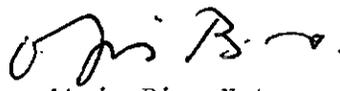
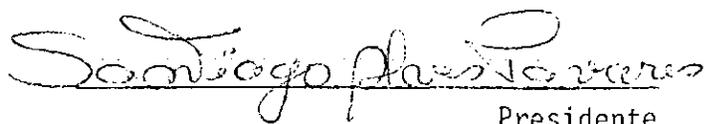


1. Publicação nº <i>INPE-2320-TDL/080</i>	2. Versão	3. Data <i>Fev., 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH/DSE</i>	Programa <i>ORBAT</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>EXPRESSÕES ANALÍTICAS SIMPLIFICADAS TEORIA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PROCESSAMENTO SEQUENCIAL</i>			
7. C.D.U.: <i>521.3:629.7.076.6</i>			
8. Título <i>INPE-2320-TDL/080</i>		10. Páginas: <i>116</i>	
<i>DETERMINAÇÃO DE EXPRESSÕES ANALÍTICAS SIMPLIFICADAS PARA CÁLCULO E PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS MEDIANTE O USO DE TEORIA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS</i>		11. Última página: <i>103</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Wilson Custódio Canesin da Silva</i>		 <i>Atair Rios Neto</i>	
 Assinatura responsável		13. Autorizada por	
		 <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas <p><i>Discutem-se as principais perturbações que atuam num satélite artificial, e propõe-se uma modelagem matemática aproximada, com expressões que representam a variação no tempo dos elementos da órbita. Tais expressões são parametrizadas e seus parâmetros determinados a partir de dados observados (ou simulados), utilizando-se a teoria de estimação, através de técnicas de processamento sequencial, com o emprego do filtro estendido de Kalman. As expressões ajustadas, permitem a propagação da órbita do satélite, com apreciável economia de tempo e sem necessidade de recursos computacionais sofisticados.</i></p>			
15. Observações <i>Tese de Doutorado em Ciência Espacial, aprovada em 23 de setembro de 1981.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisitos exigidos
para a obtenção do Título de Doutor
em Ciência Espacial

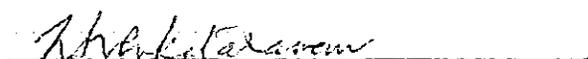
Dr.Santiago Alves Tavares


Presidente

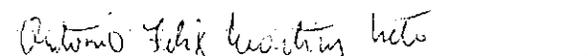
Dr.Atair Rios Neto


Orientador

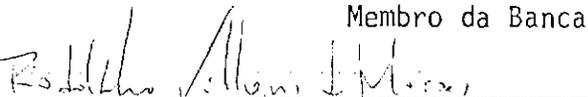
Dr.Nellore S.Venkataraman


Membro da Banca

Dr.Antonio Felix Martins Neto


Membro da Banca

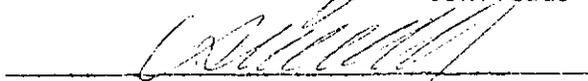
Dr.Rodolpho Vilhena de Moraes


Membro da Banca
-convidado-

Dr.Wagner Sessin


Membro da Banca
-convidado-

Dr.Sylvio Ferraz Mello


Membro da Banca
-convidado-

Candidato: Wilson Custódio Canesin da Silva

São José dos Campos, 23 de setembro de 1981

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pelo suporte fornecido para a realização deste trabalho.

Ao Dr. Atair Rios Neto pela orientação do trabalho e incentivos para sua realização.

Aos demais membros da Banca Examinadora por suas observações e sugestões durante a apresentação preliminar.

Ao colega Hélio Koiti Kuga pela troca de idéias e por seu valioso auxílio na parte computacional, como também pelo empréstimo de importantes sub-rotinas utilizadas no programa.

À Srta. Neusa Maria Dias Bicudo pela minuciosa correção do texto e prestimosa ajuda na sua composição final.

ABSTRACT

The principal perturbations on artificial satellites orbits are discussed and an approximated mathematical model using parameterized expressions is proposed to represent the time variation of orbit elements. The parameters in these expressions are determined from observational (or simulated) data, employing estimation theory through the use of Kalman filtering sequential techniques. The analytical expressions obtained allow orbit predictions with significant saving in time and without the need of sophisticated computational resources.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>ix</i>
LISTA DE TABELAS	<i>xi</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Teorias especiais	1
1.2 - Teorias gerais	1
1.3 - Teorias semi-analíticas	2
1.4 - Métodos empíricos	2
1.5 - Objetivo proposto	3
<u>CAPÍTULO 2 - FORÇAS GRAVITACIONAIS</u>	7
2.1 - Campo gravitacional terrestre	7
2.2 - Teoria de Brouwer	16
2.3 - Perturbações devidas a um terceiro corpo	22
2.3.1 - Ressonância	26
<u>CAPÍTULO 3 - FORÇAS NÃO GRAVITACIONAIS</u>	29
3.1 - Força de arrasto	29
3.2 - Força de pressão de radiação	36
3.3 - Ilustração do efeito das perturbações mais significativas .	40
<u>CAPÍTULO 4 - MODELAGEM MATEMÁTICA</u>	47
4.1 - Forma de equações	47
4.2 - Escolha dos elementos da órbita	48
<u>CAPÍTULO 5 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u>	55
5.1 - Definições básicas de teoria de estimação	55
5.1.1 - Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas	58
5.2 - Probabilidade condicional	61
5.3 - Processo estocástico	61
5.3.1 - Processo Gaussiano	62
5.3.2 - Processo de Markov	62
5.3.3 - Processos puramente aleatórios (brancos)	63

	<u>Pág.</u>
5.4 - Estimadores	65
5.4.1 - Filtro estendido de Kalman	69
<u>CAPÍTULO 6 - ALGORITMO DO PROCEDIMENTO</u>	73
6.1 - Equação de observação	73
6.2 - Considerações sobre o erro (ϵ_i)	74
6.3 - Dinâmica do processo	78
6.4 - Aplicação do filtro estendido de Kalman	78
<u>CAPÍTULO 7 - TESTE DO PROCEDIMENTO</u>	81
7.1 - Introdução	81
7.2 - Procedimento de propagação	81
7.3 - Caso de teste	84
7.4 - Resultados	85
<u>CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES</u>	97
8.1 - Alcance de utilização do modelo	97
8.2 - Comentários e conclusões	98
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Variação do período do satélite 1958 α	32
3.2 - Curva de decaimento do perigeu do satélite 1965 11D, corrigido dos harmônicos zonais ímpares e da perturbação luní-solar. Dia Juliano Modificado (DJM)	33
3.3 - Curva de decaimento do SPUTNIK III, calculado pelo programa LIFTIM	34
3.4 - Variação da anomalia devida ao achatamento e ao arrasto ..	35
3.5 - Esquema geral de todas as perturbações que atuam nos elementos da órbita	40
3.6 - Perturbações nos elementos a , e e M do satélite Pageos durante 60 dias, partindo de DJM = 39384.0	42
3.7 - Perturbações de longo período nos elementos I , ω e Ω do satélite Pageos, durante 60 dias	43
3.8 - Perturbações de curto período em a , e e M , no satélite Pageos, para um período	44
3.9 - Perturbações de curto período nos elementos I , ω e Ω do satélite Pageos	45
4.1 - Órbita de um satélite	48
5.1 - Curvas de distribuições gaussianas de X	57
6.1 - Distribuição gaussiana de ϵ_i	76
7.1 - Curvas ajuste x propagação	83
7.2 - Semi-eixo maior	87
7.3 - "Semilatus rectum"	88
7.4 - Inclinação	89
7.5 - Ascensão reta do nodo ascendente	90
7.6 - Argumento verdadeiro	91
7.7 - Raio vetor	92
7.8 - Desvio do semi-eixo maior	93
7.9 - Desvio do "semilatus rectum"	93
7.10 - Desvio da inclinação	94
7.11 - Desvio da ascensão reta do nodo ascendente	94
7.12 - Desvio do argumento verdadeiro	95
7.13 - Desvio do raio vetor	95

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Principais forças perturbadoras que atuam em satélites	41
5.1 - Processos aleatórios	62
6.1 - Resumo dos erros de observação	75
7.1 - Resultados de propagação da órbita para o Tiros-N	85

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As teorias de determinação de órbitas de satélites dividem-se basicamente em dois tipos: teorias especiais e teorias gerais.

1.1 - TEORIAS ESPECIAIS

As teorias especiais são as mais precisas e mais elaboradas. Permitem incluir todo tipo de perturbações, como também usar os modelos mais refinados, pois são de fácil manipulação. As integrações neste caso são feitas numericamente, usando-se um dos métodos convencionais, tais como o método de Cowell, o de Encke, ou o da variação dos parâmetros, onde se integra diretamente as equações planetárias de Lagrange (E.P.L.), ou estas na forma de Gauss. As teorias especiais oferecem maior precisão, porém são mais dispendiosas devido ao maior tempo de computação para sua realização.

1.2 - TEORIAS GERAIS

As teorias gerais foram inicialmente desenvolvidas baseadas nas integrações analíticas das equações de Lagrange (E.P.L.), para as forças conservativas, e nas E.P.L. na forma de Gauss, para forças não conservativas. Nestas últimas, admitem-se modelos simplificados para desprezar a densidade atmosférica e para as forças de pressão de radiação. São usadas também na forma de variáveis canônicas, como é por exemplo o método de Brouwer e outras variantes do mesmo.

As teorias gerais levam uma vantagem sobre as especiais, pois são de baixo custo computacional; entretanto, não têm a precisão daquelas.

1.3 - TEORIAS SEMI-ANALÍTICAS

Estas teorias foram desenvolvidas posteriormente, na tentativa de obter teorias analíticas (gerais), com a precisão das teorias especiais, o que obviamente não foi conseguido. Elas estão também muito em uso para a propagação de órbitas, e têm como procedimento básico primeiro a transformação de elementos osculadores em elementos médios, depois a integração numérica deste últimos e, em seguida, sua transformação para elementos osculadores novamente.

A vantagem das teorias semi-analíticas é que estas podem usar grande passo de integração (normalmente 1 dia). A transformação de elementos osculadores em médios se faz calculando-se as variações médias, por período, das equações de Lagrange (na forma não-singular, em variáveis equinociais). Porém, cada vez que se calcula estas médias, realiza-se uma grande quantidade de cálculos, porque as funções envolvidas (função de Hansen da excentricidade e função de Kaula-Izsak, da inclinação) são de caráter bastante complexo.

Vários trabalhos têm sido publicados nesta área (Cefola, 1976; Green, 1979), onde já aparece inclusive o uso da teoria de estimação, com processamentos em sua grande parte em lotes.

Outros trabalhos para determinação de órbitas de satélites, usando a teoria de estimação de parâmetros, com modelos de compensação dinâmica, foram os de Tapley (1972), Rios-Neto (1973), Tapley et alii (1975). Estes, entretanto, integram diretamente a equação de estado do sistema e fornecem dados que servem de condições iniciais estimadas para outros métodos de propagação de órbitas.

1.4 - MÉTODOS EMPÍRICOS

No Smithsonian Astrophysical Observatory, Veis and Moore (1960), em seu programa de determinação de órbitas utilizaram métodos empíricos para propagação de órbitas. Em tais métodos, as equações são es

critas na forma parametrizada, e os coeficientes são determinados posteriormente, combinando-se dados observados com processos de ajustamento por correções diferenciais, ou métodos de mínimos quadrados.

1.5 - OBJETIVO PROPOSTO

O objetivo deste trabalho é determinar expressões analíticas, simplificadas mediante o uso de teoria de estimação de parâmetros, e, especificamente, técnicas de processamento sequencial, com o filtro estendido de Kalman.

As observações serão simuladas por um *gerador numérico* de órbitas, onde se pode incluir todas as perturbações que se desejar, devido à flexibilidade apresentada por este tipo de programa.

No Capítulo 2 faz-se um estudo qualitativo das perturbações, começando com as gravitacionais e tendo como preocupação, não a deduzir fórmulas, mas sim, o aspecto final tomado por estas. Faz-se um rápido estudo das equações de Lagrange, analisando-se inclusive possíveis casos de ressonância que podem surgir e propondo-se um fator denominado, aqui, *fator de ressonância* (F_R), que permite avaliar a intensidade com que atua este fenômeno nos parâmetros da órbita. Na sequência, comenta-se a teoria de Brouwer (1959), condensado nas Equações 2.40. Estas últimas, por sua vez, são de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho, porque possuem quase o perfil definitivo das expressões analíticas, que vão representar o modelo matemático das perturbações.

As perturbações devidas à atração gravitacional de um terceiro corpo (Sol ou Lua), vistas a seguir, não apresentam características relevantes, uma vez que suas perturbações seculares e periódicas podem ser perfeitamente absorvidas dentro da forma das Equações 2.40.

No Capítulo 3 estudam-se as forças não-gravitacionais, isto é, as decorrentes do arrasto atmosférico e as da pressão de radiação. As primeiras preponderam nos satélites de baixa altitude, enquanto as de pressão de radiação são mais atuantes nos satélites acima de 1000 km. Os

efeitos destas duas últimas forças são bastante significativas e são comentados no Capítulo 4, onde se trata da modelagem matemática das equações representativas das perturbações que atuam no satélite. A filosofia encerrada nestas equações é de que as perturbações seculares e de longo período se ajustam em arcos de parábolas; daí o aparecimento de termos em primeiro e segundo grau em t , nas expressões modeladas. Esta hipótese é razoável porque as observações são em pequenos arcos.

Quanto às perturbações de curto período, estas são apresentadas inicialmente com apenas uma frequência, que por sinal é tomada como igual ao movimento médio (n_0) do satélite, porque as observações são em arcos curtos (de um período).

A parte que trata da modelagem matemática não apresenta grandes problemas pois, em geral, as perturbações têm comportamento muito próximo do descrito pelas Equações 2.40, com exceção das perturbações devidas ao arrasto atmosférico e da pressão de radiação.

O arrasto atmosférico causa a circularização da órbita, isto é, produz um decaimento (no semi-eixo maior e na excentricidade) que se adapta razoavelmente numa parábola. Como a anomalia média é função do semi-eixo maior, esta também será afetada, porém de maneira indireta.

Os valores iniciais para os parâmetros das expressões modeladas são obtidos, na maioria das vezes, por analogia com as expressões de Brouwer, com exceção dos dois primeiros termos das expressões modeladas, que são obtidos da seguinte forma: supõe-se que ξ represente um elemento qualquer das expressões modeladas. Todas estas expressões começam pela forma $\xi = \xi_1 + \xi_2 t + \dots$. O primeiro termo do segundo membro (ξ_1) é sempre tomado (em valor inicial) como o valor inicial daquela efeméride fornecida pela observação. Isto faz com que a curva modelada comece coincidente com a curva observada no ponto inicial. O coeficiente ξ_2 é tomado como a derivada da curva real, neste mesmo ponto. Isto obriga a curva modelada começar (o processo) tangente à curva real (observada). A escolha destes dois coeficientes, desta forma, irá facilitar o processo de convergência do método que será empregado no ajuste.

As expressões, com apenas estes dois termos, já constituem uma primeira aproximação das equações finais que se deseja obter.

Os Capítulos 5 e 6 apresentam um resumo da teoria aplicada no trabalho e o algoritmo do procedimento, e no Capítulo 7 é feito o teste do procedimento.

CAPÍTULO 2

FORÇAS GRAVITACIONAIS

2.1 - CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE

O estudo a seguir trata apenas do aspecto qualitativo das perturbações que atuam no satélite, isto é, de suas características gerais de variação, tais como periodicidade, frequência de perturbações, variações não periódicas (seculares), etc. Inicia-se com as perturbações devidas ao campo gravitacional terrestre. Como se sabe, este campo tem como perturbações principais, as decorrentes do achatamento dos polos terrestres, que é representada pelo coeficiente dos harmônicos esféricos J_2 , a deformação denominada forma de pera (J_3), a elipticidade equatorial (C_{22}), etc. Para visualizar melhor a forma das perturbações, é importante lançar mão da expressão do potencial gravitacional terrestre (Heiskanen e Moritz, 1967):

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\sin\phi), \quad (2.1)$$

onde r , ϕ e λ são as coordenadas esféricas (raio vetor, latitude e longitude) do ponto onde se está medindo o potencial; a_e é o raio equatorial terrestre; $P_{nm}(\sin\phi)$ são os polinômios associados de Legendre; C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos do geopotencial (mais rigorosamente do esferopotencial, porque n varia de 2 a um número finito).

Na Expressão 2.1, $m=0$ representa os harmônicos zonais (é usual definir $C_{n0} = -J_n$); $m \neq n$, os harmônicos tesserais e $m=n$, os setoriais.

Num modelo simplificado, onde se considera que a distribuição de massa da Terra seja simétrica em relação ao eixo de rotação, a Expressão 2.1 perde a dependência da longitude (λ) e resulta na seguinte forma:

$$V = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\phi). \quad (2.2)$$

Observa-se que o primeiro termo do segundo membro (μ/r) representa a distribuição esférica de massa, enquanto os outros termos contêm fatores $(a_e/r)^n J_n P_n$, multiplicados pela parte esférica. A razão $(a_e/r)^n$ é conhecida como fator de amortecimento dos J_n (deformações). Quando $r \gg a_e$, $(a_e/r)^n$ tende para zero; o mesmo ocorre quando $r > a_e$ e n for muito grande.

A Expressão 2.1 pode ser expressa em função dos elementos keplerianos da órbita, isto é, do semi-eixo maior (a), da excentricidade (e), da inclinação (I), e dos ângulos: argumento do perigeu (ω), longitude do nodo ascendente (Ω) e anomalia média (M).

Tais transformações podem ser vistas em: Kaula (1966), Balmino e Borderies (1978), Borderies (1978), Gaposchkin (1973), Giacaglia (1979). Assim, o potencial escrito em função dos parâmetros da órbita é:

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta). \quad (2.3)$$

Esta expressão representa só o potencial perturbador e tem por parte periódica a função S_{nmpq} , que é definida como:

$$S_{nmpq} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{array} \right] \cos A + \left[\begin{array}{c} S_{nm} \\ C_{nm} \end{array} \right] \sin A \end{array} \right\}_{\substack{n-m, \text{ par} \\ n-m, \text{ ímpar}}}, \quad (2.4)$$

e $A = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta)$, onde θ é a hora sideral local.

As funções $F_{nmp}(I)$ e $G_{npq}(e)$ são encontradas nas referências acima citadas e apresentam expressões ligeiramente diferentes, mas que conduzem aos mesmos resultados. Isso ocorre porque Kaula (1966) usou um processo clássico, enquanto Giacaglia (1979) e Balmino e Borderies (1978) usaram uma teoria mais recente, que é a de rotações de harmônicos esféricos. A função $F_{nmp}(I)$ apresentada por Giacaglia (1979) é:

$$F_{nmp}(I) = (-1)^{\left[\frac{n-m}{2} \right]} \text{int.} \frac{(2p)!(2n-2p)!}{(n-m)!2^n p!(n-p)!} \sum_{q=q_1}^{q_2} \binom{n-m}{2p-q} \cdot \binom{n+m}{q} (-1)^q C^{n+m+2p-2q} S^{n-m-2p+2q}, \quad (2.5)$$

$$\text{onde } \begin{cases} q = \text{m\AA{x}} (0, 2p - n + m), \\ q = \text{m\AA{n}} (2p, n + m), \\ C = \cos \frac{I}{2}, \quad e \\ S = \text{sen} \frac{I}{2}. \end{cases}$$

A função $G_{npq}(e)$ é oriunda das funções de Hansen da Mecânica Celeste e é dada pela forma:

$$G_{npq}(e) = (1 + \beta^2)^n \sum_{r=0}^{r_1} \sum_{s=0}^{s_1} \binom{2p-2n}{r} \binom{-2p}{s} \cdot (-\beta)^{r+s} J_{q-r+s} \left[(n-2p+q)e \right] \quad (2.6)$$

$$\text{Sendo que: } r_1 = \begin{cases} 2p-2n & \text{se } 2p-2n \geq 0 \\ \infty & \text{se } 2p-2n < 0 \end{cases}$$

$$e \quad s_1 = \infty, \text{ pois } -2p < 0.$$

Usa-se ainda a relação $\binom{-k}{j} = (-1)^j \binom{j+k-1}{j}$. O $J_n(ke)$ que aparece na Expressão 2.6 é uma função de Bessel de primeira espécie.

Para verificar a forma das perturbações devidas ao geopotencial no satélite, é recomendável fazer uso das equações planetárias de Lagrange, apresentadas por Kaula (1966):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial M},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\text{ctg}I}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \text{sen}I} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\text{ctg}I}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \text{sen}I} \cdot \frac{\partial R}{\partial I}, \\ \frac{da}{dt} &= n_0 - \frac{1-e^2}{n_0 a^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial a}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde R se relaciona com o hamiltoniano F, que é definido pela expressão:

$$F = - (T - V) = \frac{\mu}{r} + R - T = \frac{\mu}{2a} + R$$

e T e V são as energias cinética e potencial (por unidade de massa), respectivamente. R é denominado potencial perturbador, ou seja, é igual ao R da Expressão 2.3, que na forma de componentes em n e m é:

$$R_{nm} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a}{a}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{array} \right] \cos A + \left[\begin{array}{l} S_{nm} \\ C_{nm} \end{array} \right] \text{sen} A \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-m, \text{ par} \\ n-m, \text{ ímpar} \end{array} \tag{2.8}$$

Tomando-se $n=2$, $m=q=0$ e $n=2p$ para eliminar a parte periódica, o efeito secular, produzido pelo achatamento dos polos terrestres (C_{20} ou J_2) é dado por:

$$R_{2010} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a}{a}\right)^2 F_{201}(I) G_{210}(e) \tag{2.9}$$

F_{201} e G_{210} são calculados pelas Relações 2.4 e 2.6 e, portanto, substituindo-se a Expressão 2.9 nas Equações 2.7 obtêm-se as variações dos parâmetros da órbita devidas ao potencial perturbador R_{20} , que são:

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0. \tag{2.10}$$

Os três primeiros elementos não são afetados por perturbações da parte secular do achatamento dos pólos, enquanto os três últimos (ângulos) variam (Kaula, 1966) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \frac{3n_0 C_{20}}{4(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 (1 - 5 \cos^2 I), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3n_0 C_{20}}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \cos I, \\ \frac{dM}{dt} &= n_0 - \frac{3n_0 C_{20}}{4(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 (3 \cos^2 I - 1).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Observando-se as Equações 2.11, nota-se que existe um ângulo I que torna $\dot{\omega} = 0$; tal ângulo é conhecido como *ângulo crítico* em teoria de satélites, e seu valor é de $63,4^\circ$. Nota-se também que $\dot{\omega} > 0$ para $I < I_{\text{crítico}}$, e $\dot{\omega} < 0$ para $I > I_{\text{crítico}}$.

Apesar do ângulo crítico no perigeu ser estacionário (para aproximação até J_2), será visto mais adiante que não é vantajoso colocar satélites com tal inclinação, porque neste ponto ocorrem fortes efeitos de ressonância que perturbam significativamente a órbita.

Existe também um ângulo que torna uniforme a variação de \dot{M} (até J_2), que corresponde a $\cos I = \sqrt{3}/3$, ou seja, $I = 54,7^\circ$. Em tal valor de inclinação $\dot{M} = n_0(J_2)$, isto é, a parte secular do achatamento não perturba a anomalia média.

Resumindo-se, a deformação terrestre de achatamento introduz perturbações seculares em ω , Ω e M , da forma $\xi = \xi_0 + \text{const. } \Delta t$, onde ξ é um elemento genérico das Equações 2.11. Deve-se ter em mente também que o coeficiente do harmônico esférico $J_2 = -C_{20}$ é amortecido pelo fator $(a_e/a)^2$, que para satélites altos ($a \gg a_e$) é bem pequeno.

Tendo-se em vista ainda a Expressão 2.8, verifica-se que J_2 introduz também perturbações periódicas, cujo potencial perturbador \bar{e} :

$$R_{20} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a e}{a}\right)^2 \sum_{p,q} F_{20p}(I) G_{2pq}(e) \cos [(2-2p)\omega + (2-2p+q) M] \quad (2.12)$$

e que, esta substituída nas Equações 2.7 apresenta termos do tipo *curto período* para $2-2p+q \neq 0$.

O potencial perturbador correspondente ao harmônico que representa a elipticidade equatorial \bar{e} é dado por:

$$R_{22} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a e}{a}\right)^2 \sum_{p=0}^2 F_{22p}(I) \sum_q G_{2pq}(e) (C_{22} \cos A + S_{22} \sen A), \quad (2.13)$$

onde A é:

$$A = (2 - 2p)\omega + (2 - 2p + q)M + 2 (\Omega - \theta).$$

Como $p = 0, 1, 2, \dots$, observa-se que haverá perturbações de *curto período* $[qM + 2(\Omega - \theta); \pm 2\omega + (\pm 2 + q)M + 2(\Omega - \theta)]$ ligadas a este harmônico, pois, mesmo quando $q = 0$ ainda resulta $2(\Omega - \theta)$, que é de *curto período*.

Mais adiante será visto também que C_{22} e S_{22} são harmônicos ressonantes para satélites geoestacionários.

A perturbação denominada forma de pera tem por potencial perturbador:

$$R_{30} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a e}{a}\right)^3 C_{30} \sum_{p=0}^3 F_{30p}(I) \sum_q G_{3pq}(e) \cos [(3-2p)\omega + (3-2p+q)M], \quad (2.14)$$

mostrando, portanto, que as perturbações introduzidas no caso podem ter *curto período*, e *longo período* quando $q = 2p - 3$.

