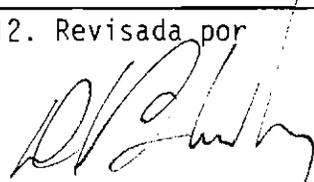
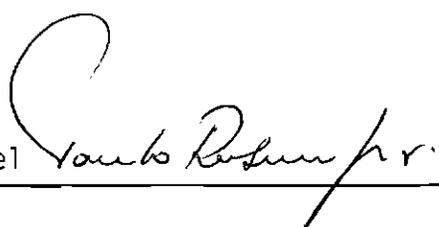


1. Publicação nº <i>INPE-2391-TDL/086</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH/CEA</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>EXPLOSÕES SUBMARINAS ONDA DE PRESSÃO SENSOR</i>			
7. C.D.U.: <i>534.222.2:551.46</i>			
8. Título <i>ESTUDO SOBRE A PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE EXPLOÇÃO SUBMARINAS</i>		10. Páginas: 125	
		11. Última página: A.12	
9. Autoria <i>Paulo Roberto Gotac</i>		12. Revisada por  <i>Demétrio Bastos Netto</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas <p><i>Este trabalho trata do problema da propagação de ondas de pressão geradas por explosões submarinas numa profundidade caracterizada pela ausência de informações. Nele são abordadas algumas teorias existentes, tais como a de Kirkwood-Bethe e examinadas algumas características do Princípio da Similaridade. Os resultados experimentais foram obtidos através de medidas realizadas com cargas padrão de TNT fundido e detonados em Raia Acústica. Os resultados de pressão de pico apresentam-se compatíveis com os de Arons e Kirkwood-Bethe; os obtidos para o impulso específico, para o fluxo de energia e para o período entre pulsos afastaram-se dos de Slifko, extrapolados para a profundidade adotada. A análise espectral foi realizada, usando-se a técnica FFT (Transformada Rápida de Fourier), e apontou um máximo de densidade espectral na frequência correspondente ao período entre pulsos, como esperado. Finalmente, o número de cargas detonadas foi insuficiente para que a hipótese linear, formulada por Gaspin para a remoção da onda refletida, fosse verificada.</i></p>			
15. Observações <i>Dissertação de mestrado em Ciência Espacial aprovada em 30 de novembro de 1981.</i>			



Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisitos exigidos  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Ciência Espacial

Dr. Barclay Robert Clemesha



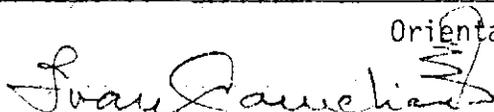
Presidente

Dr. Demétrio Bastos Netto



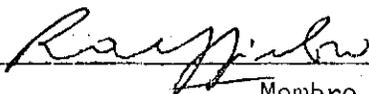
Orientador

Dr. Ivan de Azevedo Camelier



Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Ralf Gielow



Membro da Banca

Candidato: Paulo Roberto Gotaç

São José dos Campos, 30 de novembro de 1981

*À Sheila, à Solange, ao Roberto e ao Daniel*



## AGRADECIMENTOS

Ao Capitão-de-Mar-e-Guerra DEMÉTRIO BASTOS NETO, PhD, pela orientação segura e competente e pelo entusiasmo que soube transmitir nos momentos mais difíceis.

Ao Capitão-de-Fragata CARLOS EDUARDO PARENTE RIBEIRO pela irrestrita cooperação, colocando sempre à disposição as facilidades do Grupo de Acústica do IPqM.

Ao Capitão-de-Fragata (R-RM) MATIAS MOREIRA FILHO por sua valiosa colaboração no Grupo de Apoio ao IPqM.

Ao Suboficial ANTONIO FERNANDES SEGALOTTO (Marinha do Brasil) pela maneira segura com que realizou os trabalhos de preparação e de detonação.

Ao Grupo de Armamento do IPqM pela confecção esmerada das cargas.

A todo o pessoal envolvido nos trabalhos de mergulho e de armação do experimento, sempre dispostos em qualquer condição de tempo e mar.

A todo o pessoal que direta ou indiretamente cooperou (desenhistas, fotógrafos, etc.) e cujos nomes são omitidos no papel, mas gravados no coração.



### ABSTRACT

*This work deals with the problem of pressure waves propagation generated by underwater explosions at depths characterized by the lack of available information. Some existing theories, such as those of Kirkwood-Bethe, are considered, and some features of the Principle of Similarity are examined. Experimental results were obtained from measurements with standard charges of cast TNT and detonated in an Acoustic Range. Results for peak pressure showed close agreement with those of Arons and Kirkwood-Bethe. On the other hand, specific impulse, energy flux and first bubble period data showed a departure from those of Slifko, extrapolated for the adopted depth. Spectral Analysis was accomplished using the FFT (Fast Fourier Transform) technique and it was seen that maximum of spectral density occurred at the frequency corresponding to the first bubble period, as expected. Finally, the linear hypothesis, as formulated by Gaspin for the removal of the reflected wave could not be verified conclusively, in view of the small amount of charges detonated.*

• •

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	<i>xi</i>
LISTA DE TABELAS .....	<i>xiii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS .....	<i>xv</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2 - HISTÓRICO</u> .....	3
<u>CAPÍTULO 3 - SEQÜÊNCIA DE EVENTOS E TEORIAS ASSOCIADAS</u> .....	13
3.1 - Sequência de eventos .....	13
3.2 - A teoria de Kirkwood-Bethe .....	20
3.2.1 - Condições iniciais e de contorno .....	20
3.2.2 - As equações do movimento .....	22
3.2.3 - Análise da propagação .....	27
3.3 - O princípio da similaridade .....	46
3.4 - Reflexão na superfície .....	49
<u>CAPÍTULO 4 - ESQUEMA EXPERIMENTAL</u> .....	53
4.1 - Local .....	53
4.2 - Montagem experimental .....	56
4.3 - Cargas .....	57
4.4 - Sensores .....	60
4.5 - Calibração .....	62
4.6 - Etapas do experimento .....	64
<u>CAPÍTULO 5 - RESULTADOS</u> .....	69
5.1 - Curvas de pressão vs. tempo .....	69
5.2 - Pressões de pico, impulso específico e fluxo de energia ..	74
5.3 - Período entre pulsos .....	82
5.4 - Espectro de energia .....	82
5.5 - Reflexão na superfície .....	83
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</u> .....	87
6.1 - Conclusões .....	87
6.2 - Sugestões e comentários finais .....	89

	<u>Pág.</u>
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	91
APÊNDICE A - DEDUÇÕES DE ALGUMAS RELAÇÕES	

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Variação da pressão de pico e da constante de tempo com a distância .....	6
2.2 - Comparação das teorias .....	7
2.3 - Resultados experimentais para o TNT e o PENTOLITE .....	10
3.1 - Deflagração vs. detonação e transição de um regime para outro .....	15
3.2 - Ondas de pressão vs. tempo a várias distâncias .....	17
3.3 - Pulsações da esfera de gás .....	18
3.4 - Migração da esfera .....	19
3.5 - Variação da forma, com o tempo, de uma onda de amplitude finita .....	31
3.6 - Curva de pressão vs. tempo para cargas de 1.000 lb .....	50
3.7 - Remoção da parte refletida (hipótese linear) .....	51
4.1 - Parte da Carta Náutica da Região .....	54
4.2 - Parte da Carta Náutica da Região mostrando a área dos experimentos .....	55
4.3 - Arranjo experimental .....	56
4.4 - Seqüência esquemática da obtenção de dados .....	57
4.5 - Carga utilizada (medidas em mm) .....	58
4.6 - Circuito de iniciação .....	59
4.7 - Espoleta de iniciação (medidas em mm) .....	59
4.8 - Detalhes do medidor de pressão a cristal .....	61
4.9 - Hidrofone com pré-amplificador .....	62
4.10 - Método de calibração .....	64
4.11 - Estrutura transmissora (medidas em metros) .....	65
4.12 - Osciloscópio de armazenamento TEKTRONIX .....	66
5.1 - Curva típica de pressão vs. tempo .....	69
5.2 - Curva de pressão vs. tempo para 40 m.....	70
5.3 - Curva de pressão vs. tempo para 45 m .....	71
5.4 - Curva de pressão vs. tempo para 70 m .....	72
5.5 - Curva de pressão vs. tempo para 90 m .....	73
5.6 - Pressão de pico vs. distância .....	76
5.7 - Impulso específico vs. distância .....	77

	<u>Pág.</u>
5.8 - Fluxo de energia vs. distância .....	78
5.9 - Detonação incompleta (5º tiro) .....	79
5.10 - Espectro de frequência .....	83
5.11 - Aplicação da hipótese linear com $A = 3,533$ . Detonação a 40 m do sensor (Figura 5.2) .....	84
5.12 - Remoção da parte refletida mediante o uso da hipótese linear .....	85
6.1 - Esquema experimental sugerido .....	90

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Características principais do alto-explosivos e propelentes .....	14
3.2 - Interface TNT (gás) - água .....	43
5.1 - Dados obtidos para pressão de pico, impulso específico e fluxo de energia .....	75

## LISTA DE SÍMBOLOS

- A - parâmetro adimensional da Expressão 3.54
- $a(t)$  - raio da esfera de gases no instante  $t$ , m
- $a_0$  - raio da esfera explosiva, m
- B - parâmetro da Equação de Estado 3.21, Pa
- $c$  - velocidade do som, m/s
- $\bar{c}$  - velocidade característica da onda de amplitude finita, m/s
- $c_0$  - velocidade do som (acústica), m/s
- $c^*$  - velocidade do som nos gases, m/s
- $\bar{c}^*$  - velocidade característica nos gases (onda de rarefação), m/s
- $c_1$  - velocidade do som na água em  $t = 0$ , m/s
- $c_1^*$  - velocidade do som nos gases em  $t = 0$ , m/s
- E - fluxo de energia da onda de choque, J/m<sup>2</sup>
- $f_m$  - frequência correspondente ao pico de energia, Hz
- G - função  $r\Omega$ , (J/kg)-m
- $G_a(t)$  - valor da função G na superfície da esfera de gases (J/kg)-m
- $G_1$  - valor da função G em  $t = 0$  na superfície da esfera de gases, (J/kg)-m
- I - impulso específico, Pa - s
- $J_0$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.25
- $$\frac{1}{\beta} \int_{\sigma_a}^{\sigma_1} \frac{d\sigma'}{\sigma'^2 (1 + \beta\sigma')^2}$$
- $J_1$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.27
- $j$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.44
- $j^*$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.45

- K - constante da Expressão 5.1 (representativa da Teoria de Kirkwood-Bethe), Pa
- $K_0(q)$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.34
- $K_1(q)$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.35
- $l_0$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.52
- $N(\tau_0)$  - parâmetro adimensional da Equação Diferencial 3.26
- n - parâmetro adimensional da Equação de Estado 3.21
- p - pressão da água, Pa
- $p_0$  - pressão de repouso da água, Pa
- $p'_0(t)$  - pressão representativa da onda direta, Pa
- $p'(t)$  - pressão registrada (Expressão 3.54), Pa
- $P_0$  - parâmetro da Expressão 3.51,  $\rho_0 \Omega_1$ , Pa
- $p_1$  - pressão em  $r = a$  e  $t = 0$ , Pa
- $P_m$  - pressão de pico, Pa
- $P_{g1}$  - pressão dos gases em  $t = 0$ , Pa
- q - parâmetro adimensional da Definição 3.30,  $R/a_0 \times (\tau_0)$
- r - coordenada radial do elemento de fluido, m
- R - coordenada radial da frente de onda, m
- $\tilde{r}$  - variável,  $(\sigma + u)/2$ , m/s
- $r'$  - coordenada escalada do fator  $\eta$
- s - entropia,  $J(^{\circ}K)^{-1}/kg$
- $\tilde{s}$  - variável,  $(\sigma - u)/2$ , m/s
- SI - sensibilidade do hidrofone, dB/Pa
- $S_1$  - nível da fonte a 1 m do hidrofone
- $T_{av}$  - temperatura média,  $^{\circ}K$
- t - tempo, s
- $t'$  - parâmetro da Expressão 3.47,  $t - t_0$ , s

- $t_0$  - instante de chegada da onda de choque na coordenada R, s  
 $TR$  - resposta de transmissão, Pa  
 $T_1$  - período entre pulsos, s  
 $U$  - velocidade de propagação da frente de onda, m/s  
 $u$  - velocidade de partícula da água, m/s  
 $u_1$  - velocidade de partícula em  $R = a_0$  e  $t = 0$ , m/s  
 $V$  - diferença de potencial (Expressão 4.1), volt  
 $V'$  - diferença de potencial do hidrofone e calibrar, volt  
 $x(\tau_0)$  - parâmetro adimensional da Definição 3.29  
 $x$  - coordenada da onda plana, m  
 $W$  - peso da carga, kg  
 $y$  - parâmetro adimensional que aparece na Equação Diferencial 3.26

$$\int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{d\sigma'}{\sigma'(1 + \beta\sigma')^3}$$

- $z$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.24,  $1 + 1/\beta\sigma$   
 $Z_0$  - profundidade, m  
 $\alpha$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.35,  $\theta_0/\theta_a$   
 $\beta$  - parâmetro das Expressões 3.22,  $(m/s)^{-1}$   
 $\Gamma_1$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.31,  $\beta\Omega_1/c_0$   
 $\gamma$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.18,  $(\partial t/\partial \tau)_R$   
 $\Delta H$  - incremento de entalpia (Expressão 3.2), J/kg  
 $\Delta S$  - incremento de entropia,  $J(^{\circ}K^{-1})/kg$   
 $\eta$  - fator de escala (Princípio da Similaridade)  
 $\theta$  - constante de tempo, s  
 $\theta_0$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.35,  $\theta_0/\theta_a$   
 $\theta_1$  - constante de tempo da Expressão 3.41 s

- $\theta_0'$  - parâmetro da Expressão 3.47,  $\gamma\theta_1$ , s
- $\theta_a(\tau_0)$  - parâmetro da Definição 3.28
- $\lambda$  - parâmetro adimensional da Expressão 3.52
- $\rho$  - massa específica, g/cm<sup>3</sup>
- $\rho_0$  - massa específica de repouso da água, g/cm<sup>3</sup>
- $\rho^*$  - massa específica dos gases na esfera de gases, g/cm<sup>3</sup>
- $\rho_e$  - massa específica do explosivo sólido, g/cm<sup>3</sup>
- $\rho_g$  - massa específica da esfera de gases, g/cm<sup>3</sup>
- $\sigma$  - função de Riemman, m/s
- $\sigma^*$  - função de Riemman nos gases, m/s
- $\sigma_1^*$  - função de Riemman nos gases em  $t = 0$  (Expressão 3.4), m/s
- $\tau$  - tempo retardado, s
- $\tau_0$  - tempo retardado correspondente à frente de onda, s
- $\phi$  - função potencial,  $r\psi$ , m<sup>3</sup>/s
- $\psi$  - função potencial da velocidade (Equação 3.9), m<sup>2</sup>/s
- $\Omega$  - entalpia cinética, J/kg
- $\Omega_1$  - entalpia cinética em  $t = 0$ , J/kg
- $\omega$  - entalpia, J/kg

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O propósito do presente trabalho é o estudo e a análise de questões ligadas à propagação submarina de ondas de explosão. Isto é feito mediante o levantamento de curvas de pressão vs. tempo e a determinação de valores da pressão de pico, do impulso específico e do fluxo de energia a várias distâncias e a obtenção de outras informações julgadas importantes, tais como a análise espectral da onda de explosão e dados relativos à sua reflexão na superfície.

A importância do estudo da propagação de ondas de choque provenientes de explosões submarinas se traduz, sob o ponto de vista militar, na avaliação da capacidade destas infligirem danos a estruturas submersas.

São inúmeras, porém, as aplicações não-militares deste estudo, tanto no setor de obras civis, como no de pesquisas. Dentre as que mais se destacam, podem-se citar: construção de portos e de estruturas marítimas, moldagem de metais, prospecção de petróleo, levantamento de dados sobre a estrutura de líquidos e suas equações de estado, etc. Devido ao fato de que as explosões submarinas geram energia numa larga faixa de frequência e num pequeno espaço de tempo, elas são excelentes fontes de ondas acústicas ou sísmicas, o que torna seu estudo de extremo valor para a pesquisa geológica marinha (Weston, 1960).

Na obtenção dos parâmetros pertinentes usou-se um tipo de carga cilíndrica de TNT moldado, de peso  $W = 0,5336 \pm 0,0102$  kg, fabricada com o apoio do Grupo de Armamento do Instituto de Pesquisas da Marinha, e as distâncias de detecção,  $R$ , em metros, foram tais que a relação  $R/W^{1/3}$  (variável especialmente importante neste problema, como será visto adiante) variou de 50 a 125 aproximadamente. Os trabalhos foram realizados na Raia Acústica daquele Instituto, em Cabo Frio.

O Capítulo 2 trata do Histórico do problema e o 3 destina-se a mostrar, de forma esquemática, as principais teorias ligadas ao problema. No Capítulo 4 são descritos os experimentos e mostrados a técnica e o instrumental usados. O Capítulo 5 trata dos Resultados, sendo estes confrontados, por meio dos gráficos levantados, com as teorias e verificados com as Leis de Escala conhecidas. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as Conclusões e Sugestões.

## CAPÍTULO 2

### HISTÓRICO

Os primeiros trabalhos experimentais nesta área datam de 1919 e são atribuídos a Hilliar (Cole, 1948). As maiores dificuldades encontradas naquela época tinham suas causas ligadas à ineficiência dos sensores então disponíveis.

Hilliar (Cole, 1948) desenvolveu um tipo de sensor mecânico que dava o valor do impulso da onda de choque durante um determinado intervalo de tempo. De posse do impulso, era possível inferir os valores médios das pressões entre dois instantes consecutivos. Conseguia-se, então, uma forma aproximada da curva de pressão vs. tempo num determinado ponto a partir da chegada da onda de choque neste ponto.

O pioneiro no uso de sensores piezo-elétricos foi Keys (1921) que, aparentemente, aproveitou a sugestão de J.J. Thomson de que a turmalina natural seria adequada para tais finalidades. Os resultados das experiências de Keys foram extensivamente usados pelos Admiralty Research Laboratory na aquisição de dados relativos a explosões submarinas. Estes, juntamente com as medidas de Hilliar, constituíam, até o início da Segunda Guerra Mundial, todo o conhecimento experimental sobre o assunto.

A primeira tentativa de analisar o fenômeno à luz das equações da Hidrodinâmica parece ter sido feita por Lamb (1923), que considerou a equação de estado dos produtos gasosos gerados pela detonação do alto-explosivo como sendo uma equação de gás perfeito e resolveu o problema com uma aproximação de água incompressível. Com a introdução de equações de estado mais realistas (Wilson and Kistiakovsky, 1941) para esses produtos, verificou-se que seus resultados não se harmonizavam com a experiência.

Até 1940, a análise mais completa era de autoria de Penney e Dasgupta (Cole, 1948) que se baseava na integração numérica das equações de Riemann. A principal desvantagem desse processo é que a então cansativa operação numérica tinha de ser repetida para cada explosivo. Penney e Dasgupta a fizeram somente para o TNT.

Em 1942 foi publicada a Teoria de Kirkwood-Bethe sobre a onda de pressão gerada por explosão submarina que é até hoje aceita e contra a qual são cotejados os resultados experimentais. Ela permite descrever a propagação de uma onda de choque esférica em termos da função entalpia cinética,  $\Omega(R,t)$ , definida por:

$$\Omega(R,t) = \omega + \frac{u^2}{2}$$

onde  $\omega$  é a entalpia;  $u$ , a velocidade de partícula;  $R$ , a coordenada radial da frente de onda, e  $t$ , o tempo.

