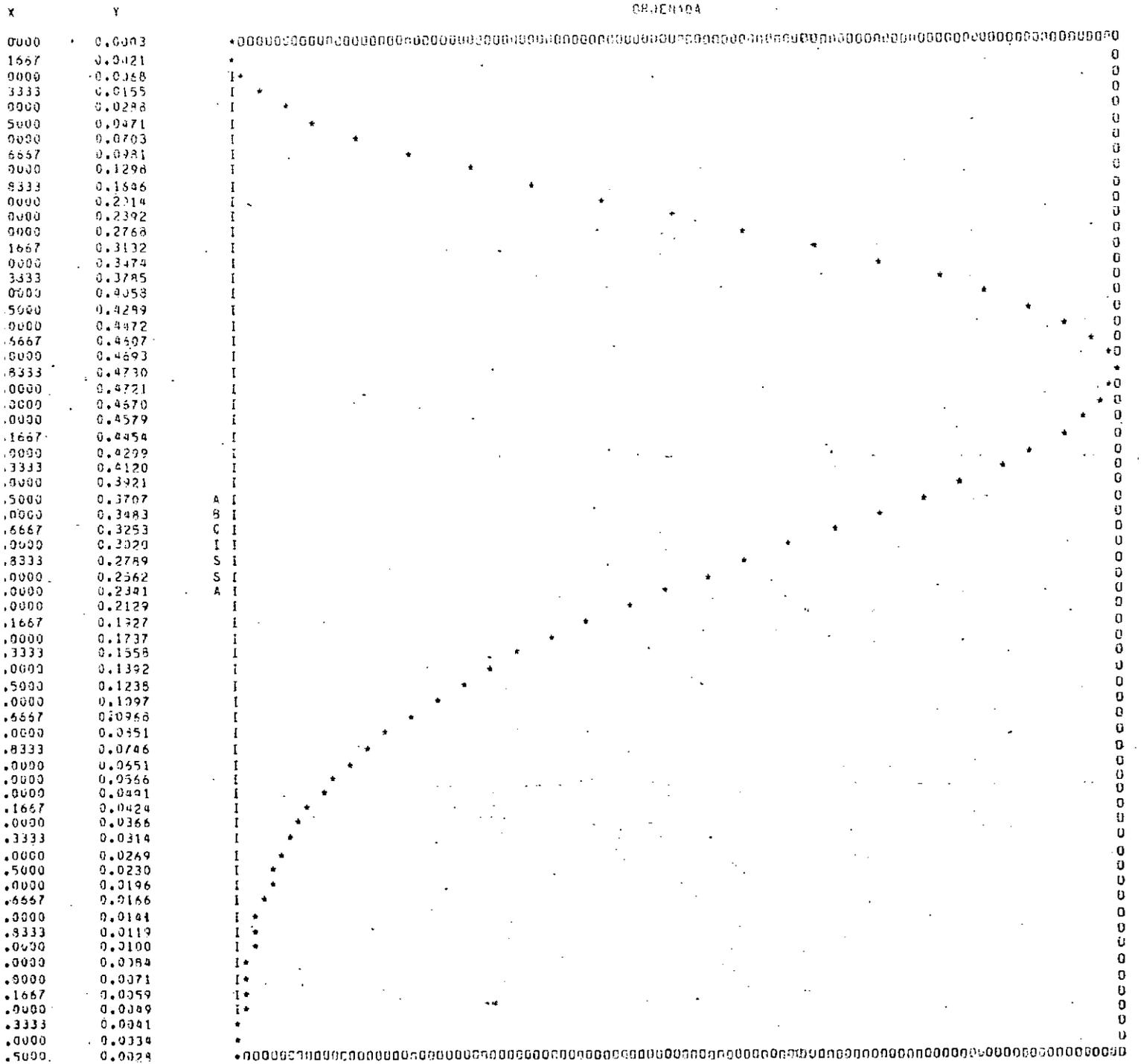
VALOR .2708791E-03

III. PONTOS DA DENSIDADE E DISTRIBUICAO DE META

X	DENSIDADE	F(X)
0.167	0.0020926	0.0000880
0.333	0.0158604	0.0013340
0.500	0.0470971	0.0062734
0.667	0.0941158	0.0161206
0.833	0.1646106	0.0398445
1.000	0.2392095	0.0739433
1.167	0.3132126	0.1195465
1.333	0.3745023	0.1773600
1.500	0.4236806	0.2448312
1.667	0.4607234	0.3192858
1.833	0.4730215	0.3973659
2.000	0.4669849	0.4759383
2.167	0.4454112	0.5521629
2.333	0.4119930	0.6237502
2.500	0.3706936	0.6890564
2.667	0.3252611	0.7470861
2.833	0.2789077	0.7974269
3.000	0.2341442	0.8401449
3.167	0.1927424	0.8756629
3.333	0.1557881	0.9046405
3.500	0.1237876	0.9278683
3.667	0.0968005	0.9461322
3.833	0.0745689	0.9603997
4.000	0.0566376	0.9712775
4.167	0.0424497	0.9794869
4.333	0.0314193	0.9856028
4.500	0.0229814	0.9901039
4.667	0.0166228	0.9933787
4.833	0.0118972	0.9957354
5.000	0.0084305	0.9974102
5.167	0.0059180	0.9985985
5.333	0.0041174	0.9994263
5.500	0.0028407	1.0000000

IV. GRAFICOS

PONTOS DA DENSIDADE MARGINAL DE META



V. DETERMINAÇÃO DOS SPLINES AJUSTANTES

SPLINE-ORDEM	1	2	3	4	5
A(1)=	0.0000	A(2)=	0.0010	A(3)=	0.0072
A(4)=	0.0221	A(5)=	0.0431		
COEFICIENTES-B(1)=	0.0000	B(2)=	-0.0118	B(3)=	-0.0491
B(4)=	-0.1488	B(5)=	-0.1717		
C(1)=	0.0032	C(2)=	0.0365	C(3)=	0.0945
C(4)=	0.1542	C(5)=	0.2613		
SPLINE-ORDEM	6	7	8	9	10
A(6)=	0.0503	A(7)=	0.0582	A(8)=	0.0222
A(9)=	-0.0569	A(10)=	-0.1851		
COEFICIENTES-B(6)=	-0.2133	B(7)=	-0.2017	B(8)=	-0.1470
B(9)=	-0.0254	B(10)=	0.1429		
C(6)=	0.2262	C(7)=	0.2280	C(8)=	0.1475
C(9)=	0.1519	C(10)=	0.0959		
SPLINE-ORDEM	11	12	13	14	15
A(11)=	-0.3501	A(12)=	-0.5356	A(13)=	-0.7238
A(14)=	-0.8199	A(15)=	-1.0194		
COEFICIENTES-B(11)=	0.3409	B(12)=	0.5433	B(13)=	0.7314
B(14)=	0.8148	B(15)=	0.9956		
C(11)=	0.0365	C(12)=	-0.0147	C(13)=	-0.0658
C(14)=	-0.1012	C(15)=	-0.1250		
SPLINE-ORDEM	16	17	18	19	20
A(16)=	-1.0948	A(17)=	-1.1146	A(18)=	-1.0731
A(19)=	-0.9226	A(20)=	-0.8453		
COEFICIENTES-B(16)=	1.0560	B(17)=	1.0709	B(18)=	1.0016
B(19)=	0.9213	B(20)=	0.8946		
C(16)=	-0.1370	C(17)=	-0.1308	C(18)=	-0.1326
C(19)=	-0.1246	C(20)=	-0.1109		
SPLINE-ORDEM	21	22	23	24	25
A(21)=	-0.6612	A(22)=	-0.4935	A(23)=	-0.3038
A(24)=	-0.1109	A(25)=	0.0657		
COEFICIENTES-B(21)=	0.7961	B(22)=	0.6059	B(23)=	0.5854
B(24)=	0.4287	B(25)=	0.3965		
C(21)=	-0.0961	C(22)=	-0.0808	C(23)=	-0.0667
C(24)=	-0.0536	C(25)=	-0.0425		
SPLINE-ORDEM	26	27	28	29	30
A(26)=	0.2335	A(27)=	0.3755	A(28)=	0.5056
A(29)=	0.6075	A(30)=	0.7000		
COEFICIENTES-B(26)=	0.3159	B(27)=	0.2504	B(28)=	0.1926
B(29)=	0.1489	B(30)=	0.1106		
C(26)=	-0.0328	C(27)=	-0.0253	C(28)=	-0.0189
C(29)=	-0.0142	C(30)=	-0.0102		
SPLINE-ORDEM	31	32	33	34	35
A(31)=	0.7661	A(32)=	0.8222	A(33)=	0.8668
A(34)=	0.0000	A(35)=	0.0000		
COEFICIENTES-B(31)=	0.0942	B(32)=	0.0601	B(33)=	0.0456
B(34)=	-0.0000	B(35)=	0.0000		
C(31)=	-0.0076	C(32)=	-0.0053	C(33)=	-0.0039
C(34)=	0.0000	C(35)=	0.0000		

INTERVALO DE CONFIANCA PARA A TAXA DE FALHAS

TEMPO .1000E+03
NIVEL DE SIGNIFICANCIA .9000E+00

VALORES VIAVEIS DE ALFA E BETA- MET. DE BUSCA SEQUENCIAL

	FATOR DE VARIACAO	NUM. DE INTERVALOS
ALFA	0.4433	50
BETA	0.0027	50

LIMITE INFERIOR .4536480E-02 (VALOR APOS A BUSCA SEQUENCIAL)

VALORES VIAVEIS DE ALFA E BETA- MET. DE BUSCA SEQUENCIAL

	FATOR DE VARIACAO	NUM. DE INTERVALOS
ALFA	0.1753	50
BETA	0.0215	50

LIMITE SUPERIOR .3392632E-01 (VALOR APOS A BUSCA SEQUENCIAL)

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Serão apresentadas aqui algumas considerações julgadas importantes a respeito do trabalho apresentado. Alguns pontos, apesar de já terem sido observados no decorrer do mesmo, serão aqui lembrados, tendo em vista a sua relevância para o estudo.