Para uma visão mais geral do problema, pode-se efetuar as integrações analíticas das Equações 2.7, após ter substituído o potencial perturbador dado pelas Equações 2.8. Tal procedimento requer que se faça uma mudança de variáveis, relacionando-se o tempo com o argumento da função $S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta)$. Faz-se isto, tendo em vista que $\dot{A} = dA/dt$, ou $dt = (1/\dot{A}) dA$, que substituído nas Equações 2.7, por exemplo para a primeira delas, tem-se:

$$da = \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial M} dt = \frac{2}{n_0 a \dot{A}} \frac{\partial R}{\partial M} dA = \frac{2}{n_0 a \dot{A}} \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial M} dA, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{ou: } \Delta a &= \frac{2(n-2p+q)}{n_0 a \dot{A}} \int \frac{\partial R}{\partial A} dA \\ &= \frac{2(n-2p+q)}{n_0 a \dot{A}} \cdot \frac{\mu}{a} \left(\frac{a}{e}\right)^n \sum_{p,q} F_{nmp}(I) G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta), \end{aligned}$$

que na forma de componentes podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \Delta a_{nmpq} &= \frac{2\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{e}\right)^n \frac{(n-2p+q)}{\dot{A}} F_{nmp} G_{npq} S_{nmpq}, \\ \Delta e_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{e}\right)^n \frac{(1-e^2)^{1/2}}{\dot{A}} F_{nmp} G_{npq} [(1-e^2)^{1/2}(n-2p+q) - (n-2p)] S_{nmpq}, \\ \Delta I_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{e}\right)^n \frac{F_{nmp} G_{npq}}{(1-e^2)^{1/2} \sin I \dot{A}} [(n-2p) \cos I - m] S_{nmpq}, \\ \Delta \omega_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{e}\right)^n \frac{1}{\dot{A}} \left[\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} F_{nmp} G'_{npq} - \text{ctg} I (1-e^2)^{-1/2} F'_{nmp} G_{npq} \right] \bar{S}_{nmpq}, \\ \Delta \Omega_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{e}\right)^n \frac{F'_{nmp} G_{npq}}{\dot{A} (1-e^2)^{1/2} \sin I} \bar{S}_{nmpq}, \\ \Delta M_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{e}\right)^n \frac{1}{\dot{A}} \left[2(n+1) G_{npq} - \frac{1-e^2}{e} G'_{npq} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\dot{A} = dA/dt$ e $F'_{nmp}(e) = \partial F_{nmp}(I)/\partial I$, $G'_{npq}(e) = \partial G_{npq}(e)/\partial e$ e \bar{S}_{nmpq} é a integral em relação ao seu argumento. Na verdade, $A = A_{nmpq}$ porque con

têm dentro de si índices do somatório, e as variações das Expressões 2.16 devem ser somadas em todos os índices. Numa forma genérica em que $\xi = (a, e, I, \omega, \Omega, M)$, tem-se:

$$\Delta\xi = \sum_n \sum_m \sum_p \sum_q \Delta\xi_{nmpq}. \quad (2.17)$$

Uma observação rápida das Equações 2.16 mostra que o fator \dot{A} no denominador pode causar problemas, quando $\dot{A} \approx 0$, porque fará com que as amplitudes $\Delta a, \Delta e, \dots, \Delta M$ cresçam rapidamente. É possível verificar que isso ocorre em situações peculiares, por exemplo, se

$$n - 2p = n - 2p + q = 1, \text{ então:}$$

$$\dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \approx \dot{A}, \quad (2.18)$$

porém, como \dot{M} e $\dot{\theta}$ são muito maiores do que $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$, em primeira aproximação, estes últimos podem ser negligenciados na Expressão 2.18, tendo-se:

$$\dot{A} \approx \dot{M} - m\dot{\theta} \quad (2.19)$$

Tal expressão mostra que quando $\dot{M} = m\dot{\theta}$, tem-se $\dot{A} \approx 0$, que fisicamente significa ser o movimento médio do satélite igual a um múltiplo inteiro (m) da velocidade de rotação da Terra. Lembrando-se que \dot{M} depende de " n ", conclui-se que a multiplicidade pode ser encontrada ou não, à medida que o semi-eixo \bar{e} é perturbado pelo arrasto, e que as perturbações contribuem para colocar o satélite em situação de ressonância, como também podem tirá-lo das mesmas.

Outro caso de multiplicidade (nos satélites geoestacionários) ocorre quando:

$$n - 2p = n - 2p + q = m,$$

então:

$$\dot{A} = \dot{\omega} + \dot{M} + \dot{\Omega} - \dot{\theta} \quad \text{ou seja:} \quad \dot{A} \approx \dot{M} - \dot{\theta}. \quad (2.20)$$

Se o satélite tiver a mesma velocidade angular que a terra ocorre o caso $\dot{A} \approx 0$. Isto permite identificar a situação como o fenômeno físico denominado *ressonância*.

Porém é importante notar que este crescimento rápido de amplitudes ocorre dentro das Expressão 2.17, nos pontos onde se tem que $n - 2p = n - 2p + q = m$, tal que $n - m = 2p$ (par), sempre que as condições físicas apresentadas pelas Expressões 2.18 e 2.20 forem satisfeitas. Anteriormente foi dito que $\dot{\omega} = 0$ (para $I = I_{\text{crítico}} = 63,4^{\circ}$) constitui um caso de ressonância, porque pode ocorrer a situação em que $\dot{A} = \dot{\omega}$. Se acontecer simultaneamente que $\dot{M} = \dot{m}$, tal fenômeno será denominado *dupla ressonância*.

Nos satélites geoestacionários, os harmônicos ressonantes mais importantes são C_{22} e S_{22} ..., uma vez que $n \geq 4$; tais harmônicos serão de pouca influência porque o fator de amortecimento $(a_e/a)^n$ é muito pouco significativo.

Multiplicando-se o segundo membro das Equações 2.16 por n_0/n_0 , a primeira destas, é, por exemplo:

$$\Delta a_{nmpq} = \frac{n_0}{\dot{A}} \frac{2\mu}{n_0^2 a^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^n (n - 2p + q) F(I) G(e) S(\omega, \Omega, M, \theta). \quad (2.21)$$

É fácil ver que o quociente n_0/\dot{A} mede, para a, e, I fixos a sensibilidade de ressonância do satélite (em relação ao campo gravitacional terrestre), numa dada situação; por isto, o mesmo é denominado, aqui, fator de ressonância (F_R), e assim a primeira das Equações 2.16 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta a_{nmpq} = F_R \frac{2\mu}{n_0^2 a^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^n (n - 2p + q) F(I) G(e) S(\omega, \Omega, M, \theta), \quad (2.22)$$

e as demais, das referidas equações, tomam forma semelhante.

O motivo de colocar n_0 na definição de F_R , é para que este último se torne adimensional. Assim, pelas Expressões 2.18 tem-se:

$$F_R = \frac{n_0}{\dot{A}} = \frac{n_0}{\dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})}, \quad (2.23)$$

Pela Expressão 2.19, verifica-se que em primeira aproximação $\dot{M} = n_0 = m\dot{\theta}$, logo a relação anterior fica:

$$F_R \approx \frac{n_0}{\dot{\omega} + m\dot{\Omega}} = \frac{n_0}{\dot{\omega} + \frac{n_0}{\dot{\theta}} \dot{\Omega}} = \frac{1}{\frac{\dot{\omega}}{n_0} + \frac{\dot{\Omega}}{\dot{\theta}}} \quad (2.24)$$

Como $\dot{\theta} = 1$ rot./dia, observa-se que os dois elementos fundamentais para produzir o crescimento de amplitudes e de F_R são $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$. No ângulo de inclinação crítico, $I = 63,4^\circ$, $\dot{\omega} = 0$ e o fator de (amplificação) ressonância cresce. Para $I = 90^\circ$ ocorre $\dot{\Omega} = 0$, que contribui para que F_R cresça, mesmo não constituindo um caso de ressonância.

É importante conhecer as situações em que ocorre ressonância, para que, nestes casos, o gerador de órbitas considere os coeficientes ressonantes do esferopotencial em seu modelo de forças.

Um último enfoque das Equações 2.16, que tem como argumento da função periódica, S_{nmpq} , $A = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta)$, permite as seguintes interpretações com respeito às perturbações:

- a) Se $n = 2p$ e $m = 0$, os harmônicos esféricos em tal situação são $J_n = J_{2p} = J_2, J_4, J_6, \dots$ e introduzem perturbações *seculares* (em $q = 0$) e de *curto período* (em $q \neq 0$).
- b) Se $n \neq 2p$ e $m = 0$, os harmônicos são J_3, J_5, J_7, J_{2p+1} , e as perturbações que estes introduzem são de *curto e longo períodos*.

Os demais harmônicos, onde $m \neq 0$, introduzem perturbações de todos os tipos.

2.2 - TEORIA DE BROUWER

Uma outra abordagem que permite uma visão muito boa da forma qualitativa das perturbações, devidas ao campo gravitacional terres

tre, é o método de Brouwer (1959), desenvolvido para uma distribuição si
métrica (de massa) em torno do eixo de rotação da Terra, que considera
harmônicos de até grau 5 e de segunda ordem em J_2 , isto é, (J_2^2) .

Inicialmente, esta teoria aborda o problema principal pa
ra a Terra como um esferóide, com potencial limitado ao termo esférico
(μ/r) e ao segundo harmônico (J_2). A solução é desenvolvida em potências
de J_2 , em variáveis canônicas (de Delaunay), por um método que é basicamente
o mesmo usado por Von Zeipel. Os termos periódicos são divididos
em duas classes: a de curto período que contém a anomalia média em seu
argumento, e a de longo período que tem múltiplos do argumento do peri
geu em seu argumento.

Os termos periódicos, curto e longo períodos, são desenvol
vidos até a ordem J_2 , enquanto os termos seculares são obtidos até J_2^2 .

Os resultados são obtidos na forma fechada, não surgindo,
portanto, nenhum desenvolvimento em série de potências da excentricidade
ou da inclinação, como era usual nos procedimentos clássicos de Von
Zeipel e Poincaré. Como se poderia esperar, a solução não se aplica às vi
zinhanças da inclinação crítica, mas por outro lado não tem outras singu
laridades, como é o caso das Equações 2.16 de Lagrange. No final de seu
trabalho, Brouwer apresenta os termos de longo período e seculares, cau
sados pelos harmônicos J_3 , J_4 e J_5 , do esferopotencial.

Tendo-se em vista o interesse apenas qualitativo das per
tubações, as equações do método de Brouwer são aqui apresentadas somen
te em sua forma final. As variáveis usadas são as mesmas vistas anterior
mente, com exceção dos três ângulos da órbita, que são escritos como:

$$l = M, \quad g = \omega \quad \text{e} \quad h = \Omega.$$

As equações na forma final são:

$$a = a'' \left\{ 1 + \gamma_2 \left[(-1 + 3\theta^2) \left(\frac{a''^3}{r'^3} - n^{-3} \right) + 3(1 - \theta^2) \frac{a''^3}{r'^3} \cos(2g' + 2f') \right] \right\}, \quad (2.25)$$

$$e = e'' + \delta_1 e + \frac{\eta^2}{2e''} \left\{ \gamma_2 \left[(-1+3\theta^2) \left(\frac{a''^3}{r'^3} - \eta^{-3} \right) + 3(1-\theta^2) \left(\frac{a''^3}{r'^3} - \eta^{-4} \right) \cos(2g' + 2f') \right] - \gamma_2' (1-\theta^2) \left[3e'' \cos(2g' + f') + e'' \cos(2g' + 3f') \right] \right\}, \quad (2.26)$$

$$I = I'' + \delta_1 I + \frac{1}{2} \gamma_2' \theta (1-\theta^2)^{1/2} \left[3 \cos(2g' + 2f') + 3e'' \cos(2g' + f') + e'' \cos(2g' + 3f') \right], \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda' - \frac{\eta^3}{4e''} \gamma_2' \left\{ 2(-1+3\theta^2) \left(\frac{a''^2}{r'^2} \eta^2 + \frac{a''}{r'} + 1 \right) \text{sen} f' + 3(1-\theta^2) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\left(-\frac{a''^2}{r'^2} \eta^2 - \frac{a''}{r'} + 1 \right) \text{sen}(2g' + f') + \left(\frac{a''^2}{r'^2} \eta^2 + \frac{a''}{r'} + \frac{1}{3} \right) \text{sen}(2g' + 3f') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} g = g' + \frac{\eta^2}{4e''} \gamma_2' \left\{ 2(-1+3\theta^2) \left(\frac{a''^2}{r'^2} \eta^2 + \frac{a''}{r'} + 1 \right) \text{sen} f' + 3(1-\theta^2) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\left(-\frac{a''^2}{r'^2} \eta^2 - \frac{a''}{r'} + 1 \right) \text{sen}(2g' + f') + \left(\frac{a''^2}{r'^2} \eta^2 + \frac{a''}{r'} + \frac{1}{3} \right) \text{sen}(2g' + 3f') \right] \right\} + \\ + \frac{1}{4} \gamma_2' \left\{ 6(-1+5\theta^2) (f' - \lambda' + e'' \text{sen} f') + (3-5\theta^2) \left[3 \text{sen}(2g' + 2f') + \right. \right. \\ \left. \left. + 3e'' \text{sen}(2g' + f') + e'' \text{sen}(2g' + 3f') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} h = h' - \frac{1}{2} \gamma_2' \theta \left[6(f' - \lambda' + e'' \text{sen} f') - 3 \text{sen}(2g' + 2f') - 3e'' \text{sen}(2g' + f') - \right. \\ \left. - e'' \text{sen}(2g' + 3f') \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $\theta = \cos I''$, $\eta = (1 - e''^2)^{1/2}$, $\gamma_2 = a_e^2 J_2 / 2a''^3$, $\gamma_2' = \gamma_2 \eta^{-4}$, e as variáveis com uma linha são de longo período, enquanto as de duas linhas são médias de Brouwer (constantes, ou que variam linearmente no tempo).

As variáveis de longo período são obtidas através das variáveis médias, conforme as relações:

$$\begin{aligned} \delta_1 e = & \left\{ \frac{1}{8} \gamma_2' e'' \eta^2 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^2(1 - 5\theta^2)^{-1}] - \frac{5}{12} \frac{\gamma_4'}{\gamma_2'} e'' \eta^2 [1 - 3\theta^2 - 8\theta^4 \cdot \right. \\ & \left. \cdot (1 - 5\theta^2)^{-1} \right\} \cos 2g'' + \left\{ \frac{1}{4} \frac{\gamma_3'}{\gamma_2'} \eta^2 \operatorname{sen} I'' + \frac{5}{64} \cdot \frac{\gamma_5'}{\gamma_2' \eta^2} \operatorname{sen} I'' (4 + 3e''^2) \cdot \right. \\ & \left. \cdot [1 - 9\theta^2 - 24\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \right\} \operatorname{sen} g'' - \frac{35}{384} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} e''^2 \eta^2 \operatorname{sen} I'' \cdot \\ & \cdot [1 - 5\theta^2 - 16\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \operatorname{sen} 3g'' , \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\delta_1 I = - \frac{e'' \delta_1 e}{\eta^2 \operatorname{tg} I''} , \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \ell' = \ell'' + & \left\{ \frac{1}{8} \gamma_2' \eta^3 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] - \frac{5}{12} \frac{\gamma_4'}{\gamma_2'} \eta^3 [1 - 3\theta^2 - 8\theta^4 \cdot \right. \\ & \left. \cdot (1 - 5\theta^2)^{-1} \right\} \operatorname{sen} \acute{z} g'' + \left\{ - \frac{1}{4} \frac{\gamma_3'}{\gamma_2'} \frac{\eta^3}{e''} \operatorname{sen} I'' - \frac{5}{64} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} \frac{\eta^3}{e''} \operatorname{sen} I'' (4 + 9e''^2) \cdot \right. \\ & \left. \cdot [1 - 9\theta^2 - 24\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \right\} \cos g'' + \left\{ \frac{35}{384} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} \eta^3 e'' \operatorname{sen} I'' \cdot \right. \\ & \left. \cdot [1 - 5\theta^2 - 16\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \right\} \cos 2g'' , \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} g' = g'' + & \left\{ - \frac{1}{16} \gamma_2' [(2 + e''^2) - 11(2 + 3e''^2)\theta^2 - 40(2 + 5e''^2)\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} - \right. \\ & \left. - 400e''^2\theta^6(1 - 5\theta^2)^{-1}] + \frac{5}{24} \frac{\gamma_4'}{\gamma_2'} [2 + e''^2 - 3(2 + 3e''^2)\theta^2 - \right. \\ & \left. - 8(2 + 5e''^2)\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1} - 80e''^2 \theta^6(1 - 5\theta^2)^{-2}] \right\} \operatorname{sen} 2g'' + \\ & + \left\{ \frac{1}{4} \frac{\gamma_3'}{\gamma_2'} \left(\frac{\operatorname{sen} I''}{e''} - \frac{e''\theta^2}{\operatorname{sen} I''} \right) + \frac{5}{64} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} \left[\left(\frac{\eta^2 \operatorname{sen} I''}{e''} - \frac{e''\theta^2}{\operatorname{sen} I''} \right) (4 + 3e''^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + e'' \operatorname{sen} I'' (26 + 9e'') \right] \cdot [1 - 9\theta^2 - 24\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] - \frac{15}{32} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} e''\theta^2 \operatorname{sen} I'' \cdot \right. \\ & \left. \cdot (4 + 3e''^2) [3 + 16\theta^2(1 - 5\theta^2)^{-1} + 40\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-2}] \right\} \cos 2g'' + \left\{ - \frac{35}{1152} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} \cdot \right. \\ & \left. \cdot [e'' \operatorname{sen} I'' (3 + 2e''^2) - \frac{e''^3 \theta^2}{\operatorname{sen} I''}] [1 - 5\theta^2 - 16\theta^4(1 - 5\theta^2)^{-1}] \right\} + \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$+ \frac{35}{576} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} e^{''3\theta^2 \text{sen} I''} [5+32\theta^2(1-5\theta^2)^{-1} + 80\theta^4(1-5\theta^2)^{-2}] \} \cos 3g'' , \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} h' = h'' + & \left\{ -\frac{1}{8} \gamma_2' e^{''2\theta} [11+80\theta^2(1-5\theta^2)^{-1} + 200\theta^4(1-5\theta^2)^{-2} + \frac{5}{12} \frac{\gamma_4'}{\gamma_2'} e^{''2\theta} \cdot \right. \\ & \cdot [3+16\theta^2(1-5\theta^2)^{-1} + 40\theta^4(1-5\theta^2)^{-2}] \} \text{sen} 2g'' + \left\{ \frac{1}{4} \frac{\gamma_3'}{\gamma_2'} \frac{e^{''\theta}}{\text{sen} I''} + \right. \\ & + \frac{5}{64} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} \frac{e^{''\theta}}{\text{sen} I''} \cdot (4+3e^{''2}) [1-9\theta^2-24\theta^4(1-5\theta^2)^{-1}] + \frac{15}{32} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} e^{''\theta \text{sen} I''} \cdot \\ & \cdot (4+3e^{''2}) [3+16\theta^2(1-5\theta^2)^{-1} + 40\theta^4(1-5\theta^2)^{-2}] \} \cos g'' + \\ & + \left\{ -\frac{35}{1152} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} \frac{e^{''3\theta}}{\text{sen} I''} [1-5\theta^2-16\theta^4(1-5\theta^2)^{-1}] - \frac{35}{576} \frac{\gamma_5'}{\gamma_2'} e^{''3\theta \text{sen} I''} \cdot \right. \\ & \cdot [5+32\theta^2(1-5\theta^2)^{-1} + 80\theta^4(1-5\theta^2)^{-2}] \} \cos 3g'' . \quad (2.35) \end{aligned}$$

E para finalizar, os elementos médios são dados pelas expressões seculares.

$$\begin{aligned} \lambda'' = \lambda_0'' + n_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \gamma_2' n (3\theta^2 - 1) + \frac{3}{32} \gamma_2'^2 n [-15 + 16n + 25n^2 + (30 - 96n - 90n^2)\theta^2 + \right. \\ \left. + (105 + 144n + 25n^2)\theta^4 + \frac{15}{16} \gamma_4' n e^{''2} [3 - 30\theta^2 + 35\theta^4] \right\} \cdot t , \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'' = g_0'' + n_0 \left\{ \frac{3}{2} \gamma_2' (5\theta^2 - 1) + \frac{3}{32} \gamma_2'^2 [-35 + 24n + 25n^2 + (90 - 192n - 126n^2)\theta^2 + \right. \\ \left. + (385 + 360n^2 + 45n^2)\theta^4] + \frac{5}{16} \gamma_4' [21 - 9n^2 + (-270 + 126n^2)\theta^2 + \right. \\ \left. + (385 - 189n^2)\theta^4] \right\} \cdot t , \quad (2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'' = h_0'' + n_0 \left\{ -3\gamma_2' \theta + \frac{3}{8} \gamma_2'^2 [(-5 + 12n + 9n^2)\theta + (-35 - 36n - 5n^2)\theta^3 + \right. \\ \left. + \frac{5}{4} \gamma_4' (5 - 3n^2)\theta (3 - 7\theta^2) \right\} \cdot t , \quad (2.38) \end{aligned}$$

onde as constantes γ_3' , γ_4' e γ_5' são definidas como:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= -\frac{a_e^2 J_3}{a''^3}, \quad \gamma_3' = \gamma_3 \eta^{-6}, \\ \gamma_4 &= -\frac{3a_e^4 J_4}{8a''^4}, \quad \gamma_4' = \gamma_4 \eta^{-8}, \\ \gamma_5 &= \frac{a_e^5 J_5}{a''^5}, \quad \gamma_5' = \gamma_5 \eta^{-10}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A essência do método \bar{e} : dados os elementos iniciais a_0'' , e_0'' , I_0'' , ℓ_0'' , g_0'' e h_0'' , propagam-se os elementos médios através das Expressões 2.36 a 2.38, os quais são obtidos no instante seguinte (a'' , e'' , I'' , ℓ'' , g'' , h''). Em seguida, calculam-se ℓ' , g' , h' , r' e f' e, com estes, determinam-se os elementos osculadores pelas Expressões 2.25 a 2.30.

As Equações de 2.25 a 2.38 podem ser agrupadas e escritas de uma maneira literal, como:

$$a = a_0 + a_1 \cos(2g' + 2f'),$$

$$\begin{aligned} e &= e_0 + e_1 \text{sen}g'' + e_2 \cos 2g'' + e_3 \text{sen} 3g'' + e_4 \cos(2g' + f') + e_5 \cos(2g' + 2f') + \\ &+ e_6 \cos(2g' + 3f'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= I_0 + I_1 \text{sen}g'' + I_2 \cos 2g'' + I_3 \text{sen} 2g'' + I_4 \cos(2g' + f') + I_5 \cos(2g' + 2f') + \\ &+ I_6 \cos(2g' + 3f'), \end{aligned}$$

$$\ell = \ell_0 + \ell_1 t + \ell_2 \cos g'' + \ell_3 \cos 2g'' + \ell_5 \text{sen} f' + \ell_6 \text{sen}(2g' + f') + \ell_7 \text{sen}(2g' + 3f'),$$

$$\begin{aligned} g &= g_0 + g_1 t + g_2 \cos g'' + g_3 \text{sen} 2g'' + g_4 \cos 3g'' + g_5 \text{sen} f' + g_6 \text{sen}(2g' + f') + \\ &+ g_7 \text{sen}(2g' + 2f') + g_8 \text{sen}(2g' + 3f'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 t + h_2 \cos g'' + h_3 \text{sen} 2g'' + h_4 \cos 3g'' + h_5 \text{sen} f' + h_6 \text{sen}(2g' + f') + \\ &+ h_7 \text{sen}(2g' + 2f') + h_8 \text{sen}(2g' + 3f'), \end{aligned}$$

Lembrando-se que $g'' = g_0'' + \dot{g}_0''t$ e tendo-se em vista que os a_j , e_j , I_j , λ_j , g_j e h_j são funções de a , e , I , estes variam muito lentamente. Assim, dentro dos argumentos dos cossenos e senos, que estão representados por g'' , $2g''$, etc, colocam-se $(g_0'' + \dot{g}_0''t)$, $2(g_0'' + \dot{g}_0''t)$, etc. As Expressões 2.40 são muito importantes, pois mostram a forma das perturbações devidas ao campo gravitacional terrestre, com suas frequências principais de longo e curto períodos, como também a grande quantidade de termos das expressões analíticas.

2.3 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS A UM TERCEIRO CORPO

Os efeitos das forças de atração do Sol e da Lua são muito importantes, principalmente para satélites de grande altitude, isto é, a alguns raios terrestres de distância, como é o caso dos satélites de comunicação. Vários autores já estudaram este efeito como Kozai, Blitzer, Moe, Geyling, Musen, e Upton, Bailie e Musen, (Cook, 1962).

O procedimento usual é tomar as equações de Lagrange, do movimento planetário, e substituir nestas, as forças obtidas por derivações parciais do potencial perturbador R , de atração do terceiro corpo. A expressão da função de perturbação em coordenadas cartesianas, referidas ao sistema inercial centrado na Terra, segundo Brouwer (1959), é:

$$R = GM_p \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_p + yy_p + zz_p}{r_p^3} \right), \quad (2.41)$$

sendo M_p a massa do corpo perturbador, que está a uma distância r_p do centro da Terra; e Δ , a distância entre o satélite e o corpo perturbador, dado por:

$$\Delta^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2. \quad (2.42)$$

As forças devidas ao corpo perturbador podem ser escritas em função de suas componentes, segundo três direções principais, denotadas por S , T e W , onde S é a componente na direção radial, a partir do centro da Terra, W é normal ao plano da órbita e T é normal às duas primeiras, no plano osculador da órbita (plano que contém \mathbf{r} e \mathbf{v} do satélite).

As expressões finais para S, T e W, após calcular as derivadas parciais de R nestas três direções (Cook, 1962), são:

$$\begin{aligned}
 S &= -K \left[r - \frac{3}{2} (A^2 + B^2) - 3AB \operatorname{sen} 2u - \frac{3}{2} (A^2 - B^2) \operatorname{cos} u + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{r}{r_p} (A \operatorname{cos} u + B \operatorname{sen} u) \left\{ 3 - 5(A \operatorname{cos} u + B \operatorname{sen} u) \right\} \right], \\
 T &= 3Kr \left[AB \operatorname{cos} 2u - \frac{1}{2} (A^2 - B^2) \operatorname{sen} 2u + \frac{r}{2r_p} (A \operatorname{sen} u - B \operatorname{cos} u) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left\{ 1 - 5(A \operatorname{cos} u + B \operatorname{sen} u)^2 \right\} \right], \\
 W &= 3Kr C \left[A \operatorname{cos} u + B \operatorname{sen} u - \frac{r}{2r_p} \left\{ 1 - 5(A \operatorname{cos} u + B \operatorname{sen} u)^2 \right\} \right]. \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Onde A, B e C são as expressões:

$$\begin{aligned}
 A &= \operatorname{cos}(\Omega - \Omega_p) \operatorname{cos} u_p + \operatorname{cos} i_p \operatorname{sen} u_p \operatorname{sen}(\Omega - \Omega_p), \\
 B &= \operatorname{cos} i \left[- \operatorname{sen}(\Omega - \Omega_p) \operatorname{cos} u_p + \operatorname{cos} i_p \operatorname{sen} u_p \operatorname{cos}(\Omega - \Omega_p) \right] + \\
 &\quad + \operatorname{sen} i \operatorname{sen} i_p \operatorname{sen} u_p, \quad (2.44) \\
 C &= \operatorname{sen} i \left[\operatorname{cos} u_p \operatorname{sen}(\Omega - \Omega_p) - \operatorname{cos} i_p \operatorname{sen} u_p \operatorname{cos}(\Omega - \Omega_p) \right] + \\
 &\quad + \operatorname{cos} i \operatorname{sen} i_p \operatorname{sen} u_p, \quad e
 \end{aligned}$$

$$K = GM_p / r_p^3, \quad e \quad u = \omega + f, \quad u_p = \omega_p + f_p.$$

Os elementos r_p , u_p , Ω_p , i_p , etc. pertencem ao corpo perturbador.