A vantagem deste enfoque, como será visto, reside no fato de que o parâmetro da onda  $G(r,t) = r\Omega(r,t)$ , onde  $r$  é a coordenada radial do elemento de fluido, pode ser relacionado com o seu valor na superfície da esfera dos gases produzidos pela detonação num tempo  $\tau$ , dado por:

$$\tau = t - \int_{a(\tau)}^R \frac{dr}{\bar{c}(r,t)}$$

onde  $\bar{c}$  é a velocidade característica de propagação da função  $r\Omega$  e seu valor é  $\bar{c} = c + \sigma$ . Nesta expressão,  $\sigma$  é a função de Riemann, dada por:

$$\sigma = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c}{\rho} d\rho$$

A teoria prevê, a distâncias suficientemente grandes de carga (maior que vinte e cinco raios, para carga esférica), que a curva de pressão vs. tempo, num determinado ponto, decai exponencialmente após o pico inicial, além de fornecer o valor assintótico do pico de pressão ( $P_m$ ) para cada distância  $R$  da carga. Para determinados valores de  $R$ , verificou-se que  $P_m$  pode ser expresso na seguinte forma de Lei de Potência:

$$P_m = K(W^{1/3}/R)^\alpha \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  é uma constante a ser determinada. Assim, a Teoria de Kirkwood-Bethe propicia o cálculo de  $P_m$  para várias distâncias  $R$ . Estes valores são relacionados com  $W^{1/3}/R$ , podendo-se então determinar  $K$  e  $\alpha$  nas distâncias em que for possível representar  $P_m$  pela Lei de Potência 2.1.

Cálculos realizados por Kirkwood mostraram que, para o TNT,  $\alpha \approx 1,15$  e que  $K \approx 2,16 \times 10^4$  quando  $R$  é dado em pés e  $P_m$  em psi., exceto na faixa  $W^{1/3}/R < 0,02$ .

Isto, traduzido em gráficos, significa que se  $P_m$  fosse plotado numa escala logarítmica em função de  $W^{1/3}/R$ , os valores calculados estariam ao longo de uma reta de inclinação 1,16, dentro do intervalo mencionado acima. Os resultados teóricos permitiram também prever o "achatamento" da curva da pressão vs. tempo à medida que a distância aumenta. Conclui-se então que  $P_m$  não varia com  $R^{-1}$ , como ocorreria se o problema fosse tratado no domínio acústico, através da resolução da equação linear da onda (Landau, 1971). A não-linearidade se manifesta na forma  $R^{-1,16}$  e o "achatamento" acima referido aparece na variação de uma constante de tempo,  $\theta$ , com a distância, contrastando com o comportamento linear onde  $\theta$  tem um valor constante para qualquer distância (Figura 2.1).

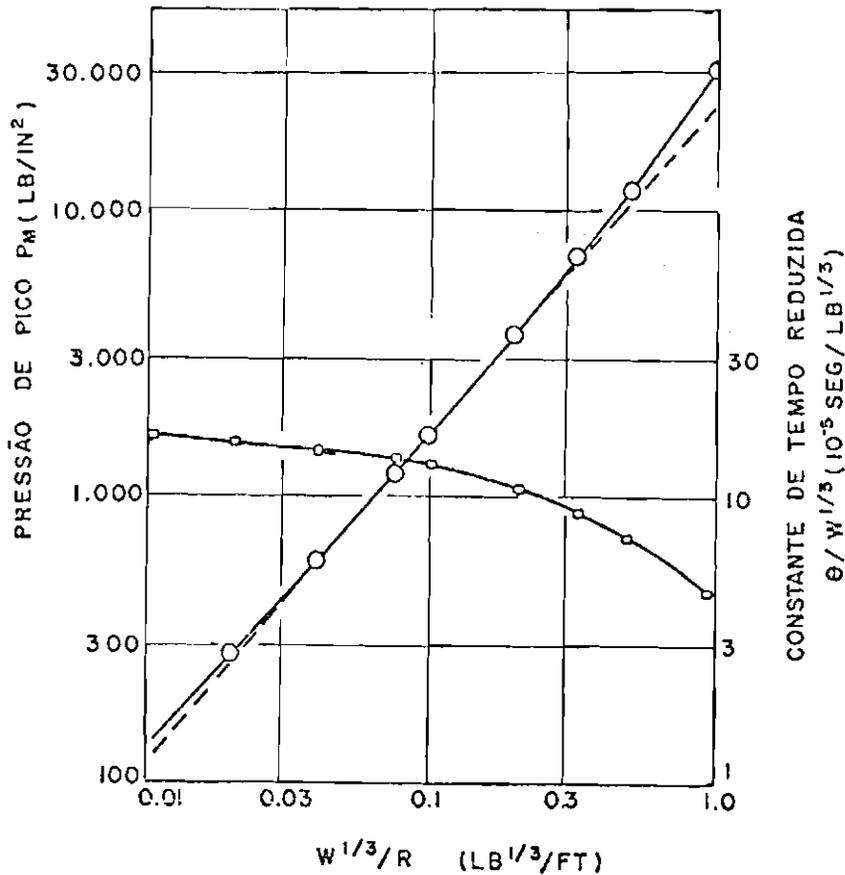


Fig. 2.1 - Variação da pressão de pico e da constante de tempo com a distância.

FONTE: Cole (1948), p. 124.

Posteriormente, Kirkwood and Brinkley Jr. (1945) apresentaram um enfoque, cujo objetivo era o cálculo de picos de pressão a distâncias menores da carga a luz de dados experimentais obtidos em distâncias superiores, com pressões mais baixas.

As três teorias citadas podem ser sintetizadas na Figura 2.2 que mostra, em escala logarítmica, o valor de  $P_m$  em função de  $R/a_0$ , onde  $a_0$  é o raio da carga esférica, além de dados experimentais obtidos com sensores piezo-elétricos. A aparente discrepância entre os três se prende a diferentes suposições concernentes à propagação da onda de detonação na massa explosiva.

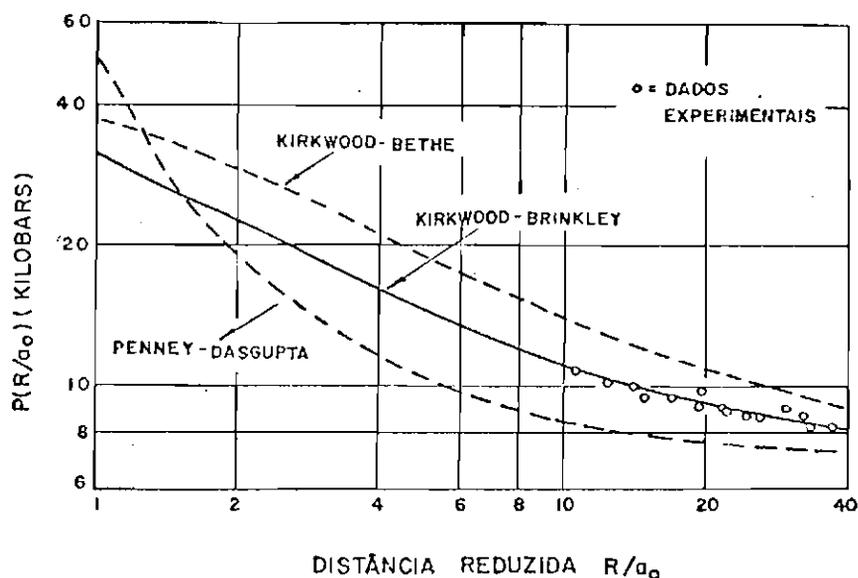


Fig. 2.2 - Comparação das teorias.

FONTE: Cole (1948), p. 140.

Vale a pena mencionar, também, o trabalho de Osborne and Taylor (1946), cujos resultados foram publicados pouco antes dos de Kirkwood. Sua principal característica é a aproximação acústica ( $u = \Delta p / \rho c_0$ ). Eles previam a variação da constante de tempo, embora, inexplicavelmente, suas experiências, realizadas no Rio Potomac, não a tivessem detetado.

Ainda hoje, como já foi dito, por sua elegância e sucesso no confronto com a experiência, a Teoria de Kirkwood-Bethe é geralmente aceita. Entretanto, ultimamente têm surgido críticas a determinados aspectos daquela teoria. Rogers (1977), depois de apontar algumas restrições, apresenta sua solução para ondas de choque submarinas baseadas nas teorias de choque fraco tal como foi sugerido por Landau (1971) e Blackstock (1965). Nessa solução são deduzidos os valores de  $P_m$  e a constante de tempo em função da distância, a partir dos valores destes parâmetros na superfície de explosivos, quando a onda de detonação aí chega (ou seja, em  $R = a_0$ ) (ver a sequência de eventos descrita no Capítulo 3).

Björnø and Levin (1976), com pequenos detonadores, apesar de reconhecerem que a Teoria de Kirkwood-Bethe ainda é usada como base para o cálculo de ondas de choque submarinas, ressaltam a necessidade de um reexame crítico, ainda inexistente, tendo em vista principalmente as aproximações e as hipóteses que a caracterizam.

Esta é, resumidamente, a situação analítica do problema na atualidade.

No campo experimental, em virtude principalmente da evolução da técnica de construção de sensores, a partir do fim da Segunda Grande Guerra, foram realizados trabalhos intensivos nos quais se destacam os nomes de R.H. Cole e A.B. Arons, patrocinados na sua maior parte pelo Woods Hole Oceanographic Institution associado ao Office of Scientific Research and Development e ao Bureau of Ordnance, U.S. Navy (Cole, 1948; Arons, 1954, etc.).

Esse imenso compêndio de dados originários dessa época também confirmam o chamado Princípio da Similaridade, aparentemente invocado pela primeira vez por Hilliar e que afirma que a pressão e outros parâmetros da onda de choque permanecem inalterados se as dimensões da carga, as distâncias e as unidades de tempo são multiplicadas pelo mesmo fator (daí a importância da relação  $W^{1/3}/R$ ).

Confirmado pela experiência, o Princípio da Similaridade é preferido pelos que trabalham na área de ondas de choque submarinas pela grande facilidade de manipulação em contraste com os resultados implícitos da Teoria de Kirkwood-Bethe. As Leis da Similaridade (também chamadas Leis de Escala) apresentam, no entanto, as desvantagens de esclarecerem pouco a física de propagação e de não serem aplicáveis quando estão presentes forças externas (ex. migração da "bolha", quando a gravidade desempenha papel importante), apesar do sucesso na previsão dos valores de pico de pressão, do impulso e do fluxo de energia do pulso inicial. É procedente a observação de que, para fins militares, os pulsos secundários gerados pela oscilação da esfera de gás são irrelevantes, dada a sua amplitude em relação ao inicial.

Arons (1954) constatou que  $P_m$ , em Pa  $\times 10^3$ , para o TNT é dada por:

$$P_m = 5.23 \times 10^4 (W^{1/3}/R)^{1,13}$$

com W em kg e R em m, inclusive para  $W^{1/3}/R > 5 \times 10^{-4}$ , além da faixa prevista por Kirkwood-Bethe (Figura 2.3). Para a constante de tempo, em segundos, verificou-se:

$$\theta = 91.9 W^{1/3} (W^{1/3}/R)^{-0,22}$$

Essas relações mostram que os efeitos de não-linearidade persistem até distâncias consideráveis da carga.

São inúmeros, a partir de então, os trabalhos apresentados e que corroboram as Leis da Escala para as explosões submarinas. Slifko (1967) realizou uma série de experiências nas quais foi possível calcular as constantes e os expoentes que aparecem na expressão:

$$Y = KZ_0^\alpha (W^{1/3}/R)^\beta \quad (2.2)$$

para três tipos de explosivos.

Na equação acima, Y representa um parâmetro qualquer da onda de choque (pressão, impulso reduzido, etc.) e  $Z_0$  é a profundidade. A partir de seus dados foi possível separar o efeito da profundidade. É evidente que se na medida de determinado parâmetro for constatado que  $\alpha = 0$ , este é independente da profundidade na faixa medida.

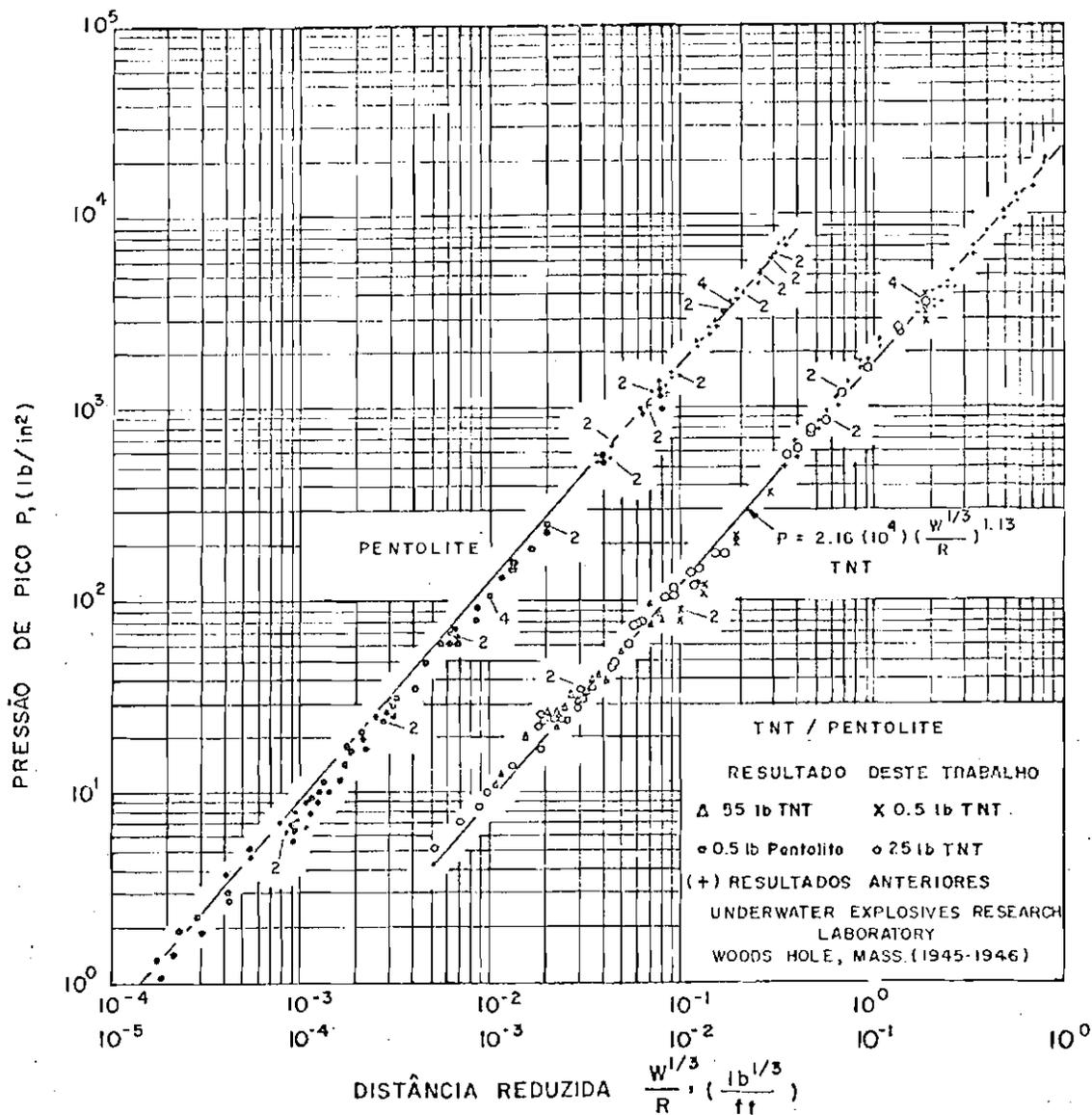


Fig. 2.3 - Resultados experimentais para o TNT e o PENTOLITE.

FONTE: Arons (1954), p. 343.

Além dos citados, quase todos realizados em grande escala, surgiram trabalhos em pequena escala, que utilizam pequenas quantidades de explosivos (Poché Jr., 1972) e até a nível de laboratório, com a utilização de tanques sob pressão (Vanzant and De Hart, 1965) embora as condições experimentais tenham sido bastante restritas. Apesar de ser geralmente aceito que tais experimentos em pequena escala são

extremamente difíceis de serem realizados, novas técnicas experimentais (principalmente referentes a sensores) estão tornando-os cada vez mais exequíveis, o que é extremamente animador, dado o baixo custo e a simplicidade deles em relação às montagens de grande escala. É digna de nota, dentro deste contexto, o trabalho de Jensen (1972) que procurou quantificar os erros cometidos, resultantes das dimensões dos sensores e de fugas de correntes nos circuitos usados.

Estudos teóricos e experimentais (Arons et alii, 1948) foram também realizados com a finalidade de estudar o movimento oscilatório da esfera de gás e os picos secundários resultantes. Korotkov et alii, 1972) apresentaram um método de cálculo dos parâmetros da onda de choque a partir de dados experimentais do movimento da esfera de gás.

No que se refere a explosões em águas rasas, o número de trabalhos apresentados ainda não permite que se tenha uma idéia clara do papel desempenhado pelas reflexões na superfície no registro de pressão vs . tempo, tendo em vista principalmente que as ondas refletidas atravessam regiões cavitadas (colapsadas) de água, o que torna difícil a formulação de uma hipótese que vise determinar a real influência dessa reflexão. Recentemente, Gaspin, 1975; Gaspin and Shuler, 1971; e Gaspin et alii (1979) realizaram trabalhos nos quais ficou patenteado que ainda não há um método geral aceitável para a remoção de tais reflexões.

## CAPÍTULO 3

### SEQUÊNCIA DE EVENTOS E TEORIAS ASSOCIADAS

O propósito deste Capítulo é dar uma visão geral do problema de propagação de ondas de pressão submarinas, através de uma descrição qualitativa da sequência de eventos que começa com a iniciação do explosivo e da apresentação de teorias associadas com suas principais conclusões.

Serão feitas considerações também sobre o Princípio da Similaridade, onde serão apontadas suas limitações na análise de problema, e abordados aspectos relativos à reflexão da onda de choque na superfície, cujo interesse é recente (Gaspin et alii, 1979), tendo em vista que as experiências serão realizadas em águas rasas.

#### 3.1 - SEQUÊNCIA DE EVENTOS

Um explosivo pode ser definido, segundo Cook (1963), como uma substância ou um dispositivo capaz de produzir, após a liberação de sua energia potencial, uma grande quantidade de gases, que criam uma zona de alta pressão nas regiões adjacentes.

Ainda segundo o mesmo autor, são três os tipos fundamentais de explosivos no que se refere à maneira pela qual a energia potencial é liberada: Mecânicos, Nucleares e Químicos.

Os explosivos químicos se classificam em detonantes ou alto-explosivos, caracterizados por altas taxas de reação e altas pressões e deflagradores ou propelentes, cujas taxas são mais baixas e as pressões desenvolvidas menores.

Essas pressões se transmitem ao longo da massa explosiva e, para os alto-explosivos, a propagação recebe o nome de onda de deto

nação, enquanto para os propelentes é designada por onda de deflagração. A Tabela 3.1 e a Figura 3.1 servem para auxiliar a caracterização dos dois tipos.