Um aspecto merecedor de atenção refere-se à censura sobre as observações. Como pode ser depreendido, este é um ponto bastante importante de um estudo que abranja observações sobre uma variável aleatória como o tempo de duração do elemento. Tal importância decorre da frequência com que a censura ocorre no trabalho de observação de hoje em dia. Assim sendo, visto que a este aspecto não tem sido dada a relevância devida, procurou-se considerá-lo aqui neste trabalho. Como mencionado no trabalho, será utilizada neste caso, a censura de tipo II, visto que a mesma possibilita a análise do resultado obtido, com relação à repetição do experimento. Contudo, para se aplicar apenas o processo Bayesiano na determinação de intervalo de confiança, pode-se utilizar quaisquer dos tipos de censura apresentados.

Uma observação deve ser feita também com a distribuição a-priorística adotada. Da mesma forma que o tipo de censura utilizado, podem ser usadas outras distribuições "a priori" que não $g(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta}$.

Apenas deve ser observado que, no caso de se utilizar outras distribuições "a priori" para os parâmetros α e β , não há a garantia de se poder interpretar o intervalo Bayesiano por um ponto de vista Clássico. Entretanto, em não se desejando proceder tal análise, pode-se usar quaisquer distribuições apriorísticas para (α, β) e aplicar o método aqui proposto, pois a influência principal de $g(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta}$ no processo é sentida no teorema de Hora & Buehler, ao se determinar a densidade fiducial dos parâmetros (θ, σ) . Além disso, deve ser ressaltado que tal distribuição "a priori" também denota um estado de falta de informação com relação ao comportamento dos parâmetros da distribuição de Weibull.

Deve também ser notado que a metodologia aqui apresentada referiu-se à Distribuição de Weibull, devendo porém ser lembrada a correspondência existente entre esta e a do Valor Extremo através das transformações bi-unívocas tanto sobre a variável aleatória, como também sobre os parâmetros.

Como pode ser depreendido da leitura do trabalho, utilizou-se a "taxa de falhas" como a função a ser aqui estimada. Contudo, várias outras funções dos parâmetros da distribuição de Weibull são passíveis de sofrer idêntico processo de estimação. Assim sendo, pode-se inferir a respeito da média, variância, função de confiabilidade, etc. Este é um aspecto bastante importante do trabalho, visto que permite estimar várias funções de relevância da distribuição estatística de Weibull, a partir de uma amostra da mesma. Além do mais, são estimativas que utilizam o maior

possível das informações amostrais (aqui o conceito de estatísticas suficientes) e portanto possibilitam "reproduzir" de uma maneira bastante fidedigna, o comportamento populacional da distribuição. Deve também ser lembrado que os métodos clássicos conhecidos não fornecem intervalos baseados em estatísticas suficientes para o caso da lei de falhas de Weibull.

Como poderá ser visto no Apêndice C, o intervalo Bayesiano aqui obtido possui a propriedade "frequentista" e isto é talvez o mais importante resultado do presente trabalho. De acordo com a simulação realizada, o intervalo obtido ao nível de significância γ realmente contém a taxa de falhas real em $\gamma\%$ das repetições do experimento e isto é exatamente a propriedade da frequência relativa ("frequentista"), ou seja, os limites de confiança apesar de Bayesianos, são passíveis de sofrer uma interpretação pelo método Clássico. Isto é ainda mais interessante, pelo fato do Teorema de Hora & Buehler não garantir tal propriedade, como foi visto no Capítulo II, pois a função correspondente à taxa de falhas não era invariavelmente estimável. No Apêndice C serão mostrados os procedimentos bem como os testes de hipóteses simples e sequencial que levaram a constatar a propriedade "frequentista" do resultado. Tal fato pode ter se devido por não utilizarem-se aqui de métodos analíticos comuns, mas de simulação, a qual representa uma outra abordagem ao problema. Os testes realizados revelaram a propriedade "frequentista" a níveis de 0,99 e 0,95 de significância, mostrando dessa forma resultados "exatos" (ou seja, que se compatibilizam com a abordagem estatística clássica). Contudo, apesar de se ter determinado um processo que conduziu a resultados "exatos" (no sen

tido de sofrerem interpretações Clássica e Bayesiana), deve apenas ser observado que o Teorema de Hora & Buehler, bem como a teoria afim (a qual por ser relativamente recente não tem sido ainda devidamente aprofundada) devem ser objeto de um mais rigoroso estudo.

Finalmente, pretende-se que o presente trabalho constitua uma contribuição para o campo da Teoria da Confiabilidade de Sistemas, por permitir a estimação de funções de Weibull através de observações amostrais e também contribua para o campo da Inferência Estatística, por ser um método que conduz a limites de confiança baseados em estatísticas suficientes. Também pretende-se aqui que este trabalho constitua uma motivação para se investigar mais profundamente a respeito do problema de estimação estatística, especialmente no tocante à distribuição de Weibull, a fim de se obter cada vez mais, maior fidedignidade nos métodos científicos de estimação.

AGRADECIMENTOS

Tal trabalho certamente não poderia ter sido feito sem o notável apoio do Dr. David Allen Bogdanoff, o qual foi sempre um excelente orientador em todo o estudo realizado. Também devem ser feitos agradecimentos à Direção Geral do INPE na pessoa do Dr. Fernando de Mendonça, cujo interesse pela pesquisa pura e aplicada permitiu esta realização.

Finalmente agradeço ao Coordenador de Projetos de Pesquisas em Análise de Sistemas e Computação, Dr. Celso de Renna e Souza, ao Dr. Carlos José Zamlutti, ao Dr. Ralf Gielow e a toda a equipe da Secretaria Geral, especialmente a Teresa Tokiko Takahashi e a Aparecida dos Santos pela eficiência com que foi preparado este documento.

BIBLIOGRAFIA

- BAZOVSKY, I. - *Reliability Theory and Practice*. New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1961.
- BOGDANOFF, D.A.; PIERCE, D.A. - "Bayes-Fiducial Inference for the Weibull Distribution." *J. Amer. Stat. Assoc.*, 68 (343): 659-664, Sept 1973.
- BOGDANOFF, D.A.; PIERCE, D.A. - "A Note on Bayes-Fiducial Intervals for Problems of Location and Scale." *Ann. Math. Stat.*, 42: 833-837, Apr. 1971.
- CONTE, S.D. - *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1965.
- COUTINHO, A.A.V. et al - *Algoritmos de Programação Não Linear*. São José dos Campos, INPE, jun. 1974. (LAFE-596, vol. VI)
- DIXON, W.J.; MASSEY, F.J. - "Sequential Analysis". In ———. *Introduction to Statistical Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 304-317, 1957.
- GNEDENKO, B.V. et al - "Characteristics of Reliability". In ———. *Mathematical Methods of Reliability Theory*. New York, Academic Press, Inc., 69-142, 1969.

HAYS, W.L.; WINKLER, R.L. - "Bayesian Inference." In ———. *Statistics, Probability, Inference and Decision*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 444-504, 1970.

HORA, R.B., BUEHLER, R.J. - "Fiducial Theory and Invariant Estimation." *Ann. Math. Stat.*, 37: 643-656, jun. 1966.

KENDALL, M.G.; STUART, A. - "Interval Estimation: Fiducial Intervals." In ———. *The Advanced Theory of Statistics*. London, Charles Griffin & Co. Limited, 134-158, 1967.

LANCZOS, C. - *Applied Analysis*. Prentice-Hall, Inc.

LEABO, D.A. - "Test of Hypothesis". In ———. *Basic Statistics*. Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 241-279, 1972.

MEYER, P.L. - *Probabilidade, Aplicações à Estatística*. Trad. de Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1969.

MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A. - *Introduction a la Teoria de la Estadística*. Trad. de Rafael Pro Bermejo. Madrid, Aguilar S.A., 1972.

NAYLOR, T.H. et al - *Técnicas de Simulação em Computadores*. Trad. de Edmundo Emanuel Teixeira. Petropolis, Editora Vozes Ltda., 1971.

PACITTI, T. - *FORTRAN-Monitor, Principios.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1967.

PARZEN, E. - "The Exponential and Gamma Probability Laws." In ———.
Modern Probability Theory and Its Applications. Canada, John Wiley & Sons, Inc., 260-263; 1960.

APÊNDICE A

ESTATÍSTICA BAYESIANA

O Método Bayesiano consiste basicamente na utilização de informações provenientes de amostras e daquelas oriundas de quaisquer outras fontes, para as suas inferências. Desse modo, tal método induz o conceito de probabilidade subjetiva, a qual se refere àquela baseada não em frequência relativa, mas em julgamentos pessoais, experiência do indivíduo, etc.

Observa-se dessa maneira que o Método Bayesiano difere do clássico (ou seja, o baseado na Estatística Clássica) nos aspectos referentes à informação utilizada, pois, enquanto o último pressupõe a idéia de repetições de eventos, o primeiro não o faz. Desde que o Método Bayesiano utiliza tanto a informação amostral como as provenientes de outras fontes, é considerado por alguns autores como uma extensão do Método Clássico.

A origem do Método Bayesiano remonta ao século XVIII, quando foi descoberto o teorema de Bayes. Tal teorema constitui o fundamento deste "approach", e pode ser enunciado como segue: *Se A_1, A_2, \dots, A_J representa um conjunto de J eventos mutuamente exclusivos, tal que*

$$P(B) \leq \sum_{j=1}^J P(A_j) , \quad \text{então,}$$

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k) P(A_k)}{\sum_{j=1}^J P(B/A_j) P(A_j)}$$

Observa-se que o teorema de Bayes pode ser usado para revisar a probabilidade de um evento. Da mesma forma, pode ser aplicado a variáveis aleatórias e conseqüentemente a parâmetros de uma distribuição:

$$P(\theta = \theta_k/Y = B) = \frac{P(Y = B/\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)}{\sum_{j=1}^J P(Y = B/\theta = \theta_j) P(\theta = \theta_j)}$$

Para o caso de variáveis e/ou parâmetros contínuos, o teorema pode ser aplicado, observando-se a utilização da integral e das funções de densidade.

A probabilidade inicial de um evento (por exemplo $P(\theta = \theta_k)$) é chamada probabilidade "a priori" e a revisada (no caso $P(\theta = \theta_k/Y = B)$) é denominado probabilidade "a posteriori". Observa-se que o uso de tal teorema permite melhorar a informação anterior.

MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO POR INTERVALO

1. Método Clássico - Em linhas gerais, o método clássico pressupõe a possibilidade de repetição do experimento e o significado de um intervalo de confiança para um parâmetro a um nível de significan

cia γ é: "O intervalo conterá o verdadeiro valor do parâmetro populacional em no mínimo $\gamma\%$ dos experimentos".