Tomando-se as equações planetárias de Lagrange na forma de Euler (Bate et alii, 1971), tem-se:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0(1-e^2)^{1/2}} \left[S e \operatorname{sen} f + \frac{a}{r} (1-e^2) T \right], \quad (2.45)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n_0 a} \left\{ S \operatorname{sen} f + T \left[e + \operatorname{cos} f \left(\frac{r}{a} + 1 \right) \right] \right\},$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{Wr \operatorname{cos} f}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2}},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Wr^3 \operatorname{senu}}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \operatorname{sen} I},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\Omega}{dt} \operatorname{cos} I - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n_0 a e} \left\{ S \operatorname{cos} f - T \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right] \operatorname{sen} f \right\},$$

$$\frac{dM}{dt} = n_0 - \frac{2rS}{n_0 a^2} - (1-e^2)^{1/2} (\dot{\omega} + \dot{\Omega} \operatorname{cos} I). \quad (2.45)$$

As Equações 2.45 podem ser integradas em anomalia verdadeira, desde que se efetue a transformação $dt = (r^2/na^2\sqrt{1-e^2}) df$.

Substituindo-se S, T e W nas Expressões 2.43, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{da}{df} = \frac{2Kr^3}{n_0^2 a^3 (1-e^2)} & \left\{ \left[-1 + \frac{3}{2}(A^2+B^2) + 3AB \operatorname{sen} 2u + \frac{3}{2}(A^2-B^2) \operatorname{cos} 2u \right] e \operatorname{sen} f + \right. \\ & \left. + 3 \left[AB \operatorname{cos} 2u - \frac{1}{2}(A^2-B^2) \operatorname{sen} 2u \right] (1+e \operatorname{cos} f) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{df} = \frac{Kr^3}{n_0^2 a^3} & \left\{ \left[-1 + \frac{3}{2}(A^2+B^2) + 3AB \operatorname{sen} 2u + \frac{3}{2}(A^2-B^2) \operatorname{cos} 2u \right] \operatorname{sen} f + \right. \\ & \left. + 3 \left[AB \operatorname{cos} 2u - \frac{1}{2}(A^2-B^2) \operatorname{sen} 2u \right] \left[\operatorname{cos} f + \frac{\operatorname{cos} f + e}{1+e \operatorname{cos} f} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{df} = \frac{3Kr^4 C}{n_0^2 a^4 (1-e^2)} \left[A \operatorname{cos} u + B \operatorname{senu} \right] \operatorname{cos} u,$$

$$\frac{d\Omega}{df} = \frac{3Kr^4 C}{n_0^2 a^4 (1-e^2) \operatorname{sen} I} \left[A \operatorname{cos} u + B \operatorname{senu} \right] \operatorname{senu}, \quad (2.46)$$

$$\frac{d\omega}{df} + \frac{d\Omega}{df} \operatorname{cos} I = \frac{Kr^3}{n_0^2 a^3 e} \left\{ 1 - \frac{3}{2}(A^2+B^2) - 3AB \operatorname{sen} 2u - \frac{3}{2}(A^2-B^2) \operatorname{cos} 2u \right\} \operatorname{cos} f +$$

$$+ 3 \left[AB \cos 2u - \frac{1}{2}(A^2 - B^2) \sin 2u \right] \left[1 + \frac{1}{1 + e \cos f} \right] \operatorname{sen} f \left. \right\} . \quad (2.46)$$

Lembrando-se que $u = \omega + f$ e admitindo-se que a variação dos elementos orbitais, num dado intervalo de tempo, seja insignificante quando comparado com a variação de f (anomalia verdadeira) e ainda que r , distância do satélite, seja a mesma de uma órbita Kepleriana não-perturbada (osculadora), as integrais em relação a f podem ser calculadas, obtendo-se daí as variações dos respectivos elementos, por período (Cook, 1962), da seguinte maneira:

$$\Delta a = 0,$$

$$\Delta e = - \frac{15\pi K e (1-e^2)^{1/2}}{n_0^2} \left[AB \cos 2\omega - \frac{1}{2}(A^2 - B^2) \sin 2\omega \right],$$

$$\Delta r_p = - a \Delta e, \quad (2.47)$$

$$\Delta \Omega = \frac{3\pi K C}{2n_0^2 (1-e^2)^{1/2} \operatorname{sen} I} \left[5 A e^2 \sin 2\omega + B(2+3e^2-5e^2 \cos 2\omega) \right],$$

$$\Delta I = \frac{3\pi K C}{2n_0^2 (1-e^2)^{1/2}} \left[A(2+3e^2+5e^2 \cos 2\omega) + 5 B e^2 \sin 2\omega \right],$$

$$\Delta \omega + \Delta \Omega \cos I = \frac{3\pi K (1-e^2)^{1/2}}{n_0^2} \left\{ 5 \left[AB \sin 2\omega + \frac{1}{2}(A^2 - B^2) \cos 2\omega \right] - 1 + \frac{3}{2}(A^2 + B^2) \right\}.$$

A , B e C foram considerados constantes, porque a variação dos elementos orbitais do corpo perturbador é também pequena em relação à variação de f .

Observando-se cuidadosamente as Equações 2.44 e 2.47, verifica-se que as perturbações devidas a um terceiro corpo têm caráter *secular* em Ω e ω somente, e de longo período para todos os outros elementos, com exceção do semi-eixo maior da órbita que, em primeira aproximação, não é perturbado. Os longos períodos em questão são muito maiores do que o período do satélite e são, por exemplo, os períodos de: rotação da linha dos apside, rotação do nodo ascendente do satélite em relação ao período do terceiro corpo, rotação do terceiro corpo, etc.

Os efeitos da atração do Sol e da Lua crescem com a excentricidade da órbita.

2.3.1 - RESSONÂNCIA

Este item é importante por existirem quinze casos possíveis de ressonância, devidos a um terceiro corpo (Sol ou Lua). Em qualquer um destes casos (trinta ao todo), as variações dos elementos podem ser muito mais significativas do que as vistas até agora. Quando ocorre a ressonância, a excentricidade da órbita do satélite é o elemento mais importante, pois está diretamente ligada ao *tempo de vida* do satélite. Tomando-se a segunda das Equações 2.47 e admitindo-se que $\Delta e/\Delta t$ é, em primeira aproximação, igual à variação temporal de e , ou seja, para $\Delta t = P = 2\pi(a^3/\mu)^{1/2}$, tem-se que:

$$\dot{e} = -\frac{15}{2} \frac{Ke}{n_0} (1-e^2)^{1/2} \left[A B \cos 2\omega - \frac{1}{2}(A^2 - B^2) \sin 2\omega \right] + O(2^{\text{a}}), \quad (2.48)$$

Substituindo-se A e B pelas Equações 2.44, é assumida a forma:

$$\dot{e} = f [\sin \psi, \cos \psi].$$

Sua integração requer a seguinte transformação: $dt = \frac{1}{\dot{\psi}} d\psi$, que resulta em:

$$e = \frac{1}{\dot{\psi}} F [\sin \psi, \cos \psi]. \quad (2.49)$$

$\dot{\psi}$ é derivada de um argumento que, ainda de acordo com as Expressões 2.44, é uma das seguintes relações de ressonância:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_p \pm \dot{u}_p \pm \dot{\omega} &= 0, \\ 2\dot{u}_p \pm (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_p) \pm 2\dot{\omega} &= 0, \\ \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_p \pm \dot{\omega} &= 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_p \pm 2\dot{\omega} &= 0, \\ \dot{\omega} \pm (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_p) &= 0, \\ \dot{\omega} &= 0.\end{aligned}\tag{2.50}$$

CAPÍTULO 3

FORÇAS NÃO GRAVITACIONAIS

3.1 - FORÇA DE ARRASTO

Uma das forças mais importantes, do tipo passivo, é a força de arrasto, que para satélites com altura inferior a 1000 km se torna bastante influente. Sabe-se que tal força é proporcional ao quadrado da velocidade de deslocamento do satélite em relação à atmosfera, e seu valor absoluto por unidade de massa (King Hele, 1964) é:

$$|F| = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v^2. \quad (3.1)$$

A/m é a razão área/massa do satélite, calculada como sendo um valor médio de sua variação total em função da altitude do satélite, e considerada constante para efeito de cálculo da força de arrasto. O coeficiente de arrasto C_D depende da razão molecular de velocidades (velocidade do satélite dividida pela velocidade molecular média), do processo de reflexão molecular, da variação de energia das moléculas antes e depois de atingir a superfície e ser refletida, da temperatura do satélite e do grau de dissociação das moléculas pelo impacto. A forma do satélite também influencia o valor de C_D . A densidade ρ é função da altitude h e da temperatura exosférica T_e . Esta última depende do fluxo solar médio e instantâneo da época do ano (posição do Sol) e do índice geomagnético. O fluxo solar tem variações periódicas de longo período, isto é, passa por um máximo e um mínimo num período de 11 anos, e tem variações de curto período (27 dias) e variações semi-anuais.

Faz-se o cálculo da influência do arrasto atmosférico nos elementos da órbita, tomando-se as componentes da Expressão 3.1 nas direções S, T, W (Balmino, 1974), que são:

$$\begin{bmatrix} S \\ T \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho a v \begin{Bmatrix} e \operatorname{sen} E \dot{E} \\ -(1-e^2)^{1/2} \left[1 - \beta \frac{(1-e \cos E)^2}{1-e^2} \right] \dot{E} \\ -\frac{\dot{\theta}}{n_0} (1-e \cos E)^2 \operatorname{sen} I \cos(f+\omega) \dot{E} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

onde:

$$v = \left[\frac{\mu}{a} \left(\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E} \right) \right]^{1/2} \left(1 - \beta \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E} \right), \quad (3.3)$$

$\dot{\theta}$ é a velocidade angular da Terra, e

$$\beta = \frac{\dot{\theta}}{n_0} (1-e^2)^{1/2} \cos I.$$

A substituição das Expressões 3.2 nas Expressões 2.45 permite que se efetue a integração delas. Tais integrações só podem ser analíticas quando se considera um modelo simplificado para a atmosfera, por exemplo, $\rho = \rho_0 \exp[-(r_p - r)/H]$, onde ρ só depende da altura. Por outro lado, a razão A/m e C_D também são considerados constantes, embora saiba-se que C_D varia significativamente com a altura (King Hele, 1980).

Assim:

$$\begin{aligned} \Delta a &= - C_D \frac{A}{m} a^2 \int_0^{2\pi} \rho(E) \left[\frac{(1+e \cos E)^3}{1-e \cos E} \right]^{1/2} \left[1 - \beta \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E} \right]^2 dE, \\ \Delta e &= - C_D \frac{A}{m} \frac{a(1-e^2)^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(E) \left[\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E} \right]^{1/2} \left(1 - \beta \cdot \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\cos E - \frac{\beta}{2(1-e^2)} (1-e \cos E)(2 \cos E - e - e \cos^2 E) \right] dE, \\ \Delta I &= - \frac{1}{8\pi} C_D \frac{A}{m} \frac{a}{n_0} \dot{\theta} \operatorname{sen} I \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \rho(E) (1-e \cos E)^{1/2} (1+e \cos E)^{1/2} \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 - \beta \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E} \right) \cdot \left[1 + \cos 2\omega \frac{(2-e^2) \cos^2 E - 1 + 2e^2 - 2e \cos E}{(1-e \cos E)^2} \right] dE, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Delta\Omega = - \frac{1}{8\pi} C_D \frac{A}{m} \frac{a}{n_0} \frac{\dot{\omega} \sin 2\omega}{(1-e^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \rho(E) (1-e^2 \cos^2 E)^{1/2} (1-\beta \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E}) \cdot [2e^2 - 1 - 2e \cos E + (2-e^2) \cos^2 E] dE,$$

$$\Delta\omega = - \cos I \Delta\Omega ,$$

$$\Delta M = - (1 - e^2)^{1/2} \Delta\omega + \int \delta n dt. \quad (3.4)$$

Estas equações mostram a presença de perturbações periódicas e seculares em todos os elementos da órbita; porém, as mais importantes estão no semi-eixo maior e na excentricidade. Isso é fácil de ser visualizado fisicamente, tendo-se em vista que a força de arrasto tem seu efeito preponderante, no sentido oposto ao do movimento do satélite, o que produz uma contração no semi-eixo maior e uma consequente diminuição da excentricidade. No perigeu, devido à maior proximidade, a velocidade é maior e, em decorrência, a força de oposição do arrasto também é maior, acarretando dissipação de energia, que implica diretamente perda de altura do apogeu. Sendo r_p e r_{ap} as distâncias radiais do perigeu e do apogeu em relação ao centro da Terra, então é fácil ver que as variações no perigeu e apogeu são:

$$\Delta r_p = (1 - e) \Delta a - a \Delta e$$

$$\Delta r_{ap} = (1 + e) \Delta a + a \Delta e \quad (3.5)$$

A variação no perigeu é irrelevante, enquanto a do apogeu somam as variações em a e e .

A última das Equações 3.4 mostra que a variação na anomalia média depende da variação do semi-eixo, pois, $\delta n = (-3n/2a)\Delta a$, que é equivalente a dizer que M é função de a através de n .

As perturbações na excentricidade também são importantes porque afetam o tempo de vida do satélite.

As perturbações de curto período, decorrentes do arrasto, para satélites de altura em torno de 1000 km, são menores do que 1 m e podem, portanto, ser negligenciadas. As perturbações seculares podem, em alguns casos, ser absorvidas por constantes do modelo orbital adotado. Assim, as Expressões 3.4 são mais usadas para análise de perturbações de longo período.

As Figuras de 3.1 a 3.4 mostram os casos mais comuns das perturbações decorrentes do arrasto.

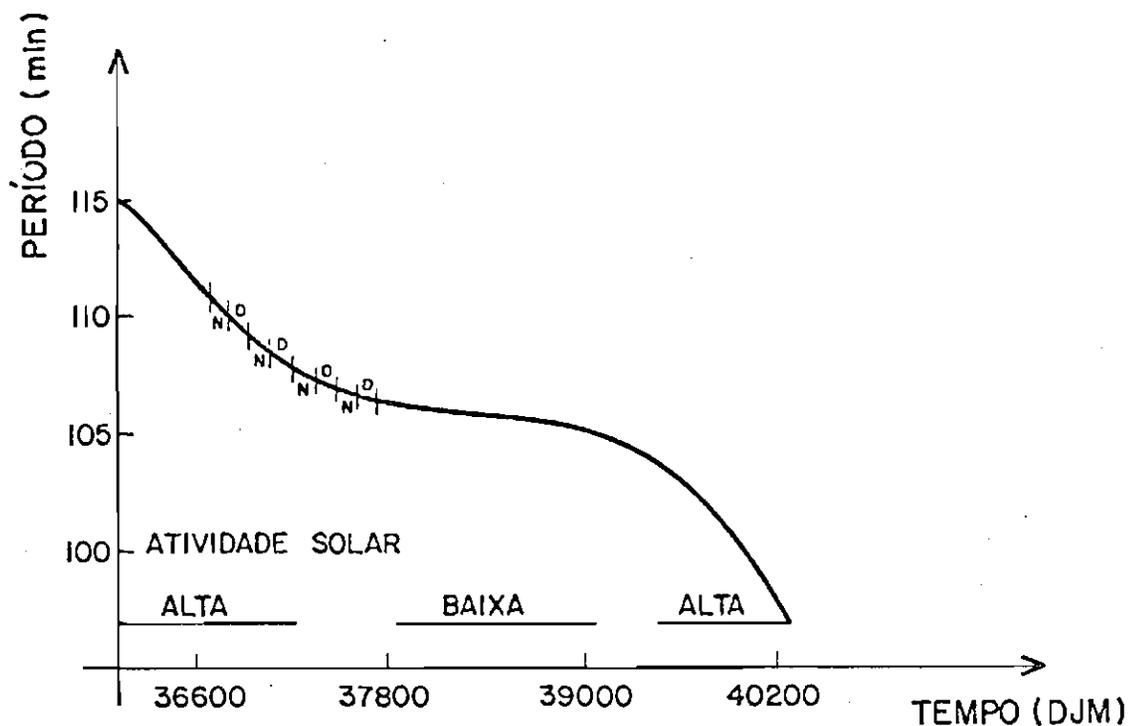


Fig. 3.1 - Variação do período do satélite 1958 α .

FONTE: Sehnal (1973).

A Figura 3.1 mostra os períodos de atividades solares alta e baixa, e como varia o período do satélite. D e N são intervalos em que o perigeu do satélite está ou não na luz. A curva de maior período representa a variação de 11 anos do fluxo solar. Dia Juliano Modificado (DJM).

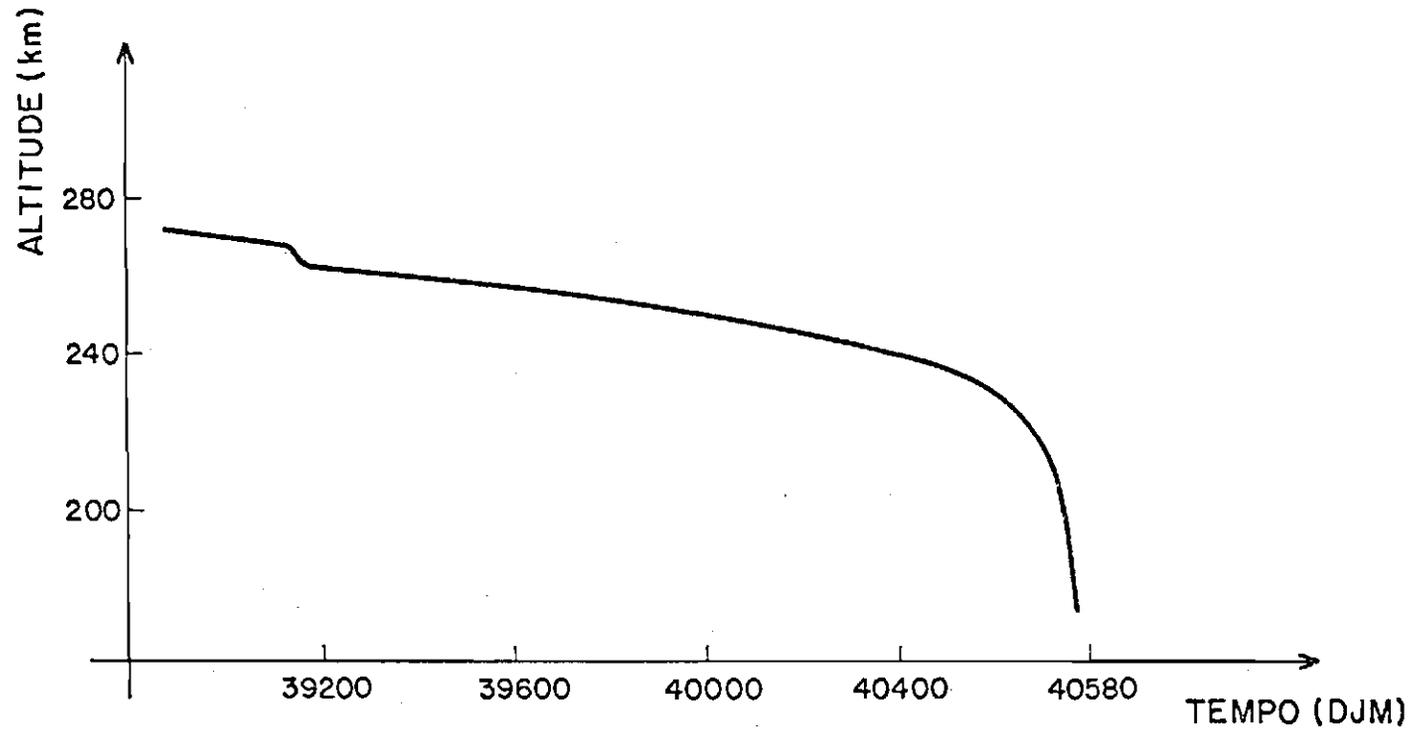


Fig. 3.2 - Curva de decaimento do perigeu do satélite 1965 11D, corrigido dos harmônicos zonais ímpares e da perturbação luni-solar. Dia Juliano Modificado (DJM).

A Figura 3.2 mostra que a queda é mais brusca no final do tempo de vida.

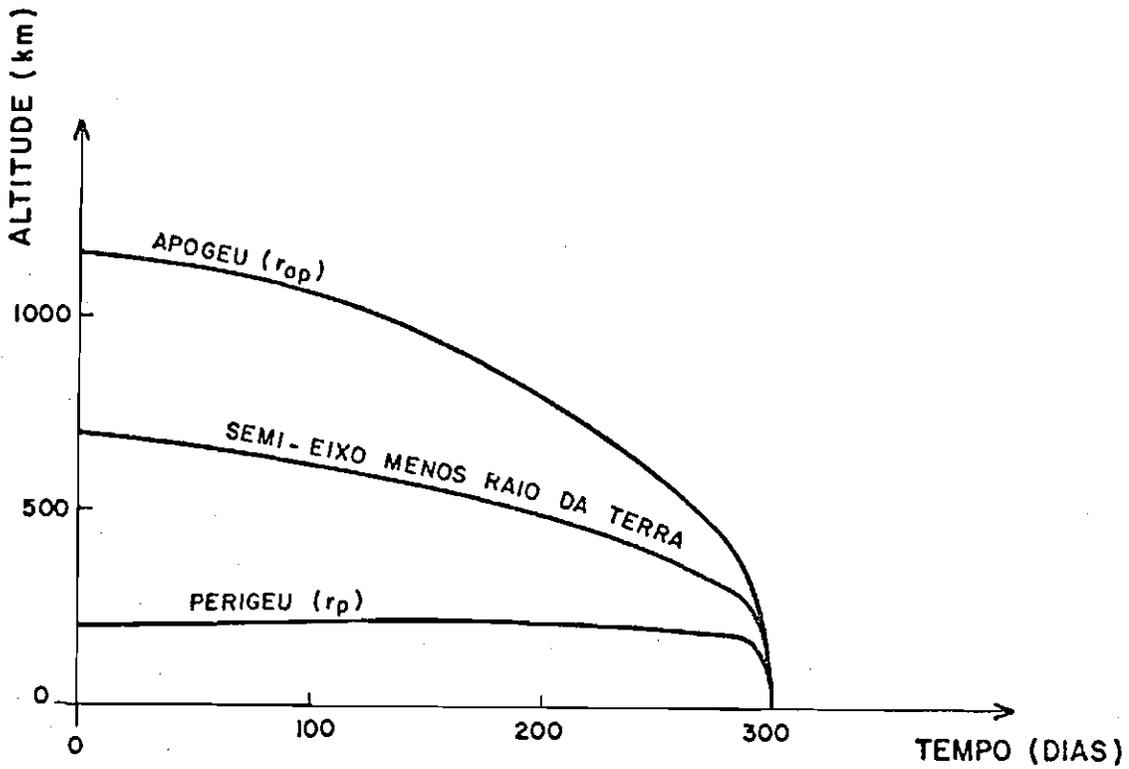


Fig. 3.3 - Curva de decaimento do SPUTINIK III, calculado pelo programa LIFTIM.

FONTE: Eckstein (1978).

Na Figura 3.3 verifica-se o decaimento rápido do apogeu, enquanto o perigeu se mantém quase que inalterado até o final.

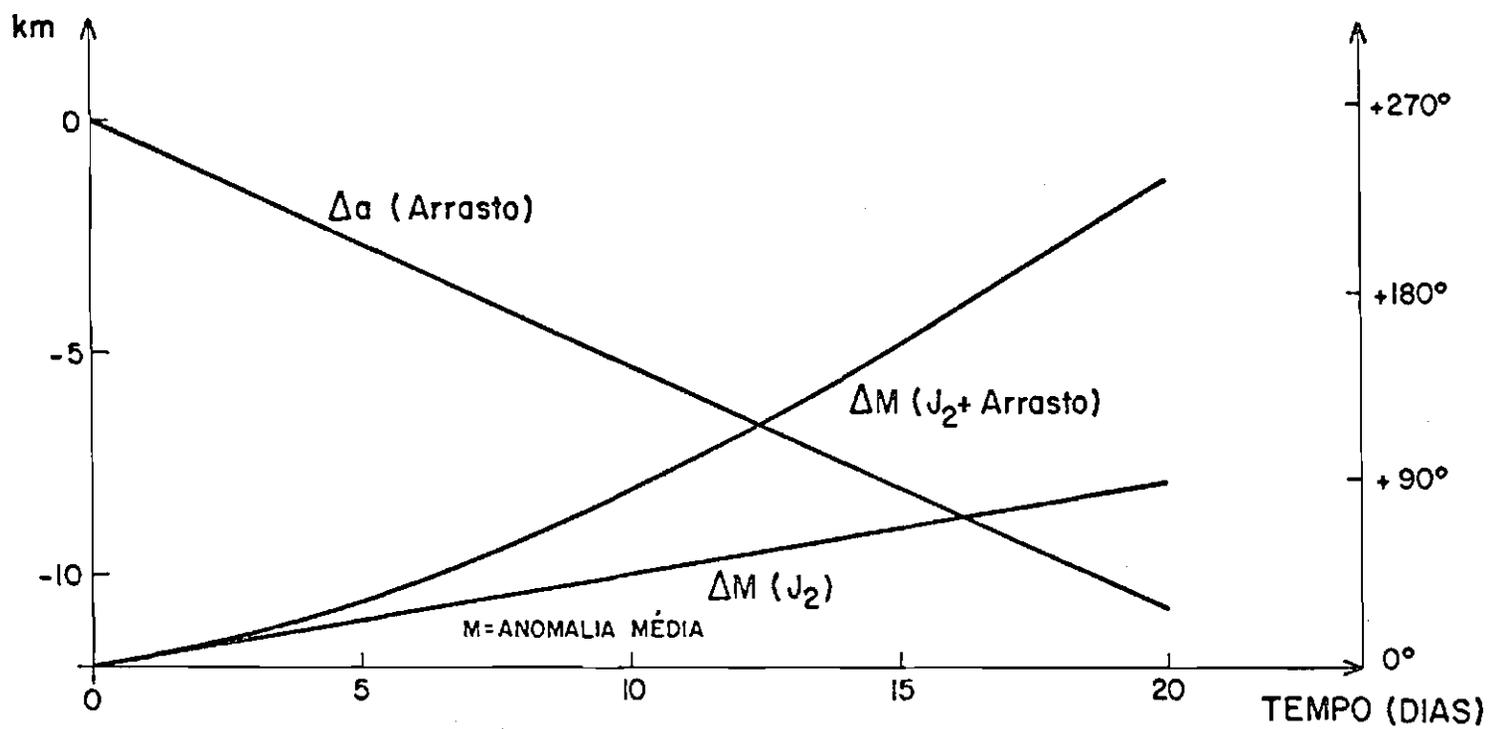


Fig. 3.4 - Varia\u00e7\u00e3o da anomalia devida ao achatamento e ao arrasto.

3.2 - FORÇA DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO

A força de pressão de radiação (F_R) é uma das mais importantes forças não-gravitacionais, pois dependendo da altitude pode ser até maior do que aquela decorrente do arrasto. Foi demonstrado por Lãla (1974) que, para alturas acima de 800 km (a temperaturas exosféricas de 1400°K), a pressão de radiação supera o arrasto atmosférico. Outra parte importante destas forças é a devida ao albedo, que é a radiação refletida pela Terra e que pode atingir valores de até 10% da pressão de radiação direta. Para alturas de 1200 km esta última se equipara à força de arrasto atmosférico.