TABELA 3.1

CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DOS ALTO-EXPLOSIVOS E PROPELENTES

	ALTO-EXPLOSIVO	PROPELENTE
Iniciação	Ignição (primária) Detonador (secundária)	Ignição
Tempo de conversão do explosivo em produtos gasosos	Microssegundos	Milissegundos
Velocidade de propagação pela massa explosiva	1.600 a 9.600 m/s	530 a 1.600 m/s
Pressão desenvolvida	$34.5 \times 10^7$ a $27.6 \times 10^9$ Pa	$34.5 \times 10^7$ Pa
Propelente para canhão	Explode o canhão	Bom propelente
Demolição	Excelente	Sem efeito

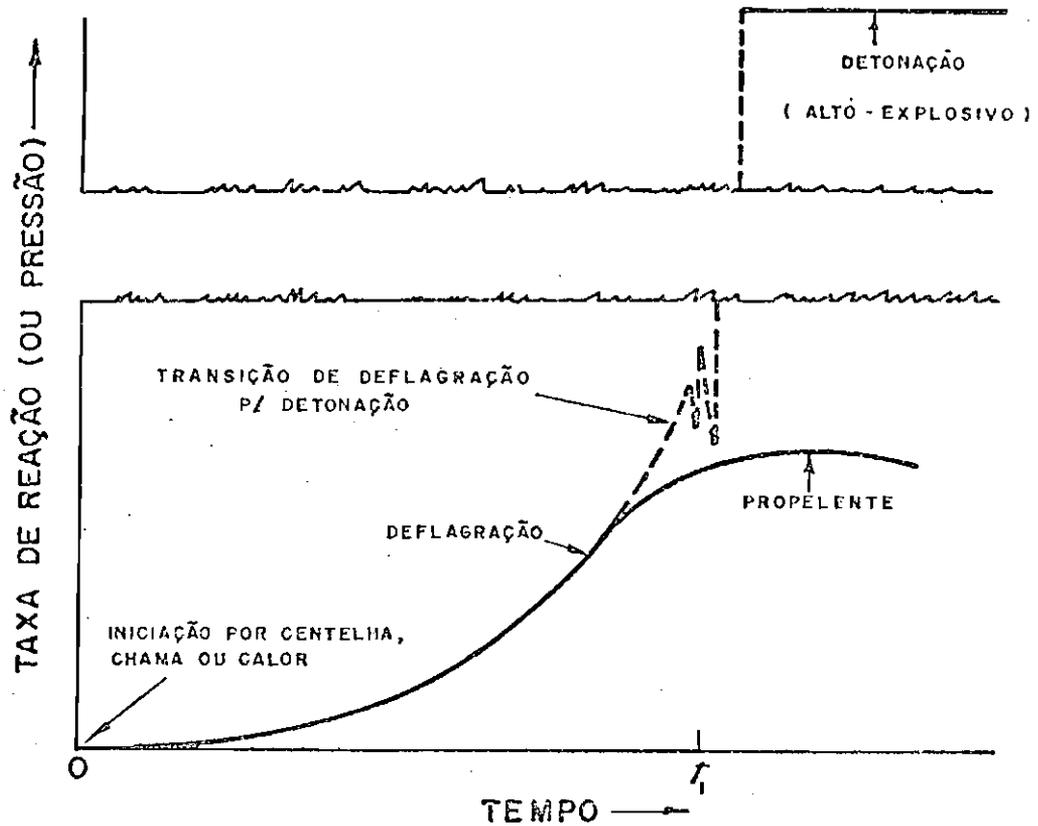


Fig. 3.1 - Deflagração vs. detonação e transição de um regime para outro.

FONTE: Cook (1963), p. 3.

Os alto-explosivos ainda se subdividem em primários e secundários. Os primeiros detonam por simples ignição através de centelha, chama, impacto, etc. Os secundários necessitam de detonadores (cujo elemento principal é um primário) e frequentemente de uma carga es-corva (intermediária) para que sejam devidamente iniciados.

Uma onda de choque distingue-se de uma onda de detonação pelo fato de que naquela não estão ocorrendo reações químicas na descontinuidade, acarretando com isto que as equações de estado não alteram sua forma em cada lado da descontinuidade.

A formação da onda de choque tem início com uma perturbação de pressão imposta a um meio. É claro que este meio terá de possuir

características de compressibilidade para que haja condições propícias à propagação. Se for perfeitamente incompressível, a velocidade de propagação será infinita, ou seja, se o meio for perturbado num determinado ponto, todos os seus outros pontos serão "avisados" instantaneamente. Há situações em que este comportamento incompressível é assumido e isto se dá quando a perturbação é lenta o suficiente para que os efeitos de propagação ondulatória possam ser consideradas desprezíveis.

Noutras situações o comportamento acústico é adequado para descrever o fenômeno da propagação. Neste, a amplitude é pequena o suficiente para que a velocidade de progresso (na água do mar vale aproximadamente 1.470 m/s) possa ser considerada independente do valor da amplitude que variará com  $r^{-1}$  no caso de ser esfericamente simétrica, sendo  $r$  a coordenada radial.

Quando a onda de detonação em um alto explosivo submarino da forma esférica, iniciado pelo centro, chega à sua superfície, toda a esfera se transforma numa região de altíssima pressão, parte da qual se transmite à água com características de propagação que não são satisfatoriamente descritas por nenhum dos comportamentos extremos mencionados acima.

Trata-se então de uma onda de amplitude finita na qual a pressão se eleva num curto intervalo de tempo, transformando-se eventualmente numa virtual descontinuidade que é a onda de choque (Beyer, 1974). A Figura 3.2, apesar de aplicar à formação de ondas no ar, ilustra o processo.

A sua velocidade de propagação depende da amplitude e, para a água do mar, é geralmente maior que o valor citado para a propagação das ondas acústicas, a qual possui características locais, onde a velocidade de partícula tem de ser levada em consideração.

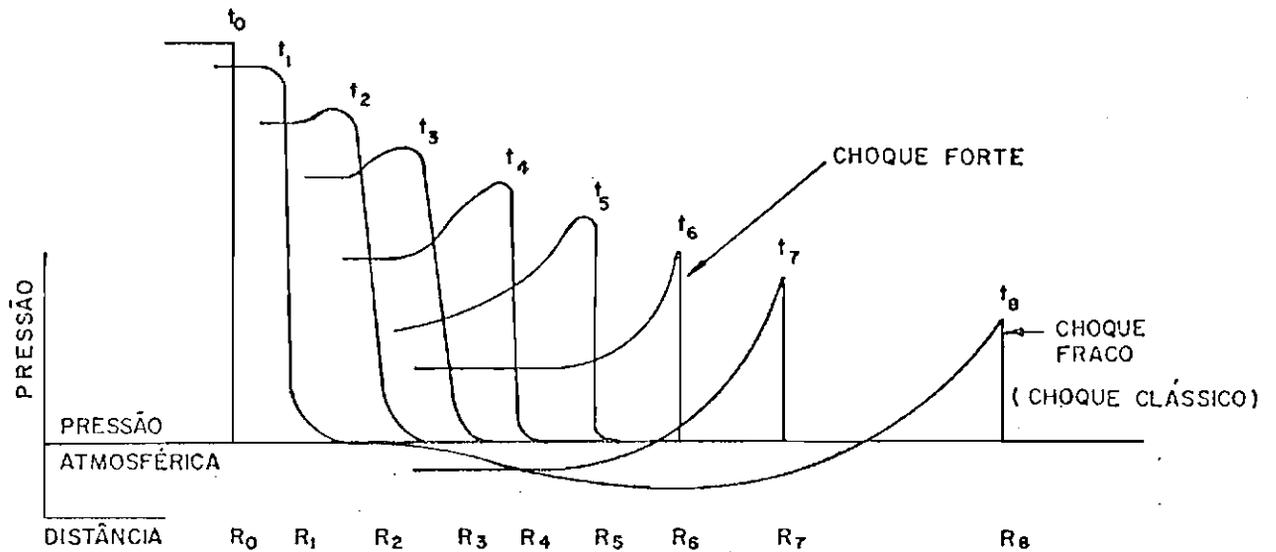


Fig. 3.2 - Ondas de pressão vs. tempo a várias distâncias.

FONTE: U.S.NAVY (s.d.), p. 2-2.

Sequencialmente, tem-se, então, para explosões submarinas: suponha-se uma massa explosiva esférica, iniciada pelo centro. Uma onda de detonação começa a se propagar pelo material explosivo a alta velocidade, deixando na sua retaguarda uma esfera de gás a alta temperatura e alta pressão, parte da qual se transmite à água ao atingir a superfície (do explosivo) (existe aqui a hipótese básica de que a pressão é uniforme e os gases estão em repouso, quando a onda de detonação atinge este ponto, o que não é verdadeiro, pois as partes mais próximas da superfície estão a pressões superiores). Esta diferença de pressão se transforma numa onda de choque esférica que se propaga.

Após a emissão da onda de choque, a pressão na esfera dos gases gerados pela detonação cai um pouco, mas ainda é maior que a pressão hidrostática, fazendo com que esta "bolha", como é chamada, se expanda por algum tempo. A expansão faz com que a pressão caia gradualmente, embora o movimento radial persista, por inércia.

Quando a pressão do gás atinge, por efeito de inércia, um valor inferior ao da pressão hidrostática local, o movimento radial para fora cessa e a esfera começa a se contrair. O movimento para dentro continua até que a compressibilidade dos gases atua no sentido de reverter ainda uma vez o movimento, gerando nova expansão, criando assim um movimento oscilatório que se superpõe ao movimento de migração para a superfície que é maior em pequenas profundidades (ver, por exemplo, Arons, 1948).

As Figuras 3.3 e 3.4 ilustram o fenômeno. Esta última refere-se à detonação de uma carga de 300 lb a 50 pés de profundidade.

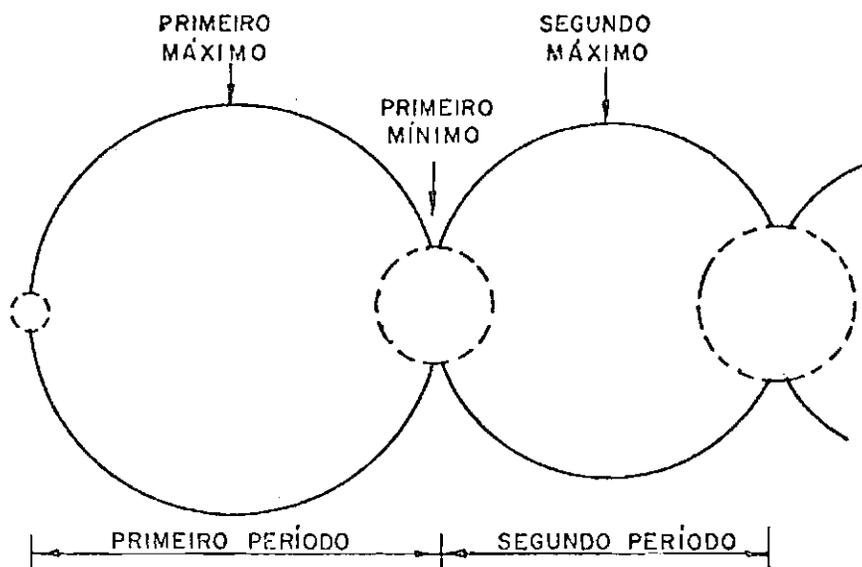


Fig. 3.3 - Pulsações da esfera de gás.

FONTE: Cole (1948), p. 8.

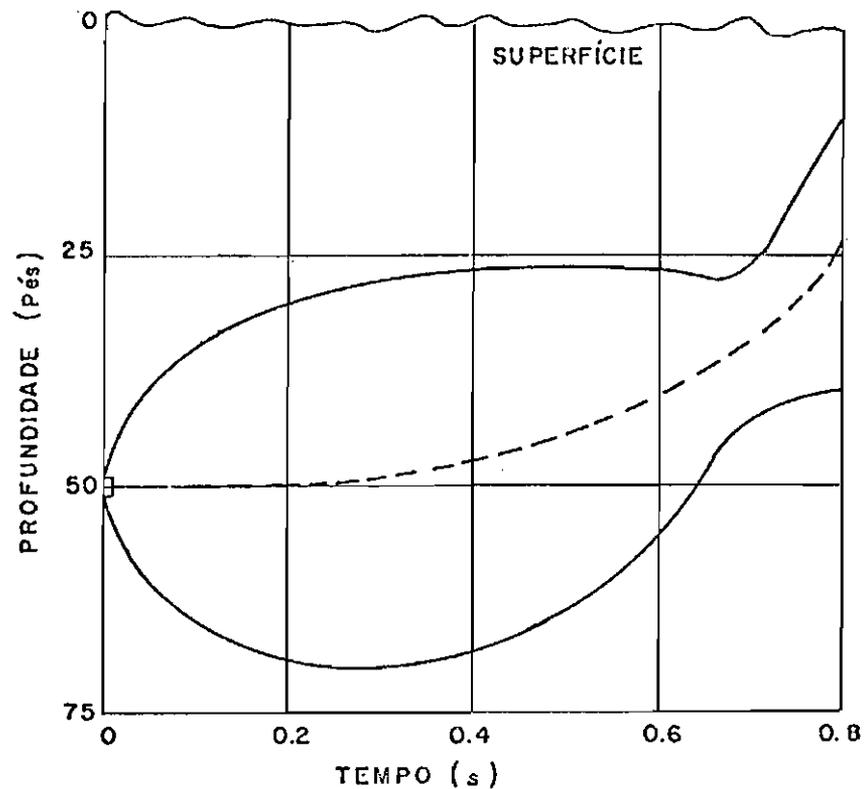


Fig. 3.4 - Migração da esfera.

FONTE: Cole (1948), p. 9.

Simultaneamente com o início da expansão da esfera de gases, uma onda de rarefação se propaga para o seu interior, fato este que será de novo mencionado quando se falar nas Condições de Contorno da teoria de Kirkwood-Bethe.

Arons (1948) formulou uma teoria relativa aos pulsos secundários à luz de dados experimentais obtidos no Woods Hole Oceanographic Institution. Essas experiências não levaram em consideração a migração da esfera de gases, pois foram realizadas a profundidade suficientemente grandes para tornar tal efeito desprezível.

### 3.2 - A TEORIA DE KIRKWOOD-BETHE

#### 3.2.1 - CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

Na superfície da esfera de gás, de raio  $a$ , são admitidas as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} p^*(a,t) &= p(a,t) \\ u^*(a,t) &= u(a,t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $p^*$ ,  $u^*$ ,  $p$  e  $u$  representam pressão e velocidade de partícula na esfera de gás (\*) e água respectivamente.

Na frente da onda vigoram as condições de Rankine-Hugoniot que traduzem as condições do meio em ambos os lados do choque. A derivação de tais relações pode ser encontrada, por exemplo em Hayes (1960). Zel'dovich and Raizer (1966) também as deduz, além de esclarecer sobre maneira seus aspectos fundamentais. São elas:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \rho_0 U u \\ u &= \sqrt{(p - p_0) \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)} \\ uU &= \Delta H + \frac{U^2}{2} \\ \Delta H &= \frac{1}{2} (p - p_0) \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho} \right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde:

$U$  = velocidade de propagação da onda de choque

$p_0$  = pressão de repouso da água

$\rho$  = massa específica da água

$\rho_0$  = massa específica de repouso

$\Delta H$  = incremento da entalpia

e ainda é suposto que  $u_0 = 0$ .

A resolução simultânea das Equações (3.2) dará, para  $t = 0$ ,

$$u_1 = F(p_1) \quad (3.3)$$

onde  $F$  é uma função,  $u_1 = u(a_0, 0)$  e  $p_1 = p(a_0, 0)$  e  $a_0$  é o raio da esfera em  $t = 0$ .

A segunda das Relações 3.1 exige que a Solução (3.3) seja usada em conjunto com outra relação, que envolve as condições na esfera em  $t = 0$ . Esta é obtida levando-se em consideração que  $p_1 = p_{g1}$ , onde  $p_{g1}$  é a pressão no gás em  $t = 0$ . Mas  $p_{g1}$  não é igual à pressão adiabática da explosão  $p_e$ . Assim, estão em jogo uma pressão  $p_e$ , uma outra  $p_1$ , igual a  $p_{g1}$ . A equalização é obtida com o aparecimento de uma onda de rarefação, que viaja para dentro dos produtos gasosos. A onda de rarefação pode ser descrita, segundo Cole (1948), como uma onda na qual a função  $r_1 = \sigma_1^* + u_1$  é nula, ou seja, a outra relação será:

$$r_1 = 0 \quad (3.4)$$

Nesta expressão,  $\sigma_1^* = \int_{p_e}^{p_g} c^* d\rho/\rho$ , onde  $c^*$  é a velocidade de propagação do som nos gases, e  $\rho_e$  e  $\rho_g$  são as massas específicas

cas do explosivo sólido e dos gases, respectivamente, em  $t = 0$ . É calculada em função de  $\rho_1$ , usando-se uma equação de estado apropriada.

A resolução simultânea das Equações 3.3 e 3.4 fornece os valores iniciais de  $u$  e  $p$ .

### 3.2.2 - AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Nos instantes imediatamente posteriores à chegada da onda de detonação na superfície da massa explosiva, uma onda simetricamente esférica, de amplitude finita, se forma, e qualquer elemento de fluido tem seu movimento descrito pelas seguintes equações, nas quais não foram consideradas as forças viscosas, proporcionais a  $\partial^2 u / \partial r^2$ :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2\left(\frac{\rho u}{r}\right) = 0 \quad (\text{continuidade}) \quad (3.5)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{momentum})$$

Onde:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}$$

Supõe-se ainda dada uma equação de estado:

$$p = f(\rho, s), \text{ onde } s \text{ é a entropia.}$$

A equação da energia é representada por:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (3.6)$$

A Relação 3.6 exprime o fato de que um elemento de fluido específico experimenta somente transformações adiabáticas.

Tendo em vista a 1ª Lei da Termodinâmica e a Relação 3.6, as Equações do Movimento 3.5 podem ser escritas:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial u}{\partial r} + 2\left(\frac{u}{r}\right) = 0$$
$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

(3.7)

onde

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad \text{e} \quad \omega = H - H_0$$

O incremento de entalpia  $\bar{e}$  é dado por:

$$\omega = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp'}{\rho} + \int_{s_0}^s T ds'$$

Neste ponto é feita a hipótese de que a entalpia dissipada é desprezível. Tal simplificação se apóia em cálculos realizados por Kirkwood, segundo os quais a variação de entalpia na água a 20°C inicialmente é de 1.750 Joules/g, para uma pressão de  $3 \times 10^5$  psia. As variações de temperatura e entropia, ainda segundo tais estimativas, são de 69°C e 0,060 cal/g°C. Assim, a entalpia dissipada é da ordem de:

$$\Delta\omega \cong T_{av} \Delta s = 330 \times 0,06 \times 4,19 = 83 \text{ Joules/g}$$

que corresponde a menos de 5% da entalpia total. Pode-se escrever então:

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{\rho}$$

assim, o fenômeno é tratado também isentropicamente.