2. Método Bayesiano - Tal método determina uma distribuição "a posteriori" para o parâmetro e a partir daí, um intervalo para o mesmo. Não há necessariamente a pressuposição de repetição do experimento e a interpretação do intervalo obtido em um nível γ é: "A probabilidade do parâmetro populacional pertencer ao intervalo é γ ".
3. Método Fiducial - Consiste em igualar a distribuição do parâmetro populacional à distribuição de uma estatística suficiente deste parâmetro. Seleciona então valores arbitrários v_1 e v_2 e os considera como valores críticos no sentido de que qualquer valor aceitável do parâmetro populacional não deve dar à estatística observada, uma probabilidade menor que v_1 ou maior que v_2 .

Em alguns casos, o Método Fiducial fornece os mesmos resultados do Método Clássico. Porém, enquanto o "approach" clássico afirma que o intervalo contém o parâmetro populacional em $\gamma\%$ dos experimentos, "a longo prazo", o fiducial afirma que o intervalo contém o parâmetro com $\gamma\%$ de confiança "neste caso particular".

TEORIA DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

A Teoria da Confiabilidade de Sistemas trata do estudo relativo ao tempo de duração de um determinado elemento ou todo um complexo de elementos, os quais constituem um sistema. Os sistemas podem ser de natureza mecânica, elétrica, humana, etc. Para qualquer elemento, é definido um estado chamado "falha", o qual corresponde ao ponto em que o mesmo deixa de funcionar. Por exemplo, a quebra de uma viga, a queima de um combustível, etc.

Em termos globais, a confiabilidade é a capacidade do elemento não falhar quando posto em operação. Representa assim, a probabilidade de um desempenho satisfatório em um determinado intervalo de tempo. Matematicamente, pode ser caracterizada como:

$$R(t) = P[T > t],$$

onde T é uma variável aleatória que representa o tempo de duração (ou a "vida") do elemento.

Assim, se f representa a função de densidade da variável T ,

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x) dx = 1 - \int_0^t f(x) dx = 1 - P[T \leq t] = 1 - F(t),$$

onde F é a função de distribuição de T .

Considere-se a seguinte probabilidade: $P\left[t \leq T \leq t + \Delta t / T > t\right]$, a qual pode ser desenvolvida como -

$$P\left[t \leq T \leq t + \Delta t / T > t\right] = \frac{P\left[t < T \leq t + \Delta t\right]}{P\left[T > t\right]} = \\ = \frac{1}{R(t)} \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx = \frac{1}{R(t)} \Delta t f(z),$$

onde $t \leq z \leq t + \Delta t$

Para Δt pequeno, tem-se

$$\frac{1}{R(t)} \Delta t f(z) = \frac{1}{R(t)} \Delta t f(t) = \Delta t \frac{f(t)}{R(t)}.$$

A expressão $h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ é denominada "taxa de falhas" e quando multiplicada por Δt representa uma aproximação à proporção de elementos que falharão entre t e $t + \Delta t$, dentre aqueles que funcionavam em t .

Um aspecto merecedor de atenção refere-se a escolha da distribuição estatística que será associada ao tempo de duração de um particular elemento. Inicialmente deve ser considerado que o estudo relativo

ao tempo de vida de um elemento deve ser representado por um modelo probabilístico, desde que, por influências aleatórias, idênticos elementos sujeitos aos mesmos esforços, falharão em tempos diferentes e imprevisíveis. Existem várias distribuições estatísticas que vem sendo objeto de estudo sobre a lei de falhas e as principais são:

. Distribuição Normal:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \text{EXP} \left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

A lei de falhas normal representa a situação onde a maior proporção de falhas ocorre em torno do tempo médio de duração e tal proporção decresce simetricamente à medida que aumentam os desvios em torno desse valor médio.

. Distribuição Exponencial:

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Tal modelo apresenta a particular característica de $h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha$, ou seja, ter uma taxa de falhas constante. Isto significa que a probabilidade de um elemento falhar é dependente apenas da amplitude do intervalo e não do tempo considerado, isto é, o elemento é considerado como novo durante todo o tempo em que estiver funcionando. Aplica-se basicamente a fenômenos onde não existe o efeito do desgaste.

Distribuição de Weibull:

$$f(t) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right] / \alpha^\beta$$

Possui uma taxa de falhas bastante "flexível", pois a mesma pode ser constante, crescente ou decrescente de acordo com os valores assumidos pelo parâmetro β . Como se depreende da função de densidade, a distribuição de Weibull pode assumir várias formas dependendo dos valores dos parâmetros α e β . Por exemplo para $\beta = 1$, tal representa uma distribuição exponencial.

Além dos modelos apresentados acima existem vários outros os quais podem também representar a confiabilidade de elementos para particulares características dos mesmos.

DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DA VARIÁVEL ALEATÓRIA DE WEIBULL

Seja T uma variável aleatória representativa do tempo de duração de um elemento tal que:

$$f(t) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right] / \alpha^\beta, \text{ para } t > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx = 1 - \text{EXP}\left[-(t/\alpha)^\beta\right]$$

Assim,

$$R(t) = 1 - F(t) = \text{EXP} \left[-(t/\alpha)^\beta \right] \quad \text{e}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta t^{\beta-1} \text{EXP} \left[-(t/\alpha)^\beta \right] / \alpha^\beta}{\text{EXP} \left[-(t/\alpha)^\beta \right]} \quad \therefore \quad h(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}$$

A taxa de falhas associada à distribuição de Weibull, varia de acordo com os valores de β , segundo o esquema abaixo:

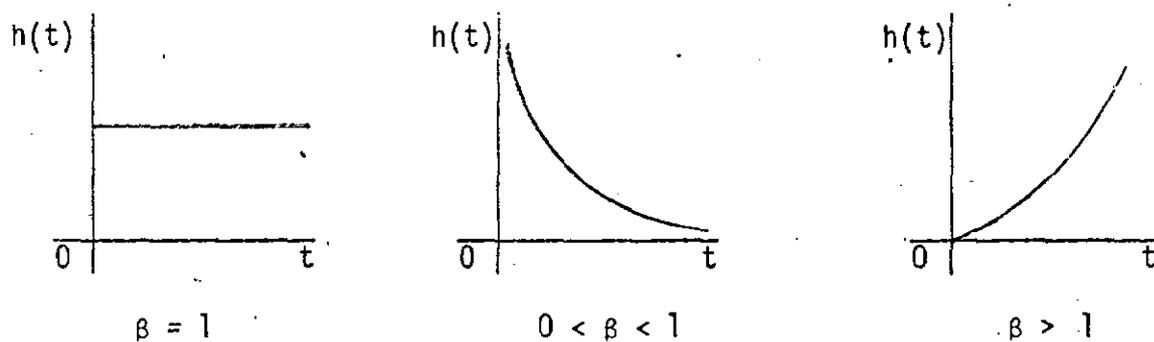


Fig. A.1 - Representação das diversas formas da função "taxa de falhas"

A distribuição estatística de Weibull apresenta diversas formas gráficas, dependendo dos valores de α e β . Considere-se a figura abaixo, onde são a apresentados alguns exemplos:

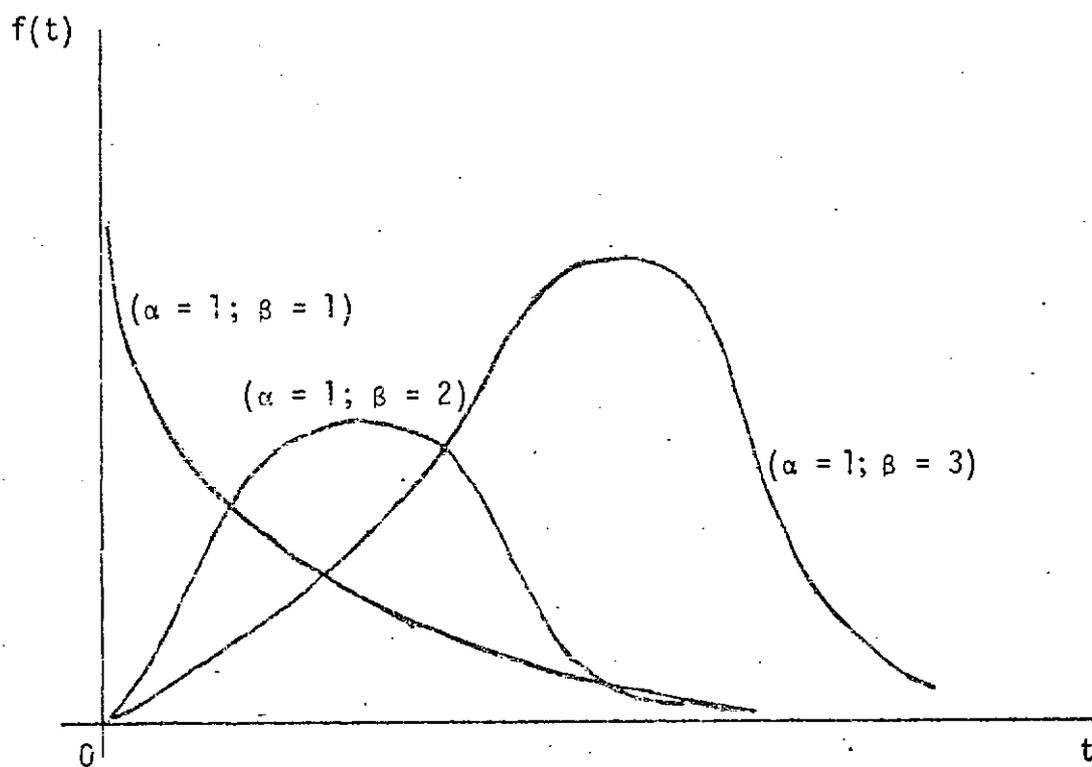


Fig. A.2 - Algumas representações assumidas pela densidade de Weibull para diferentes valores de α e β .

APÊNDICE B

PARÂMETROS DE POSIÇÃO E ESCALA (LOCATION-SCALE)

Seja \tilde{x} uma variável aleatória com densidade dependente dos parâmetros δ_1 e δ_2 . Tais parâmetros são ditos respectivamente de posição e escala se:

$$f(x; \delta_1; \delta_2) = \frac{1}{\delta_2} z \left(\frac{x - \delta_1}{\delta_2} \right)$$

Nesse caso, a distribuição da variável aleatória \tilde{x} é dita ser um Modelo de Posição e Escala. Os parâmetros de posição representam uma medida de tendência central, enquanto os de escala representam a dispersão de uma distribuição.