Nos satélites do tipo balão, a força de pressão de radiação é bastante significativa, em virtude de sua grande razão área/massa, e é dada por:

$$F_R = K \frac{A}{m} Q, \quad (3.6)$$

onde K é o coeficiente de reflectividade, que é igual a 1 para superfície ideal e cerca de 1,44 para uma esfera que reflete difusamente (Lãla, 1974). A/m é a razão área para massa, e Q é a pressão de radiação exercida sobre uma esfera de raio unitário (da ordem de $4,63 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$) a uma distância de uma unidade astronômica.

As forças S , T e W das Equações planetárias de Lagrange, na forma de Gauss-Euler, são escritas (Cook, 1962; Lãla, 1974) como:

$$\begin{aligned} S &= n_0^2 a^3 F_S' \\ T &= n_0^2 a^3 F_T' \\ W &= n_0^2 a^3 F_W' \end{aligned} \quad (3.7)$$

sendo que S' , T' e W' serão definidos a seguir, e F é um parâmetro que engloba todas as constantes do problema, ou seja: $F = (A/m)(KQ/\mu)$.

Substituindo-se as expressões anteriores nas Equações 2.45, têm-se as variações no tempo dos elementos orbitais.

A solução de tais equações pode ser obtida de duas maneiras: calculando-se os ângulos de entrada e saída da sombra da Terra, e integrando-se as equações em anomalia verdadeira ou excêntrica, durante o tempo em que o satélite estiver iluminado; outra maneira é utilizando-se uma função de sombra, que pode ser escrita em função de uma anomalia, e que vale um quando o satélite está iluminado e vale zero quando ele se encontra na sombra. A função de sombra foi uma importante descoberta de Ferraz Mello (1965), porque permite resolver analiticamente uma força que age de maneira descontínua, enquanto o cálculo da entrada e saída da sombra através da clássica equação do quarto grau, gerada pela intersecção de um cilindro com o plano da órbita, não permite solução analítica, pois tal solução não pode ser escrita em função dos elementos orbitais.

Entretanto, analisando-se a solução sob o ponto de vista clássico de entrada e saída da sombra, e sendo que S' , T' e W' são dados por:

$$\begin{aligned}
 S' = & - \cos^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} \cos(L_{\theta} - \omega - \Omega - f) - \sin^2 \frac{I}{2} \sin^2 \frac{\epsilon}{2} (L_{\theta} - \omega + \Omega - f) + \\
 & - \frac{1}{2} \sin I \sin \epsilon \left[\cos(L_{\theta} - \omega - \Omega) - \cos(L_{\theta} + \omega + f) - \sin^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \cos(\Omega - \omega - L_{\theta} - f) - \cos^2 \frac{I}{2} \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \cos(L_{\theta} - \omega - \Omega - f) \right], \\
 T' = & - \cos^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(L_{\theta} - \omega - \Omega - f) - \sin^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(L_{\theta} - \omega + \Omega - f) - \\
 & - \frac{1}{2} \sin I \sin \epsilon \left[\sin(L_{\theta} - \omega - f) + \sin(L_{\theta} + \omega + f) - \sin^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \sin(\Omega - \omega - L_{\theta} - f) + \cos^2 \frac{I}{2} \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(L_{\theta} + \omega + \Omega + f) \right], \\
 W' = & \sin I \cos^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(L_{\theta} - \Omega) - \sin I \sin^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(L_{\theta} + \Omega) - \cos I \sin \epsilon \sin L_{\theta},
 \end{aligned}$$

(3.8)

onde L_0 , \bar{e} a longitude do Sol e ϵ \bar{e} a obliquidade da eclíptica, e integrando as Equações 2.45, combinadas com as Equações 3.8 e 3.7, (Balmino, 1976) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 2a^3 F \left| \left[S_p \cos E - T_p (1-e^2)^{1/2} \sin E \right] \right|_{E_1}^{E_2}, \\ \Delta e &= a^3 F (1-e^2)^{1/2} \left\{ \left| \frac{1}{4} S_p (1-e^2)^{1/2} \cos 2E + T_p (-2e \sin E + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \sin 2E) \right|_{E_1}^{E_2} + \frac{3}{2} \int T_p dE \right\}, \\ \Delta I &= \frac{a^2 F W}{(1-e^2)^{1/2}} \left\{ \left| \left[(1+e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \cos \omega + (1-e^2)^{1/2} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E) \sin \omega \right|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} e \int \cos \omega dE \right\}, \quad (3.9) \\ \sin I \Delta \Omega &= a^2 F \frac{W}{(1-e^2)^{1/2}} \left\{ \left| \left[(1+e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \sin \omega - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-e^2)^{1/2} (\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E) \cos \omega \right|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} e \int \sin \omega dE \right\}, \\ \Delta \omega &= -\cos I \Delta \Omega + \frac{a^2 F (1-e^2)^{1/2}}{e} \left[\left| S_p (e \sin E + \frac{1}{4} \sin 2E) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{T_p}{(1-e^2)^{1/2}} (e \cos E - \frac{1}{4} \cos 2E) \right|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} \int S_p dE \right], \\ \Delta M &= -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta a}{a} dM - (1-e^2)^{1/2} \Delta \omega - (1-e^2)^{1/2} \cos I \Delta \Omega + \\ &\quad + 2aF \left\{ \left| S_p \left[(1+e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] - T_p (1-e^2)^{1/2} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E) \right|_{E_1}^{E_2} - \frac{3}{2} e \int S_p dE \right\}, \end{aligned}$$

onde S_p , T_p são os valores de S e T no perigeu ($f = 0$).

Se o satélite estiver iluminado e se for tomado qualquer dos elementos (ξ) das Equações 3.9 na forma:

$$\dot{\xi} = \frac{\Delta\xi}{P} = \frac{n\Delta\xi}{2\pi},$$

e integrando-se esta equação de 0 a 2π , para satélites permanentemente iluminados, resulta:

$$\dot{a} = 0,$$

$$\dot{e} = \frac{3(1-e^2)^{1/2}}{2an_0} T_p,$$

$$\dot{r}_p = -a\dot{e},$$

(3.10)

$$\dot{\Omega} = -\frac{3We \operatorname{sen}\omega}{2an_0(1-e^2)^{1/2}\operatorname{sen}I},$$

$$\dot{i} = -\frac{3We \operatorname{cos}\omega}{2an_0(1-e^2)^{1/2}},$$

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega} \operatorname{cos}I = -\frac{3(1-e^2)^{1/2}}{2an_0e} S_p.$$

Com exceção do semi-eixo maior, todos os elementos da órbita estão sujeitos a perturbações de longo período. Observa-se também que o T_p que aparece em \dot{e} , pode ser ora positivo e ora negativo, de tal forma que a variação da excentricidade será $\dot{e} > 0$ e $\dot{e} < 0$.

As forças S_p e T_p que aparecem nas Expressões 3.10 contêm funções periódicas, cujos argumentos são da forma $\omega \pm \Omega \pm L_0$ e $\omega \pm L_0$; portanto, sua integração no tempo faz aparecer derivadas do argumento no denominador, que em certos casos tende a se anular, dando origem aos seguintes casos de ressonância.

$$\dot{\omega} \pm \dot{\Omega} \pm L_0 = 0,$$

(3.11)

$$\dot{\omega} \pm L_0 = 0.$$

3.3 - ILUSTRAÇÃO DO EFEITO DAS PERTURBAÇÕES MAIS SIGNIFICATIVAS

A Figura 3.5 mostra que as perturbações mais importantes (seculares e de longo período) aparecem superpostas por perturbações periódicas de curto período.

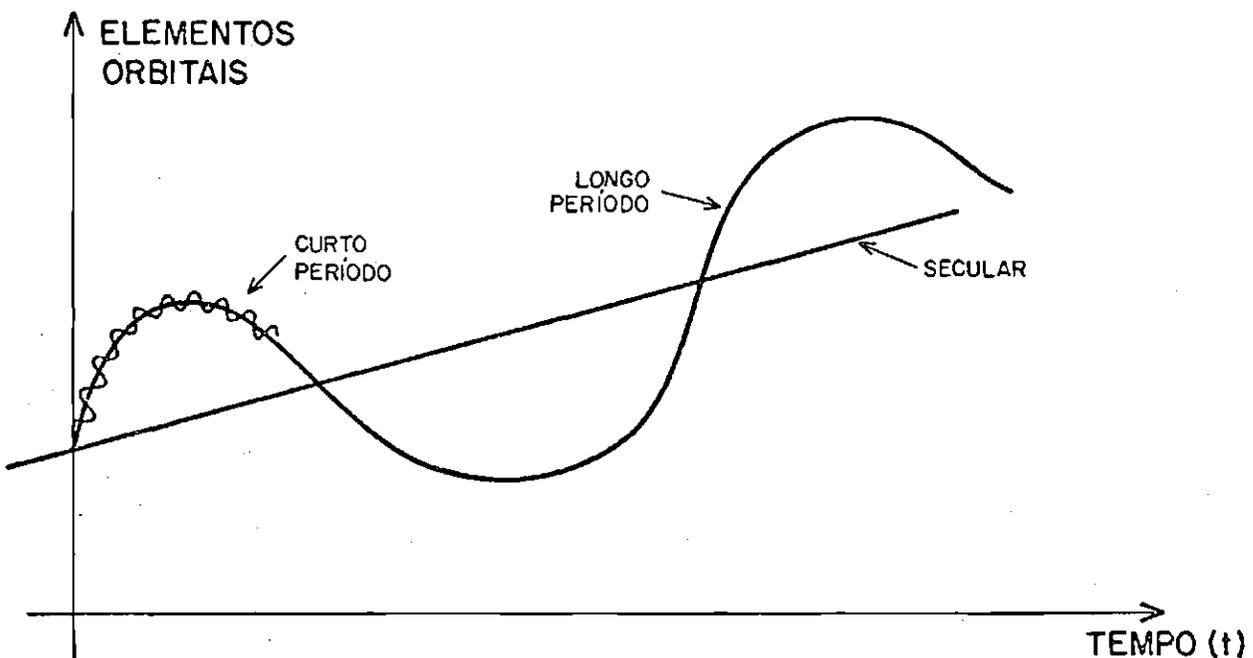


Fig. 3.5 - Esquema geral de todas as perturbações que atuam nos elementos da órbita.

As principais forças que atuam em satélites podem ser enumeradas na Tabela 3.1.

TABELA 3.1

PRINCIPAIS FORÇAS PERTURBADORAS QUE ATUAM EM SATÉLITES

EQUAÇÕES DAS FORÇAS PERTURBADORAS EM COORDENADAS CARTESIANAS		SATÉLITE PRÓXIMO	SATÉLITE GEOESTACIONÁRIO
FORÇA	TIPO	MAGNITUDE	MAGNITUDE
$\ddot{\underline{X}} = - (\mu/r^3) \underline{X}$	Kepler	1	1
$+ (\mu/r^3) J_{20} (a_e/r)^2 f_{20}(\zeta) \underline{X}$	Achatamento	10^{-3}	10^{-5}
$+ (\mu/r^3) \sum_{n,m} J_{nm} (a_e/r)^n f_{nm}(\phi, \lambda) \underline{X}$	Tesserzis	10^{-6}	10^{-8}
$+ \mu_L \left[\frac{\underline{X}_L - \underline{X}}{\Delta_L^3} - \frac{\underline{X}_L}{r_L^3} \right] + \mu_S \left[\frac{\underline{X}_S - \underline{X}}{\Delta_S^3} - \frac{\underline{X}_S}{r_S^3} \right]$	Luni-Solar	10^{-7}	10^{-5}
$- \frac{1}{2} C_D (A/m) \rho \underline{V} \dot{\underline{X}}$	Arrasto Atmosférico	10^{-7}	0
$+ q \frac{A}{m} \frac{\underline{X}}{r_S}$	Pressão de radiação	10^{-8}	10^{-6}
Marés	Marés	10^{-9}	-
Arrasto Elétrico	Arrasto	-	-

Onde:

(ϕ, λ) = latitude e longitude do satélite.

\underline{X} = vetor posição do satélite.

J_{nm} = coeficiente dos harmônicos esféricos.

μ_L, μ_S = constantes planetárias da Lua e do Sol ($\mu = GM$).

$\underline{X}_L, \underline{X}_S$ = vetores de posição da Lua e do Sol.

Δ_L, Δ_S = distâncias da Lua e do Sol.

C_D = coeficiente de arrasto.

ρ = densidade atmosférica.

q = pressão de radiação na superfície terrestre.

A/M = razão área/massa.

FONTE: Eckstein (1978).

As Figuras de 3.6 a 3.9 apresentam perturbações nos elementos da órbita, devidas ao albedo.

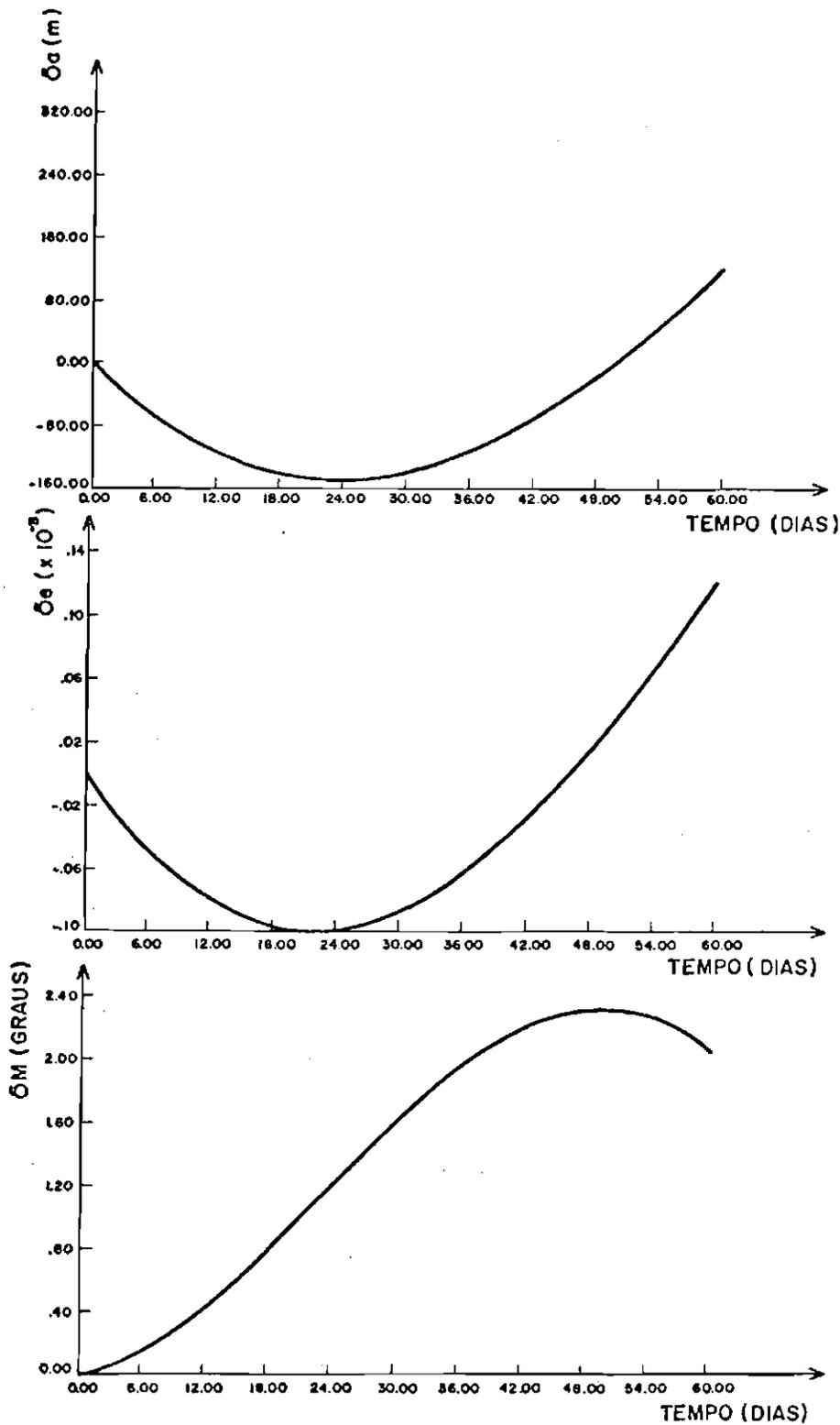


Fig. 3.6 - Perturbações nos elementos a, e e M do satélite Pageos durante 60 dias, partindo de DJM = 39384.0.

FONTE: Lautman (1975).

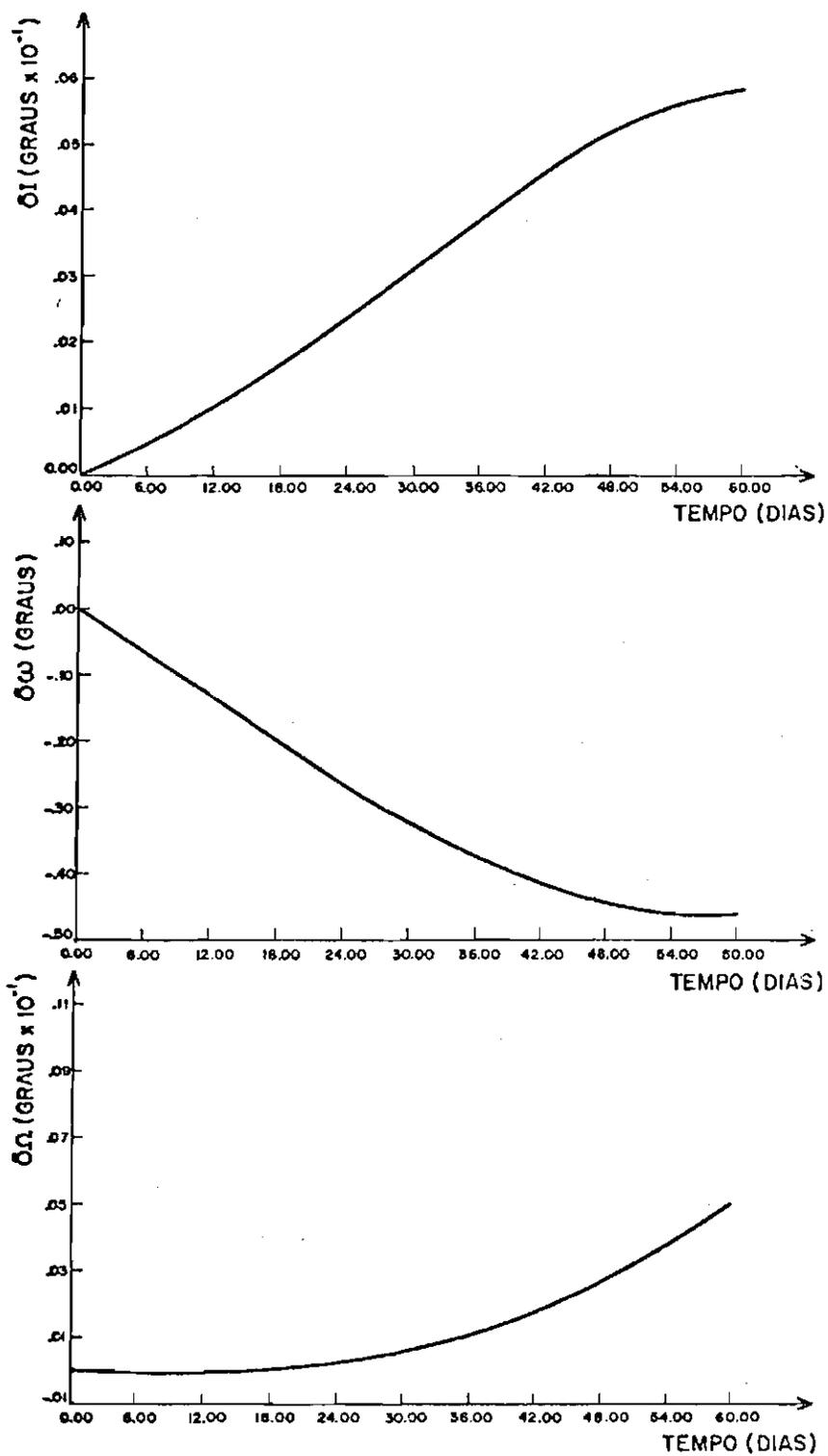


Fig. 3.7 - Perturbações de longo período nos elementos I , ω e Ω do satélite Pageos, durante 60 dias.

FONTE: Lautman (1975).

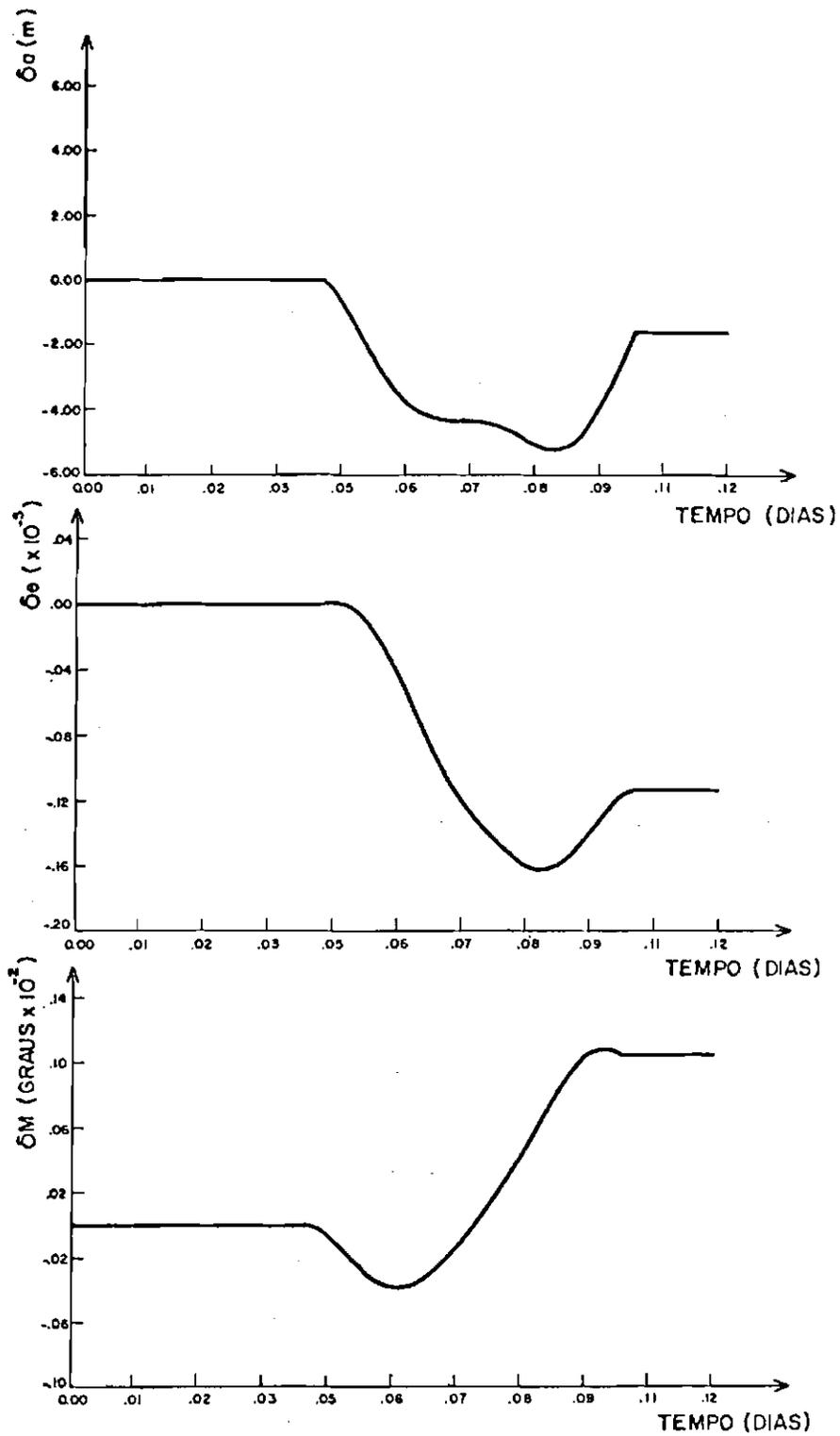


Fig. 3.8 - Perturbações de curto período em a , e e M , no satélite Pageos, para um período.

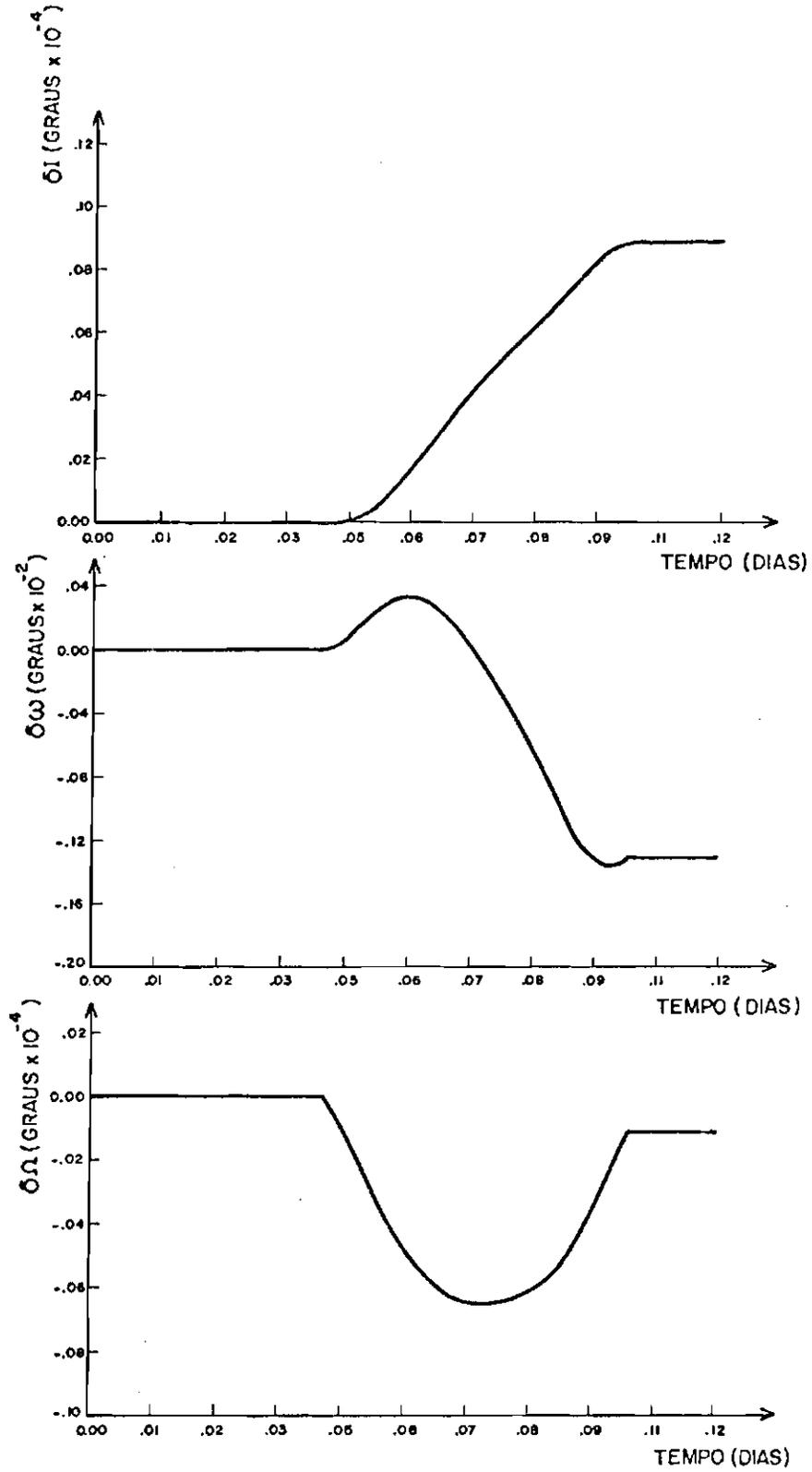


Fig. 3.9 - Perturbações de curto período nos elementos I , ω e Ω do satélite Pageos.