Combinando-se esta última expressão com as Equações 3,7, tem-se:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d\omega}{\phi \tau} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\Omega) = 0$$

onde

$$\Omega = \omega + \frac{u^2}{2} \quad \text{e} \quad \omega = \Delta H$$

Sendo u puramente radial, seu rotacional será nulo, podendo-se então introduzir a função potencial:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.9)$$

Combinando-se as Equações 3.8 e 3.9, ter-se-a:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d\omega}{dt} - \Delta_r \Psi = 0 \quad (3.10)$$

$$\Omega = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

onde

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

como, porém,  $\Omega = \omega + u^2/2$ , obtêm-se:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta_r \Psi = \frac{1}{c^2} \left( \frac{du^2}{dt} - \frac{u}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} \right)$$

Fazendo-se agora  $\Psi = \phi/r$ , vem:

$$u = \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r}$$

$$\Omega = \frac{G}{r}$$

(3.11)

$$G = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{r}{c^2} \left( \frac{du^2}{dt} - \frac{u}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} \right)$$

Uma maneira alternativa de apresentar as equações do movimento é através da função de Riemann, definida por:

$$\sigma = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c}{\rho} d\rho$$

Em termos desta função, as Equações 3.11 são expressas:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial u}{r} c + 2 \frac{uc}{r} = 0$$

(3.12)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} c + \frac{\partial u}{\partial r} u = 0$$

A introdução das variáveis:

$$\tilde{r} = (\sigma + u)/2$$

$$\tilde{s} = (\sigma - u)/2$$

transforma as Equações 3.12 na seguinte forma simétrica:

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} = - \frac{uc}{r}$$

(3.13)

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial r} = - \frac{uc}{r}$$

A esta altura é interessante interpretar as Equações 3.13 para a onda plana. Neste caso:  $r = x$  e o termo divergente é nulo. Logo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} c = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} c + \frac{\partial u}{\partial x} u = 0$$

Somando-se e subtraindo-se estas equações, ter-se-ão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma + u) + (c + u) \frac{\partial}{\partial x} (u + \sigma) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma - u) + (c - u) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma - u) &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Estas equações exprimem o fato de que os elementos de ondas de amplitude finita caracterizadas por um valor específico de  $\sigma \pm u$  se movem com velocidade de:

$$\frac{dx}{dt} = c \pm u$$

### 3.2.3 - ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO

Voltando agora às equações do movimento, observem-se os comportamentos incompressível e acústico. Para o primeiro, a última das Equações 3.11 fica:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

cuja solução é:  $\phi = A(t)r + B(t)$ , onde A e B são funções de t. Logo:

$$\Omega = A'(t) + \frac{B'(t)}{r}$$

Impondo-se a condição de contorno:

$\Omega = 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , vem:

$$A'(t) = 0$$

Logo:

$$\Omega = \frac{B'(t)}{r} \quad \text{e} \quad B'(t) = G(t)$$

Assim,  $G(t) = \partial\phi/\partial t$  é uma função de  $t$  somente e, então,  $\partial\phi/\partial r = 0$ , resultando para  $u$ , segundo a primeira das Relações 3.11:

$$u = \frac{\phi(t)}{r^2}$$

dando também:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Omega) = 0$$

donde se conclui que a função  $r\Omega$  também se propaga com velocidade infinita no comportamento incompressível.

As equações que traduzem o domínio acústico são obtidas pela supressão dos termos não-lineares da última das Equações 3.11:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

sua solução é:

$$\phi = \phi(t - r/c_0)$$

que conduz a:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\Omega) - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Omega) = 0$$

ou seja: no comportamento acústico, a função  $r\Omega$  se propaga com velocidade  $c_0$ .

Chamando-se  $\bar{c}$  a velocidade de  $r\Omega$  no problema de amplitude finita, ter-se-á:

$$\bar{c} = \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{r\Omega}$$

é definida uma função  $\tau$  de  $r$  e  $t$ , tal que:

$$G_a(\tau) = G(r, t)$$

onde  $G_a(\tau)$  representa o valor de  $G$  na superfície da esfera de gás em função do parâmetro.

Admitindo-se que  $G(r, t)$  é igual a  $G(a(t'), t')$ , vem:

$$t - t' = \int_{a(\tau)}^r \frac{dr}{\bar{c}}$$

é natural supor que  $t' = \tau$ . E assim:

$$\tau = t - \int_{a(\tau)}^r \frac{dr}{\bar{c}} \quad (3.15)$$

resulta então que  $\tau$  tem dimensões de tempo e desempenha o papel de tempo retardado.

Sendo assim, de acordo com as hipóteses feitas:

$$G(r, t) = r\Omega(r, t) = a(\tau)\Omega(a(\tau), \tau) \quad (3.16)$$

O tempo necessário para a frente de onda chegar a uma distância  $R$  do centro da carga será:

$$t_0 = \int_{a_0}^R \frac{dr}{U}$$

onde  $U$  é a velocidade da frente de onda. Neste caso

$$\tau_0 = \int_{a_0}^R \frac{dr}{U} - \int_{a(\tau_0)}^R \frac{dr}{\bar{c}} \quad (3.17)$$

onde  $\tau_0$  é o tempo retardado corresponde a frente de onda.

No domínio acústico a esfera de gás tem seu raio praticamente inalterado e, como já se viu,  $\bar{c} = c_0 = U$ . Logo  $\tau_0$  é nulo. Ou seja, na aproximação acústica as condições de propagação são somente ligadas à perturbação inicial.

No caso de ondas de amplitude finita,  $\bar{c}$  é diferente de  $U$ . Sendo plana a onda,  $\bar{c} = c + u$ . A resolução das Equações 3.14 permite visualizar a deformação da onda com o tempo, devido a esta diferença de velocidades (Beyer, 1974). O resultado é esquematizado na Figura 3.5. Nela nota-se que haverá um instante no qual a matemática não é adequada para descrever o fenômeno, uma vez que uma situação como a apresentada em  $t_4$  é fisicamente irreal. Diz-se que a onda de amplitude finita se transforma numa onda de choque e a partir daí se aplicam as condições de Rankine-Hugoniot. Se a onda for esférica não se pode afirmar que  $\bar{c} = c + u$ , já que as Equações 3.13 não são homogêneas. Supor-se-á no entanto que  $\bar{c} = c + \sigma$ . A ordem de grandeza dos erros cometidos ao assumir que  $u = \sigma$  é analisado no trabalho original de Kirkwood-Bethe. Tal análise não será aqui reproduzida tendo em vista sua extensão.

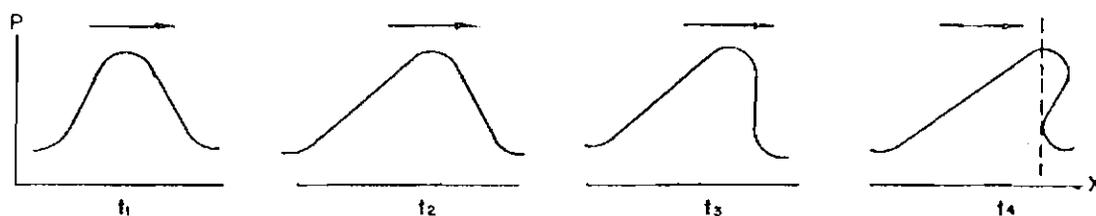


Fig. 3.5 - Variação da forma, com o tempo, de uma onda de amplitude finita.

Se  $\bar{c} > U$  (é o que ocorre conforme será verificado posteriormente), então, pela observação da Expressão 3.17, conclui-se que  $\tau_0$  será sempre positivo e tenderá a aumentar à medida que a onda de choque progride. Em outras palavras: o valor de  $G$  na frente de onda é determinado por  $G_a(\tau_0)$  em instantes  $\tau_0$  cada vez mais posteriores. Tal conclusão tem uma importância muito grande, uma vez que a frente de onda ligada a um valor de  $G_a(\tau_0)$  é destruída para dar lugar progressivamente a outra frente correspondente a um  $\tau_0$  posterior. Esta característica pode ser interpretada pelo fato de que a dissipação está sendo levada em conta pela teoria, já que  $G_a(t)$  diminui o valor com o tempo, como será assumido adiante.

Como a onda cuja frente está em  $R$  foi formada na esfera de gás em  $\tau_0$ , um ponto de coordenada  $r$  atrás do choque será ligado a esfera num instante posterior  $\tau$ . Pode-se supor, para intervalos não muito grandes:

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{\gamma} (t - t_0) \quad (3.18)$$

onde:

$$\frac{1}{\gamma} = \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)_R$$

Diferenciando-se a Expressão 3.15, obtêm-se para  $\gamma$

$$\gamma = 1 - \frac{u_a(\tau)}{\bar{c}_a(\tau)} - \int_{a(\tau)}^R \frac{1}{\bar{c}^2} \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} \right)_{r'} dr' \quad (3.19)$$

Uma análise da Expressão 3.19, cuja dedução se encontra no Apêndice A, mostra que  $\gamma$  assume, para valores suficientemente grandes de  $r$ , valores maiores que 1, já que  $\bar{c}$  diminui com  $\tau$ , se  $G_a(t)$  de cresce com o tempo. Logo, a teoria prevê um "achatamento" para a curva de pressão, para cada  $R$ .

A distâncias  $R$  grandes o suficiente para que  $p/\rho \gg u^2/2$  e  $\Omega = p/\rho_0$ , ter-se-á, para a pressão em pontos na retaguarda da onda de choque:

$$p = \left( \frac{a_0}{R} \right) P(\tau) \quad (3.20)$$

onde  $P(\tau) = \rho_0 (a(\tau)/a) \Omega(a, t)$ , com  $\tau$  dado pela Expressão 3.18.

A equação de estado para a água a ser usada é a de Tait modificada:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{n(B + p)} \quad (3.21)$$

onde os parâmetros  $n$  e  $B$  são funções da temperatura e  $s$  é a entropia. A adiabática da água que passa pelo ponto onde a pressão vale 1 atm e a temperatura 20°C é representada pela Equação 3.21 com  $n=7$  e  $B = \rho_0 c_0^2/n$ .

A Equação 3.21 é usada preferencialmente à equação de Tait original ao longo da isoterma:

$$\frac{\rho_0}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{n(B + p)}$$

em virtude da Equação 3.21 ser mais adequada para altas pressões, segundo Kirkwood and Bethe (1942).

Lembrando-se que foi admitido que  $\sigma = u$  e através do uso da Equação 3.21, têm-se:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= c_0(1 + 2\beta\sigma) \\ \Omega &= c_0(1 + \beta\sigma) \\ \omega &= c_0(1 + \beta\sigma) - \sigma^2/2 \\ U &= c_0(1 + \beta\sigma) \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde  $\beta = (n + 1)/4c_0$ . Para a dedução da última das Relações 3.22 foi empregada a segunda das relações de Rankine-Hugoniot, 3.2. A primeira e a última das Equações 3.22 mostram que  $\bar{c} > U$ . Por outro lado, em virtude da Relação 3.16:

$$G_a(\tau) = c_0 r \sigma (1 + \beta\sigma) \tag{3.23}$$

Tirando-se o valor de  $dr$  da Expressão 3.23 e levando-o na Expressão 3.19 obtêm-se, para  $\gamma$ :

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\beta c_0} \frac{1}{z_a + 1} - \frac{2}{c_0^2} G'_a(\tau_0) \left\{ \ln \frac{z}{z_a} \frac{4(z - z_a)}{(z + 1)(z_a + 1)} \right\} \tag{3.24}$$

onde:

$$z = 1 + 1/\beta\sigma, \quad z_a = 1 + 1/\beta\sigma_a, \quad G'_a(\tau_0) = dG_a/d\tau_0$$

Com a expressão de  $dr$  tirada da Expressão 3.23, e as de  $\bar{c}$  e  $U$  tiradas das Relações 3.22 tem-se, depois de introduzi-las na Expressão 3.17, para  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{\beta}{c_0^2} \int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{2G_a(\tau_0) - G_a(\tau'_0)}{\sigma'(1 + \beta\sigma')^3} d\sigma' + \frac{G_a(\tau_0) - G_1}{\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)^2} + J(\tau_0)G_a(\tau_0) \quad (3.25)$$

onde:

$$\tau'_0 = \tau_0(\sigma'), \quad J_0 = \frac{1}{\beta} \int_{\sigma_a}^{\sigma_1} \frac{d\sigma'}{\sigma^2(1 + \beta\sigma')^2}$$

A combinação da função  $y$ , definida por:

$$y = \int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{d\sigma'}{\sigma'(1 + \beta\sigma')^3}$$

com a Relação 3.25 e sua diferenciação em relação a  $\tau_0$  conduz à seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{d\tau_0} + 2 \frac{G'_a(\tau_0)}{G_a(\tau_0)} y = \frac{c_0^2}{\beta} \frac{1 + N'(\tau_0)}{G_a(\tau_0)} \quad (3.26)$$

onde:

$$N'(\tau_0) = \frac{dN(\tau_0)}{d\tau_0},$$

$$N(\tau_0) = \frac{1}{c_0^2} \left[ \frac{G_1 - G_a}{\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)^2} - G_a J_0 \right] e$$

$$J_0 = \frac{1}{\beta} \int_{\sigma_a}^{\sigma_1} \frac{d\sigma'}{\sigma_1'(1 + \beta\sigma_1')} = z_a - z_1 - \left( \frac{1}{z_a} - \frac{1}{z_1} \right) - 2 \ln \frac{z_a}{z_1}$$

A solução da Equação 3.26 sujeita às condições de contorno no  $y = 0$  para  $\tau_0 = 0$  é:

$$y = \frac{c_0^2}{\beta G_a^2} \int_0^{\tau_0} G_a(\tau) dt + \frac{1}{2\beta} \frac{G_1^2 - G_a^2}{G_a^2} \frac{1}{\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)^2} - \frac{J_0}{2} -$$

$$a_0 c_0 G_0 J_1 / 2\beta G_a \tag{3.27}$$

onde:

$$J_1 = (c_0/\Omega_1) \int_{\sigma_a}^{\sigma_1} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 d\sigma_a$$

A Relação 3.27 permite obter  $\tau_0$  em função de  $R$ , pois  $y$  depende somente de  $\sigma$  e este é ligado a  $R$  pela Expressão 3.23. É evidente que para esta derivação é necessário que seja conhecida  $G_a(t)$ . As deduções das Relações 3.24, 3.26 e 3.27 podem ser encontradas no Apêndice A.

Serão agora introduzidos alguns parâmetros com o intuito de tornar tais relações mais explícitas. Seja:

$$\theta_a(\tau_0) = \frac{1}{G_1 - G_a(\tau_0)} \int_0^{\tau_0} G_a(t) dt, \quad (3.28)$$

$$x(\tau_0) = \frac{G_a(\tau_0)}{G_1}, \quad e \quad (3.29)$$

$$xq = R/a_0 \quad (3.30)$$

Os parâmetros das Definições 3.28 e 3.29 são chamados tempo característico,  $\theta_a(\tau_0)$ , e fator de dissipação,  $x(\tau_0)$ , respectivamente. Verifica-se que se o problema fosse tratado acusticamente  $x = 1$  e  $\theta_a(\tau_0) = \infty$ . O significado físico deste fato pode ser associado à ausência de dissipação e à independência entre o fenômeno acústico e as condições na esfera de gás.

Combinando-se a Expressão 3.23 com a Definição 3.29 e levando-se em consideração que  $z = 1 + 1/\beta\sigma$ , vem:

$$z = 1 + \frac{q}{2\Gamma_1} + \left[ \frac{q}{\Gamma_1} + \left( \frac{q}{2\Gamma_1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.31)$$

onde:

$$\Gamma_1 = \frac{\beta\Omega_1}{c_0}$$

Como, porém:

$$y = \int_{\sigma}^{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\sigma'(1 + \beta\sigma')^3} = \ln \frac{z}{z_1} + 2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z_1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_1^2} \right) \quad (3.32)$$

verifica-se então que  $y$  é função de  $q$  somente.

Como ilustração, constata-se que para R muito grande (que acarreta q muito grande) ter-se-á:

$$z \cong \frac{q}{\Gamma_1}$$

e neste caso:

$$y = \ln q - 2 \ln \frac{z}{z_1 - 1} - \frac{2}{z_1} + \frac{1}{2z_1^2}$$

em virtude da segunda das Equações 3.22.

Após a introdução das Definições 3.28, 3.29 e 3.30 na Relação 3.27, ter-se-á a equação:

$$K_0(q) x^2 + x - K_1 = 0 \quad (3.33)$$

onde:

$$K_0(q) = \Gamma_1 \left\{ y + \frac{(z_1 - 1)}{2z_1^2} + \frac{J_0}{2\beta} \right\} = \frac{\alpha(z_1 - 1)}{2z_1} + \Gamma_1 [y + J_0/2\beta] \quad (3.34)$$

$$K_1 = 1 - \frac{\Gamma_1 \alpha (z_1 - 1)^3}{2z_1^2} - \frac{\alpha J_1}{2} = 1 + \frac{\alpha(z_1 - 1)}{2z_1} - \frac{\alpha J_1}{2} \quad (3.35)$$

e:

$$\alpha = \theta_0 / \theta_a$$

$$\theta_0 = \frac{\alpha_0}{c_0}$$

A solução da Equação 3.35 é:

$$x(\tau_0) = \frac{-1 + \sqrt{4\alpha K_1 K_0(q) + 1}}{2\alpha K_0(q)} \quad (3.36)$$

Como o interesse maior reside na obtenção de  $\tau_0$  em função de  $R$  e como a Relação 3.36 é transcendental em  $\tau_0$ , porque  $x, \alpha$  (através de  $\theta_a$ ),  $K_1$  e  $K_0$  (através das integrais  $J_1$  e  $J_0$ ) dependem de  $\tau_0$ , vê-se que a solução da Equação 3.36 só pode ser obtida por métodos gráficos ou aproximações sucessivas. Se, no entanto, supõe-se  $J_1$  e  $J_0$  desprezíveis em relação aos outros termos que aparecem nas Relações 3.34 e 3.35 (Kirkwood and Bethe, 1942) e se se emprega, para  $G$ , a aproximação de pico:

$$G_a(t) = G_1 e^{-t/\theta_1} \quad (3.37)$$

vê-se que  $\alpha$  (e conseqüentemente  $\theta_a$ , já que  $\theta_a = \theta_1$ ) perde a dependência em  $\tau_0$  e o valor de  $x$  obtido na Solução 3.36 é puramente função de  $q$ . Se cada valor de  $x$  for multiplicado por  $q$ , obter-se-á  $xq = (R/a_0)$  possibilitando então a elaboração de um gráfico  $x$  (fator de dissipação) versus  $R/a_0$ .

Combinando-se as Expressões 3.37 e 3.24 ter-se-á:

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\beta C_0} \frac{1}{z_a + 1} + 2\alpha x \Gamma_1 \left[ \ln \frac{z}{z_a} - \frac{4(z - z_a)}{(z + 1)(z_a - 1)} \right] \quad (3.38)$$

Vê-se assim que se a Expressão 3.37 for aceita, a teoria permite calcular os vários parâmetros da onda de choque a uma distância  $R$ , pois o conhecimento de  $x$  permite determinar a relação  $G_a(\tau_0)/G_1$  e, conseqüentemente o valor de  $G(t_0)$ . Por outro lado, de posse do valor de  $x$  e levando-se em consideração que:

$$z_a = 1 + q_a/2r_1 + [q_a/r_1 + (q_a/2r_1)^2]^{1/2} \quad (3.39)$$

onde:

$$q_a = a(\tau)/a_0x$$

pode-se, por meio da Expressão 3.38, prever a deformação da curva de pressão ao longo do tempo.

O valor de  $\theta_1$  na Expressão 3.37 pode ser obtido através das condições iniciais na esfera de gás e na água (ou seja: em função de  $u_1, c_1, u_1^*, c_1^*$ , etc.), como é mostrado a seguir.