TRANSFORMAÇÕES DOS PARÂMETROS

Seja \tilde{t} uma variável aleatória com distribuição de Weibull com parâmetros (α, β) . Então,

$$f(t; \alpha, \beta) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP} \left[- (t/\alpha)^\beta \right] / \alpha^\beta, \text{ onde } t > 0; \alpha > 0; \beta > 0$$

e

$$F(t; \alpha, \beta) = \int_0^t f(\xi) d\xi = 1 - \text{EXP} \left[- (t/\alpha)^\beta \right]$$

Considere-se a seguinte transformação biunívoca sobre a va
riável aleatória:

$$\tilde{z} = \ln \tilde{t}$$

Sejam $G(\cdot)$ e $g(\cdot)$ respectivamente as funções de distribuição
e densidade da variável aleatória \tilde{z} . Então,

$$G(z) = P(\tilde{z} \leq z) = P(\ln \tilde{t} \leq z) = P(\tilde{t} \leq e^z) = F(e^z) = 1 - \text{EXP} \left[- \left(\frac{e^z}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

Considere-se as seguintes transformações biunívocas sobre os
parâmetros:

$$\theta = \ln \alpha$$

$$\sigma = 1/\beta$$

$$\therefore G(z) = 1 - \text{EXP} \left[- \left(\frac{e^z}{e^\theta} \right)^{1/\sigma} \right] = 1 - \text{EXP} \left[- e^{\frac{z-\theta}{\sigma}} \right]$$

$$\frac{dG(z)}{dz} = g(z) = \frac{1}{\sigma} \text{EXP} \left[- e^{\frac{z-\theta}{\sigma}} \right] \text{EXP} \left[\frac{z-\theta}{\sigma} \right]$$

Assim,

$$g(z) = \frac{1}{\sigma} e^{-e^{\frac{z-\theta}{\sigma}}} e^{\frac{z-\theta}{\sigma}}$$

representa a densidade da distribuição do Valor-Extremo e $G(z) = 1 - e^{-e^{\frac{z-\theta}{\sigma}}}$

representa a sua função de distribuição.

Considere-se agora a distribuição "a priori" dos parâmetros (α, β) :

$$\tau(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta}, \text{ onde } \tau_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \text{ e } \tau_2(\beta) = \frac{1}{\beta}.$$

As funções de distribuição de α e β são respectivamente $\tau_1(\cdot)$ e $\tau_2(\cdot)$.

Seja $\phi_1(\cdot)$ a função de distribuição de $\hat{\theta}$, o qual é resultado da transformação precedente. $\phi_1(\cdot)$ representa sua função de densidade.

Assim,

$$\phi_1(\theta) = P(\hat{\theta} \leq \theta) = P(\ln \hat{\alpha} \leq \theta) = P(\hat{\alpha} \leq e^\theta) = \tau_1(e^\theta)$$

$$\therefore \frac{d\phi_1(\theta)}{d\theta} = \phi_1(\theta) = \frac{1}{e^\theta} e^\theta = 1$$

$$\therefore \phi_1(\theta) = 1$$

Sejam $\phi_2(\cdot)$ e $\phi_2(\cdot)$ respectivamente as funções de distribuição e densidade de $\hat{\sigma}$ (resultante da transformação anterior). Então,

$$\phi_2(\sigma) = P(\hat{\sigma} \leq \sigma) = P\left(\frac{1}{\hat{\beta}} \leq \sigma\right) = P\left(\hat{\beta} \geq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \tau_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\therefore \frac{d\phi_2(\sigma)}{d\sigma} = \phi_2(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}$$

$$\therefore \phi_2(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$$

Assim sendo, a distribuição "a priori" correspondente em termos de (θ, σ) é,

$$\phi(\theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma}$$

- Determinação da densidade conjunta "a posteriori" de (θ, σ) para uma distribuição "a priori" de $\phi(\theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma}$:

Sejam:

$$g(z; \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \text{EXP} \left[-e^{\frac{z-\theta}{\sigma}} \right] \text{EXP} \left[\frac{z-\theta}{\sigma} \right] \quad e$$

$$G(z; \theta, \sigma) = 1 - \text{EXP} \left[-e^{\frac{z-\theta}{\sigma}} \right]$$

respectivamente a função de densidade e a de distribuição do Valor-Extremo.

A correspondente função de verossimilhança é:

$$u(z/\theta, \sigma) = \left[\prod_{i=1}^k g(z_i; \theta, \sigma) \right] \left[\prod_{i=k+1}^n 1 - G(z_i; \theta, \sigma) \right] = \left(\frac{1}{\sigma} \right)^k \text{EXP} \left[-\sum_{i=1}^k e^{\frac{z_i - \theta}{\sigma}} \right]$$

$$\text{EXP} \left[\sum_{i=1}^k \frac{z_i - \theta}{\sigma} \right] \text{EXP} \left[\sum_{i=k+1}^n \frac{z_i - \theta}{\sigma} \right]$$

$$u(z/\theta, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma} \right)^k \text{EXP} \left[\sum_{i=1}^n \frac{z_i - \theta}{\sigma} - \sum_{i=1}^k e^{\frac{z_i - \theta}{\sigma}} \right]$$

A distribuição "a posteriori" de (θ, σ) é dada por:

$$\Delta(\theta, \sigma/z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(z/\theta, \sigma) \phi(\theta, \sigma) \, d\theta \, d\sigma}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(z/\theta, \sigma) \phi(\theta, \sigma) \, d\theta \, d\sigma} \quad , \text{ em que } \phi(\theta, \sigma) \text{ é igual a } \frac{1}{\sigma}$$

D

$$\therefore \Delta(\theta, \sigma/z) = \frac{1}{D} \sigma^{-(k+1)} \text{EXP} \left[\sum_{i=1}^n \frac{z_i^{-\theta}}{\sigma} - \sum_{i=1}^k \frac{z_i^{-\theta}}{\sigma} \right]$$

$$\therefore \Delta(\theta, \sigma/z) \propto \sigma^{-(k+1)} \text{EXP} \left[\sum_{i=1}^n \frac{z_i^{-\theta}}{\sigma} - \sum_{i=1}^k \frac{z_i^{-\theta}}{\sigma} \right] ,$$

que corresponde à densidade fiducial de (θ, σ) .

- Prova de que "taxa de falhas" não é uma função Invariantemente Estimável:

Seja

$$h(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}$$

a "taxa de falhas" da distribuição de Weibull. Considere-se as transformações:

$$z = \ln t$$

$$\theta = \ln \alpha$$

$$\sigma = 1/\beta$$

$$\rho(\theta, \sigma, z) = \frac{e^{\frac{z-\theta}{\sigma} - z}}{\sigma}$$

Definição: uma função $\bar{\rho}$ Invariantemente Estimável se:

$$\rho(\theta_1, \sigma_1) = \rho(\theta_2, \sigma_2) \Rightarrow \rho(a\theta_1+b, a\sigma_1) = \rho(a\theta_2+b, a\sigma_2), \quad a > 0, \forall b \text{ e para } \theta_1 \neq \theta_2 \text{ e } \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Será a seguir mostrado que a função correspondente $\bar{\rho}$ "taxa de falhas" (em termos de θ, σ) não $\bar{\rho}$ é invariantemente estimável:

$$\rho(\theta_1, \sigma_1) = \rho(\theta_2, \sigma_2) \quad \frac{\rho(\theta_1, \sigma_1)}{\rho(\theta_2, \sigma_2)} = 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\therefore \frac{\rho(\theta_1, \sigma_1)}{\rho(\theta_2, \sigma_2)} = \frac{\frac{\text{EXP}\left(\frac{z-\theta_1}{\sigma_1} - z\right)}{\sigma_1}}{\frac{\text{EXP}\left(\frac{z-\theta_2}{\sigma_2} - z\right)}{\sigma_2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left(\frac{z-\theta_1}{\sigma_1} - \frac{z-\theta_2}{\sigma_2}\right) =$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left(\frac{z}{\sigma_1} - \frac{\theta_1}{\sigma_1} - \frac{z}{\sigma_2} + \frac{\theta_2}{\sigma_2}\right) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left[z\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{\theta_1}{\sigma_1} - \frac{\theta_2}{\sigma_2}\right)\right]$$

$$\rho(a\theta_1+b, a\sigma_1) = \rho(a\theta_2+b, a\sigma_2) \Rightarrow \frac{\rho(a\theta_1+b, a\sigma_1)}{\rho(a\theta_2+b, a\sigma_2)} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\rho(a\theta_1+b, a\sigma_1)}{\rho(a\theta_2+b, a\sigma_2)} &= \frac{\frac{\text{EXP}\left[\frac{z-(a\theta_1+b)}{a\sigma_1} - z\right]}{a\sigma_1}}{\frac{\text{EXP}\left[\frac{z-(a\theta_2+b)}{a\sigma_2} - z\right]}{a\sigma_2}} = \frac{\text{EXP}\left[\frac{z-(a\theta_1+b)}{a\sigma_1} - z\right]}{\text{EXP}\left[\frac{z-(a\theta_2+b)}{a\sigma_2} - z\right]} \frac{a\sigma_2}{a\sigma_1} = \\ &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left[\frac{z-a\theta_1-b}{a\sigma_1} - \frac{z+a\theta_2-b}{a\sigma_2}\right] = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left[z \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{\theta_1}{\sigma_1} - \frac{\theta_2}{\sigma_2}\right) - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right)\right] \\ &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left[z \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{\theta_1}{\sigma_1} - \frac{\theta_2}{\sigma_2}\right) + \frac{z(1-a)}{a} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right)\right] \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\rho(a\theta_1+b, a\sigma_1)}{\rho(a\theta_2+b, a\sigma_2)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left[z \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{\theta_1}{\sigma_1} - \frac{\theta_2}{\sigma_2}\right)\right] \text{EXP}\left[\frac{z(1-a)-b}{a} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right)\right]$$

mas, por B.1 tem-se que

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{EXP}\left[z \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{\theta_1}{\sigma_1} - \frac{\theta_2}{\sigma_2}\right)\right] = 1$$

Logo,

$$\frac{\rho(a\theta_1+b, a\sigma_1)}{\rho(a\theta_2+b, a\sigma_2)} = \text{EXP}\left[\frac{z(1-a)-b}{a} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right)\right] \neq 1, \text{ pois por hipótese } \sigma_1 \neq \sigma_2.$$

Logo, a função não satisfaz a condição dada e portanto não é invariavelmente estimável.