CAPÍTULO 4

MODELAGEM MATEMÁTICA

4.1 - FORMA DE EQUAÇÕES

Feito o estudo das perturbações mais importantes, resta agora estabelecer a forma das equações matemáticas que melhor as represente, para cada um dos elementos da órbita. Estas expressões terão coeficientes (componentes do vetor de estado), que serão determinados mediante o uso de teoria de estimação e terão a forma aproximada das expressões analíticas estudadas nos capítulos anteriores, principalmente as de Brouwer no Capítulo 2.

As equações modeladas apresentam-se da seguinte forma: com termos constantes, lineares e quadráticos em t , para representarem perturbações seculares e de longo período, o que é suficiente porque as observações simuladas são em pequenos arcos de um período. Finalmente, elas contêm um termo representativo das perturbações mais significativas de curto período (as gravitacionais). Este último é caracterizado por uma função trigonométrica, seno ou cosseno, no caso, que tem como argumentos uma frequência fundamental (da ordem do movimento médio do satélite) vezes o tempo, mais uma fase igual a 2ω , em analogia com as Expressões 2.40 de Brouwer. A função trigonométrica é multiplicada por uma amplitude que geralmente é da ordem de 10^{-3} do valor máximo da grandeza em questão, ou seja, J_2 vezes o seu valor máximo.

Uma expressão que contenha todos os termos até aqui expostos está em condições de representar, em primeira aproximação, uma boa modelagem da lei de variação de qualquer elemento da órbita, incluindo as perturbações mais significativas.

4.2 - ESCOLHA DOS ELEMENTOS DA ÓRBITA

Uma primeira inspeção leva a crer que uma boa escolha para os elementos da órbita a serem modelados seria a dos próprios elementos keplerianos (a , e , I , Ω , ω e M). Entretanto, sabe-se que, nas excentricidades próximas de zero, o perigeu se torna indeterminado, e para posicionar o satélite surgem dois tipos de erros de indeterminação: um no argumento do perigeu, e outro no cálculo da anomalia verdadeira através de M . Uma escolha conveniente é, portanto, a do ângulo $v = \omega + f$, que é contado a partir do ponto nodal até o satélite (dois pontos bem determinados). A imprecisão angular seria agora apenas em um parâmetro.

O ponto nodal só não é definido para órbitas equatoriais, neste caso é só substituir $\omega + f$ por α , ascensão reta do satélite, para diminuir o sistema em dois graus de liberdade, como mostra a Figura 4.1.

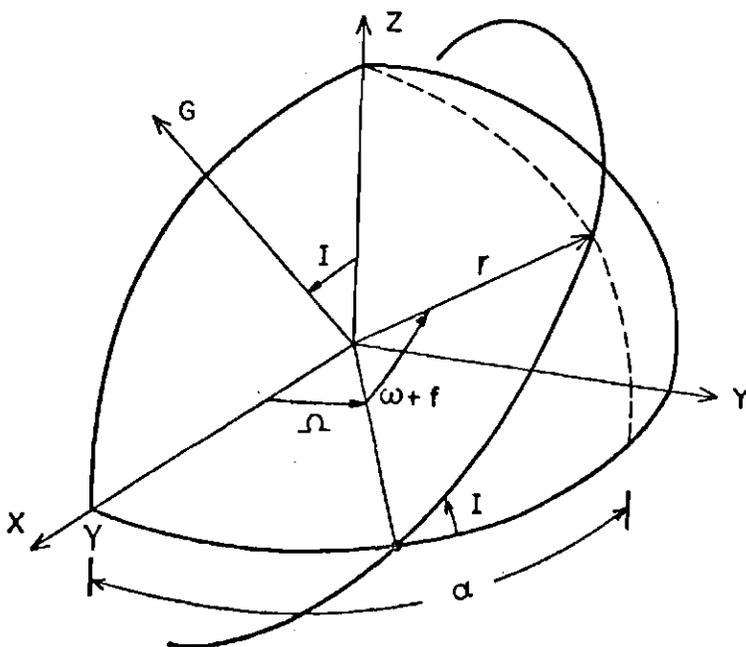


Fig. 4.1 - Órbita de um satélite.

Usando-se as notações $c(x) = \cos(x)$ e $s(x) = \text{sen}(x)$, a posição do satélite pode ser calculada diretamente utilizando-se $v = \omega + f$ (Brouwer, 1961) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X &= r [c(v) c(\Omega) - s(v) s(\Omega) c(I)], \\ Y &= r [c(v) s(\Omega) + s(v) c(\Omega) c(I)], \\ Z &= r s(v) s(I), \end{aligned} \tag{4.1}$$

enquanto as componentes da velocidade são:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{r} \frac{X}{r} - r \dot{f} [s(v) c(\Omega) + c(v) s(\Omega) c(I)], \\ \dot{Y} &= \dot{r} \frac{Y}{r} - r \dot{f} [s(v) s(\Omega) - c(v) c(\Omega) c(I)], \\ \dot{Z} &= \dot{r} \frac{Z}{r} - r \dot{f} s(v) s(I), \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{G}{r^2} = \frac{(\mu p)^{1/2}}{r^2}, \\ \dot{r} &= [v^2 - \mu p / r^2]^{1/2}, \quad e \\ v^2 &= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Observando-se as Expressões de 4.1 a 4.3, pode-se concluir que uma escolha de um conjunto apropriado de parâmetros \bar{e} :

$$(a, p, I, \Omega, v = \omega + f \text{ e } r).$$

Note-se que a excentricidade \bar{e} substituída por "p", onde p \bar{e} o parâmetro das cônicas, conhecido como "semi-latus rectum", e está diretamente ligado ao momento angular ($p = G^2/\mu$), sendo portanto bem com portado. Por outro lado, a indeterminação de ω \bar{e} eliminada pela escolha do parâmetro $v = \omega + f$.

Escolhidos os elementos da órbita, seguem-se as suas respectivas modelagens. As expressões parametrizadas modeladas são apresentadas de acordo com o esquema discutido na Secção 4.1. Mostra-se também a maneira de calcular os valores iniciais de seus parâmetros, que são utilizados para inicializar o processo de ajustamento dos mesmos.

O primeiro elemento modelado é o semi-eixo maior, que é da forma:

$$a = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 \cos(a_5 + a_6 t). \quad (4.4)$$

Os valores iniciais para começar o seu ajuste, são: $a_1 = a(t_0)$, ou seja, a_1 é igual ao valor de "a" no ponto inicial, $a_2 = [da/dt]_{t=t_0}$ (para obrigar a curva modelada iniciar tangente à curva das observações), a_3 pode iniciar com valor zero, a_4 é obtido em analogia com as Expressões 2.25 (Brouwer, 1961), assim como a_5 , e finalmente a_6 é aproximado por $2n_0$.

Resumindo-se, os valores iniciais de "a" são:

$$\begin{aligned} a_1 &= a(t = t_0) , \\ a_2 &= [da/dt]_{t = t_0} , \\ a_3 &= 0 , \\ a_4 &= 3\gamma_2 (1 - \theta^2) a^4/r^3 , \\ a_5 &= 2g = 2\omega , \\ a_6 &= 2n_0 = 2(\mu/a^3)^{1/2} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

O parâmetro p, de acordo com a forma comentada na Secção 4.1, é dado pela expressão:

$$p = p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + p_4 \sin(p_5 + p_6 t) ,$$

sendo que os valores iniciais dos parâmetros, que serão utilizados para

dar início ao processo de ajustamento, são: p_1 é igual ao valor de p em $t = t_0$; p_2 e p_3 podem começar com valor zero; p_4 é da ordem de J_2 vezes p_1 ; p_5 e p_6 são, respectivamente, 2ω e $2n_0$, desde que se observe o paralelismo da expressão de p com as Expressões 2.40.

Em resumo, os valores iniciais dos parâmetros de p são:

$$p_1 = p(t = t_0) = G^2/\mu ,$$

$$p_2 = p_3 = 0 ,$$

$$p_4 = J_2 \cdot p_1 ,$$

$$p_5 = 2\omega ,$$

$$p_6 = 2n_0 .$$

A modelagem da inclinação é a mais simples de todas, porque I varia pouco em um período, e somente o termo em t é suficiente para incluir os termos de longo período e os seculares. Portanto, a expressão para I é:

$$I = I_1 + I_2 t + I_3 \cos(I_4 + I_5 t) .$$

Os valores iniciais dos parâmetros de I , que servem para começar o ajustamento, são: $I_1 = I$ em $t = t_0$, I_2 pode ser considerado como zero, ou como a tangente dada por $[dI/dt]_{t = t_0}$, I_3 é calculado por analogia com a Expressão 2.27, assim como I_4 e I_5 , sendo, respectivamente, $(3/2)e\gamma_2'\theta(1 - \theta^2)^{1/2}$, 2ω e $2n_0$. Resumindo-se, os valores iniciais de I são:

$$I_1 = I(t = t_0) ,$$

$$I_2 = [dI/dt]_{t = t_0} ,$$

$$I_3 = \frac{3}{2} e\gamma_2'\theta(1 - \theta^2)^{1/2} ,$$

$$I_4 = 2\omega ,$$

$$I_5 = 2n_0 .$$

A modelagem do parâmetro $v = \omega + f$ pode ser feita de forma semelhante à de p , pois, segue o esquema traçado no início deste capítulo, e é dado por:

$$v = v_1 + v_2 t + v_3 t^2 + v_4 \text{sen}(v_5 + v_6 t) ,$$

sendo que seus valores, para iniciar o ajustamento, são: $v_1 = v(t = t_0)$; v_2 é dado pela derivada da curva no ponto, ou pode ser considerado zero; v_3 pode começar com zero; v_4 é da ordem de $J_2 v_1$; e v_5 e v_6 são escolhidos como 2ω e $2n_0$, respectivamente.

Logo:

$$v_1 = v(t = t_0) ,$$

$$v_2 = \left[\frac{dv}{dt} \right]_{t = t_0} ,$$

$$v_3 = 0 ,$$

$$v_4 = J_2 v_1 ,$$

$$v_5 = 2\omega ,$$

$$v_6 = 2n_0 .$$

Então, pode-se escrever a expressão para a longitude do nodo ascendente, pois sua forma matemática é semelhante àquela do argumento verdadeiro v , e é da Expressão 2.30, como:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 t + \Omega_3 t^2 + \Omega_4 \text{sen}(\Omega_5 + \Omega_6 t) , \quad (4.6)$$

onde:

$$\Omega_1 = \Omega (t = t_0) ,$$

$$\Omega_2 = \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{t = t_0} , \quad (4.7)$$

e pela Expressão 2.38, para perturbações gravitacionais, os valores iniciais são:

$$\begin{aligned}\Omega_3 &= 0 , \\ \Omega_4 &= \frac{3}{2} \gamma_2' \theta e \text{ (Expressão 2.30) } , \\ \Omega_5 &= 2g , \\ \Omega_6 &= 2n_0 .\end{aligned}\tag{4.8}$$

O último elemento a ser modelado é o módulo do vetor posição (r), que juntamente com os cinco elementos anteriores ($a, e, I, \Omega, \omega + f$) determina o estado do satélite. A expressão escolhida para r é:

$$r = r_1 + r_2 t + r_3 t^2 + r_4 \text{ sen}(r_5 + r_6 t) ,$$

onde os valores iniciais para começar o ajuste são:

$$\begin{aligned}r_1 &= r(t = t_0) , \\ r_2 &= r_3 = 0 , \\ r_4 &\approx 10^{-3} r_1 = J_2 \cdot r_1 , \\ r_5 &= 2\omega , \\ r_6 &= 2n_0 .\end{aligned}$$

Assim, termina-se a parte de modelagem dos elementos da órbita, necessários para determinar a posição e a velocidade do satélite.

CAPÍTULO 5

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

5.1 - DEFINIÇÕES BÁSICAS DE TEORIA DE ESTIMAÇÃO

Tendo-se em vista que a utilização de teoria de estimação de parâmetros e o uso de técnicas de filtragem requerem o conhecimento de algumas definições básicas, faz-se aqui uma rápida revisão, considerando-se como pré-requisitos os conceitos mais elementares, tais como: variáveis aleatórias, eventos, probabilidade de ocorrência de um evento, etc., o que permite uma enumeração concisa das expressões de maior uso nas especulações matemáticas, que ocorrem ao longo do trabalho.

Define-se a função de distribuição da variável aleatória X , avaliada na realização x , como a probabilidade:

$$F_X(x) \triangleq P_r \left\{ \omega : X(\omega) \leq x, x \in R \right\}, \quad (5.1)$$

onde os eventos ω são elementos do espaço de probabilidades Ω^* , e R é a reta dos reais.

Se $F_X(x)$ for contínua e derivável, então existe uma densidade de probabilidade dada por:

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x), \quad (5.2)$$

ou:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi. \quad (5.3)$$

A média (ou esperança) da variável aleatória $X(\cdot)$, contínua, é definida como:

$$E \left\{ X \right\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx, \quad (5.4)$$

e $E\{X\}$ existe se $E\{|X|\} < \infty$, ou seja, se a média do valor absoluto de X é finita, o que equivale a dizer que a integral é absolutamente convergente (Bryson e Ho, 1969). Representa-se, também, a média por μ_X ou \bar{x} , ou seja, $E\{X\} = \mu_X = \bar{x}$.

A expressão:

$$E\{X^n\} \triangleq \int x^n p_X(x) dx \quad (5.5)$$

define o n -ésimo momento de X . Em particular, quando $n=2$, $E\{X^2\}$ é denominada média quadrática de X .

O n -ésimo momento de X em torno da média é definido como:

$$E\{(X - E\{X\})^n\} \triangleq \int (X - E\{X\})^n p_X(x) dx \quad (5.6)$$

A variância de X nada mais é do que o segundo momento de X em torno da média, ou:

$$\text{var}\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2\} - E^2\{X\}, \quad (5.7)$$

ou seja, a variância é igual à média quadrática menos o quadrado da média.

Finalmente, define-se o erro médio quadrático, ou desvio padrão, como:

$$\sigma\{X\} \triangleq (\text{var}\{X\})^{1/2}. \quad (5.8)$$

O desvio padrão mede a dispersão da variável X em torno da média (\bar{X}) de sua amostragem, conforme mostra a Figura 5.1.

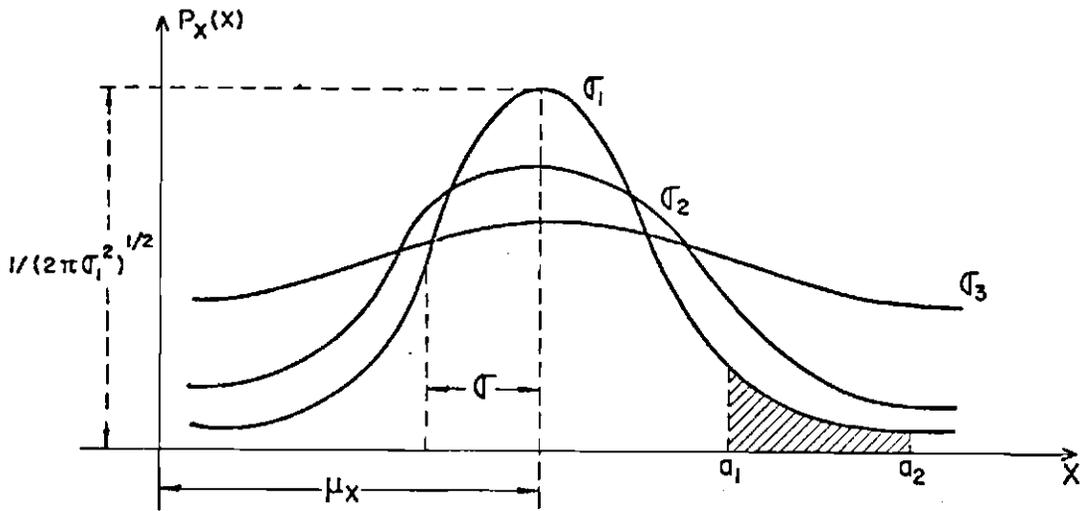


Fig. 5.1 - Curvas de distribuições gaussianas de X.

Na Figura 5.1, tem-se que $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$, isto porque a área envolvida pelas curvas é sempre unitária, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1.$$

A probabilidade de que a variável aleatória X esteja entre a_1 e a_2 é:

$$P_r \left\{ a_1 \leq X \leq a_2 \right\} = \int_{a_1}^{a_2} p_X(x) dx.$$

As variáveis aleatórias, cujas densidades de probabilidade são representadas pelas curvas da Figura 5.1, definidas pela forma:

$$p_X(x) = (1/2\pi\sigma^2)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (5.9)$$

Estas variáveis são de grande uso prático, devido à sua forma fácil de ser tratada, e porque os fenômenos naturais, na maioria dos casos, podem ser considerados como a forma apresentada pela Expressão 5.9 (ou seja, pelas curvas da Figura 5.1).

Tais distribuições são denominadas gaussianas, e representadas somente por μ_X e σ^2 , ou:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma^2). \quad (5.10)$$

5.1.1-VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONJUNTAMENTE DISTRIBUÍDAS

Diz-se que as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são conjuntamente distribuídas, se estão no mesmo espaço de probabilidades. Tais variáveis podem ser caracterizadas por sua função de distribuição conjunta (Jazwinski, 1970), da seguinte maneira:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \triangleq P_r\{X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\} \quad (5.11)$$

ou por sua densidade de probabilidade conjunta:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1, \dots, X_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n, \quad (5.12)$$

ou ainda na forma:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (5.13)$$

A covariância de X_k e X_ℓ é definida por:

$$\text{cov}\{X_k, X_\ell\} \triangleq E\{(X_k - E\{X_k\})(X_\ell - E\{X_\ell\})\}, \quad (5.14)$$

que pode ser colocada na forma:

$$\text{cov}\{X_k, X_\ell\} = E\{X_k X_\ell\} - E\{X_k\} E\{X_\ell\} \quad (5.15)$$

Em decorrência da Expressão 5.14, é fácil observar que:

$$\text{cov} \left\{ X_k, X_k \right\} = \text{var} \left\{ X_k \right\} \quad (5.16)$$

Define-se o coeficiente de correlação de X_k e X_ℓ como:

$$\rho(X_k, X_\ell) = \frac{\text{cov}\{X_k, X_\ell\}}{\sigma\{X_k\} \sigma\{X_\ell\}}$$

Diz-se que as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n são conjuntamente independentes das variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_m , se:

$$\begin{aligned} P_{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= \\ &= P_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot P_{Y_1, \dots, Y_m}(y_1, \dots, y_m) \end{aligned} \quad (5.17)$$

para todo $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$.

Diz-se que as variáveis aleatórias, conjuntamente distribuídas, X_k e X_ℓ são não-correlacionadas quando:

$$\text{cov} \left\{ X_k, X_\ell \right\} = 0,$$

ou o que equivale a: $\rho\{X_k, X_\ell\} = 0$.

Para melhor compreensão do significado da definição 5.15, introduz-se aqui o vetor aleatório:

$$X^T = [X_1, \dots, X_n] ,$$

onde os X_1, X_2, \dots, X_n são suas componentes, e X é um vetor coluna.

Assim, o vetor tem como média (esperança):

$$E\{X\} = \begin{bmatrix} E\{X_1\} \\ E\{X_2\} \\ \vdots \\ E\{X_n\} \end{bmatrix}, \quad E\{X^T\} = [E\{X_1\}, \dots, E\{X_n\}] \quad (5.18)$$

A covariância do vetor aleatório X é definida por:

$$P_X = [cov\{X_i, X_j\}] = E\left\{ (X - E\{X\})(X - E\{X\})^T \right\} \quad (5.19)$$

$$= \begin{bmatrix} var\{X_1\} & cov\{X_1, X_2\} & \dots & cov\{X_1, X_n\} \\ cov\{X_2, X_1\} & var\{X_2\} & \dots & cov\{X_2, X_n\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov\{X_n, X_1\} & cov\{X_n, X_2\} & \dots & var\{X_n\} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A matriz de covariância é simétrica e, se os elementos de X são não-correlacionados, P_X é diagonal.

Aproveitando-se esta definição, pode-se escrever a densidade de probabilidade, para n variáveis aleatórias gaussianas conjuntamente distribuídas, X_1, X_2, \dots, X_n , como:

$$p_X(x) = [(2\pi)^{n/2} |P_X|^{1/2}]^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu_X)^T P_X^{-1} (x - \mu_X) \right], \quad (5.21)$$

sendo:

$$|P_X| = \det P_X.$$

Assim, se X é um vetor aleatório com distribuição gaussiana, então ele é representado por:

$$X \sim N \left\{ E\{X\}, P_X \right\}. \quad (5.22)$$

5.2 - PROBABILIDADE CONDICIONAL

Considerando-se dois eventos A e B, define-se a função de probabilidade condicional $P_r \{A/B\}$ do evento A, dado o evento B, por:

$$P_r \left\{ A/B \right\} \triangleq \frac{P_r \{A \cap B\}}{P_r \{B\}}, \quad (\text{para } P_r \{B\} > 0) \quad (5.23)$$

que é equivalente a dizer que $P_r \{A/B\}$ é a probabilidade do evento A, tendo-se observado a ocorrência do evento B.

A densidade de probabilidade condicional de X, dado Y, é:

$$p_{X/Y}(x/y) \triangleq \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\int p_{X,Y}(x,y) dx} \quad (5.24)$$

Os postulados $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$ e $\int p_{X,Y}(x,y) dx = 1$ continuam válidos e, se X e Y forem independentes, $p_{X/Y}(x/y) = p_X(x)$. Escreve-se também:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{Y/X}(y/x) p_X(x) = p_{X/Y}(x/y) p_Y(y), \quad (5.25)$$

que é a conhecida regra de Bayes.

Aproveitando-se a sequência, define-se a média condicional (ou esperança condicional) como:

$$E\{X/Y\} \triangleq \int X p_{X/Y}(x/y) dx \quad (5.26)$$

A matriz de covariância condicional é definida pela forma:

$$P_{X/Y}(x/y) \triangleq E \left\{ (X - E\{X/Y\})(X - E\{X/Y\})^T / Y \right\} \quad (5.27)$$

5.3 - PROCESSO ESTOCÁSTICO

Um processo estocástico (aleatório) $\{X_t, t \in T\}$ é uma família de variáveis (vetores) aleatórios, indexados pelo conjunto de parâ

metros T . Se a variável aleatória (vetores) X_t é discreta, diz-se que o processo estocástico tem espaço de estado discreto. Se os X_t são contínuos, diz-se que o processo é de espaço de estado contínuo.

Os dois casos mais usados são classificados de acordo com a Tabela 5.1.

TABELA 5.1

PROCESSOS ALEATÓRIOS

	PARÂMETRO (T)	
	DISCRETO	CONTÍNUO
Estado Contínuo	Sequência Aleatória	Processo Estocástico

5.3.1 - PROCESSO GAUSSIANO

É o processo no qual a densidade de probabilidade é completamente caracterizada pelos primeiros dois momentos (média e covariância). Com isto, pode se obter as leis da probabilidade do processo normal. Este processo é importante porque na natureza tudo se aproxima do processo gaussiano (Papoulis, 1965).

5.3.2 - PROCESSO DE MARKOV

Um processo estocástico de parâmetros discreto ou contínuo $\{X_t, t \in T\}$ é chamado processo de Markov, se para um conjunto finito de parâmetros $\{t_i, t_i < t_{i+1}\} \in T$, e para todo λ real (Jazwinski, 1970), se tiver:

$$P_r \left\{ X_{t_n}(\omega) \leq \lambda / X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} \right\} = P_r \left\{ X_{t_n}(\omega) \leq \lambda / X_{t_{n-1}} \right\}, \quad (5.28)$$

ou seja, o futuro pode ser probabilisticamente predito com o conhecimento do presente e independente do passado. Tratando-se de um processo contínuo, a Expressão 5.28 toma a forma:

$$P_r \left\{ X_{t_2}(\omega) \leq \lambda/X_\tau, \tau \leq t_1 \right\} = P_r \left\{ X_{t_2}(\omega) \leq \lambda/X_{t_1} \right\}. \quad (5.29)$$

Em termos de densidade de probabilidade, o processo (sequência) de Markov (Expressão 5.28) é dado por:

$$p(x_{t_n}/x_{t_1}, \dots, x_{t_{n-1}}) = p(x_{t_n}/x_{t_{n-1}}) \quad (5.30)$$

onde: $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ (observar que foi usada nova notação).

No caso contínuo, a Expressão 5.29 em termos de densidade de probabilidade traduz-se por:

$$p(x_{t_2}/x_\tau, \tau \leq t_1) = p(x_{t_2}/x_{t_1}) \quad (5.31)$$

Pode-se dizer então que o processo markoviano pode ser caracterizado com o conhecimento de apenas $p(x_t, x_\tau)$, para todo os t , $\tau \in [0, T]$, e

$$p(x_t, x_\tau) = p(x_\tau/x_t) p(x_t) \quad (5.32)$$

Em particular, quando a distribuição for normal, isto é, quando $p(x_t, x_\tau)$ é uma densidade de probabilidade gaussiana, diz-se que o processo é de Gauss-Markov.

5.3.3 - PROCESSOS PURAMENTE ALEATÓRIOS (BRANCOS)

Um processo puramente aleatório significa que os x_k são mutuamente independentes, isto é, que o conhecimento da realização de x_ℓ não ajuda na determinação de x_k .

Uma sequência branca é completamente imprevisível e, portanto, sua definição é simples:

$$p(x_k/x_{k-1}) = p(x_k), \quad (k > 2) \quad (5.33)$$

Se os x_k estão normalmente distribuídos, então a sequência $\{x_n, n=1, 2, \dots\}$ é denominada sequência branca gaussiana.