A equação da continuidade (primeira das Equações 3.3) pode ser escrita para a água e para a esfera de gases, na interface:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{2u}{a} \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{\rho^* c^{*2}} \frac{dp}{dt} = - \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}^* - \frac{2u}{a}$$

Os termos  $dp/dt$  e  $2u/a$  nas Equações 3.40 são os mesmos na esfera de gases e na água, tendo em vista as Condições de contorno 3.1 e o fato de que  $dp/dt$  é calculada, acompanhando-se a interface. No entanto as derivações  $\partial u/\partial r$  não são necessariamente iguais. Veja-se como eliminá-las das Equações 3.40:

Para a função  $G$ , pode-se escrever:

$$\frac{dG}{dt} = \Omega \left( \frac{dr}{dt} \right)_G + \frac{r}{\rho} \left( \frac{dp}{dt} \right)_G + r u \left( \frac{du}{dt} \right)_G = 0$$

ou:

$$\bar{c}\bar{\Omega} + \frac{r}{\rho} \left(\frac{dp}{dt}\right)_G + ru \left(\frac{du}{dt}\right)_G = 0$$

Calculando-se os valores de  $(dp/dt)_G$  e  $(du/dt)_G$ , com o auxílio da segunda das Equações 3.7, conclui-se:

$$\frac{\bar{\Omega}\bar{c}}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{du}{dt} (2u - \bar{c}) + u(\bar{c} - u) \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (3.41)$$

A substituição de  $(\partial u/\partial r)$ , tirada das Equações 3.40, na Expressão 3.41 dá, em  $r = a$ :

$$\frac{1}{\rho\bar{c}} \frac{dp}{dt} = \frac{c}{a} \left[ \frac{(3u^2/2 - \omega)\bar{c} - 3u}{c^2 - u(\bar{c} - u)} \right] - \frac{du}{dt} \left[ \frac{(2u - \bar{c})c}{c^2 - u(\bar{c} - u)} \right] \quad (3.42)$$

Por raciocínio inteiramente análogo, tem-se em  $r = a$ , do lado da esfera de gás:

$$\frac{1}{\rho^*c^*} \frac{dp}{dt} = - \frac{c^*}{a} \left[ \frac{(3u^2/2 - \omega^*) + 2u^3}{\bar{c}^{*2} - u(c^* - u)} \right] - \frac{du}{dt} \left[ \frac{(2u + \bar{c}^*)c^*}{c^{*2} - u(c^* + u)} \right] \quad (3.43)$$

estando assim eliminados os fatores  $\partial u/\partial r$ .

Após a substituição de  $\bar{c}$  por  $c + u$  e  $\bar{c}^*$  por  $c^* - u$  nas Expressões 3.42 e 3.43, obtêm-se em  $r = a$ :

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\rho\rho^*cc^*u(j^*c + jc)}{a(\rho c + \rho^*c^*)} \quad (3.44)$$

$$\frac{du}{dt} = - \frac{j\rho c - j^*\rho^*c^{*2}}{\rho c + \rho^*c^*} \frac{u}{a} \quad (3.45)$$

onde:

$$j = \frac{1}{uc} \left[ \frac{c+u}{c-u} \omega + \frac{u^3 + 3cu^2}{2(c-u)} \right]$$

$$j^* = - \frac{1}{uc^*} \left[ \frac{c^*-u}{c^*+u} \omega^* - \frac{u^3 + 3u^2c^*}{2(c^*+u)} \right]$$

Em virtude de  $c \gg u$ ,  $c^* \gg u$ ,  $\omega > 0$  e  $\omega^* = \int c^{*2} d\rho/\rho < 0$ , conclui-se que  $j$  e  $j^*$  são positivos e  $dp/dt$  negativo, o que justifica parcialmente o fato de se usar para  $p$  e conseqüentemente para  $\omega$  uma aproximação semelhante à Expressão 3.37, na interface. Logo, com:

$$\omega_a(t) = \omega_1 e^{-t/\theta_1},$$

tem-se:

$$\frac{1}{\theta_1} = - \frac{1}{\omega_1 \rho_1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dp}{dt}$$

Utilizando-se a Expressão 3.44 chega-se a:

$$\theta_1 = \frac{a_1 \omega_1 (\rho_1 c_1 + \rho_1^* c_1^*)}{\rho_1 c_1 c_1^* (j_1 c_1 + j_1^* c_1^*) u_1} \quad (3.46)$$

onde  $j_1$  e  $j_1^*$  são os valores de  $j$  e  $j^*$  em  $t = 0$ . Obtêm-se assim o valor de  $\theta_1$ , em função de quantidades iniciais na interface esfera de gás-água.

Combinando-se as Relações 3.18, 3.29 e 3.37 tem-se, para a entalpia cinética na coordenada R.

$$\Omega(R,t) = \frac{a_0 x}{R} \Omega_1 e^{-t'/\theta'} \quad (3.47)$$

onde  $t' = t - t_0$ ,  $t_0$  sendo o instante da chegada da onda de choque em R e  $\theta' = \gamma \theta_1$ , onde  $\gamma$  é dado pela Expressão 3.38.

Experimentalmente verifica-se que, para distâncias tais que  $R/a_0 > 25$ , a aproximação acústica é satisfatória e neste caso  $\Omega = p/\rho_0$ . Introduzindo-se este valor na Expressão 3.47 tem-se, para a curva pressão vs. tempo em R:

$$p = \frac{a_0 x}{R} \Omega_1 \rho_0 e^{-t'/\theta'} \quad (3.48)$$

É importante chamar a atenção para o fato de que apesar de na Expressão 3.48 ter sido usada a aproximação acústica para  $\Omega$ , os efeitos de dissipação estão sendo considerados através da presença do parâmetro  $x$ . É claro que se o problema recebesse um tratamento puramente acústico, a curva de pressão seria dada pela Expressão 3.48 com  $x=1$ . Por sua vez,  $x$  é calculado usando-se as Relações 3.33 e 3.35 com  $J_0$  e  $J_1$  desprezíveis e  $\theta_1$  dado pela Expressão 3.46.

A Tabela 3.2 dá valores iniciais dos vários parâmetros referenciados no texto para a interface TNT - água (Kirkwood and Bethe, 1942).

TABELA 3.2

INTERFACE TNT (GÁS) - ÁGUA

$p_1 =$	36 kbar	$\Omega_1 =$	$3,29 \times 10$ m/s
$\sigma_1 =$	968 m/s	$P_0 =$	32,8 kilobars
$u_1 =$	1070 m/s	$c_1^* =$	3044 m/s
$c_0 =$	1470 m/s	$\rho_1 =$	1,10 g/cm <sup>3</sup>
$c_1 =$	4439 m/s	$j_1^* =$	0,98
$\rho_1 =$	1,48 g/cm <sup>3</sup>		
$j_1 =$	0,52		

FORNTE: Kirkwood and Bethe (1942), p. 28

As expressões assintóticas ( $R/a_0 \gg 1$ ) para  $x$  e  $\gamma$  são da das por:

$$x = \left( \frac{\rho_0 c_0}{\beta} \right)^{1/2} \left( \alpha \rho_0 \Omega \ln \frac{R}{a_0} \right)^{-1/2} \quad (3.49)$$

$$\gamma = \frac{-2\beta G'_a(\tau)}{c_0^2} \ln(R/a_0) \quad (3.50)$$

resultando no seguinte valor, para a pressão de pico em função da distância:

$$P_m = \left( \frac{a_0}{R} \right) \left( \frac{\rho_0 c_0}{\beta} \right)^{1/2} \left[ \frac{P_0/\alpha}{\ln(R/a_0)} \right]^{1/2} \quad (3.51)$$

com

$$P_0 = \rho_0 \Omega_1$$

que toma a seguinte forma para os casos não-dissipativos: ( $x = 1$ )

$$P_m = \frac{P_0 a_0}{R}$$

variando inversamente com a distância, como era de se esperar, caso o problema recebesse tratamento acústico puro.

As Relações 3.49 e 3.50 são derivadas no Apêndice A.

O impulso específico da onda  $\bar{e}$  é definido por:

$$I = \int_{t_0}^{t_m} p(R, t') dt'$$

onde  $t_0$  é o instante de chegada da onda em  $R$ , e  $t_m$  é um tempo longo em relação à duração do choque (normalmente a duração da fase positiva).

Por outro lado, o fluxo de energia (energia por unidade de área) é calculado mediante a integral:

$$E = \frac{1}{\rho_0 c_0} \int_{t_0}^{t_m} p^2 dt$$

Essas são as características mais gerais da teoria de Kirkwood-Bethe.

Quanto à teoria de choque fraco, não serão apresentados detalhes de desenvolvimento, os quais poderão ser vistos com todos os pormenores no trabalho de Rogers (1977). A expressão da pressão de  $\bar{p}_m$  obtida é:

$$P_m(R) = \frac{P_0 \{ [1 + 2(a_0/l_0) \ln(R/a_0)]^{1/2} - 1 \}}{(R/l_0) \ln(R/a_0)} \quad (3.52)$$

onde:

$$l_0 = \frac{c_0^2 \theta_0'}{\lambda u_0}$$

$\theta_0'$  = constante de tempo para a curva  $p(a_0, t)$

$$\lambda = \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} \frac{\rho_0}{c_0}$$

$$u_0 = u(a_0, 0)$$

$c_0$  = velocidade do som (acústica)

$$\rho_0 = \rho(a_0, 0)$$

Observando-se a Expressão 3.52, pode-se concluir:

- a)  $P_m$  é dado como função explícita de  $R$ , uma vez que se conheça  $p(a_0, t)$ .
- b) No limite  $R \rightarrow \infty$ ,  $P_m(R)$  se torna proporcional a  $(R/a_0)^{-1} \ln(R/a_0)^{-1/2}$  harmonizando-se então com os resultados de Kirkwood e Bethe.

### 3.3 - O PRINCÍPIO DA SIMILARIDADE

O fato de as ondas de amplitude finita serem governadas basicamente pelas equações do movimento:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{c^2}{\rho} \text{grad } \rho \quad (3.53)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \text{div } \vec{u}$$

leva à seguinte questão: qual será a forma das equações diferenciais se as coordenadas espaciais ( $\vec{r}$ ) e temporais ( $t$ ) forem multiplicadas pelo mesmo fator de escala  $\eta$ ? Ou seja:

$$\vec{r}' = \eta \vec{r} \quad \text{e} \quad t' = \eta t$$

Neste caso:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt'} \eta$$

$$\text{grad } \rho = (\text{grad}' \rho) \eta$$

$$\text{div } \vec{u} = (\text{div}' \vec{u}) \eta$$

onde  $\text{grad}'$  e  $\text{div}'$  designam diferenciações em relação às coordenadas  $r'$  e  $t'$ .

Levando-se estas relações nas Equações 3.53, ter-se-á:

$$\frac{du(\vec{r}', t')}{dt'} = \frac{c^2}{\rho} \text{grad}' (\vec{r}', t')$$

$$\frac{d\rho(\vec{r}', t')}{dt'} = \rho(\vec{r}', t') \operatorname{div} \vec{u}(\vec{r}', t')$$

o que mostra que as equações do movimento não se alteram com a introdução do fator de escala  $\eta$ . Verifica-se, por outro lado, que as condições de Rankine-Hugoniot também não se alteram com a introdução do fator de escala. Assim, se as considerações acima são válidas para um determinado  $(\vec{r}_1, t_1)$ , serão válidas para qualquer outro valor de  $\vec{r}$  e  $t$ .

Suponha-se então que seja realizado um experimento no qual foi medido a pressão proveniente de uma dada carga de um determinado  $\vec{r}$  e num instante  $t$ . Se as dimensões da carga forem escaladas do fator  $\eta\vec{r}$  e a duração será a mesma em unidades de tempo  $\eta$  vezes maior. Exemplificando: a pressão da onda de choque medida a 10 m de uma carga cuja dimensão de 10 cm é a mesma de uma carga com dimensão de 20 cm a uma distância de 20 m. A duração também será a mesma numa unidade de tempo duas vezes maior. As idéias acima exprimem o chamado Princípio da Similaridade. Para que este seja satisfeito, a pressão em  $\vec{r}$  e  $t$  deve ser expressa em função de  $r/W^{1/3}$  e  $t/W^{1/3}$ , onde  $W$  é o peso da carga e  $W^{1/3}$  é proporcional à sua dimensão linear. Esta afirmativa é verdadeira se se levar em consideração que o fator  $\eta$  aplicado em  $W^{1/3}$ , em  $r$  e em  $t$  dará como resultado valores idênticos de pressão. Como  $P_m$  não depende de  $t$ , para cada  $R$ , conclui-se:

$$P_m = f\left(\frac{R}{R^{1/3}}\right)$$

onde uma função  $f$  é determinada experimentalmente.

Por outro lado, o impulso específico é definido, conforme já foi visto, por:

$$I(\vec{r}, t') = \int_{t_0}^{t'} P(\vec{r}, t) dt$$

onde  $t$  é o tempo até onde é feita a integração (normalmente a duração da fase positiva) e  $t_0$  é o instante da chegada da onda de choque.

Assim, o impulso de uma onda cuja posição do pico é  $R$  em  $t = t_0$  é dado por:

$$I(R, t') = \int_{t_0}^{t'} P(R, t) dt$$

Suponha-se que  $t'$  seja proporcional ao fator de escala  $\eta$ . Logo  $t' = h\eta$ , onde  $h$  é uma função de  $R/W^{1/3}$  somente. O significado desta suposição é que  $t'$  aumenta  $\eta$  vezes na coordenada  $\eta R$ , quando a dimensão linear da carga é multiplicada por  $\eta$ . Assim, como  $p$  depende de  $r$  e  $t$  através  $R/W^{1/3}$  e  $t/W^{1/3}$ , vem:

$$I(R, t') = W^{1/3} \int_{t_0}^{h(R/W^{1/3})\eta} p\left(\frac{R}{W^{1/3}}\right) d\left(\frac{t}{W^{1/3}}\right)$$

Donde finalmente

$$I(R, t') = W^{1/3} g\left(\frac{R}{W^{1/3}}, h\left(\frac{R}{W^{1/3}}\right)\right)$$

onde  $g$  deve ser determinada experimentalmente.

Identicamente, o fluxo de energia é da forma

$$E = W^{1/3} g'\left(\frac{R}{W^{1/3}}, h\left(\frac{R}{W^{1/3}}\right)\right)$$

onde  $g'$  também pode ser determinada pela experiência.

Arons (1954) obteve as seguintes expressões para  $P_m$ ,  $I$  e  $E$ :

$$P_m = 5.23 \times 10^4 (W^{1/3}/R)^{1.13} \quad (\text{Pa} \times 10^3)$$

$$I = 6.68 W^{1/3} (W^{1/3}/R)^{0.94} \quad (\text{Pa} \cdot \text{s} \times 10^3)$$

$$E = (9.62 \times 10^3) W^{1/3} (W^{1/3}/R)^{1.08} \quad (\text{J/m}^2 \times 10)$$

De acordo com Cole (1948), os seguintes fatores limitam o emprego do Princípio da Similaridade:

- a) Manutenção, nas equações do movimento, do efeito devido à viscosidade, com termos do tipo:  $\mu \partial^2 u / \partial r^2$ .
- b) Necessidade de que sejam consideradas as reações químicas que ocorrem após a passagem da onda de detonação. Normalmente, as composições após a passagem da onda são consideradas em equilíbrio químico ou "congelados" numa relação fixa.
- c) Atuação de forças estranhas ao processo explosivo propriamente dito e que se formam nos estágios mais avançados do fenômeno. É o caso, por exemplo, da atuação da gravidade no movimento da esfera de gases.

Outros tipos de Leis da Escala que aqui não serão focalizadas e que permitem a análise do movimento da esfera sob a ação da gravidade foram desenvolvidas por Taylor (1950).

### 3.4 - REFLEXÃO NA SUPERFÍCIE

As experiências citadas até agora e as teorias delineadas não levaram em consideração os efeitos de reflexão da onda de choque na superfície. Isto se deve em parte à dificuldade de se remover a

parte refletida da assinatura pressão vs. tempo. Esta dificuldade está ligada principalmente à falta de um modelo apropriado para tal remoção, tendo em vista a característica não-linear das ondas de choque. Como as experiências do presente trabalho são realizadas em águas rasas, é de se esperar que a reflexão na superfície exerça papel importante na análise.

O interesse por tal problema é recente. Um dos trabalhos mais elucidativos é o de Gaspin et alii. (1979) e que trata o problema da remoção da parte refletida, usando a hipótese da reflexão linear, embora seja aí enfatizado que os processos de reflexão na superfície variam de caso para caso, o que torna o uso da hipótese linear impreciso.

No trabalho citado foram detonadas cargas de 8,48 e 1.000 lb e uma curva típica obtida é mostrada na Figura 3.6.

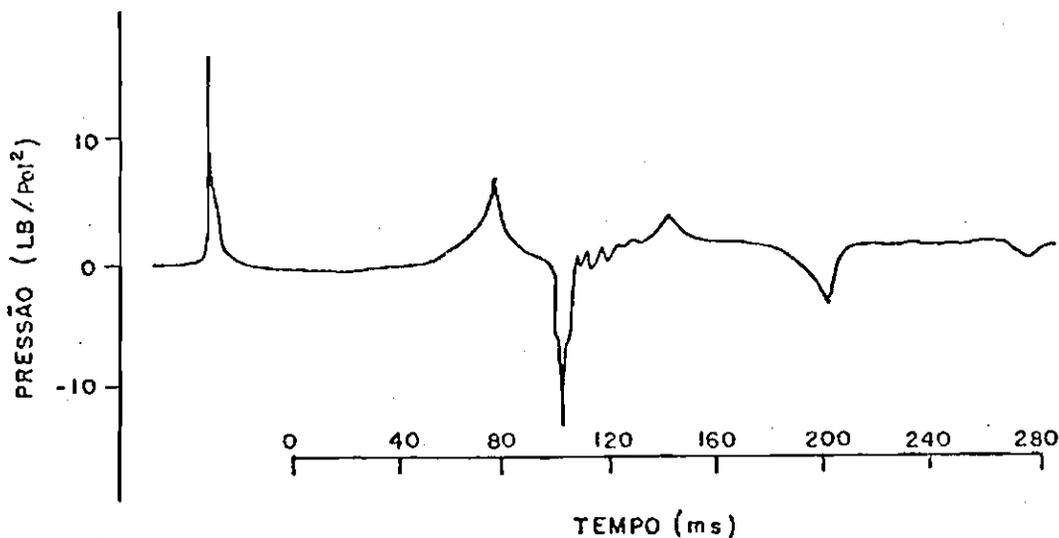


Fig. 3.6 - Curva pressão vs. tempo para cargas de 1.000 lb.

FONTE: Gaspin et alii. (1979), p. 1453.

A hipótese linear, aplicada no domínio do tempo pode ser sintetizada:

$$p'_0(t) = p'(t) + Ap'_0(t - \Delta t) \quad (3.54)$$

Na expressão 3.54,  $p'(t)$  é a curva de pressão registrada,  $p'_0$  representa as ondas diretas,  $\Delta t$  é o tempo decorrido entre a chegada da onda direta e a chegada da onda refletida, e  $A$  é um fator de escala. A Figura 3.7 representa o procedimento de remoção. A onda principal é deslocada de  $\Delta t$  e a operação representada pela expressão 3.54 é realizada retendo-se então a parte direta.

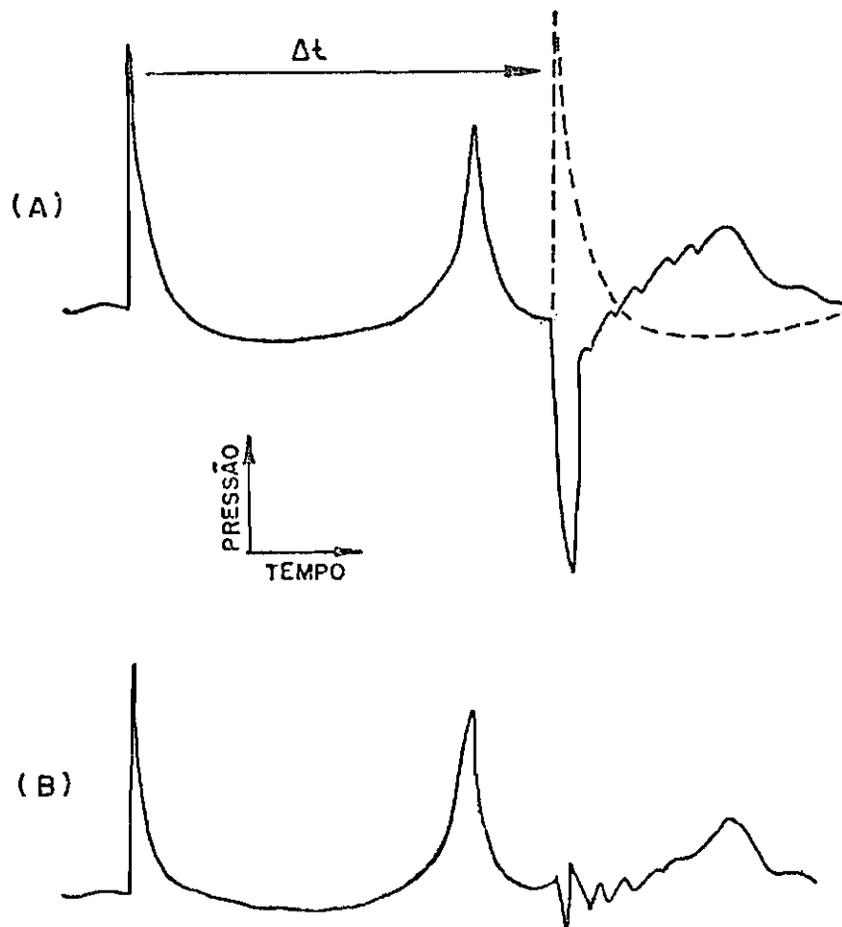


Fig. 3.7 - Remoção da parte refletida (hipótese linear).