MÉTODO DE SIMPSON

O método de Simpson aplica-se a problemas de determinação de áreas sobre funções em um espaço bidimensional. Consiste em ajustar parábolas de 2º grau entre cada três pontos da curva, determinar a área compreendida por tais parábolas e somá-las, obtendo assim a área total sobre a curva dada. De uma maneira mais formal, considere-se:

$f(x)$ a função para a qual deseja-se calcular a área e y_i as ordenadas da função, onde $i = 0, 1, \dots, 2n$. Assim, tem-se por exemplo:

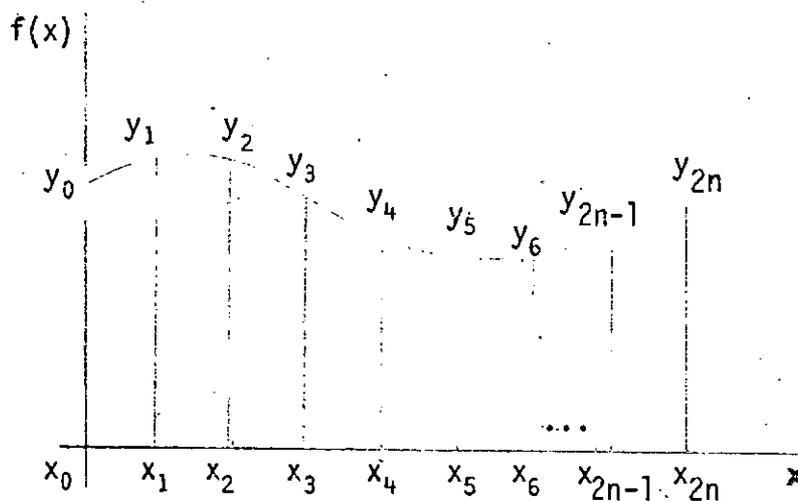


Figura B.1 - Determinação da Área pelo Método de Simpson.

O intervalo total x_0, x_{2n} é dividido em um número par de subintervalos de amplitude h e a expressão da aproximação da área sobre a curva $f(x)$ é:

$$= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-1} + 2y_{2n})$$

A maior vantagem do método de Simpson é que necessita de um número

mero relativamente pequeno de seções parabólicas ajustantes, a fim de fornecer uma precisão satisfatória. Aparentemente possui a desvantagem de necessitar um número par de subintervalos. No entanto, esta limitação pode ser eliminada através de uma mudança na construção dos primeiros (ou últimos) três subintervalos.

MÉTODO DE NEWTON

Aplica-se para a solução de equações não lineares, isto é, a determinação da raiz de uma equação $f(x)$. É provavelmente o mais conhecido dos métodos iterativos apropriados. Consiste em, dada uma aproximação inicial para a raiz de uma função, determinar a tangente da curva naquele ponto e achar a sua interseção com o eixo das abcissas. Este ponto se constitui na nova aproximação, sobre o qual é repetido o mesmo processo. O esquema abaixo ilustra o processo:

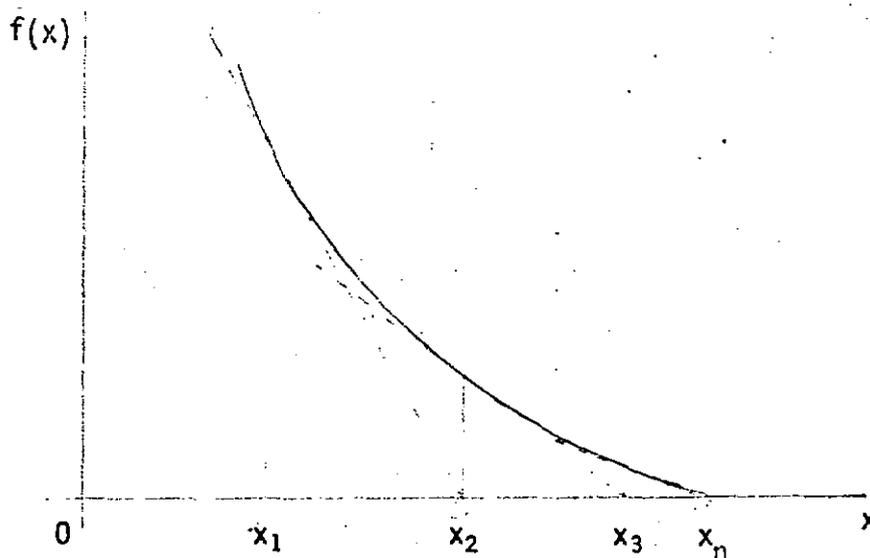


Figura B.2 - Representação Gráfica do Processo de Obtenção da Raiz da Equação.

onde x_i representa a i -ésima aproximação ($i=1,2,3,\dots,n$).

Observa-se que o Método de Newton converge bastante rapidamente e muitas vezes o seu grau de aproximação duplica em cada iteração. Analiticamente, pode ser apresentado da seguinte maneira:

Seja x_i uma aproximação inicial para a equação $f(x) = 0$. As aproximações sucessivas são dadas então por:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

O procedimento termina dependendo do nível de erro (ϵ) desejado, o qual pode ser absoluto $(|x_{i+1} - x_i| < \epsilon)$ ou relativo,

$$\left(\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < \epsilon \right)$$

AJUSTAMENTO POR SPLINES QUADRÁTICOS

Consiste em um método relativamente recente de ajustar um dado conjunto de pontos a uma curva, a qual é formada por parábolas de 2º grau, ajustadas entre cada dois pontos. Assim, tem-se:

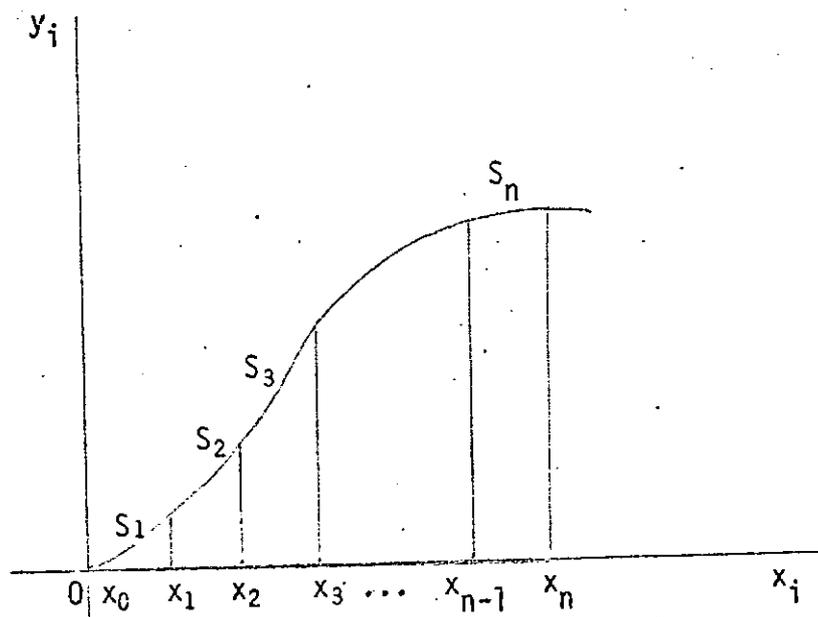


Figura B.3 - Representação Gráfica dos "Splines" Ajustantes.

onde cada S_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa uma parábola ajustante do 2º grau. Depreende-se pela simples observação da figura acima que, para um melhor a justamento, o intervalo entre os pontos observados deve ser o menor possível. Sob um ponto de vista mais formal, considere-se:

(x_i, y_i) um conjunto de observações ordenados de maneira crescente, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e Δ a amplitude (constante) do intervalo $(x_i - x_{i-1})$.

Seja $S_i(x)$ o spline de ordem i aplicado ao ponto x , isto é:

$$S_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2, \text{ onde } (i-1)\Delta \leq x \leq i\Delta, i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

As condições básicas para a determinação dos Splines são:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) S_i |(i-1)\Delta| = y_{i-1} ; i = 1,2,3,\dots,n \\ (2) S_i (i\Delta) = y_i ; i = 0,1,2,\dots,n \\ (3) S'_i (i\Delta) = S'_{i-1}(i\Delta) \end{array} \right.$$

A condição (3) resulta em $b_i + 2c_i(i\Delta) = b_{i-1} + 2c_{i-1}(i\Delta)$

A hipótese básica realizada é que $S'_1(0) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$

DETERMINAÇÃO DE S_1 :

$$(1) S_1(0\Delta) = a_1 + b_1(0\Delta) + c_1(0\Delta)^2 = y_0 = 0 \quad \therefore a_1 = 0$$

$$(4) b_1 = 0$$

$$(2) S_1(1\Delta) = a_1 + b_1\Delta + c_1\Delta^2 = y_1 \quad c_1 = y_1/\Delta^2$$

Coefficientes:

$$a_1 = 0 ; b_1 = 0 ; c_1 = y_1/\Delta^2$$

DETERMINAÇÃO DE S_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) S_2(1\Delta) = a_2 + b_2\Delta + c_2\Delta^2 = y_1 \\ (2) S_2(2\Delta) = a_2 + b_2(2\Delta) + c_2(4\Delta^2) = y_2 \\ (3) b_2 + 2c_2(\Delta) = b_1 + 2c_1(\Delta) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_2 + \Delta b_2 + \Delta^2 c_2 = y_1 \\ a_2 + 2\Delta b_2 + 4\Delta^2 c_2 = y_2 \\ b_2 + 2\Delta c_2 = \frac{2\Delta y_1}{\Delta^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 + \Delta b_2 + \Delta^2 c_2 = y_1 \\ a_2 + 2\Delta b_2 + 4\Delta^2 c_2 = y_2 \\ b_2 + 2\Delta c_2 = \frac{2y_1}{\Delta} \end{array} \right. \therefore \left\{ \begin{array}{l} a_2 + \Delta b_2 + \Delta^2 c_2 = y_1 \\ b_2 + 3\Delta^2 c_2 = y_2 - y_1 \\ b_2 + 2\Delta c_2 = \frac{2y_1}{\Delta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 + \Delta b_2 + \Delta^2 c_2 = y_1 \\ b_2 + 3\Delta^2 c_2 = y_2 - y_1 \end{array} \right.$$
$$\Delta c_2 = \frac{(y_2 - y_1)}{\Delta} - \frac{2y_1}{\Delta} - \frac{y_2 - y_1 - 2y_1}{\Delta} = \frac{y_2 - 3y_1}{\Delta}$$

$$\therefore \Delta c_2 = \frac{y_2 - 3y_1}{\Delta}$$

$$c_2 = \frac{y_2 - 3y_1}{\Delta^2}$$

$$\Delta b_2 = y_2 - y_1 - 3\Delta^2 \frac{y_2 - 3y_1}{\Delta^2} = y_2 - y_1 - 3y_2 + 9y_1 =$$
$$= \frac{8y_1 - 2y_2}{\Delta}$$

$$\Delta b_2 = 2y_1 \implies b_2 = \frac{2y_1}{\Delta}$$

$$a_2 = y_1 - \Delta b_2 - \Delta^2 c_2 = y_1 - 2y_1 - y_2 + 3y_1 = 2y_1 - y_2$$

$$\therefore a_2 = 2y_1 - y_2$$

$$\begin{cases} a_2 = 2y_1 - y_2 \\ b_2 = 2y_1/\Delta \\ c_2 = \frac{(y_2 - 3y_1)}{\Delta^2} \end{cases}$$