Um processo sempre pode ser remodelado, procurando-se obter novas relações causais, até que se encontre o ponto em que as últimas modelagens não aperfeiçoem mais as previsões. Isto pode acontecer porque existem flutuações imprevisíveis no processo, para as quais não existem relações causais, ou porque o mesmo atingiu o nível de erros aleatórios nos instrumentos usados para medidas. Em qualquer destes dois casos, diz-se que o nível de ruído (ou faixa cinzenta) foi atingido.

A matriz de covariância para uma sequência branca $\{x_n, n=1, 2, \dots\}$ gaussiana é:

$$E \left\{ (x_n - E\{X_n\})(x_m - E\{X_m\})^T \right\} = Q_n \delta_{nm} \quad (5.34)$$

onde $\delta_{nm} = 1$ ou 0 , para $n = m$ e $n \neq m$, respectivamente, e Q_n é uma matriz semidefinida positiva.

Para tempo contínuo, $\{X_t, t \in T\}$, o processo é denominado branco e é um processo de Markov, isto é, os x_t são mutuamente independentes para todo $t \in T$, e para um processo gaussiano branco,

$$p(x_t/x_\tau) = p(x_t), \quad t > \tau \in T \quad (5.35)$$

e

$$E \left\{ (x_t - E\{X_t\})(x_\tau - E\{X_\tau\})^T \right\} = Q(t) \delta(t - \tau), \quad (5.36)$$

onde o delta aqui é o de Dirac, ao invés do de Kronecker.

5.4 - ESTIMADORES

A estimativa de sistemas dinâmicos lineares não apresenta grande problema; portanto, serão tratados apenas sistemas não-lineares. O caso mais comum em problemas de satélites artificiais é o de sistemas com estado contínuo, porém observado discretamente no tempo. A maneira convencional de resolver o problema é por linearização do sistema não-linear em torno de uma solução de referência e, em seguida, aplicar as técnicas de estimação linear. Os dados podem ser processados de maneira global, isto é, todos de uma só vez, usando-se um estimador adequado ao problema (Sorenson, 1970; Leibold, 1980; Liebelt, 1967).

O processamento também pode ser sequencial, usando-se o filtro estendido de Kalman (Jazwinski, 1970; Rios-Neto, 1973).

O vetor de estado de um sistema dinâmico é composto de todas as variáveis e de todos os parâmetros necessários para definir a evolução no tempo. Assim, chamando-se X o vetor de n -dimensões, que representa o estado, tem-se simbolicamente,

$$X^T = [X_1, X_2, \dots, X_n] , \quad (5.37)$$

e a equação (não-estocástica) de estado é:

$$\dot{X} = F(X, t), \quad (5.38)$$

onde $X(t_0) = X_0$. A solução da Equação 5.38 é da seguinte forma:

$$X(t) = F^*(X_0, t_0, t) \quad (5.39)$$

Geralmente, o vetor $X(t)$ nunca é observado diretamente, mas somente através de funções não-lineares. Por outro lado, as observações estão impregnadas de erros que ocorrem nos processos de medida. Logo, uma equação representativa das observações e que as relaciona com o estado no tempo é:

$$Y_i = h(X_i, t) + \epsilon_i . \quad (5.40)$$

Obs: o erro ϵ será comentado mais adiante.

O X_0 que aparece na Solução 5.39, em determinação de órbita, não é conhecido com precisão; portanto, a solução real difere da solução nominal $X^*(t)$, obtida com o estado inicial X_0^* . Assim, tendo-se uma série de observações regidas pela Equação 5.40, procura-se determinar uma solução que mais se aproxime da real.

Tomando-se:

$$\begin{aligned} \delta X(t) &= X(t) - X^*(t) , \\ \delta y_i &= Y_i - h(X_i^*, t_i) , \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.41)$$

as Equações 5.38 e 5.40, linearizadas em torno do estado nominal X^* são:

$$\begin{aligned} \delta \dot{X} &= \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X=X^*} \delta X + \dots , \\ Y_i &= h(X_i^*, t_i) + \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{X=X^*} \delta X_i + \dots + \epsilon_i \end{aligned} \quad (5.42)$$

Definindo-se agora

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_{X=X^*} , \\ H(t_i) &= \left[\frac{\partial h}{\partial X} \right]_{X=X^*} , \end{aligned} \quad (5.43)$$

as Expressões 5.42 podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \delta \dot{X} &= A(t) \delta X , \\ \delta y_i &= H_i \delta X_i + \epsilon_i , \end{aligned} \quad (5.44)$$

sendo $\delta X(t_0) = \delta X_0$ e $i = 1, \dots, m$.

As Equações 5.44 constituem um sistema linear, no qual se tem δX ao invés de X , ou seja, o desvio em relação ao estado real.

A solução da nova equação de estado (por enquanto, não-estocástica) pode ser expressa como:

$$\delta X_i = \phi_{i,k} \delta X_k \quad (5.45)$$

onde $\phi_{i,k}$ é a matriz de transição de (tempo t_i para o t_k) estado, que possui as seguintes propriedades (Liebelt, 1967):

- 1) $\phi(t_0, t_0) = I = \phi(t_k, t_k) = \phi_{k,k}$,
- 2) $\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1) \phi(t_1, t_0)$,
- 3) $\phi(t_2, t_1) = \phi(t_1, t_2)^{-1}$,

(5.46)

e satisfaz a equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t, t_k) &= A(t) \phi(t, t_k), \text{ com} \\ \phi(t_k, t_k) &= I, \end{aligned} \quad (5.47)$$

sendo que I é a matriz identidade.

O sistema de Equações 5.44 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \delta X_i &= \phi_{i,k} \delta X_k \\ \delta y_i &= H_i \delta X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m. \\ &= H_i \phi_{i,k} \delta X_k + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Levando-se em conta que:

$$\delta y = \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \vdots \\ \delta y_m \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{H}_k = H_i \phi_{i,k} \quad \bar{e} (m \times n).$$

Qual \bar{e} a estimativa $\delta \tilde{X}_k$, ótima, de mínima variância e não-enviesada (não tendenciosa) do estado δX_k , das Equações 5.48?

Para resolver este problema, considera-se a seguinte estatística:

$$E\left\{ \epsilon_i \right\} = 0, \quad E\left\{ \epsilon_i \epsilon_j^T \right\} = R_i \delta_{ij}, \quad (5.49)$$

Geralmente admite-se $R_1 = R_2 = \dots = R_m$, embora esta restrição não seja necessária; no caso, a estimativa \bar{e} linear com as observações, ou seja:

$$\delta \tilde{X}_k = M \delta y \quad (5.50)$$

e \bar{e} não-enviesada, isto é:

$$E\left\{ \delta \tilde{X} - \delta X \right\} = 0. \quad (5.51)$$

A matriz de covariância para o caso de estimativa não-tendenciosa \bar{e} :

$$P_k = E\left\{ (\delta \tilde{X} - \delta X)(\delta \tilde{X} - \delta X)^T \right\} = E\left\{ (\delta \tilde{X} - E\{\delta \tilde{X}\})(\delta \tilde{X} - E\{\delta \tilde{X}\})^T \right\} \quad (5.52)$$

A matriz P_k (covariância) e o valor estimado $\delta \tilde{X}$ podem ser postos na forma final:

$$P_k = (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1}, \quad (5.53)$$

$$\delta \tilde{X}_k = P_k \tilde{H}^T R^{-1} \delta y,$$

onde $\tilde{H}_i = H_i \phi_{i,k}$.

No cálculo de $\delta\bar{X}_k$, aparece uma inversão ($n \times n$) de matriz, que pode apresentar dificuldade no caso de sistema de dimensão muito grande.

Outra maneira de estimar $\delta\bar{X}_k$ é usar o estimador de mínima variância, com informação a priori. Para isto, sendo dado um valor estimado e sua matriz de covariância associada, num tempo t_j , e, em seguida, feita nova observação, num tempo t_k , para combinar o valor estimado em t_j , com a nova observação em t_k , procede-se da seguinte maneira:

- 1) Propaga-se o estado e a covariância de t_j para t_k (Tapley, 1972):

$$\begin{aligned}\delta\bar{X}_k &= \phi_{k,j} \delta\bar{X}_j, \\ \bar{P}_k &= \phi_{k,j} P_j \phi_{k,j}^T.\end{aligned}\tag{5.54}$$

- 2) A nova matriz de covariância e o novo valor estimado utilizamos dois valores dados pela Expressão 5.54, como informação a priori, e são escritas da seguinte maneira (Liebelt, 1967):

$$\begin{aligned}P_k &= (\bar{P}_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1}, \\ \delta\bar{X}_k &= P_k (H_k^T R_k^{-1} \delta y_k + \bar{P}_k^{-1} \delta\bar{X}_k),\end{aligned}\tag{5.55}$$

onde as notações $\delta\bar{X}$ e $\delta\bar{X}$ significam, respectivamente, valor processado e valor propagado. Neste caso, também aparece uma inversão de matriz ($n \times n$).

5.4.1 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

Esta técnica de estimação de parâmetros é das mais vantajosas, porque permite estimar o estado de um sistema dinâmico ao longo da sua própria evolução no tempo (ao longo da trajetória), isto é, tão logo as observações sejam realizadas, já vão sendo processadas. A trajetória de um corpo em movimento, por exemplo, pode ser recorrigida, à medida que se vai efetuando novas observações.

Neste processo, admite-se que cada novo estado estimado (\hat{X}_k) está mais próximo do estado real (X_k), do que o valor nominal (X_k^*). A trajetória nominal é retificada a cada observação, usando-se a estimativa (\hat{X}_k) como novo valor nominal, para efetuar a propagação da estimativa.

Supõe-se que:

$$X(t) = \bar{X}(t) + \delta X(t) , \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} ,$$

onde a solução de referência é obtida, resolvendo-se a equação:

$$\dot{\bar{X}} = F(\bar{X}, t) , \quad (5.56)$$

com valor inicial $\bar{X}(t_k) = X_k^* + \delta \hat{X}_k$. Assim, resumindo-se o procedimento e usando-se o filtro estendido tem-se que:

dado: $\bar{X}_k = X_k^* + \delta \hat{X}_k$, e P_k .

1) Integra-se a Equação 5.56 até t_{k+1} , isto é:

$$\begin{cases} \bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(\bar{X}_k, t_k) dt \\ \dot{\phi}(t, t_k) = A(t) \phi(t, t_k) , \quad \phi(t_k, t_k) = I . \end{cases} \quad (5.57)$$

2) Calcula-se:

$$\begin{cases} H_{k+1} = \left[\frac{\partial h}{\partial X} \right]_{X=\bar{X}_{k+1}} \\ \bar{P}_{k+1} = \phi(t_{k+1}, t_k) P_k \phi^T(t_{k+1}, t_k) \end{cases} \quad (5.58)$$

3) Calcula-se:

$$\begin{cases} K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T [H_{k+1} \bar{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \\ P_{k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] \bar{P}_{k+1} \\ \bar{X}_{k+1} = \bar{X}_{k+1} + K_{k+1} [Y_{k+1} - h(\bar{X}_{k+1}, t_{k+1})] \end{cases} \quad (5.59)$$

4) Substitui-se $k+1$ por $k+2$ e recomeça-se o processo.

Além do que foi descrito, este procedimento tem vantagem da matriz a ser invertida ter a mesma dimensão da matriz de covariância dos erros de observação, e se a quantidade observada for um simples es calar, a inversão \bar{e} , (1×1) , isto \bar{e} , trivial.

5.4.2 - CASO ESTOCÁSTICO

Supondo-se que o sistema não-linear seja descrito pela e quação diferencial estocástica:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, t) + G(t)\omega_t, \quad (5.60)$$

onde $\{\omega_t\}$ é caracterizado como ruído branco de média nula e para todo $t \geq t_0$, $X_{t_0} \sim N(\bar{X}_{t_0}, P_{t_0})$, e

$$E\left\{ \omega_t \omega_\tau^T \right\} = Q(t) \delta(t - \tau). \quad (5.61)$$

Neste caso, a única das equações que muda, em relação ao que foi visto na Seção 5.4.1 é a de propagação da covariância, que toma a forma:

$$\bar{P}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} P_k \Phi_{k+1,k}^T + Q(t_{k+1}), \quad (5.62)$$

sendo que o $Q(t_{k+1})$, por sua vez, é calculado por:

$$Q(t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) Q(\tau) G^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \quad (5.63)$$

A propagação da covariância pode ser feita também através da solução da equação de Riccati (processo de Markov), que é equivalente à Equação 5.62.

O filtro estendido de Kalman deve ser usado de maneira sequencial, para não perder a vantagem de retificar a órbita nominal ponto a ponto.

CAPÍTULO 6

ALGORITMO DO PROCEDIMENTO

6.1 - EQUAÇÃO DE OBSERVAÇÃO

O objetivo deste trabalho, como descrito anteriormente, é, a partir de observações sucessivas do satélite, durante um ou dois períodos, gerar, mediante o uso de teoria de estimação de parâmetros, expressões analíticas simplificadas para calcular os elementos da órbita.

As observações, entretanto, são simuladas por um gerador preciso de órbitas, através da integração da equação de movimento do satélite, $\dot{X} = f(X, t)$, de um tempo t_0 , até t_{0+n_p} , onde $t_{0+n_p} = t_0 + P$ (período). A integração deve ser de dupla precisão, para que não haja erro significativo, devido à integração durante um período. Logo após, obtêm-se os vetores correspondentes $X(t_0), X(t_{0+1}), \dots, X(t_{0+n_p})$, que em seguida são transformados em $Y(t_0), Y(t_{0+1}), \dots, Y(t_{0+n_p})$, sendo que $Y(t_k)$ é o vetor dos elementos orbitais "observados" no tempo t_k .

Para cada $t_k, k = 0, 1, \dots, n_p$ organizam-se as observações que são traduzidas pela equação:

$$Y_i(t_k) = h_i(Z_i, t_k) + \epsilon_i, \quad (6.1)$$

para $i = 1, 2, \dots, 6$, sendo que k caracteriza o tempo de observação. Z_i é o vetor (estado) de parâmetros utilizados para definir a função h_i , que se aproxima analiticamente do i -ésimo elemento. Por exemplo, para $i = 1$, correspondendo ao semi-eixo maior, então, Z_1 é:

$$Z_1^T = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad (6.2)$$

ou seja, o semi-eixo maior é escrito como uma função dos parâmetros a_1, a_2, \dots, a_n , conforme foi visto na parte de modelagem matemática, no Capítulo 4.

6.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O ERRO (ϵ_j)

Como as observações são simuladas por um gerador de órbitas, através da integração numérica da equação de movimento, que é do tipo $\dot{X} = F(X)$, a natureza do erro ϵ_j , que aparece nas Equações 6.1 de observações, se deve principalmente aos: erro de precisão no processo de computação, erro de truncamento no integrador, erro de indeterminação na posição calculada, e erro devido às falhas no modelo tomado para descrever a função de forças $F(X)$ da equação de movimento. O primeiro dos erros mencionados, isto é, o de precisão, está ligado ao tamanho da palavra com a qual se está trabalhando, e ao número de operações que se executa em cada passo de integração. Usando-se dupla precisão, este erro diminui consideravelmente. O erro de truncamento se deve, como o nome já diz, a truncamentos de expansões dentro do integrador e é tanto maior, quanto maior for o número de passos dentro de um intervalo. O erro de indeterminação na posição ocorre quando o passo usado é muito grande e diminui ao diminuir-se o tamanho deste. Assim, um integrador sofisticado, munido de controle de passo e de erro, determina o passo ideal de trabalho e diminui a intensidade desses erros. Finalmente, vêm os erros devidos ao modelo de forças usado. Atualmente, todas as forças são razoavelmente bem modeladas e, assim, tais erros são poderiam ocorrer caso se usasse modelos simplificados. Obviamente não se inclui aqui o caso no qual algumas forças são consideradas como não-modeladas (Tapley et alii, 1975), para depois as estimar. Os modelos onde se usa número muito reduzido de harmônicos para o esferopotencial constituem fonte de erro.

Num modelo, por exemplo o GEM-10, ou seja, o GODDARD EARTH MODEL-10, que vai até o grau 30 e a ordem 30, ($n = m = 30$), os cálculos podem ser de bastante precisão. Os erros de posição podem ser próximos de alguns milímetros, para cada intervalo de integração.

Observando-se a Figura 3.8, verifica-se que a amplitude das perturbações de curto período no semi-eixo maior, que decorrem da pressão de radiação, é de 5 m, enquanto as perturbações gravitacionais vão até 10 km. Outras perturbações como o arrasto atmosférico têm amplitudes de 1 m, no semi-eixo maior (ainda para curto período), conforme Sehnal (1973).

Uma escolha razoável para ϵ_i é de 10 m para comprimento e 10^{-8} radianos para arco, como mostra a Tabela 6.1.

TABELA 6.1

RESUMO DOS ERROS DE OBSERVAÇÃO

ERRO EM CADA OBSERVAÇÃO (ϵ_i)	VARIÁVEL MEDIDA
10 até 50 m	a (semi-eixo maior)
10^{-8} rds , 10^{-7} graus	ω , Ω , M, I
10^{-8}	e
10^{-6} (percentual)	qualquer

O erro percentual numa determinada grandez L é definido por:

$$\epsilon_{L\%} = \frac{\epsilon_L}{L} \times 100, \quad (6.3)$$

onde ϵ_L é o erro na medida de L . Se $L \sim 7000$ km e $\epsilon_L \sim 10$ cm, então $\epsilon_{L\%} = 10^{-6}$.

Como já foi comentado, o erro ϵ_i , que aparece na Equação de observação 6.1, está relacionado com a precisão das observações. É usual escolher ϵ_i com distribuição normal, $\epsilon_i \sim N(0, R_i)$ de média nula e variância definida.

Se $\epsilon_{\text{máx}}$ for o erro máximo admissível para a referida precisão, então toma-se $3\sigma_i = \epsilon_{\text{máx}}$, sendo σ_i o desvio padrão relativo ao elemento i , como mostra a Figura 6.1.

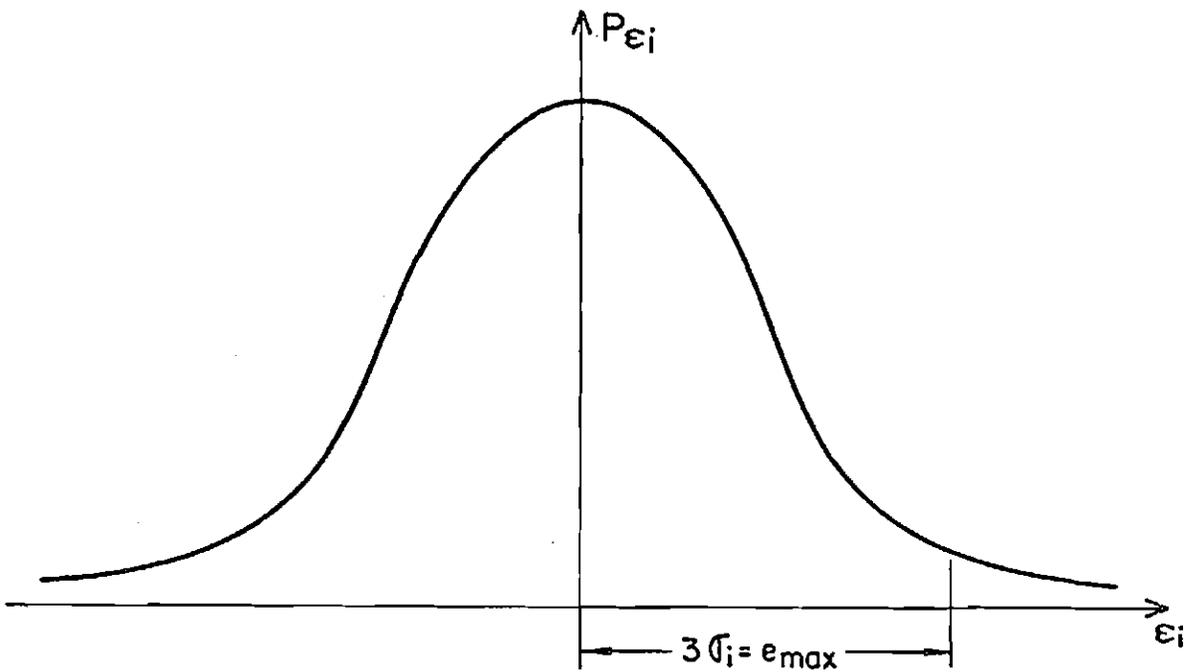


Fig. 6.1 - Distribuição gaussiana de ϵ_j .

Ao escolher o erro máximo aceitável, na precisão da modelagem, igual a três vezes o desvio padrão (σ_j) da distribuição, assegura-se que existe 99,7% de probabilidade da variável aleatória ϵ_j estar dentro da distribuição.

De início será admitido que os ϵ_j são completamente independentes entre si, de forma que se possa caracterizá-los como uma sequência gaussiana branca aleatória, de média nula e covariância especificada, ou seja, matematicamente a estatística da sequência $\{\epsilon_j\}$ é:

$$E\left\{ \epsilon_j(t_k) \right\} = 0 \tag{6.4}$$

$$E\left\{ \epsilon_i(t_k) \epsilon_j^T(t_k) \right\} = R_{\ell}(t_k) \delta_{\ell k} ,$$

ou:

$$E \{ \epsilon \epsilon^T \} = \begin{bmatrix} R_1(t_k) & \dots & 0 \\ 0 & R_2(t_k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & R_m(t_k) \end{bmatrix}$$

No caso, toma-se $R_\ell(t_k)$ constante para todos os t_k .

Tomando-se a Expressão 6.1 e substituindo-se $Z_i(t_k)$ por $\bar{Z}_i(t_k) + \Delta Z_i(t_k)$, onde $\bar{Z}_i(t_k)$ é um valor (nominal) inicial, tem-se:

$$Y_i(t_k) = h_i [\bar{Z}_i(t_k) + \Delta Z_i(t_k), t_k] + \epsilon_i(t_k), \quad (6.5)$$

considerando-se

$$Y_i(t_k) - h_i [\bar{Z}_i(t_k) + \Delta Z_i(t_k), t_k] = \alpha [Y_i(t_k) - h_i [\bar{Z}_i(t_k), t_k]] + \epsilon_i(t_k),$$

onde α é um parâmetro que serve para amortecer os erros de linearização, sendo definido por $0 \leq \alpha < 1$. Portanto, para $\alpha = 0$, tem-se o caso ordinário de linearização e para $\alpha > 0$, a tendência é amortecer os termos de ordem superior, negligenciados nos processos de linearização. (Rios Neto and Bambace, 1981)

Expandindo-se a Expressão 6.5 em torno de $\bar{Z}_i(t_k)$, obtêm-se a seguinte relação:

$$\left. \frac{\partial h_i}{\partial Z_i} \right|_{Z_i = \bar{Z}_i(t_k)} \Delta Z_i(t_k) + \epsilon_i(t_k) = (1-\alpha) \left\{ Y_i(t_k) - h_i [\bar{Z}_i(t_k), t_k] \right\}$$

que pode ser escrita, para $i = 1, \dots, 6$, da seguinte forma:

$$H_i(t_k) \Delta Z_i(t_k) + \epsilon_i(t_k) = \tilde{y}_i(t_k), \quad (6.6)$$

sendo que na Equação 6.6, $H_i(t_k)$ é a matriz de dimensão $(1 \times n_i)$; $\Delta Z_i(t_k)$ é $(n_i \times 1)$; e $\tilde{y}_i(t_k)$ é (1×1) , onde n_i é o número de componentes do estado $Z_i(t_k)$.

Esta última equação pode ser desdobrada, desde que se coló que $\Delta Z_i(t_k) = Z_i(t_k) - \bar{Z}_i(t_k)$, para:

$$H_i Z_i(t_k) + \epsilon_i(t_k) = (1-\alpha) \left\{ y_i(t_k) - h_i [\bar{Z}_i(t_k), t_k] \right\} - H \bar{Z}_i(t_k)$$

ou:

$$H_i Z_i(t_k) + \epsilon_i(t_k) = y_i(t_k) \quad (6.7)$$

6.3 - DINÂMICA DO PROCESSO

O vetor Z_i não evolui no tempo, é estacionário e só tem, portanto, reajustes durante o procedimento sequencial.

A dinâmica do sistema é:

$$Z_i(k+1) = \Phi_i(k+1, k) Z_i(k) , \quad (6.8)$$

onde k está representando o instante t_k e $\Phi_i(k+1, k) = \mathbf{I}$ é a matriz (de transição) unitária, logo:

$$Z_i(k+1) = Z_i(k) \quad (6.9)$$

6.4 - APLICAÇÃO DO FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

O procedimento sequencial, que utiliza o filtro estendido de Kalman, é descrito a seguir.

Dados os valores iniciais $\bar{Z}_i(k)$ e $P_i(k)$, onde $\bar{Z}_i(k)$ é calculado de acordo com as instruções da Secção 4.1, e $P_i(k)$ é determinado através de expressões da Secção 4.1, então, procede-se da seguinte maneira:

1) Propagação (-)

$$\begin{cases} \bar{Z}_i(k+1) = \hat{Z}_i(k) , \\ \bar{P}_i(k+1) = \Phi_i(k+1, k) P_i(k) \Phi_i^T(k+1, k) = P_i(k) . \end{cases} \quad (6.10)$$

2) Cálculo no novo estado

$$\begin{cases} y_i(k+1) = (1-\alpha) \left\{ Y_i(k+1) - h_i \left[\bar{Z}_i(k+1), t_{k+1} \right] \right\} + H_i(k+1) \bar{Z}_i(k+1), \\ \text{onde } H_i(k+1) = \left[\partial h_i / \partial Z_i \right]_{Z_i = \bar{Z}_i(k+1)} , \end{cases} \quad (6.11)$$

sendo

$$\begin{cases} h_i \left[\bar{Z}_i(k+1), t_{k+1} \right], \text{ função modelada, calculada no estado propa} \\ \text{gado.} \\ H_i(k+1) , \text{ derivada calculada no estado propagado.} \end{cases}$$

3) Atualização (^)

$$\begin{cases} K_i(k+1) = \bar{P}_i(k+1) H_i^T(k+1) \left[R_i(k+1) + H_i(k+1) \bar{P}_i(k+1) H_i^T(k+1) \right]^{-1} & (6.12) \\ \hat{Z}_i(k+1) = \bar{Z}_i(k+1) + K_i(k+1) \left[y_i(k+1) - H_i(k+1) \bar{Z}_i(k+1) \right], & (6.13) \\ P_i(k+1) = \bar{P}_i(k+1) - K_i(k+1) H_i(k+1) \bar{P}_i(k+1) . & (6.14) \end{cases}$$

Substitui-se k+1 por k+2 e reinicia-se o processo.

CAPÍTULO 7

TESTE DO PROCEDIMENTO

7.1 - INTRODUÇÃO

A propagação da órbita de um satélite, por um ou mais dias, tem como finalidade fornecer dados angulares e a posição aproximada do satélite, para as estações rastreadoras que estão espalhadas por todo o mundo.