FONTE: Gaspin et alii. (1979), p. 1454.

Os aspectos relativos à reflexão na superfície necessitam ser melhor esclarecidos através de futuros trabalhos, tendo em vista principalmente que a cavitação gerada pela explosão certamente influencia as características do fenômeno de maneira pouco conhecida.

## CAPÍTULO 4

### ESQUEMA EXPERIMENTAL

Neste Capítulo serão descritas as técnicas experimentais e o instrumental usados na obtenção dos dados, incluindo cargas e sensores com o método de calibração.

#### 4.1 - LOCAL

As experiências foram realizadas na Raia Acústica do Instituto de Pesquisas da Marinha, em Cabo Frio. As Figuras 4.1 e 4.2 representam parte da carta náutica 1503 da Diretoria de Hidrografia e Navegação. O ponto assinalado "C" na Figura 4.2 corresponde à localização da cabine onde chegam, via rádio ou por cabo co-axial, as informações referentes a um experimento específico. O ponto "L" na mesma figura é o compartimento de análises. A cabine é também dotada de radar para tomada de distância. A Figura 4.2 também assinala a área na qual foram realizados os trabalhos.

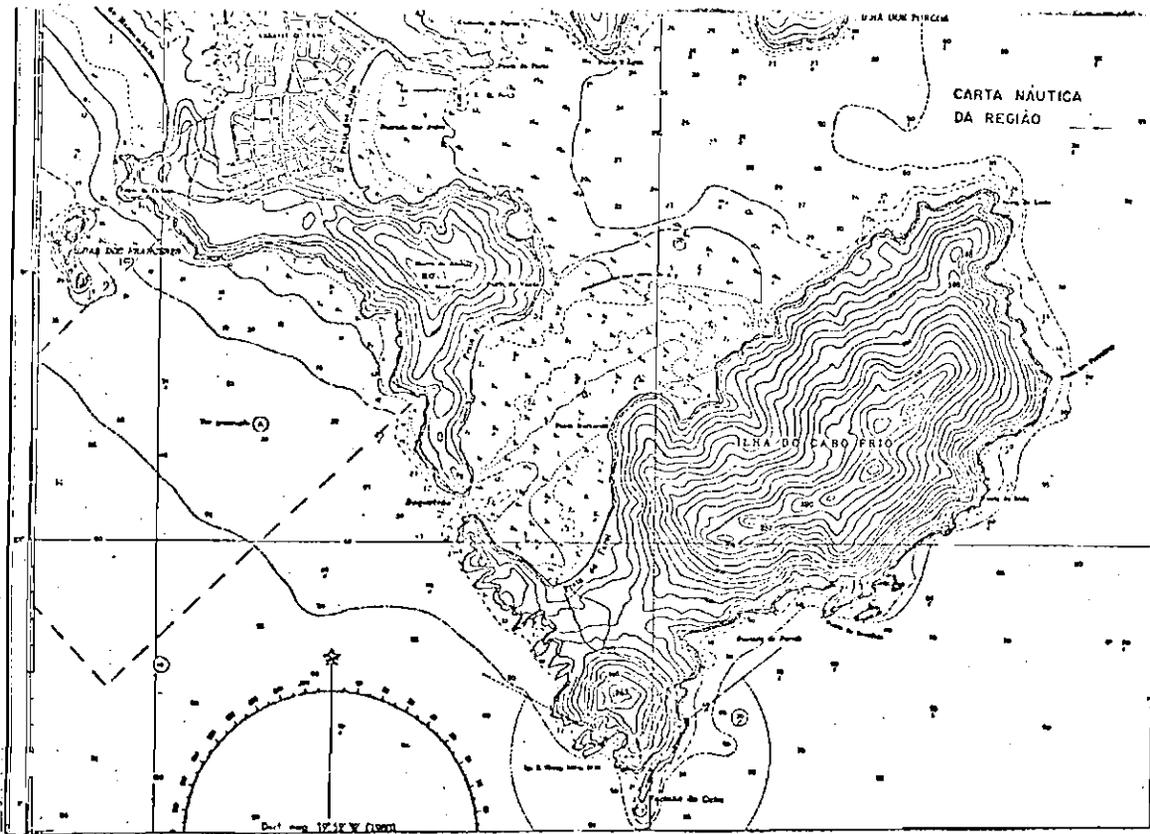


Fig. 4.1 - Parte da Carta Náutica da Região.

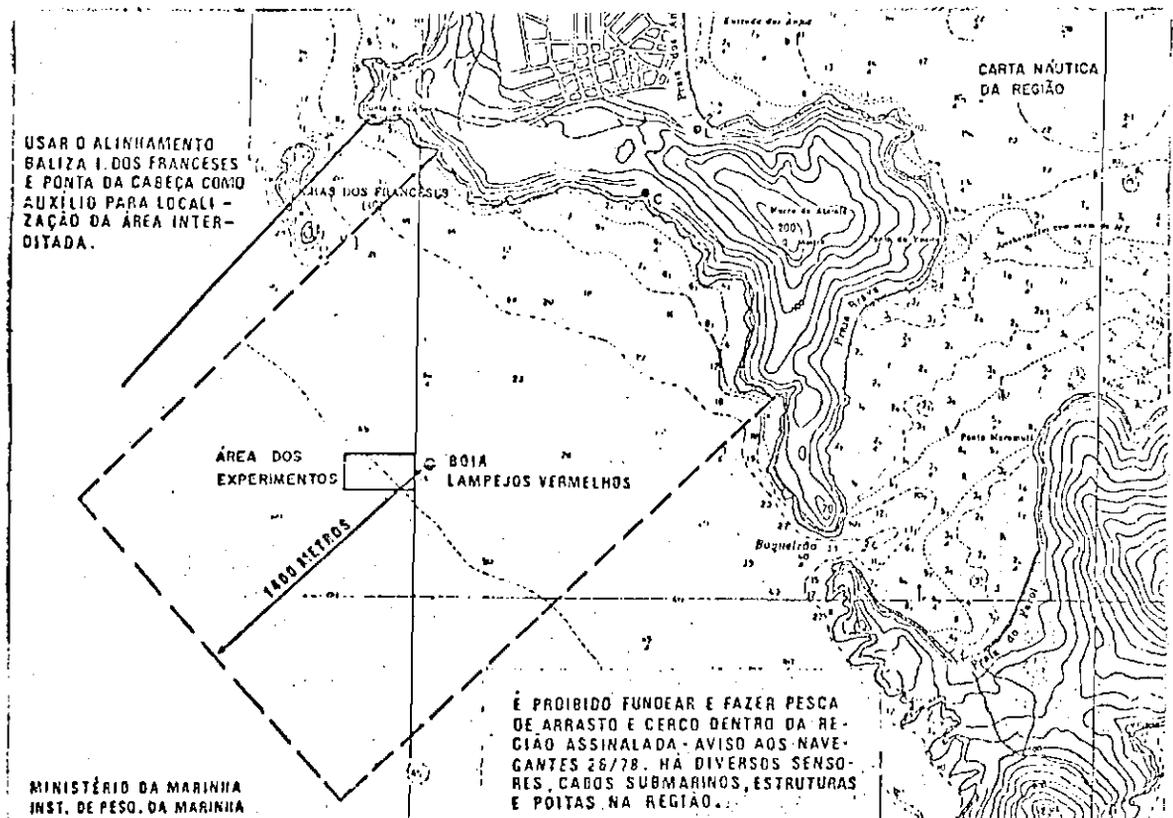


Fig. 4.2 - Parte da Carta Náutica da Região mostrando a área dos experimentos.

- Os pontos "C" e "L" representam a Cabine e o Laboratório de Análises, respectivamente.

#### 4.2 - MONTAGEM EXPERIMENTAL

A Figura 4.3 mostra como foram arranjados os vários componentes. A onda de explosão ao atingir o hidrofone gera um sinal elétrico característico. Este sinal é amplificado e transmitido a um receptor localizado na cabine onde é gravado para posterior análise.

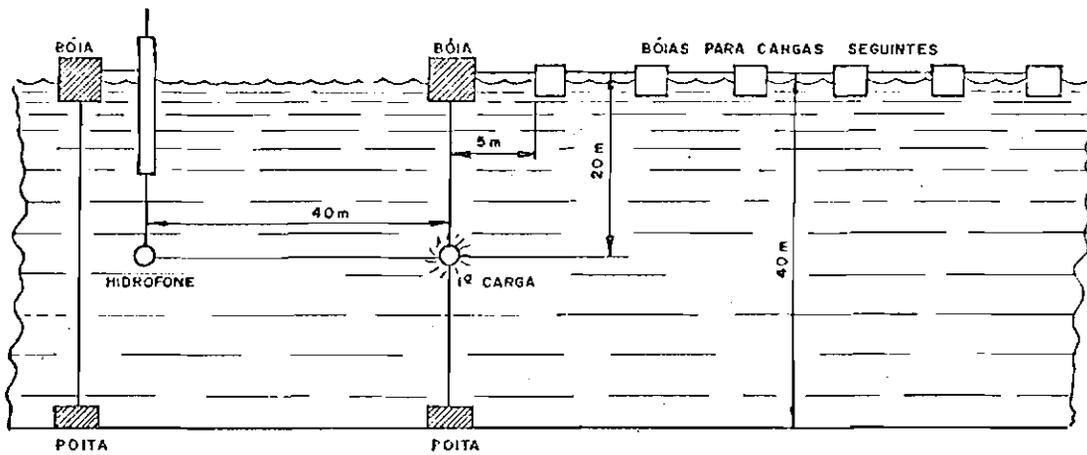


Fig. 4.3 - Arranjo experimental.

O diagrama da Figura 4.4 ilustra a sequência da obtenção de dados. A variação de distância é possível em virtude da graduação de 5 em 5 m para os locais onde são colocadas as cargas (Figura 4.3). Da maneira com que foi idealizada a montagem, a profundidade constante, (cerca de 20 m), não são isolados seus efeitos. O trabalho de Slifko (1967), mostra que a pressão de pico independente da profundidade. Segundo o mesmo autor, o impulso específico e o fluxo de energia a ela são ligados por relações que serão mencionadas adiante.

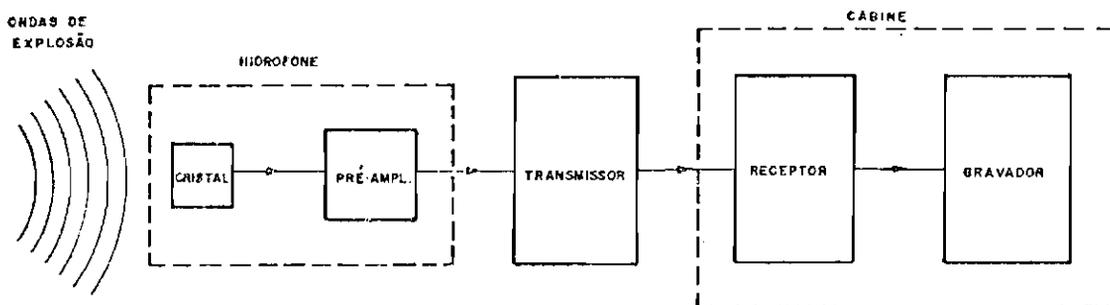


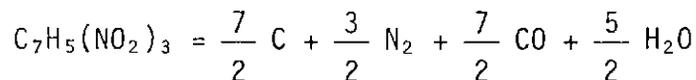
Fig. 4.4 - Seqüência esquemática da obtenção de dados.

#### 4.3 - CARGAS

A carga utilizada foi confeccionada pelo Grupo de Arma<sup>nto</sup> do Instituto de Pesquisas da Marinha e está esquematizada na Fi<sup>gura</sup> 4.5.

A carga escorva que constitui cerca de 6,38% do total é de pentolite ( $C_5H_8(NO_3)_4$ ) com densidade média de  $1,938 \text{ g/cm}^3$ . A carga principal é de TNT fundido com densidade aproximada de  $1,573 \text{ g/cm}^3$  e o peso total da carga é de  $0,533 \pm 0,0102 \text{ kg}$ .

A decomposição do TNT é (Kirkwood and Bethe, 1942):



A iniciação é feita eletricamente mediante o fechamento de um circuito, mostrado esquematicamente na Figura 4.6, que detona uma pequena espoleta, cujos detalhes são mostrados na Figura 4.7. Tal operação é controlada na embarcação utilizada nas experiências.

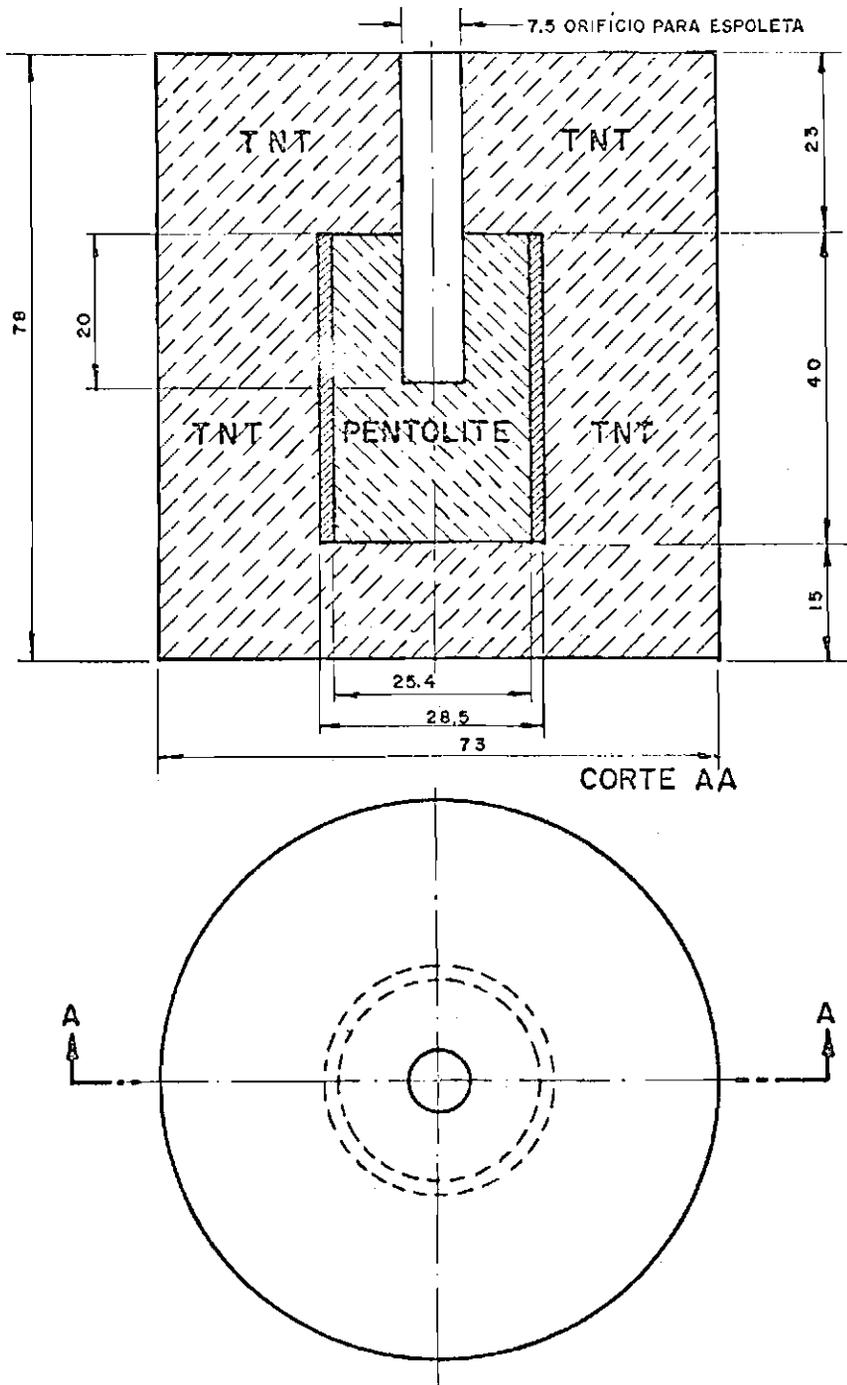


Fig. 4.5 - Carga utilizada (medidas em mm).

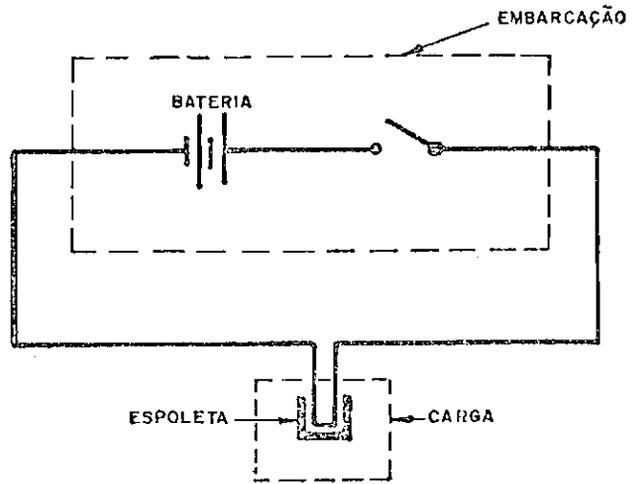


Fig. 4.6 - Circuito de iniciação.

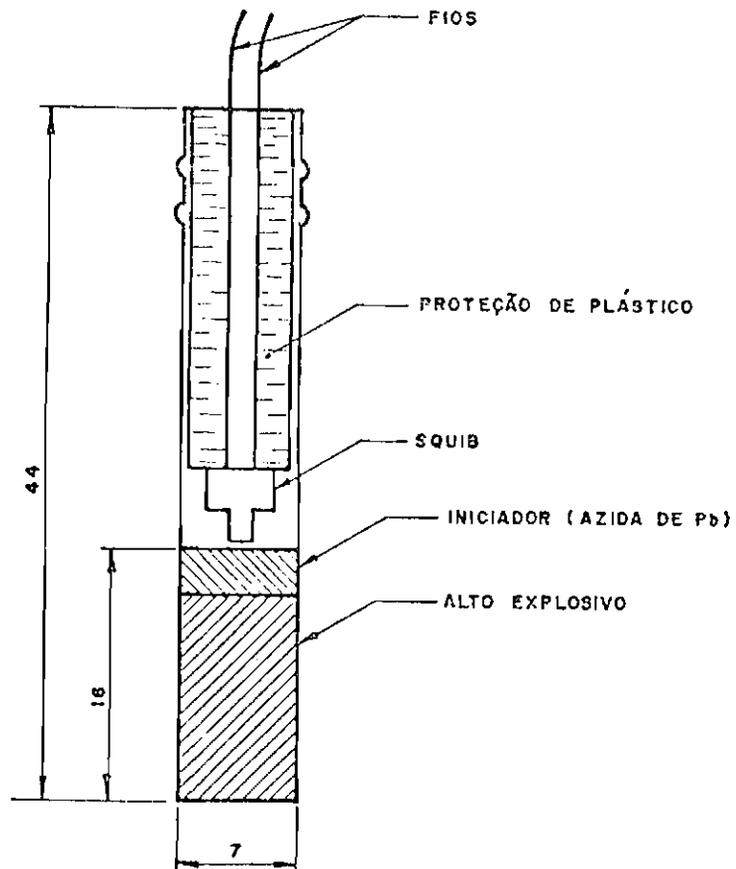


Fig. 4.7 - Espoleta de iniciação (medidas em mm).