DETERMINAÇÃO DE S_3 :

$$(1) \quad S_3(2\Delta) = a_3 + b_3(2\Delta) + c_3(4\Delta^2) = y_2$$

$$(2) \quad S_3(3\Delta) = a_3 + b_3(3\Delta) + c_3(9\Delta^2) = y_3$$

$$(3) \quad b_3 + 2c_3(2\Delta) = b_2 + 2c_2(2\Delta) = \frac{2y_1}{\Delta} + 2(y_2 - 3y_1)2\Delta =$$

$$= \frac{2y_1 + (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta}$$

$$\therefore b_3 + 4\Delta c_3 = \frac{2y_1 + (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta}$$

$$(1) \quad a_3 + 2\Delta b_3 + 4\Delta^2 c_3 = y_2$$

$$(2) \quad a_3 + 3\Delta b_3 + 9\Delta^2 c_3 = y_3$$

$$(3) \quad b_3 + 4\Delta c_3 = \frac{2y_1 + (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 + 2\Delta b_3 + 4\Delta^2 c_3 = y_2 \\ \Delta b_3 + 5\Delta^2 c_3 = y_3 - y_2 \\ b_3 + 4\Delta c_3 = \frac{2y_1 + (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 + 2\Delta b_3 + 4\Delta^2 c_3 = y_2 \\ \Delta b_3 + 5\Delta^2 c_3 = y_3 - y_2 \\ \Delta c_3 = \frac{-(y_3 - y_2)}{\Delta} + \frac{2y_1 + (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta} = \\ = \frac{+y_3 - y_2 - 2y_1 - (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta} \end{array} \right.$$

$$\therefore c_3 = \frac{y_3 - y_2 - 2y_1 - (4y_2 - 12y_1)\Delta^2}{\Delta^2}$$

$$b_3 = \frac{y_3 - y_2 - 5y_3 + 5y_2 + 10y_1 + (20y_2 - 60y_1)\Delta^2}{\Delta} =$$

$$\therefore b_3 = \frac{4y_2 - 4y_3 + 10y_1 + (20y_2 - 60y_1)\Delta^2}{\Delta}$$

$$a_3 = y_2 - 4y_3 + 4y_2 + 8y_1 + (16y_2 - 48y_1)\Delta^2 - 8y_2 + 8y_3 - 20y_1 - (40y_2 - 120y_1)\Delta^2$$

$$a_3 = 4y_3 - 3y_2 - 12y_1 + (16y_2 - 48y_1 - 40y_2 + 120y_1)$$

$$\therefore a_3 = 4y_3 - 3y_2 - 12y_1 + (12y_1 - 24y_2)\Delta^2$$

$$\begin{cases} a_3 = 4y_3 - 3y_2 - 12y_1 + (72y_1 - 24y_2) \Delta^2 \\ b_3 = \frac{4y_2 - 4y_3 + 10y_1 + (20y_2 - 60y_1) \Delta^2}{\Delta} \\ c_3 = \frac{y_3 - y_2 - 2y_1 - (4y_2 - 12y_1) \Delta^2}{\Delta^2} \end{cases}$$

DETERMINAÇÃO DE S_k ($1 \leq k \leq n$):

$$(1) \quad S_k \left[(k-1)\Delta \right] = a_k + b_k (k-1)\Delta + c_k (k-1)^2 \Delta^2 = y_{k-1}$$

$$(2) \quad S_k (k\Delta) = a_k + b_k k\Delta + c_k k^2 \Delta^2 = y_k$$

$$(3) \quad b_k + 2c_k (k-1)\Delta = b_{k-1} + 2c_{k-1} (k-1)\Delta$$

$$\begin{cases} a_k + [(k-1)\Delta] b_k + [(k-1)^2 \Delta^2] c_k = y_{k-1} \\ a_k + [k\Delta] b_k + [k^2 \Delta^2] c_k = y_k \\ b_k + [2(k-1)\Delta] c_k = b_{k-1} + [2(k-1)\Delta] c_{k-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_k + [(k-1)\Delta] b_k + [(k-1)^2 \Delta^2] c_k = y_{k-1} \\ \Delta b_k + [(2k-1)\Delta^2] c_k = y_k - y_{k-1} \\ b_k + [2(k-1)\Delta] c_k = b_{k-1} + [2(k-1)\Delta] c_{k-1} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_k + [(k-1)\Delta] b_k + [(k-1)^2\Delta^2] c_k &= y_{k-1} \\ \Delta b_k + [(2k-1)\Delta^2] c_k &= y_k - y_{k-1} \\ \Delta c_k &= \frac{y_{k-1} - y_k + [b_{k-1} + 2(k-1)\Delta c_{k-1}]\Delta}{\Delta} \end{aligned} \right.$$

$$\therefore c_k = - \frac{y_{k-1} - y_k + [b_{k-1} + 2(k-1)\Delta c_{k-1}]\Delta}{\Delta^2}$$

$$\Delta b_k = y_k - y_{k-1} + (2k-1)\Delta^2 \left\{ \frac{y_{k-1} - y_k + [b_{k-1} + 2(k-1)\Delta c_{k-1}]\Delta}{\Delta^2} \right\}$$

$$\therefore b_k = \frac{y_k - y_{k-1} + (2k-1) [y_{k-1} - y_k + (b_{k-1} + 2(k-1)\Delta c_{k-1})\Delta]}{\Delta}$$

$$a_k = y_{k-1} + (k-1)^2\Delta^2 \left[y_{k-1} - y_k + [b_{k-1} + 2(k-1)\Delta c_{k-1}]\Delta \right] - (k-1) \times$$

$$\times \left[y_k - y_{k-1} + (2k-1) \left[y_{k-1} - y_k + [b_{k-1} + 2(k-1)\Delta c_{k-1}]\Delta \right] \right]$$

MÉTODO DE TRANSFORMAÇÃO INVERSA

É aplicado a problemas de geração de variáveis aleatórias contínuas quando a sua função de distribuição pode ser explicitada. Sejam $f(x)$ e $F(x)$ respectivamente as funções de densidade e distribuição da variável aleatória x . Sabendo que $F(x)$ é definida em todo o intervalo $[0,1]$ e além disso é monotônica não decrescente, é possível gerar números aleatórios (r) uniformemente distribuídos e fazer $F(x) = r$. Como x é determinado unívocamente por r , então tem-se $x = F^{-1}(r)$.

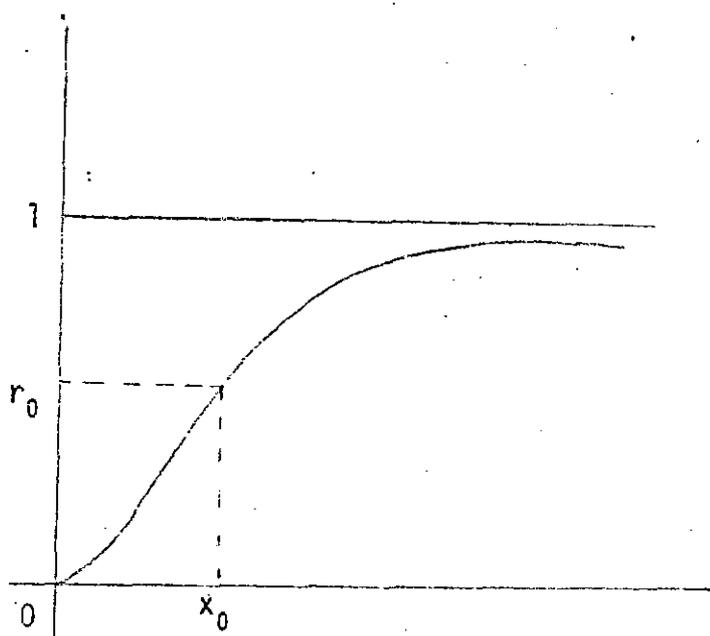


Figura B.4 - Determinação da Imagem Inversa de r_0 .

Matematicamente, tal método pode ser justificado da seguinte maneira:

Seja (r) o número aleatório gerado, o qual tem distribuição uniforme:

$$r = F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$$

$$\therefore P[X \leq x] = F(x) = P[r \leq F(x)] = P[F^{-1}(r) \leq x]$$

$\therefore P[X \leq x] = P[F^{-1}(r) \leq x]$, onde se conclui que a função densidade de $F^{-1}(r)$ é também $f(x)$.

Como dito anteriormente, o método tal como apresentado é válido para casos onde a função de distribuição possa ser explicitada (o que não é o caso, por exemplo, da distribuição normal). Atualmente tal método é largamente utilizado, tendo em vista o auxílio do computador eletrônico, o qual permite gerar valores aleatórios uniformes bastante rapidamente.