O procedimento de ajustar coeficientes de expressões modeladas para os elementos da órbita, e propagá-la utilizando-se tais expressões, desenvolvido neste trabalho, é testado em uma situação de grande importância para a Missão Espacial Brasileira.

Para teste, escolheu-se o satélite TIROS-N, com altitude da ordem de 850 km, síncrono com o Sol, com órbita aproximadamente polar, e equipado com sensores para pesquisas meteorológicas. O motivo de tal escolha é que nos projetos futuros da Missão Espacial Brasileira estão incluídos satélites com características semelhantes, para pesquisas meteorológicas e de recursos naturais.

7.2 - PROCEDIMENTO DE PROPAGAÇÃO

As expressões obtidas por ajuste de coeficientes, nada mais são do que a história do fenômeno no tempo, isto é, sua lei de variação no intervalo de ajuste.

Ao se propagar a órbita de um satélite por vários períodos, usando-se expressões ajustadas, deve-se admitir a seguinte hipótese: que a lei de variação se mantém válida após cada período propagado, isto é, que o satélite, ao longo de cada revolução, encontra-se na mesma região do espaço, em que se encontrava ao longo do intervalo considerado para ajuste (1 período). Entretanto, as expressões ajustadas para um período

têm que ser interpretadas como sendo resultantes da integração de equações diferenciais, cujas constantes de integração são valem naquele intervalo de integração. Para tornar mais clara esta afirmação, suponha-se que a expressão ajustada para descrever a lei de variação de um parâmetro genérico ξ seja:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 t + \xi_3 t^2 + \xi_4 \text{sen}(\xi_5 + \xi_6 t). \quad (7.1)$$

Tal expressão pode ser considerada como resultante da integração da equação diferencial:

$$d\xi = [\xi_2 + 2\xi_3 t + \xi_4 \xi_5 \cos(\xi_5 + \xi_6 t)] dt, \quad (7.2)$$

de forma que ξ_1 é uma constante de integração válida no primeiro intervalo de ajuste. No final de cada período propagado, ξ_1 deve ser recalculado mediante a condição de contorno, para Δt medido a partir do instante correspondente ao final do último propagado:

$$\xi'(\Delta t = 0) = \xi(P), \quad (7.3)$$

ou seja:

$$\xi'_1 = \xi(P) - \xi_4 \text{sen}(\xi_5), \quad (7.4)$$

onde ξ'_1 é o valor da constante de integração para o próximo período, e assim sucessivamente para cada período propagado. Tal procedimento é denominado reinicialização.

Outra observação importante é que os erros de ajustamento das extremidades das curvas podem ser corrigidos na reinicialização, fazendo-se com que as curvas propagadas, após cada revolução, se iniciem já corrigidas do erro de ajuste.

Para efetuar as correções devidas aos erros de ajuste, basta calcular os desvios iniciais e finais das curvas propagadas em relação às curvas de observação.

Suponha-se que para o elemento genérico ξ obtêm-se as seguintes curvas (ajuste x propagação), como mostra a Figura 7.1.

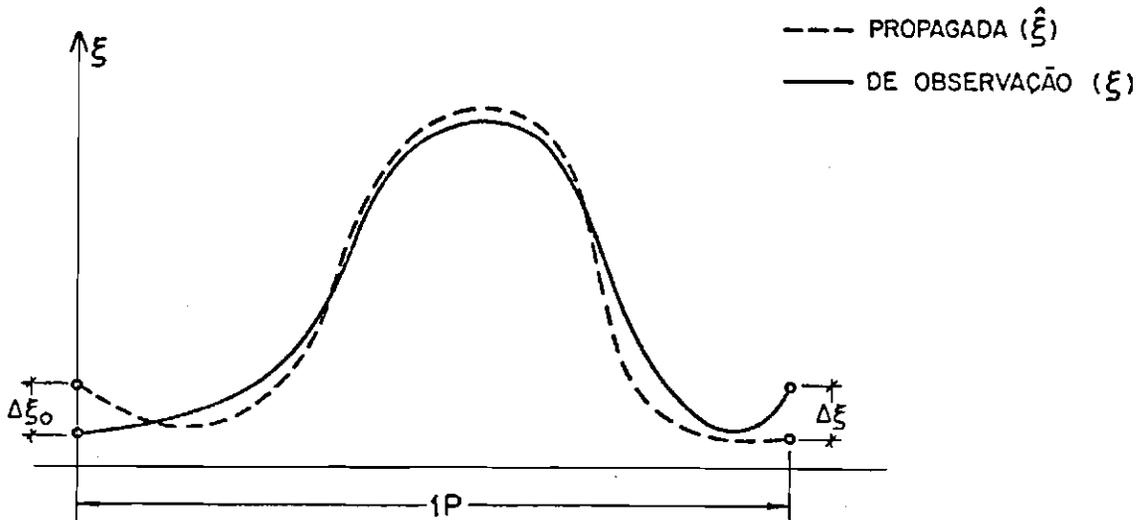


Fig. 7.1 - Curvas ajuste x propagação.

Os desvios iniciais e finais são:

$$\Delta\xi_0 = \hat{\xi}(t=0) - \xi(t=0) , \tag{7.5}$$

$$\Delta\xi = \xi(P) - \hat{\xi}(P)$$

Após a propagação de um período, a curva ajustada chega a $\Delta\xi$ da curva real (de observação); então, para recuperar o ponto verdadeiro, ponto onde deveria estar a curva $\hat{\xi}$, basta adicionar $\Delta\xi$ a $\hat{\xi}$, ou seja:

$$\hat{\xi}_{\text{verd.}} = \hat{\xi} + \Delta\xi \tag{7.6}$$

Tendo-se recuperado o ponto verdadeiro, deve-se observar que a curva propagada, que vai se reiniciar a partir deste ponto, começa deslocada de $\Delta\xi_0$ da curva verdadeira. Assim, a nova curva $\hat{\xi}$ deve ser:

$$\tilde{\xi}(\Delta t = 0) = \tilde{\xi}_{\text{verd.}} + \Delta\xi_0, \text{ ou} \quad (7.7)$$

$$\tilde{\xi}(\Delta t = 0) = \tilde{\xi} + \Delta\xi + \Delta\xi_0,$$

e a reinicialização (determinação da nova constante ξ_1), incluindo estes dois deslocamentos, $\tilde{\xi}$ (para o exemplo escolhido):

$$\xi_1' = \tilde{\xi}(P) + \Delta\xi + \Delta\xi_0 - \xi_4 \text{ sen } \xi_5 \quad (7.8)$$

Tal reinicialização é vantajosa porque faz com que os erros de ajustamento ($\Delta\xi_0$ e $\Delta\xi$) permaneçam constantes ao longo da propagação.

7.3 - CASO DE TESTE

Como descrita anteriormente na Secção 7.1, o satélite escolhido para teste foi o TIROS-N, com as seguintes condições iniciais:

1) Época inicial

16/08/1981 às 20 h 12 min 17,999 s

2) Período nodal

$P_N = 101,2099$ min.

3) Fluxos solares

SSOF = 176 em 10^{-22} watts/(M²Hz), SOF = 215 em 10^{-22} watts/(M²Hz)

4) Índice geomagnético

$k_p = 1,89$

5) Posição e velocidade iniciais

$$X = - 875,6310 \text{ km}$$

$$Y = - 6819,7526 \text{ km}$$

$$Z = - 2153,0222 \text{ km}$$

$$\dot{X} = - 1,442522 \text{ km/s}$$

$$\dot{Y} = - 2,022677 \text{ km/s}$$

$$\dot{Z} = + 7,005805 \text{ km/s}$$

7.4 - RESULTADOS

Os resultados, obtidos após propagação da órbita no intervalo de aproximadamente 2 dias, encontram-se na Tabela 7.1.

TABELA 7.1

RESULTADOS DE PROPAGAÇÃO DA ÓRBITA PARA O TIROS-N

VALORES FORNECIDOS PELO BOLETIM APT PREDICT DO SATÉLITE TIROS-N	VALORES CALCULADOS (PROPAGADOS) COM AS EXPRESSÕES AJUSTADAS	DESVIOS (m) e (m/s)	DESVIO EM ARCO (MÁX.)
X = - 964462,4 (m)	X = - 963355,0 (m)	$\Delta X = 1107,36$	$< 0^{\circ},2$
Y = - 7130652,2	Y = - 7128806,1	$\Delta Y = 1846,13$	
Z = - 337297,6	Z = - 333984,4	$\Delta Z = 3313,24$	
$\dot{X} = - 1155,806 \text{ (m/s)}$	$\dot{X} = - 1157,723 \text{ (m/s)}$	$\Delta \dot{X} = 1,92$	
$\dot{Y} = - 182,190$	$\dot{Y} = - 194,382$	$\Delta \dot{Y} = - 12,19$	
$\dot{Z} = 7342,971$	$\dot{Z} = 7344,298$	$\Delta \dot{Z} = 1,33$	

Estes resultados referem-se às curvas de propagação apresentadas nas Figuras de 7.2 a 7.7.

Pode-se observar através dessas figuras que o ajuste de um modo geral foi bom, pois as curvas mostradas (curva propagada x curva de observação) são quase sempre coincidentes, com exceção da última, a curva de "r", que apresenta algumas pequenas discrepâncias.

As figuras apresentadas a seguir (Figuras de 7.2 a 7.7) estão acompanhadas das expressões que as representam, dos valores calculados (ajustados) para seus parâmetros e dos respectivos desvios (inicial e final), e as Figuras de 7.8 a 7.13 representam os desvios relativos às Figuras 7.2 a 7.7.

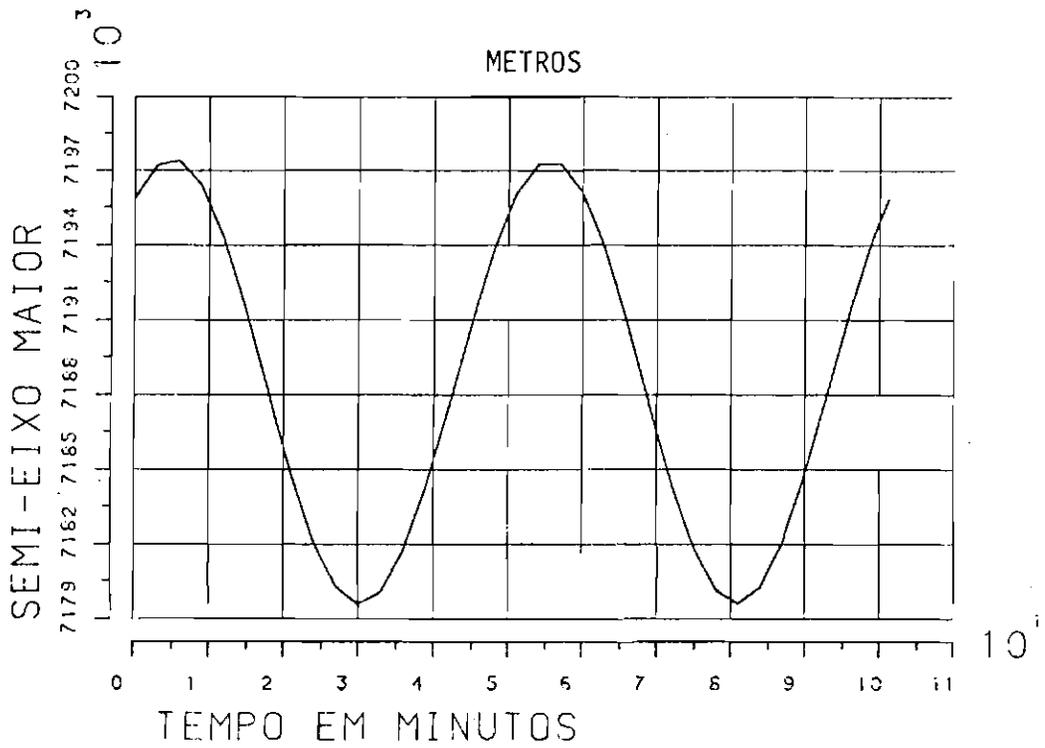


Fig. 7.2 - Semi-eixo maior.

Expressão do semi-eixo maior (metros) em função do tempo (segundos):

$$A = A1 + A2 * T + A3 * T * T + A4 * \text{COS}(A5 + A6 * T)$$

$$A1 = 7.1885527E + 06$$

$$A2 = -4.3950851E - 02$$

$$A3 = 7.1380314E - 06$$

$$A4 = 8.9289979E + 03$$

$$A5 = 5.6673892E + 00$$

$$A6 = 2.0702419E - 03$$

$$DA = -2.5995209E + 01$$

$$DA0 = -1.5394745E + 01$$

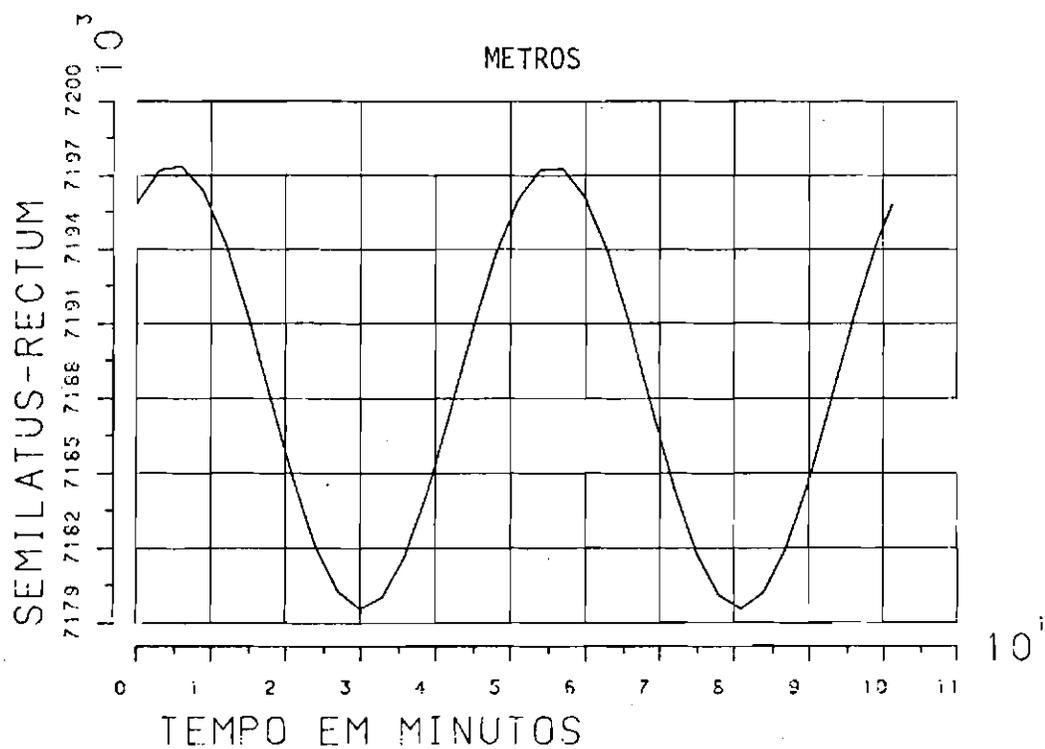


Fig. 7.3 - "Semilatus rectum".

Expressão do "semilatus-rectum" (metros) em função do tempo (segundos):

$$P = P1 + P2 * T + P3 * T * T + P4 * SIN(P5 + P6 * T)$$

$$P1 = 7.1885339E + 06$$

$$P2 = -4.3244149E - 02$$

$$P3 = 6.4173524E - 06$$

$$P4 = -8.9374293E + 03$$

$$P5 = 4.0984177E + 00$$

$$P6 = 2.0698122E - 03$$

$$DP = -9.6789551E - 01$$

$$DPO = -4.7182922E + 00$$

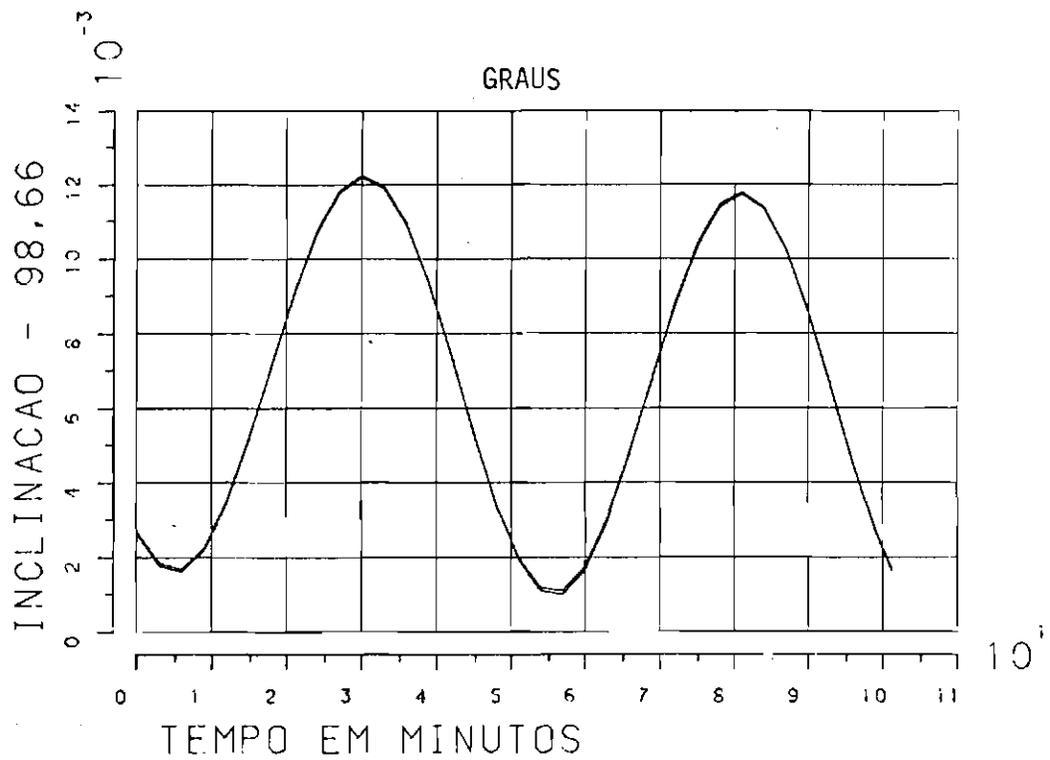


Fig. 7.4 - Inclinação.

Expressão da inclinação (radianos) em função do tempo (segundos):

$$I = I1 + I2*T + I3*\text{COS}(I4 + I5*T)$$

$$I1 = 1.7220659E + 00$$

$$I2 = -3.0762909E - 09$$

$$I3 = -9.5674652E - 05$$

$$I4 = 5.6585792E + 00$$

$$I5 = 2.0671215E - 03$$

$$DI = 9.4321149E - 07$$

$$DI0 = -1.2012024E - 06$$

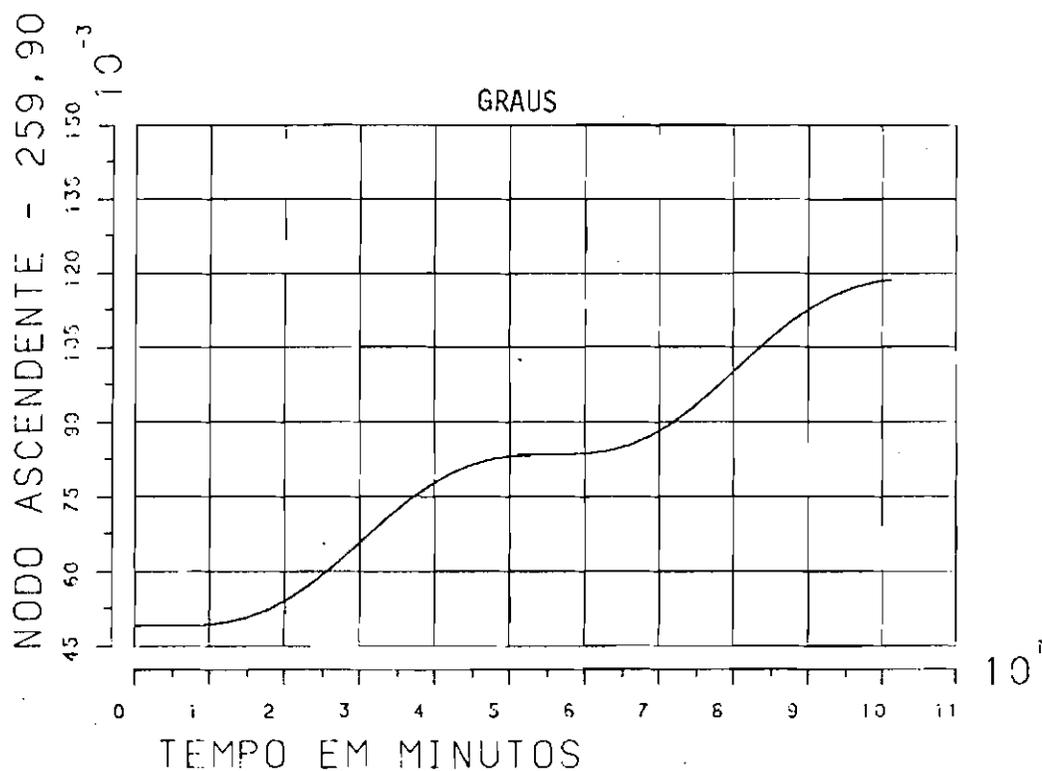


Fig. 7.5 - Ascensão reta do nodo ascendente.

Expressão da ascensão reta do nodo ascendente (radianos) em função do tempo:

$$AN = AN1 + AN2 * T + AN3 * T * T + AN4 * SIN(AN5 + AN6 * T)$$

$$AN1 = 4.5369118E + 00$$

$$AN2 = 1.9242619E - 07$$

$$AN3 = 1.2924751E - 12$$

$$AN4 = -9.5764310E - 05$$

$$AN5 = 5.6570673E + 00$$

$$AN6 = 2.0746186E - 03$$

$$DAN = -8.9313835E - 07$$

$$DANO = 2.3677858E - 06$$

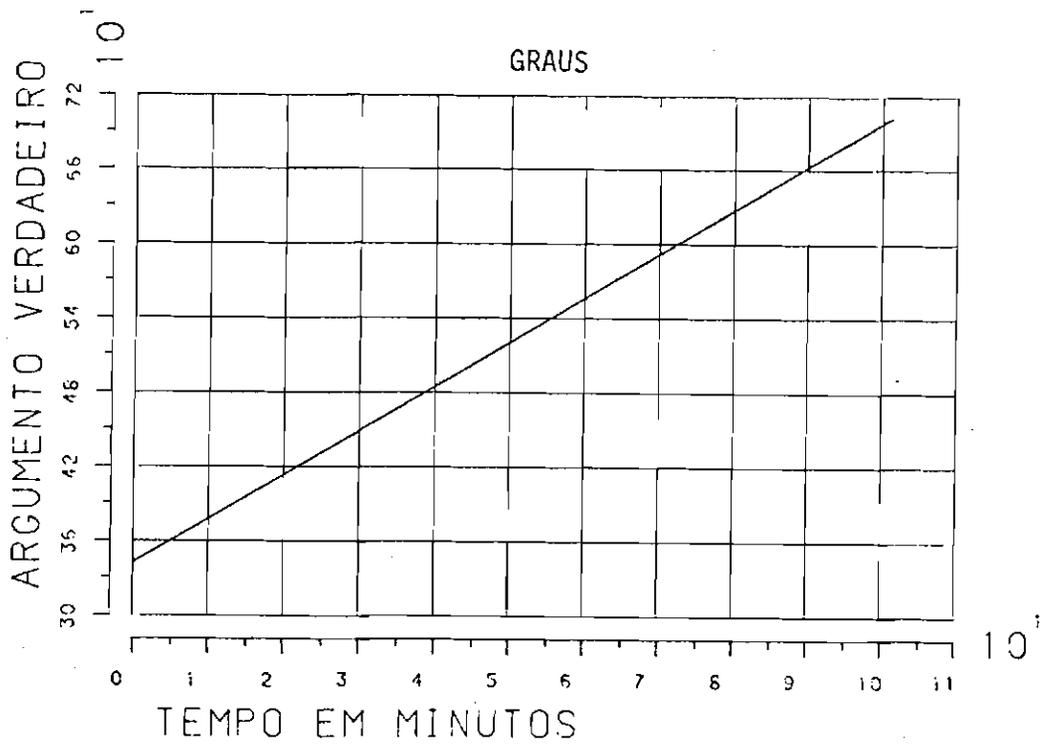


Fig. 7.6 - Argumento verdadeiro.

Expressão do argumento do perigeu + anomalia verdadeira (radianos) em função do tempo:

$$V = V1 + V2*T + V3*T*T + V4*SIN(V5 + V6*T)$$

$$V1 = 5.9763911E + 00$$

$$V2 = 1.0355957E - 03$$

$$V3 = -1.1988601E - 10$$

$$V4 = -2.8566408E - 03$$

$$V5 = -1.0665742E + 02$$

$$V6 = 1.1002728E - 03$$

$$DV = 9.7414944E - 05$$

$$DVO = -4.9840572E - 05$$

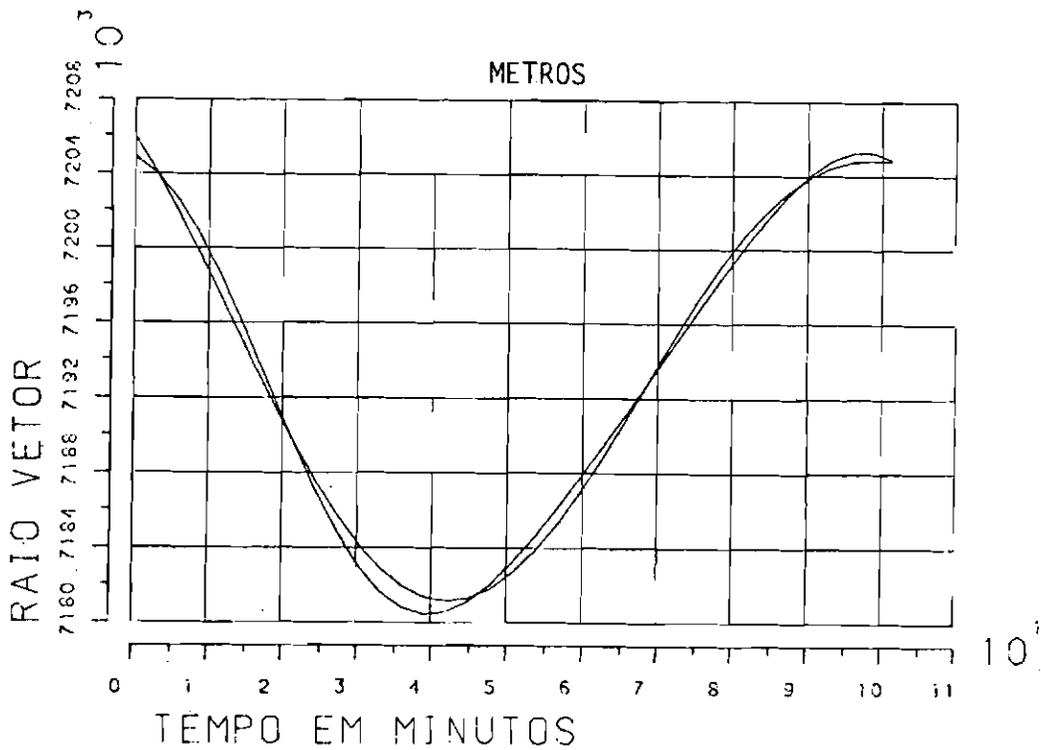


Fig. 7.7 - Raio vetor.