Do peso total de material iniciador (1,8 g), 0,4 g corresponde à azida de chumbo e o restante à uma mistura de TNT (60%) e pentolite (40%). O conjunto é introduzido num orifício a este fim destinado que se encontra no corpo da carga (Figura 4.5)

#### 4.4 - SENSORES

Os sensores que aproveitam o efeito piezo-elétrico (formação de cargas de polarização, quando o material é submetido à tensão mecânica) de alguns cristais começaram a ser usados tanto para ondas de explosão no ar como na água por Keys (1921), que construiu um sensor de 6 pol. de diâmetro. A Segunda Grande Guerra provocou grande interesse no estudo da propagação de tais ondas e a partir daí novas técnicas de construção foram introduzidas, tornando os sensores piezo-elétricos mais robustos, mais precisos e confiáveis.

Tais sensores são hoje em dia pertencentes a duas grandes categorias:

- a) os medidores (gauges) de pressão que geralmente consistem em discos de cristal sensível (normalmente turmalina) com diâmetros de aproximadamente 1/2 pol., colocados a pequenas distâncias do explosivo e ligados à estação registradora por meio de cabos co-axiais. Seu uso intensificou-se a partir de 1941 (Cole, 1948) e grande parte da informação que se tem hoje sobre o assunto foi obtida com tais equipamentos (Arons, 1954; Cole, 1948, etc.). Os trabalhos em pequena escala (Poché Jr., 1972; Bjørnø and Levin, 1976, etc.) também os utilizam. Os detalhes de construção podem ser observados no trabalho de Arons and Cole (1950);
  
- b) os hidrofones que, embora funcionem dentro do mesmo princípio, apresentam diferenças principalmente nas dimensões (maiores que os medidores) e pelo fato de, normalmente incluírem em sua unidade pré-amplificador. São colocados a distâncias da carga

um pouco maiores que os medidores. Seus elementos sensíveis normalmente consistem em sais do tipo zirconato de chumbo, titanato de bário, etc. Dentre os autores que usaram hidrofones na medida de pressão pode-se citar Slifko (1967), e mais recentemente, Gaspin et alii (1979) que usou os dois tipos de sensores. As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam os dois tipos de sensores mencionados.

No presente trabalho, o sensor foi o hidrofone R-101 da Research Mfg Corporation e seu elemento sensível é de zirconato de chumbo, e a unidade compreende este elemento sensível e um pré-amplificador.

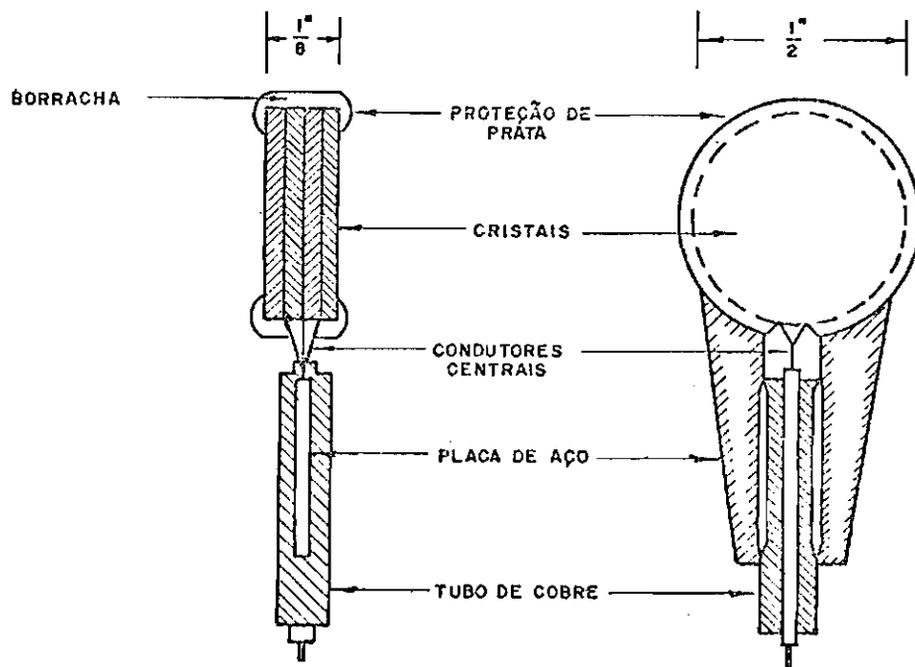


Fig. 4.8 - Detalhes do medidor de pressão a cristal.

FONTE: Cole (1948), p. 172.

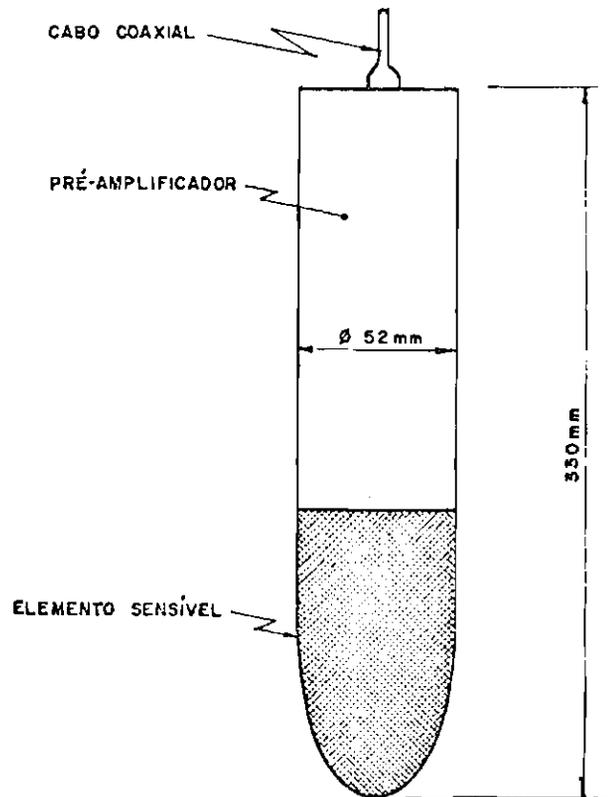


Fig. 4.9 - Hidrofone com pré-amplificador.

#### 4.5 - CALIBRAÇÃO

A sensibilidade ( $S_1$ ) de um hidrofone é medida pela relação entre a pressão que lhe é imposta e a diferença de potencial (d.d.p.) gerada. Em dB/Pa:

$$S_1 = 20 \log V - 20 \log p \quad (4.1)$$

onde  $V$  é d.d.p. e  $p$  a pressão em Pa.

Assim, se  $S_1$  for conhecido, e sendo registrado o valor de  $V$ , obtém-se  $p$ , sendo possível então fazer o levantamento de  $P_m(R)$ .

A Expressão 4.1 implica o fato de que o cristal trabalha numa região linear. Ou seja, há uma proporcionalidade entre a voltagem induzida e a pressão a qual ele é submetido. Diz-se que o sensor saturou, quando a pressão tem um valor tal que a Relação 4.1 não mais se verifica. Assim,  $S_1$  terá de ser tal que a Relação 4.1 seja válida para a ordem de grandeza esperada das pressões.

Na calibração do hidrofone tem como objetivo a determinação de  $S_1$ . Neste caso, esta determinação é obtida pelo que é chamado de método acústico, descrito como se segue.

Chama-se resposta de transmissão, TR, de um hidrofone, em dB, a pressão em Pa que um sinal elétrico padrão (1 volt) gera a 1 m dele.

Na Figura 4.10, o hidrofone da esquerda em TR conhecido. A introdução de um sinal de valor V gera então a 1 m:

$$S_1 = TR + 20 \log V \quad (4.2)$$

onde  $S_1$  é denominado nível da fonte a 1 m, sendo então o valor em dB para um sinal de V volts. É claro que, se  $V = 1$ ,  $S_1 = TR$ .

Se a uma distância R, conhecida, é colocado o hidrofone a ser calibrado, sabe-se já que:

$$S_1 = 20 \log V' - 20 \log R$$

Mas sendo o método acústico (pressão que varia com o inverso da distância), ficar-se-á com:

$$20 \log p = S_1 - 20 \log R \quad (4.3)$$

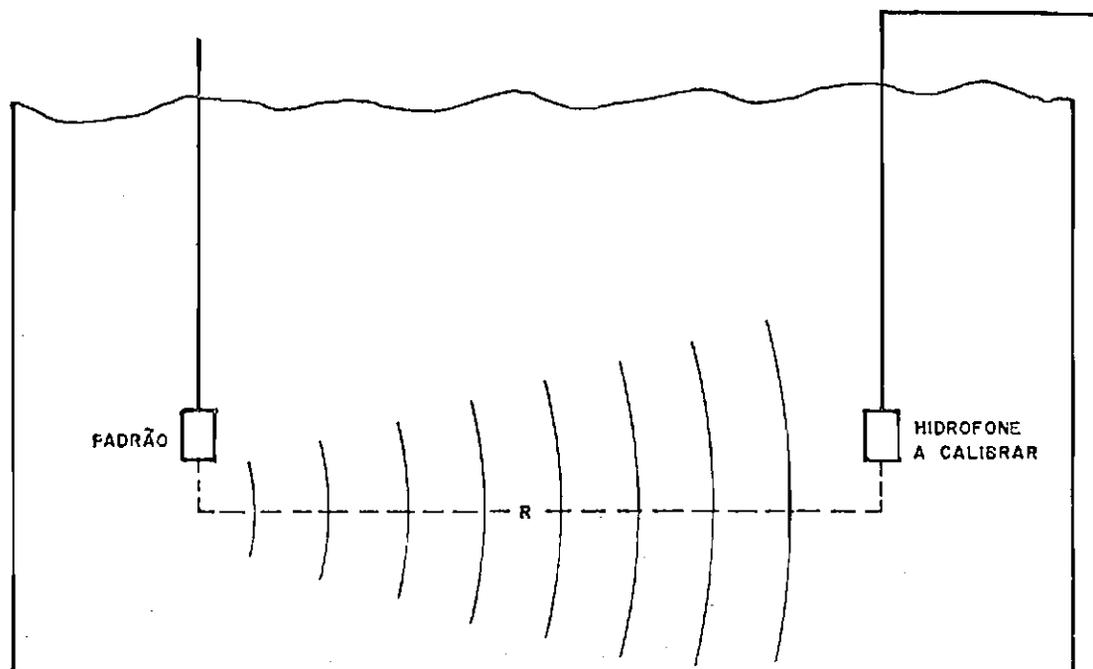


Fig. 4.10 - Método de calibração.

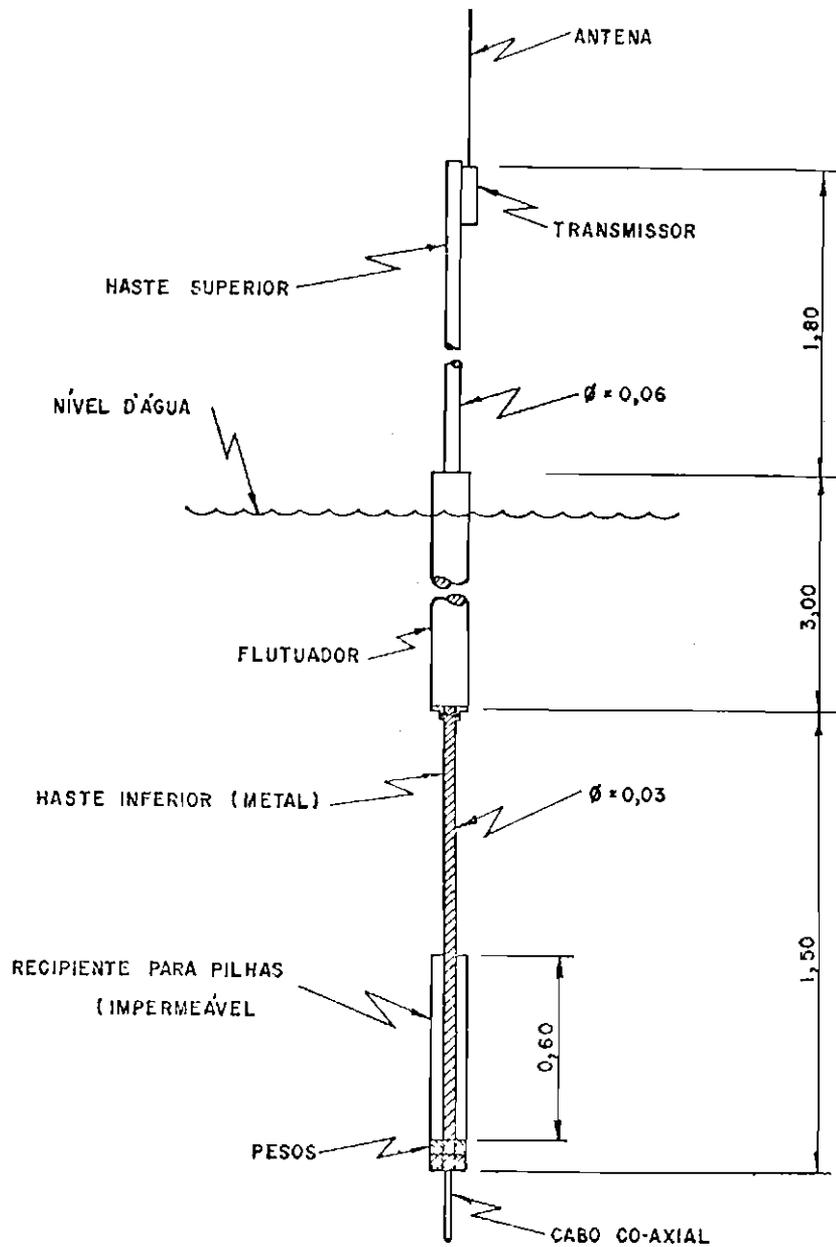
Combinando-se as Expressões 4.2 e 4.3 chega-se a:

$$S1 = 20 \log V' - TR + 20 \log V + 20 \log R$$

que fornece então o valor de S1.

#### 4.6 - ETAPAS DO EXPERIMENTO

O material necessário era embarcado no cais do Porto de Arraial do Cabo e conduzido à área designada. Consistia basicamente numa estrutura (Figura 4.11), onde montou-se o transmissor e o hidrofone. Logo após o fundeio da estrutura, era colocada a linha de bóias de isopor (ver Figura 4.3) em cujas alças eram colocadas as cargas com as respectivas espoletas.



ESC. 1:25

Fig. 4.11 - Estrutura transmissora (medidas em metros).

Cada carga era preparada na embarcação, consistindo essa preparação na colocação da espoleta no orifício a ela destinado e na sua conexão a um fio cujos terminais eram contatado à bateria de bordo.

Uma vez estabelecidas as comunicações com a cabine, a carga era arriada e detonada.

A onda de pressão, ao atingir o hidrofone, gera um sinal elétrico que vai ao transmissor, sendo então recebido na cabine, onde é gravado no gravador HP 3964A na velocidade de 15 pol/s nos modos direto e FM, o que garante uma resposta em frequência de 0 a 64 kHz. As fitas gravadas foram posteriormente analisadas, usando-se para isto o osciloscópio de armazenamento TEKTRONIX - RM 564 (Figura 4.12). Com os gráficos de pressão vs. tempo e posterior digitação foram levantadas as curvas de  $P_m(R)$ ,  $\int p dt$  e  $\int p^2 dt$ .

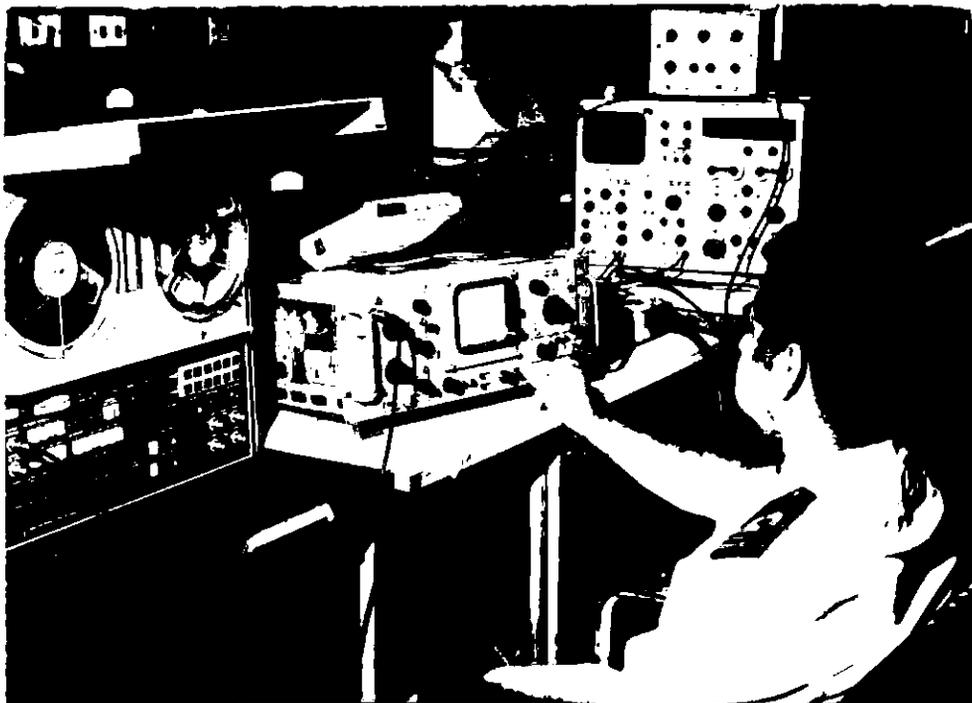


Fig. 4.12 - Osciloscópio de Armazenamento TETRONIX RM - 564.

A análise espectral foi obtida mediante método de FFT (Transformada Rápida de Fourier). Tal método consiste em um algoritmo destinado a determinar o valor de  $\tilde{x}(f)$  na transformada de Fourier discreta, definida por:

$$\tilde{x}(f) = \sum_0^{N-1} \tilde{X}(n) e^{-i(2\pi/N)nf}$$

O valor de  $\tilde{x}(f)$  determina o valor da densidade de  $\tilde{x}$  para cada  $f$  (frequência). A descrição detalhada dos algoritmos e a apresentação das sub-rotinas correspondentes aparecem, por exemplo, em Oppenheim and Schaffer (1975).



## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS

Este Capítulo trata da comparação dos resultados obtidos com aqueles da Teoria de Kirkwood-Bethe e as Leis da Escala provenientes de outros experimentos.

#### 5.2 - CURVAS DE PRESSÃO vs. TEMPO

Foram detonadas doze cargas e a Figura 5.1 é uma fotografia da tela de um osciloscópio com uma curva típica de pressão vs. tempo. Nela se pode distinguir o pico principal, o pico secundário e a reflexão na superfície. É notável a influência desta última no aspecto geral da curva.