CONDIÇÕES DE OTIMIZAÇÃO EXIGIDAS PELOS MÉTODOS USUAIS

Os métodos conhecidos de otimização não linear, tais como SUMT (Sequential Unconstrained Maximization Technique), o de Fletcher-Powell e os baseados nos multiplicadores de Lagrange exigem como condições básicas de obtenção de um ótimo global dentro da região viável:

- (i) A convexidade da região viável
- (ii) A concavidade da função objetivo (para o problema de maximização)
- (iii) A convexidade da função objetivo (para o problema de minimização)

Ora, como o problema aqui considerado trata da maximização e minimização simultâneas da função

$$h(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta}, \text{ observa-se que não são satisfeitas as condições}$$

(i) e (ii) ou (i) e (iii) e portanto não há possibilidade de ser aplicado algum dos métodos acima expostos. Não obstante, deve ser lembrado que tais condições se referem aos algoritmos utilizados e não ao problema em si de otimização, o qual pode ser resolvido ainda que não através dos métodos acima expostos.

PESQUISA POR PONTOS E BUSCA SEQUENCIAL

A pesquisa completa sobre os pontos da região viável é talvez o método mais primário de otimização. Consiste em realizar uma série de testes, os quais verificam se alguns pontos são viáveis e dentre esses de termina os que maximizam e os que minimizam a função objetivo. Como a região é constituída por infinitos pontos e portanto é impossível pesquisá-los todos, deve ser feita uma busca sobre uma região envolvendo os pontos críticos, a fim de se ter uma maior aproximação para os resultados a serem obtidos. O processo de construir essa região (geralmente um retângulo) em torno dos pontos críticos e de determinar valores aproximados é chamado de busca sequencial. A seguir será apresentado em detalhes todo o processo utilizado para o problema de otimização deste trabalho.

Considere-se o seguinte problema:

Determinar

$$\begin{matrix} \text{MIN} \\ \text{e} \\ \text{MAX} \end{matrix} \left\{ h(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \right.$$

onde

$$\{(\alpha, \beta) : \Pi(\alpha, \beta) \geq P\}$$

- Conhecendo alguns pontos (α_i, β_i) , foram determinados os menores e maiores dos α_i e β_i a fim de se ter uma primeira idéia da variação dos mesmos. Também foram determinados os pares que otimizam $h(t; \alpha, \beta)$, dentre os viáveis. Sejam $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ e $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ os que minimizam e maximizam, respectivamente.
- A partir dos menores valores dos α_i e β_i , "esquadrinhou-se" toda a região cada vez com intervalos menores, a fim de delimitar mais exatamente a região viável e verificar se os pontos críticos realmente se situavam em uma região perto de onde foram determinados o máximo e o mínimo, de acordo com o gráfico:

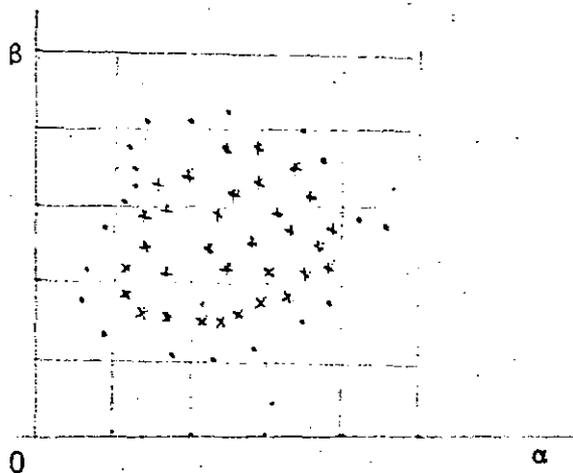


Figura B.5 - Representação da pesquisa por pontos sobre os valores de α e β .

Convenção:

- x pontos pertencente à região viável
- . pontos não pertencentes à região viável.

- A fim de mais aproximar o máximo e mínimo determinados, usou-se o método de busca sequencial em torno dos pontos críticos $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ e $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ o qual permitiu obter pontos $(\underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*)$ e $(\bar{\alpha}^*, \bar{\beta}^*)$ os quais constituem resultados mais aproximados que os primeiros.

APÊNDICE

VERIFICAÇÃO DA PROPRIEDADE "FREQUENTISTA" DO INTERVALO DE CONFIANÇA BAYESIANO PARA A "TAXA DE FALHAS" NA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL.

Nesta parte será apresentado o teste realizado por simulação para verificar se o intervalo obtido é passível de sofrer uma interpretação sob o ponto de vista da Estatística Clássica, ou seja uma interpretação "frequentista". Assim sendo, será verificado se em m repetições do experimento (ou seja, em m amostras), os intervalos obtidos conterão o verdadeiro valor da "taxa de falhas" em γ das vezes, onde γ representa o nível de significância desejado.

Para a realização do teste, considerou-se $\alpha = 100$ e $\beta = 2$, como os valores reais (ou populacionais) dos parâmetros. Desse modo, a "taxa de falhas" é dada por

$$h(t_0, \alpha, \beta) = \frac{\beta t_0^{\beta-1}}{\alpha^\beta} = \frac{2 t_0}{10000}.$$

Supondo que a análise será feita para o tempo $t_0 = 100$, tem-se 0,02 como o verdadeiro valor da "taxa de falhas". O problema então consiste em tomar várias amostras (lembrando que cada uma refere-se a um conjunto de observações sobre o tempo de duração de um elemento), calcular intervalos de confiança ao nível γ para cada amostra e verificar a proporção em que os intervalos contêm o verdadeiro valor do parâmetro (nó caso $h(t_0, \alpha, \beta) = 0,02$).

Verifica-se pelo exposto acima a necessidade de se ter amostras provenientes de uma população com distribuição de Weibull de parâmetros $\alpha = 100$ e $\beta = 2$. Como cada uma delas é constituída por um conjunto de observações, considerou-se aqui 6 observações (uma das quais censurada por tipo II) como integrantes de uma amostra. Sejam t_i , observações relativas à variável aleatória (\hat{t}) (tempo de duração de um elemento). Assim sendo, observa-se que

$$f(t_i; \alpha, \beta) = \beta t^{\beta-1} \text{EXP} \left[- \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] / \alpha^\beta,$$

onde $\alpha = 100$ e $\beta = 2$.

O processo utilizado é o seguinte:

- (1) gera-se m amostras de seis observações cada uma, procedentes da distribuição acima;
- (2) calcula-se o intervalo de confiança (ao nível γ) para cada amostra;
- (3) verifica-se a proporção das vezes que o intervalo contém a verdadeira "taxa de falhas";
- (4) compara-se tal proporção com o nível de significância γ utilizado, o qual foi de 0,90.

Para a primeira etapa do processo, é necessário gerar m conjuntos de seis observações cada um. Para tal, considere-se:

$$F(t; \alpha, \beta) = 1 - \text{EXP} \left[-(t/\alpha)^\beta \right] - \text{função de distribuição de Weibull}$$

A fim de aplicar o Método da Transformação Inversa, seja u um número aleatório com Distribuição Uniforme no intervalo $[0,1]$. Então,

$$u = 1 - \text{EXP} \left[-(t/\alpha)^\beta \right]$$

$$\therefore t = \alpha \left[-\ln(1-u) \right]^{1/\beta}$$

São determinados cinco valores de t (pois supõe-se aqui que uma observação é censurada pelo tipo II), os quais são ordenados e tem-se então:

$$t_1 = v_{11}$$

$$t_2 = v_{21}$$

$$t_3 = v_{31}$$

$$t_4 = v_{41}$$

$$t_5 = v_{51}$$

$$t_6 = v_{41} \text{ (censurado),}$$

onde v_{ij} representa a observação i referente à amostra j .

Para cada amostra (foram consideradas 600) usou-se todo o processo apresentado na metodologia e determinou-se um intervalo de confiança para $h(t_0; \alpha, \beta)$. O processo pode ser resumido através do seguinte diagrama de blocos:

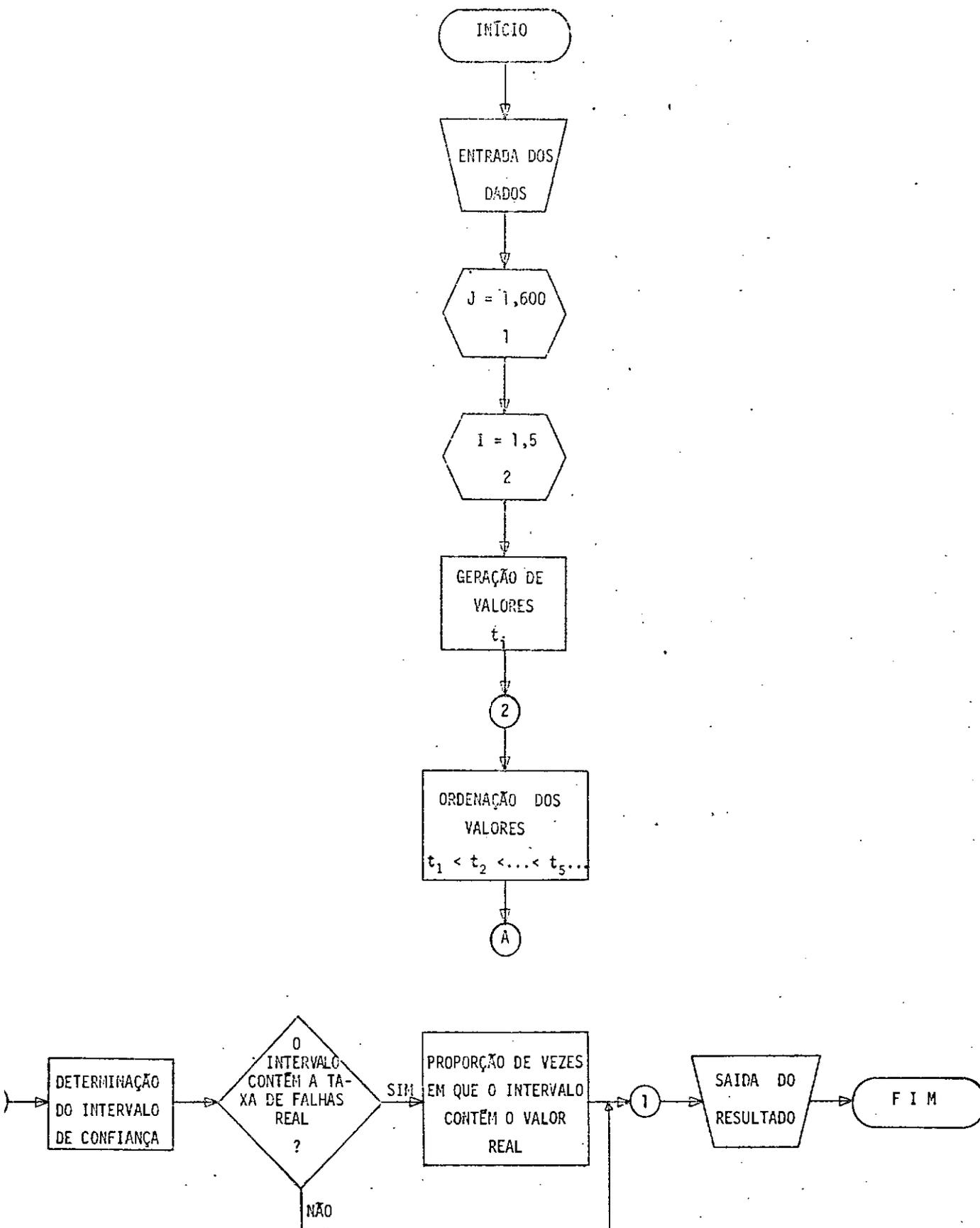


Figura C.1 - Diagrama em Bloco para Apresentação do Processo de verificação da propriedade "frequentista"