Expressão do raio vetor-posição (metros) em função do tempo (segundos):

$$R = R1 + R2 \cdot T + R3 \cdot T \cdot T + R4 \cdot \text{SIN}(R5 + R6 \cdot T)$$

$$R1 = 7.1982500E + 06$$

$$R2 = -5.3387562E + 00$$

$$R3 = 8.6559908E - 04$$

$$R4 = 9.1899346E + 03$$

$$R5 = 1.4696874E + 01$$

$$R6 = 1.0580408E - 03$$

$$DR = 1.1242844E + 02$$

$$DR0 = 1.0907019E + 03$$

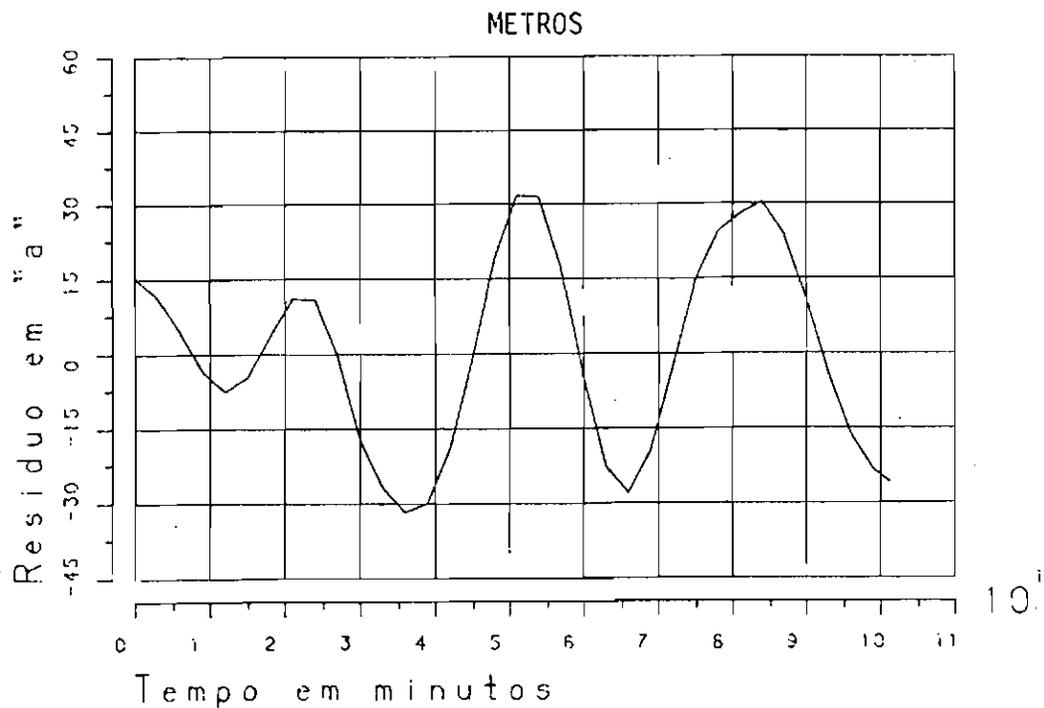


Fig. 7.8 - Desvio do semi-eixo maior.

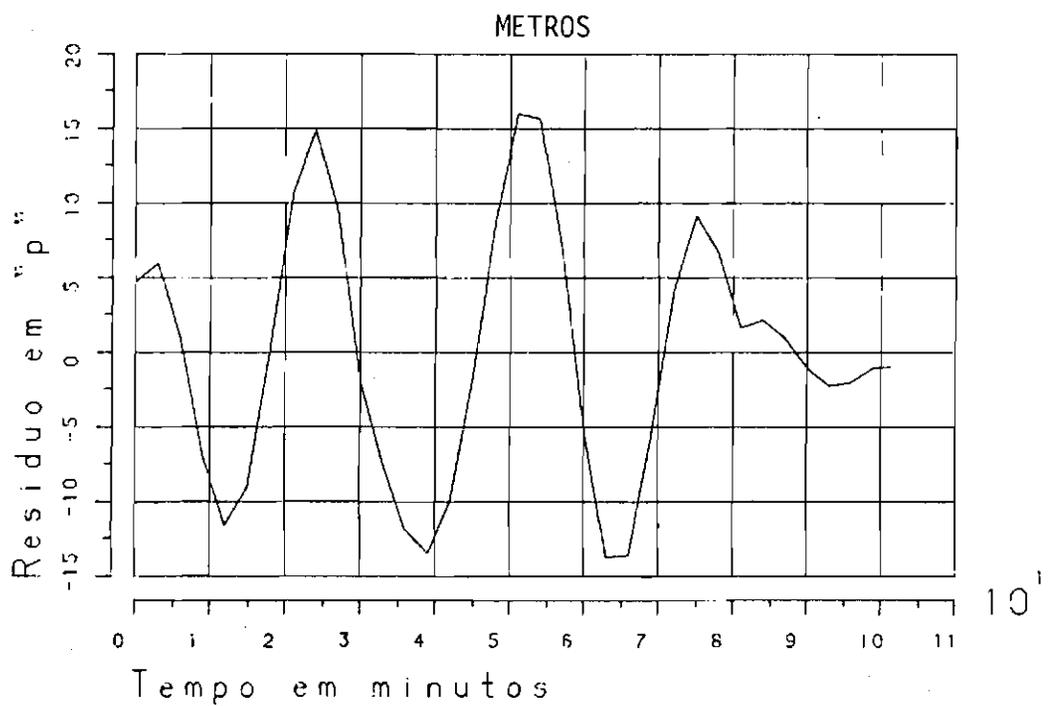


Fig. 7.9 - Desvio do "semilatus rectum".

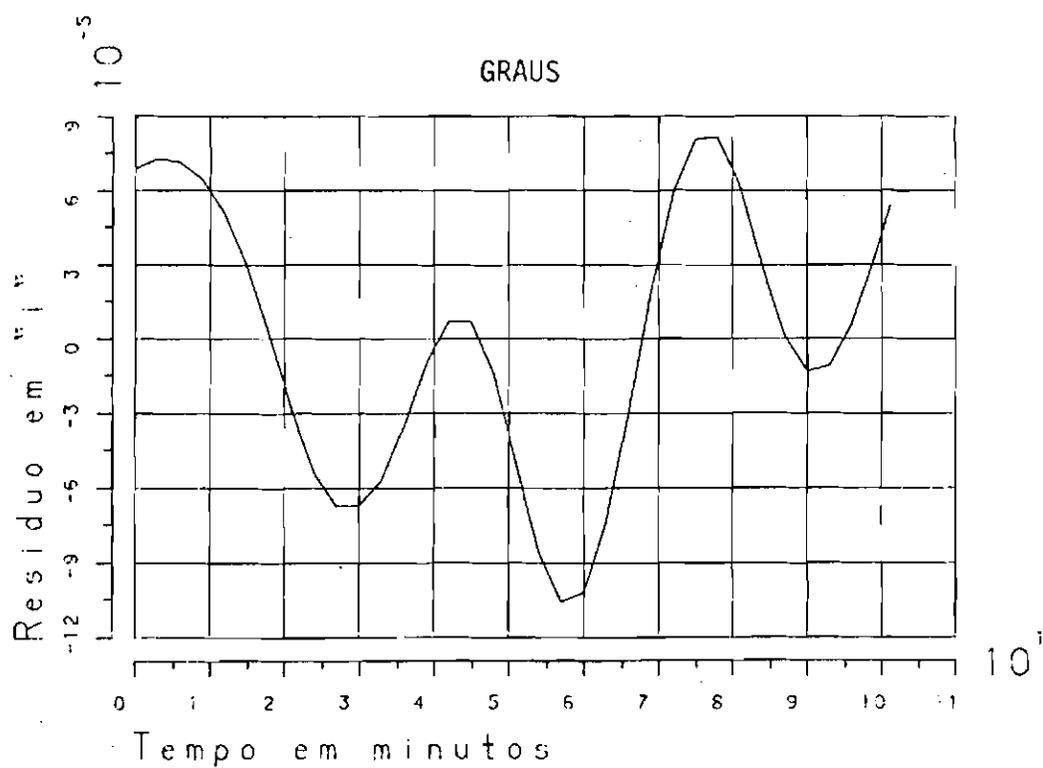


Fig. 7.10 - Desvio da inclinação.

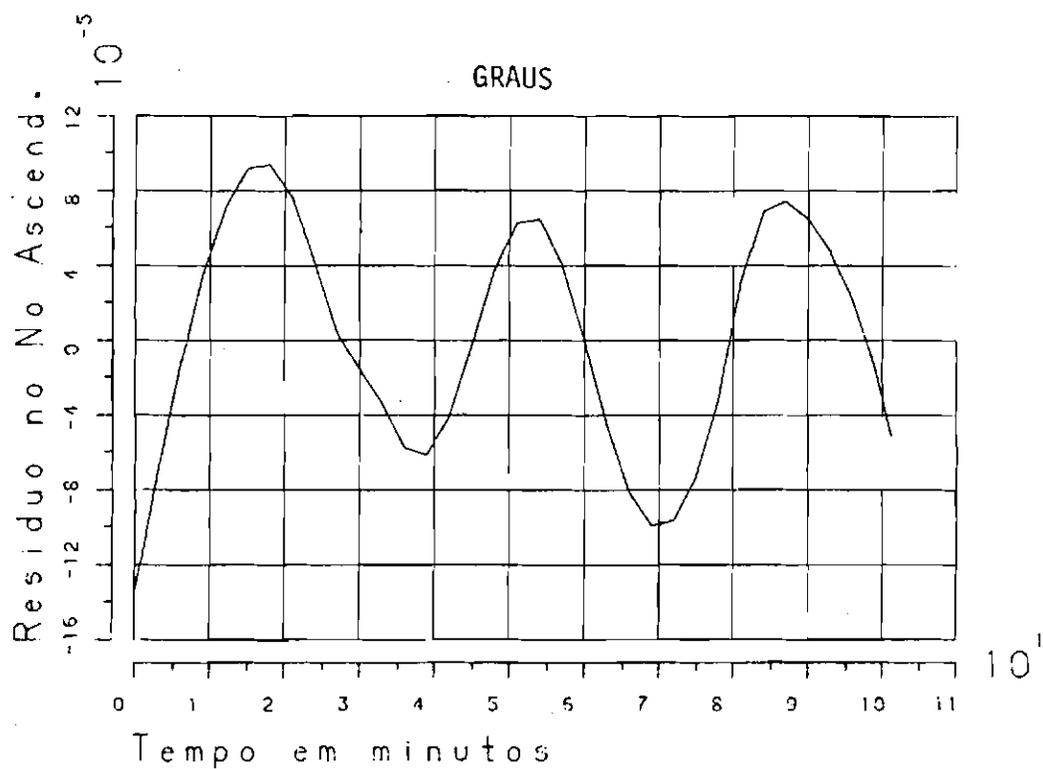


Fig. 7.11 - Desvio da ascensão reta do nodo ascendente.

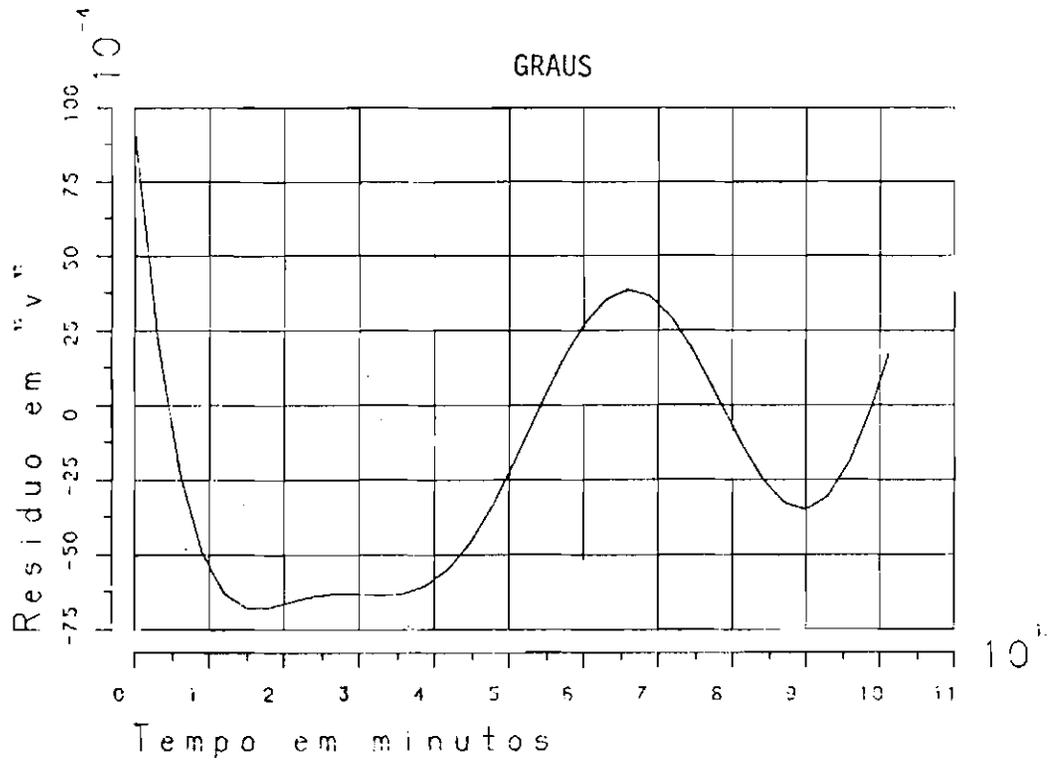


Fig. 7.12 - Desvio do argumento verdadeiro.

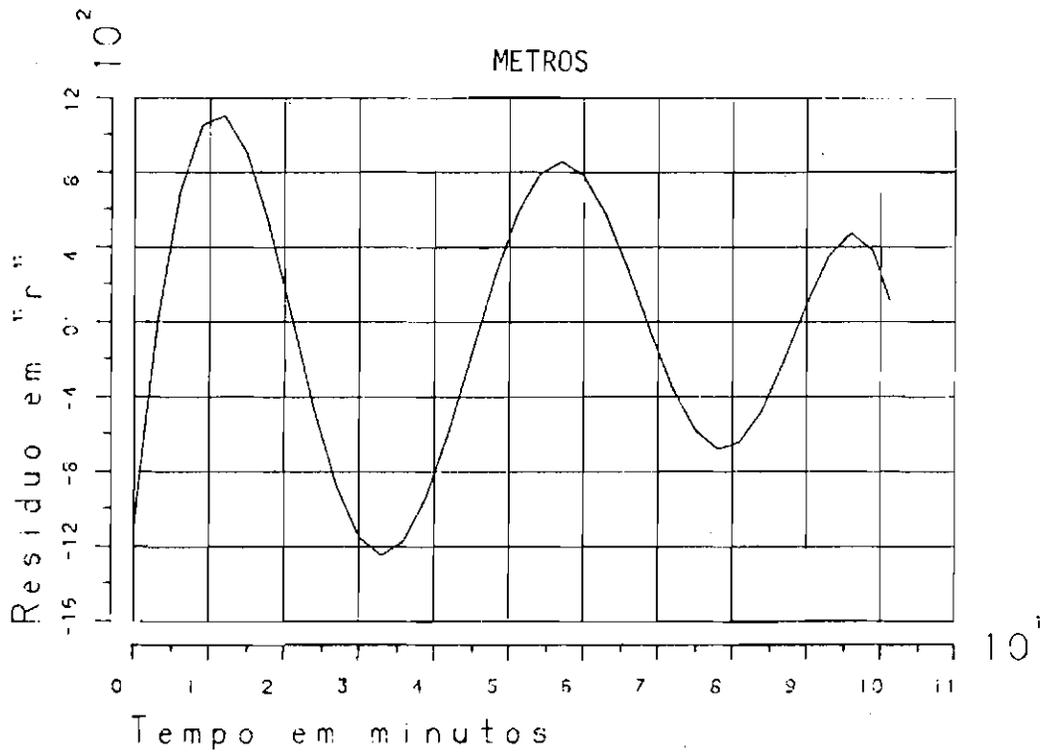


Fig. 7.13 - Desvio do raio vetor.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

8.1 - ALCANCE DE UTILIZAÇÃO DO MODELO

As expressões analíticas simplificadas para propagação de órbitas, usando Teoria de Estimação de Parâmetros em conjunto com teorias de Mecânica Celeste, foram desenvolvidas, em princípio, para satélites de baixa a média altitude. Entretanto, não existe nenhuma restrição ao longo do trabalho que impeça o seu uso para satélites altos. Ao contrário, espera-se que neste caso, onde as perturbações devidas ao campo gravitacional e ao arrasto atmosférico são bastante atenuadas, as variações dos elementos da órbita sejam mais suaves, e as expressões analíticas ajustadas, de maior alcance, isto é, valham por tempo mais prolongado.

Para satélites de altitude em torno de 500 a 1000 km, as variações são mais rápidas e mais acentuadas, de forma que a recalculagem dos coeficientes, das expressões analíticas, deverá ser em intervalos de 1 a 3 dias, e, mesmo que isso tenha que ser feito diariamente, o procedimento ainda será compatível com as teorias semi-analíticas, cujo intervalo de integração das variações médias é de um dia. Em casos críticos, isto é, quando o satélite estiver em baixas altitudes (150 a 250 km), e portanto sujeito a fortes atrações gravitacionais (de um campo extremamente não central) e a intensas dissipações de energia na fricção com a atmosfera, é razoável supor que o intervalo de novos ajustes, dos parâmetros das expressões, deva ser bem reduzido. Na última fase de decaimento do satélite (nos seus últimos dias de vida), pode ser que este processo não funcione. Neste caso, a propagação da órbita deve ser feita com o próprio gerador de órbitas, renovando-se sempre as condições iniciais através de dados observados.

De acordo com a introdução deste trabalho, o gerador de órbitas, usado para simular as observações, é bastante flexível, ou seja, permite a inclusão de todo tipo de perturbações que se necessite para ca

da satélite. Assim, os dados simulados podem ser obtidos com a precisão que se desejar.

Outra aplicação importante deste método é usar somente observações. Mesmo que nada se conheça sobre um determinado satélite, além de suas observações, é possível determinar sua órbita e propagá-la.

8.2 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

O gerador de órbitas disponível, utilizado neste trabalho (Negreiros de Paiva, 1980; Kuga, 1981), para simular as observações, é constituído de um modelo de forças simplificado, uma vez que sõ contém forças gravitacionais e de arrasto atmosférico. Faz-se o cálculo da densidade atmosférica, usando-se o programa ATDENS - Atmospheric Density (Negreiros de Paiva, 1979).

Os resultados obtidos estão sujeitos a dois tipos principais de erros: erro devido a falhas do gerador de órbitas ao simular as observações, e erro devido ao fato de considerar constantes os coeficientes ajustados ao longo de vários períodos. O erro devido ao ajuste não se propaga em virtude do processo de reinicialização, mantendo-se, por tanto, constante ao longo do tempo, desde que se admita válida a hipótese de mesma lei de variação (mesma região do espaço) para o intervalo de propagação considerado.

Considera-se desprezível o erro de integração numérica, ao longo de uma revolução (intervalo de ajuste).

Das considerações anteriores, observa-se que a qualidade, quanto a precisão das órbitas propagadas, deve-se principalmente ao erro no vetor de condições iniciais utilizado. Este erro, naturalmente, depende do processo de estimação da órbita e da quantidade e qualidade das observações físicas, utilizadas para obtenção dessas condições iniciais.

Ressalta-se ainda que, neste procedimento, a propagação não é feita por extrapolação, mas sim, por interpolação que usa o processo de reinicialização, desenvolvido neste trabalho. Isto é muito vantajoso porque caso se adote o processo de propagação por extrapolação, certamente incorre-se em erros, pois o comportamento de uma função, ajustada num intervalo, muda significativamente quando esta é calculada fora dele.

Um instrumento de grande importância, utilizado neste trabalho, é o filtro estendido de Kalman, que permite o processamento sequencial dos dados, sem necessitar armazenar (portanto sem muito uso de memória), além de fazer o ajuste dinâmico, ao longo da própria trajetória. Tal procedimento torna o ajuste mais homogêneo, ao longo do intervalo adotado.

Em continuidade a este trabalho, pretende-se testar o procedimento proposto, utilizando-se um gerador de órbitas que forneça a previsão do erro global acumulado a cada instante (Zadunaisky, 1979), o que terá como consequência imediata um ajuste de melhor qualidade, principalmente no caso do elemento "r" da Figura 7.8.

Outra inovação que se pretende adicionar é a do ruído adaptativo (Rios-Neto and Kuga, 1981), isto é, usar uma técnica que introduz um ruído aleatório no estado estimado sequencialmente, de forma que se tenha maior sensibilidade de ajuste, ou seja, maior controle sobre as matrizes de covariância do estado que, na maioria dos casos, são severamente deturpadas pelas não-linearidades existentes no problema. Isso contribuirá para a melhoria geral do modelo em questão.

Futuramente, pretende-se ainda ajustar os elementos médios ao invés dos osciladores, ou seja, as observações seriam transformadas em elementos médios, as expressões, destes, ajustadas e propagadas e, a seguir, transformadas novamente em elementos osciladores (Brouwer, 1961).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALMINO, G. Détermination du potentiel de la Terre par les méthodes spatiales, la géodynamique spatiale. In: CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES SPATIALES. (CNES). *La Géodynamique Spatiale*. Toulouse. 1976. p. 275-471. Notes de Cours.
- BALMINO, G.; BORDERIES, N. Gravitational potential of solid bodies in solar systems. *Celestial Mechanics*, 17(2):113-119, Feb. 1978.
- BATE, R.R.; MUELLER, D.D.; WHITE, J.E. *Fundamentals of astrodynamics*. New York, Dover, 1971.
- BORDERIES, N. Mutual gravitational potential of N solid bodies. *Celestial Mechanics*, 18(3):295-307, Oct. 1978.
- BROUWER, D. Solution of problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*, 17(9):378-397, Nov. 1959.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. *Methods of celestial mechanics*. New York, Academic, 1961.
- BRYSON, A.E.; HO, Y.C. *Applied optimal control*. Waltham, MA, Blaisdell, 1969.
- CEFOLA, P.J. On the development of a recursive semianalytical orbit prediction method. *Flight Mechanics Conference*, Greenbelt, MD. 1976.
- COOK, G.E. Luni-solar perturbations of the orbit of an Earth satellite. *The Geophysical Journal of Royal Astronomical Society*, 6(3):271-291, Apr. 1962.
- ECKSTEIN, M.C. *Orbit computation and life time prediction of close Earth satellites*. Oberpfaffenhofen, DFVLR, Institute for Flight Systems Dynamics. 1978.
- FERRAZ MELLO, S. Action de la pression de radiation sur le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre. In: CONGRESS INTERNATIONAL D'ASTRONAUTIQUE, 14, Paris, 1963. *Proceedings*. Warsaw, 1965, v. 4, p. 41-50.

- GAPOSCHKIN, M. *Smithsonian Institute Standard Earth III*. Cambridge, MA, SAO, 1973. (SAO Special Report, no. 353).
- GIACAGLIA, G.E.O. *Transformation of spherical harmonics and applications to geodesy and satellites theory*. São José dos Campos, INPE, 1979. (INPE-1453-RPE/018).
- GREEN, A.J. *Orbit determination and prediction process low altitude satellites*. Ph.D Dissertation, Cambridge, MA, Massachusetts Institute of Technology, 1979.
- HEISKANEN, W.A.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. San Francisco, W.H. Freeman, 1967.
- JAZWINSKI, A.H. *Stochastic process and filtering theory*. New York, Academic, 1970.
- KAULA, W.M. *Theory of satellite Geodesy*. London, Blaisdell, 1966.
- KING HELE, D.G. SKYLAB 1 rocket (1973-27B): orbit determination and analysis. *A Mathematical and Physical Sciences*, 296(1426):597-637, 1980.
- KING HELE, D.G. *Theory of satellites orbits in an atmosphere*. London, Butterworths, 1964.
- KUGA, H.K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites de baixa altitude*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1981. No prelo.
- LĀLA, P. *Perturbation of the satellite orbit due to the solar radiation pressure*, s.l., s.c.p., (1974).
- LAUTMANN, D.A. *Perturbations of a close-earth satellite due to sunlight diffusely reflected from the Earth*. Cambridge, MA, SAO, 1975.
- LEIBOLD, A. *Lectures series on trajectory estimation satellites orbit determination and related error analysis*. Oberpfaffenhofen, DFVLR, 1980.
- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Reading, MA, Wesley, 1967.
- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Simulação numérica da densidade atmosférica*. São José dos Campos, INPE, 1979. (INPE-1463-RPI/002).

- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Simulação da órbita e de observações de um satélite artificial ao redor da Terra*. São José dos Campos, INPE, 1980. (INPE-1955-RPE/269).
- PAPOULIS, A. *Probability random variables and stochastic process*. New York, McGraw-Hill, 1965.
- RIOS NETO, A. *The estimation of the state and the unmodeled atmospheric drag for new Earth satellites*. Austin, University of Texas, 1973.
- RIOS NETO, A.; BAMBACE, L.A.W. Optimal linear estimation and suboptimal numerical solution of dynamical systems. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACECRAFT FLIGHT DYNAMICS. Darmstadt, Germany, 1981. Paris, ESA, 1981, session 6, p. 233-237.
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. Estimação adaptativa em tempo real de órbitas de satélites artificiais a baixa altitude. *VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro, dez. 1981.
- SEHNAL, L. *Non-gravitational forces in satellite dynamics*. Ondrejow, Czechoslovakia, Astron. Inst. of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1973.
- SORENSEN, W.H. Comparison of Kalman, bayesian and maximum likelihood estimation techniques. In: LEONDES, C.T., ed. *Theory and applications of Kalman filtering*. Los Angeles, CA, NATO AGARD, 1970. cap. 6, p. 121-141.
- TAPLEY, B.D.; RIOS NETO, A.; SCHUTZ, B.E. Orbit determination in the presence of atmospheric drag errors. In: GIACAGLIA, G.E.O., ed. *Satellite Dynamics*; Symposium held at São Paulo, June 19-21, 1974. Berlin, Springer-Verlag, 1975, p. 154-196.
- TAPLEY, B.D. *Statistical orbit determination*. Austin, TX, The University of Texas, Department of Engineering and Engineering Mechanics, at Austin, 1972.
- VEIS, G.; MOORE, C.H. *Improvement orbit program*. Cambridge, MA, SAO, 1960.
- ZADUNAISKY, P.E. On the accuracy in the numerical solution of the n-body problem. *Celestial Mechanics*, 20(3):209-230, Oct. 1979.