O resultado fornecido pelo teste foi que 92% dos intervalos calculados continham o verdadeiro valor do parâmetro. Tal resultado portanto, pode ser utilizado para testar a hipótese de que a proporção (p) pode ser considerada como igual a 90% (por causa do nível de significância 0,90 adotado). Tem-se então:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : p = 0,90 \\ H_1 : p \neq 0,90 \end{cases}$$

A "Região Crítica" do teste a um nível de significância $\gamma = 0,05$ é dado por:

$$\left| \frac{\bar{p} - p_0}{\sigma_p} \right| \geq z \quad (c.1)$$

onde z é o ponto da distribuição normal tal que $P[-z \leq n \leq z] = 0,95$ e σ_p representa o desvio padrão da proporção p :

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

Portanto, caso se verifique a igualdade (c.1), rejeita-se H_0 e aceita-se H_1 . No caso contrário, aceita-se H_0 . Como:

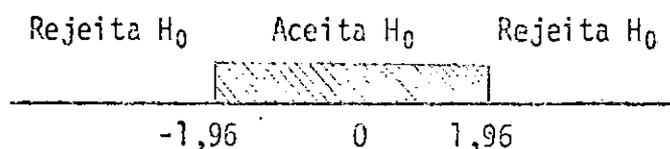
$$z = 1,96$$

$$p_0 = 0,90$$

$$\sigma_p = 0,012247$$

$$\bar{p} = 0,92$$

$$\text{tem-se } \left| \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_p} \right| = 1,633$$



Como $1,63 < 1,96$, a hipótese H_0 é aceita e pode-se portanto considerar a proporção real como 90%.

Além deste teste de hipóteses, foi feito um outro do tipo sequencial, que também aceitou a hipótese de $p = 0,90$. Tal procedimento consistiu em estabelecer a região do tipo:

$$R = x_n \ln \frac{p_1}{p_0} + (n - x_n) \ln \frac{1 - p_1}{1 - p_0}$$

$$\text{Se: } R > \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}, \text{ rejeita-se } H_0$$

$$R < \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}, \text{ aceita-se } H_0$$

$$\ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq R \leq \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}, \text{ aumenta-se o tamanho da amostra e continua-se com o teste.}$$

onde α - erro do tipo I

β - erro do tipo II

x_n - número de vezes em que o intervalo contém o valor da taxa de falhas, em uma amostra de tamanho n .

O processo pode ser melhor representado pela Figura C.2, a baixo:

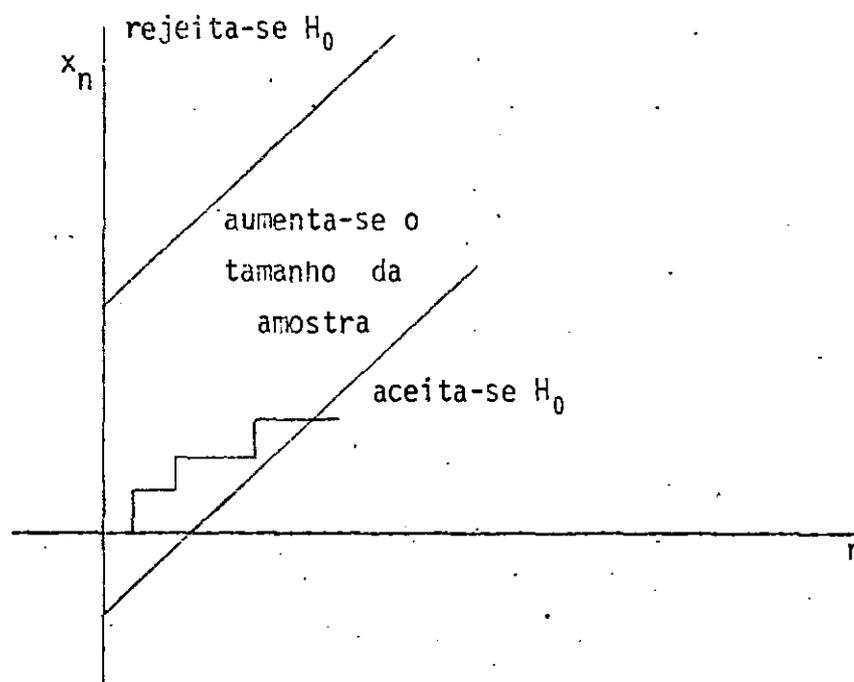


Fig. C.2 - Ilustração do teste sequencial de hipótese

Realmente, este tipo de teste também aceitou a hipótese de que $p = 0,90$, para dados valores de α e β . Para esse procedimento, ficou estabelecido que seria necessária apenas uma amostra de tamanho 200 para se contrastar a hipótese.

O resultado acima apesar de bastante satisfatório, por resultar em um intervalo "exato" (passível de sofrer uma interpretação "frequentista"), serve apenas para indicar que a teoria referente à interpretação dos resultados pode ser ainda mais profundamente investigado, pois

determinou-se aqui um método o qual, apesar da função não ser invariante-mente estimável, determina intervalos de confiança passíveis de sofrer uma interpretação pela Estatística Clássica.

Observa-se que a análise supra referiu-se a um determinado tempo (t_0) para a taxa de falhas. Foram feitas variações para este valor, as quais também resultaram em intervalos "exatos". A fim de se melhor observar o comportamento das proporções amostrais, construiu-se intervalos de confiança para diversos valores de (t_0) a nível de 0,05 para $p = 0,90$. Como pode ser visto pelo gráfico abaixo, todos os intervalos contêm os valores observados, o que assegura a validade do método para diferentes valores de t_0 .

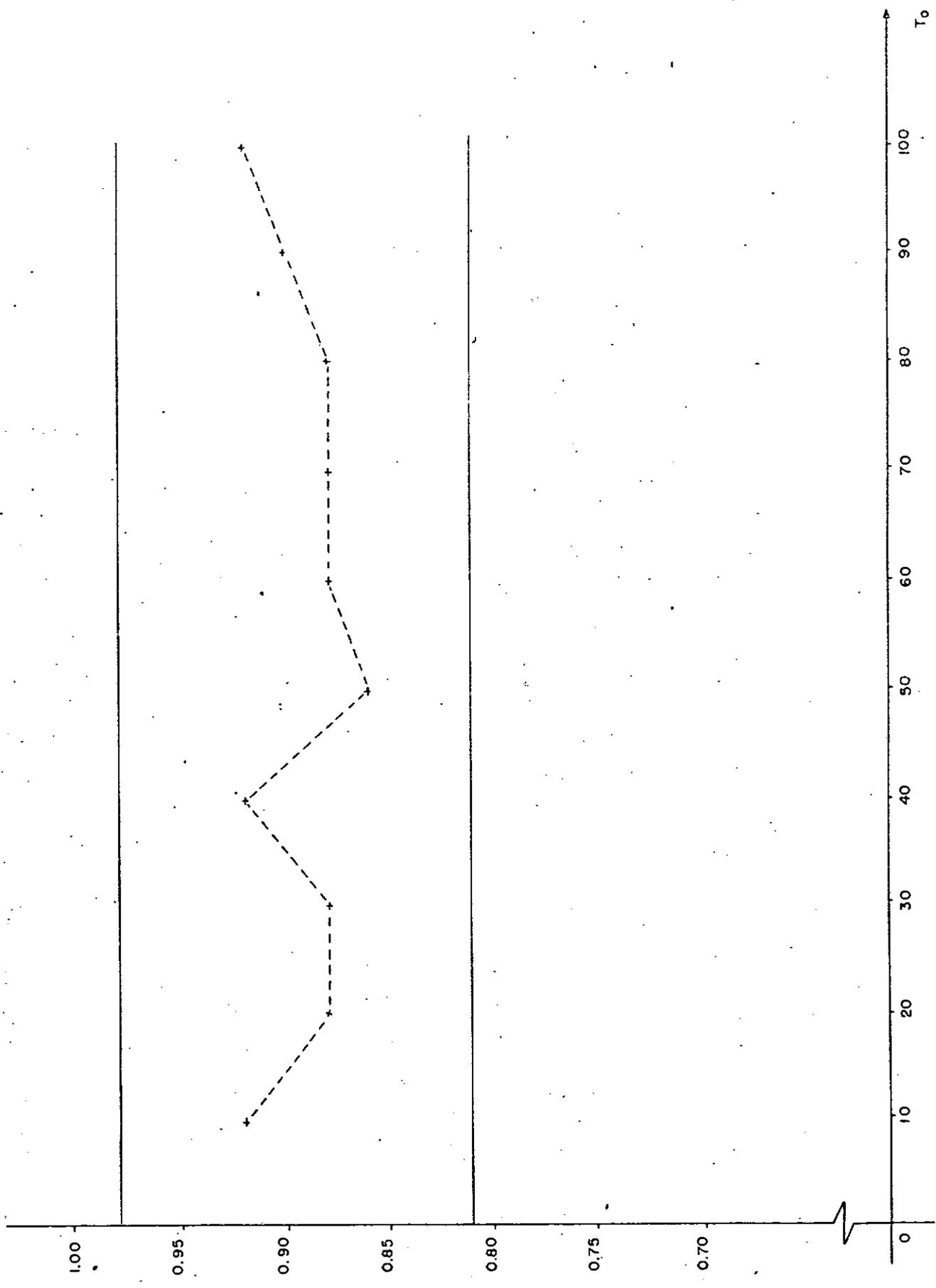


Fig. C.3 - Intervalo de Confiança para a proporção de valores satisfatórios, segundo variações em t_0 .

δ