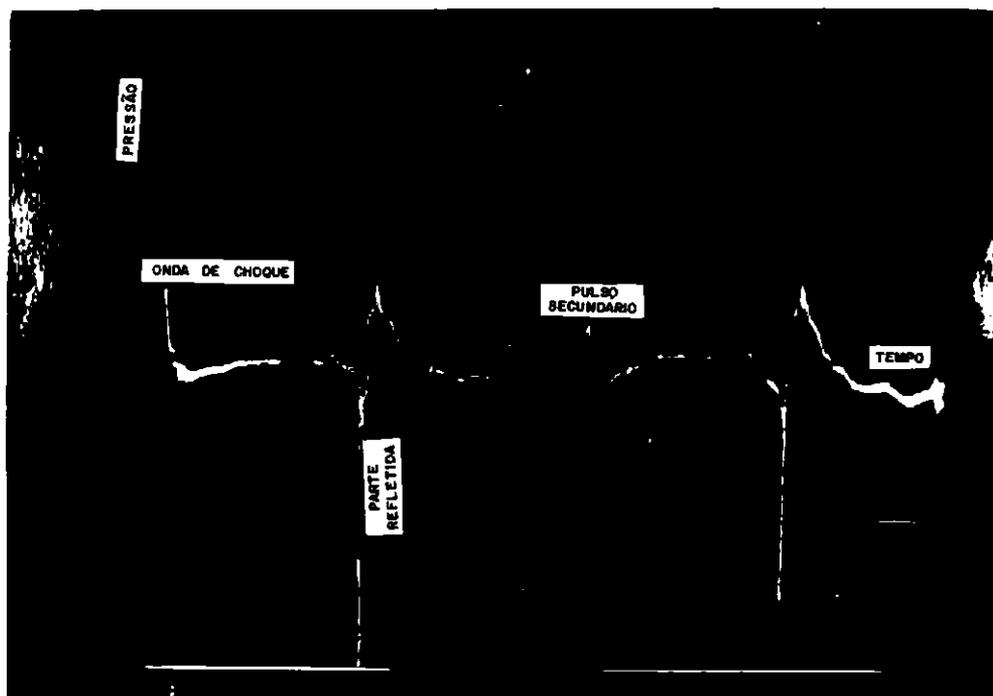


Fig. 5.1 - Curva típica de pressão vs. tempo.

As Figuras 5.2 a 5.5 representam algumas das curvas obtidas. Em cada uma delas estão discriminadas a distância carga/sensor e a escala de tempo.

O eixo das ordenadas já apresenta os valores de pressão em Pa correspondentes ao número de volts indicado.

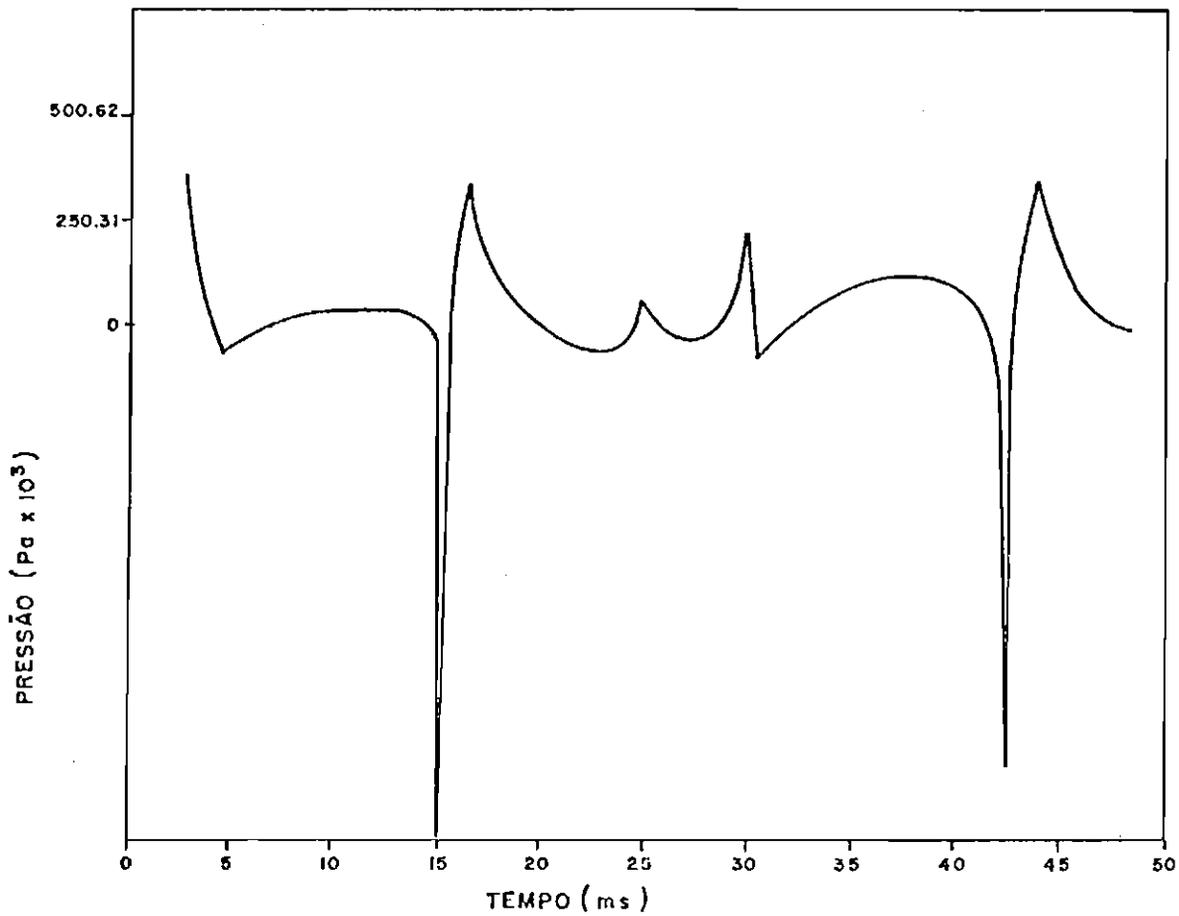


Fig. 5.2 - Curva de pressão vs. tempo para 40 m.

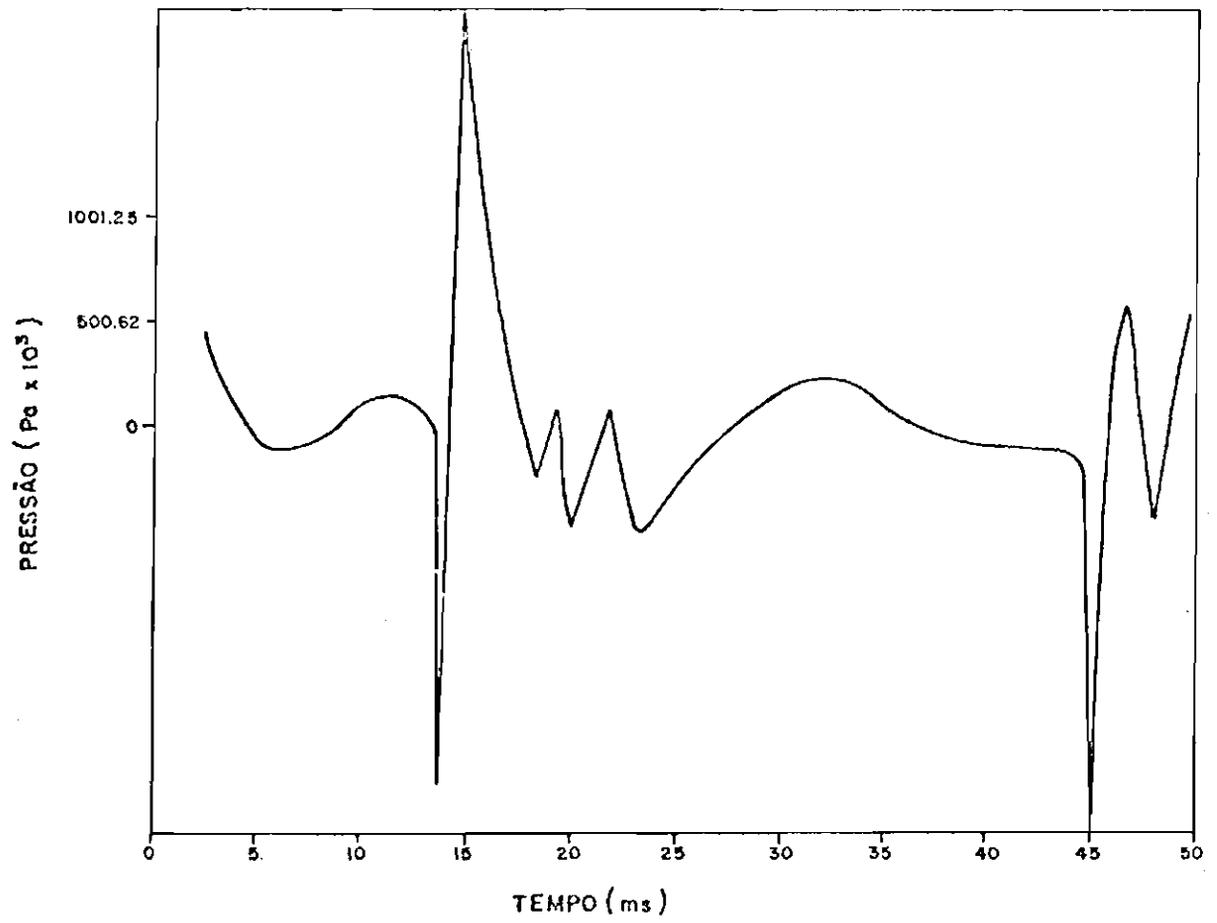


Fig. 5.3 - Curva de pressão vs. tempo para 45 m.

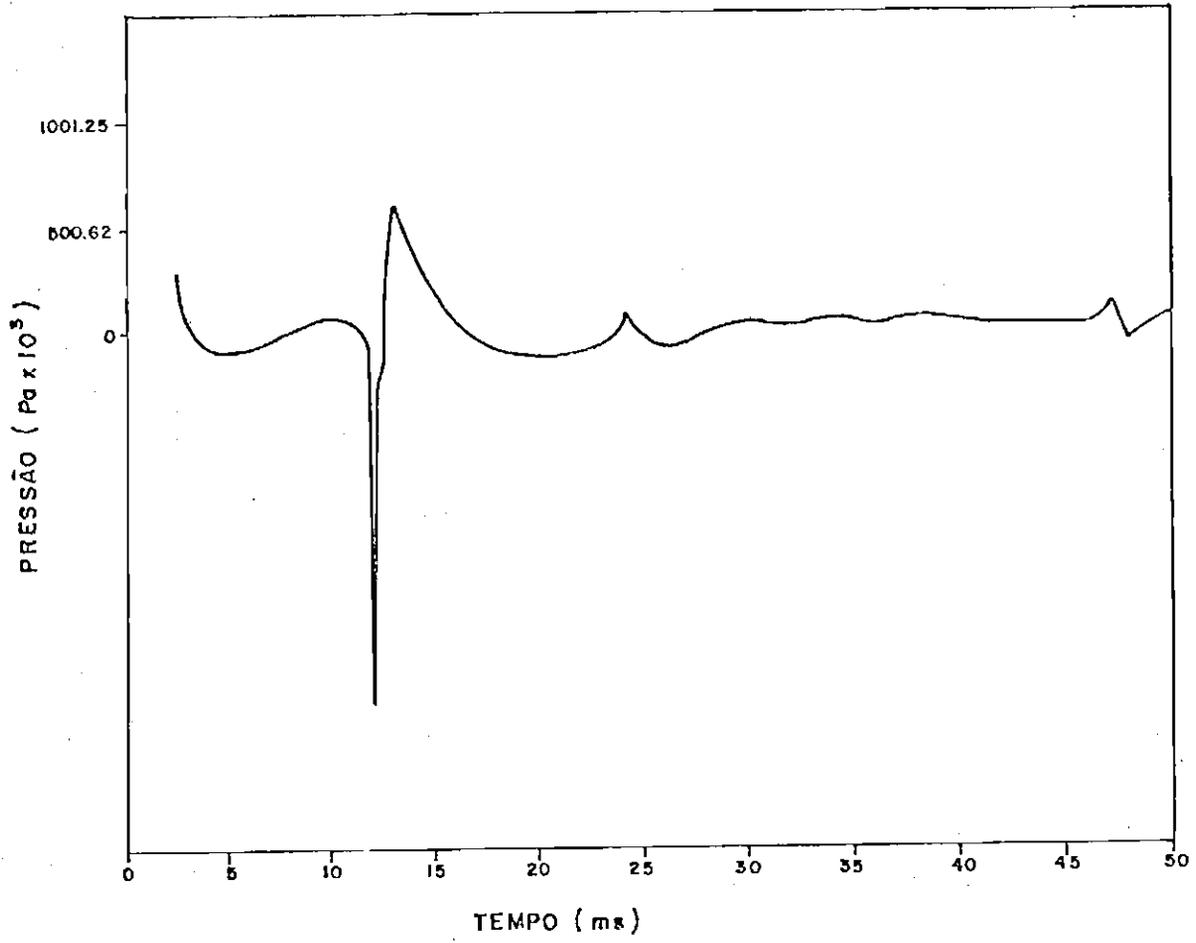


Fig. 5.4 - Curva de pressão vs. tempo para 70 m.

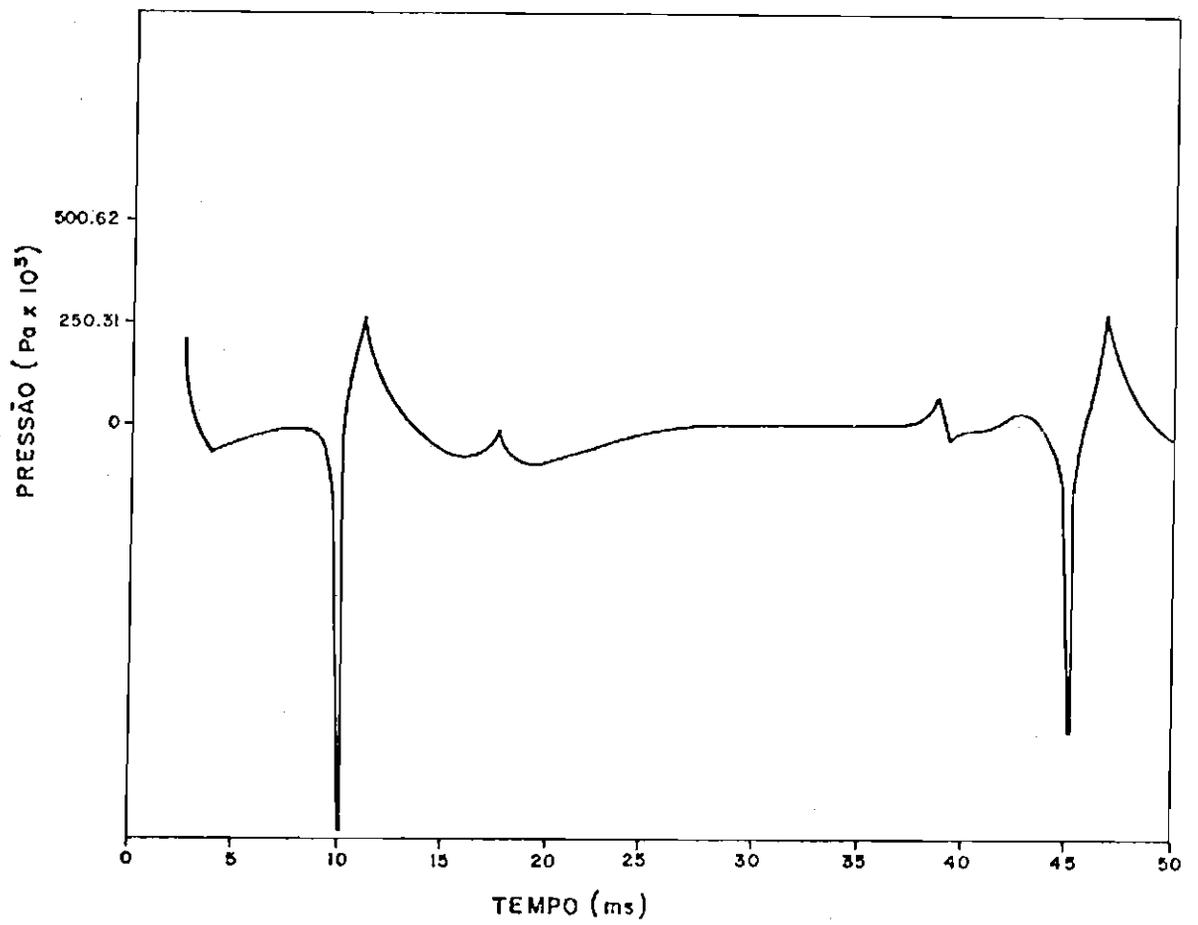


Fig. 5.5 - Curva de pressão vs. tempo para 90 m.

## 5.2 - PRESSÕES DE PICO, IMPULSO ESPECÍFICO E FLUXO DE ENERGIA

As curvas de pressão vs. tempo foram analisadas e tira dos os valores da pressão de pico.

A obtenção do impulso específico é conseguida mediante a integral:

$$I = \int p dt$$

que é computada durante toda a fase positiva. Para isto, as escalas de tempo das curvas são variadas de modo que o primeiro pulso se apresente mais detalhadamente. A integração é realizada, então, por meios numéricos. Igual procedimento é usado para o fluxo de energia onde é computada a integral:

$$E = \frac{1}{\rho_0 c_0} \int p^2 dt$$

onde  $\rho_0$  e  $c_0$  são a massa específica e a velocidade do som da água, respectivamente.

Os resultados obtidos estão resumidos na Tabela 5.1.

Na confecção dos gráficos apresentados nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 foi realizada uma ajustagem mediante o método dos mínimos quadrados e foram suprimidas as cargas nºs 1, 5 e 8, tendo em vista que os valores dos parâmetros a elas correspondentes estão discrepantes em relação aos que lhes são próximos. Isto é evidenciado pela diferença nos valores do coeficiente de regressão linear (que mede o grau de dependência entre as distâncias e os parâmetros obtidos experimentalmente). Quando todas as explosões são consideradas, estes valem 0,566, 0,60 e 0,57 para  $\log_{10} P_m$ ,  $\log_{10} I/W^{1/3}$  e  $\log_{10} E/W^{1/3}$  respectivamente, em contraste com 0,85, 0,90 e 0,85 com a supressão das cargas citadas.

TABELA 5.1

DADOS OBTIDOS PARA PRESSÃO DE PICO, IMPULSO ESPECÍFICO E FLUXO DE ENERGIA

CARGA	$R/W^{1/3}$ $m\text{-kg}^{-1/3}$	$R/a_0$	$\log_{10} P_m$ $P_m (\text{Pa} \times 10^3)$	$\log_{10} I/W^{1/3}$ $I/W^{1/3} (\text{Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1/3} \times 10^3)$	$\log_{10} E/W^{1/3}$ $E/W^{1/3} (\text{J}/\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-1/3} \times 10)$
1	50,26	547,94	2,53	- 0,68	0,68
2	57,19	616,48	2,61	- 0,59	0,79
3	63,16	684,93	2,60	- 0,58	0,80
4	69,38	753,42	2,56	- 0,65	0,69
5	76,10	821,91	2,36	- 0,85	0,31
6	82,00	890,41	2,56	- 0,65	0,65
7	87,78	958,90	2,43	- 0,77	0,44
8	94,11	1.017,39	2,53	- 0,68	0,63
9	99,99	1.095,89	2,47	- 0,79	0,51
10	106,66	1.164,38	2,30	- 0,91	0,20
11	112,56	1.232,87	2,26	- 0,95	0,09
12	118,05	1.301,36	2,31	- 0,90	0,20

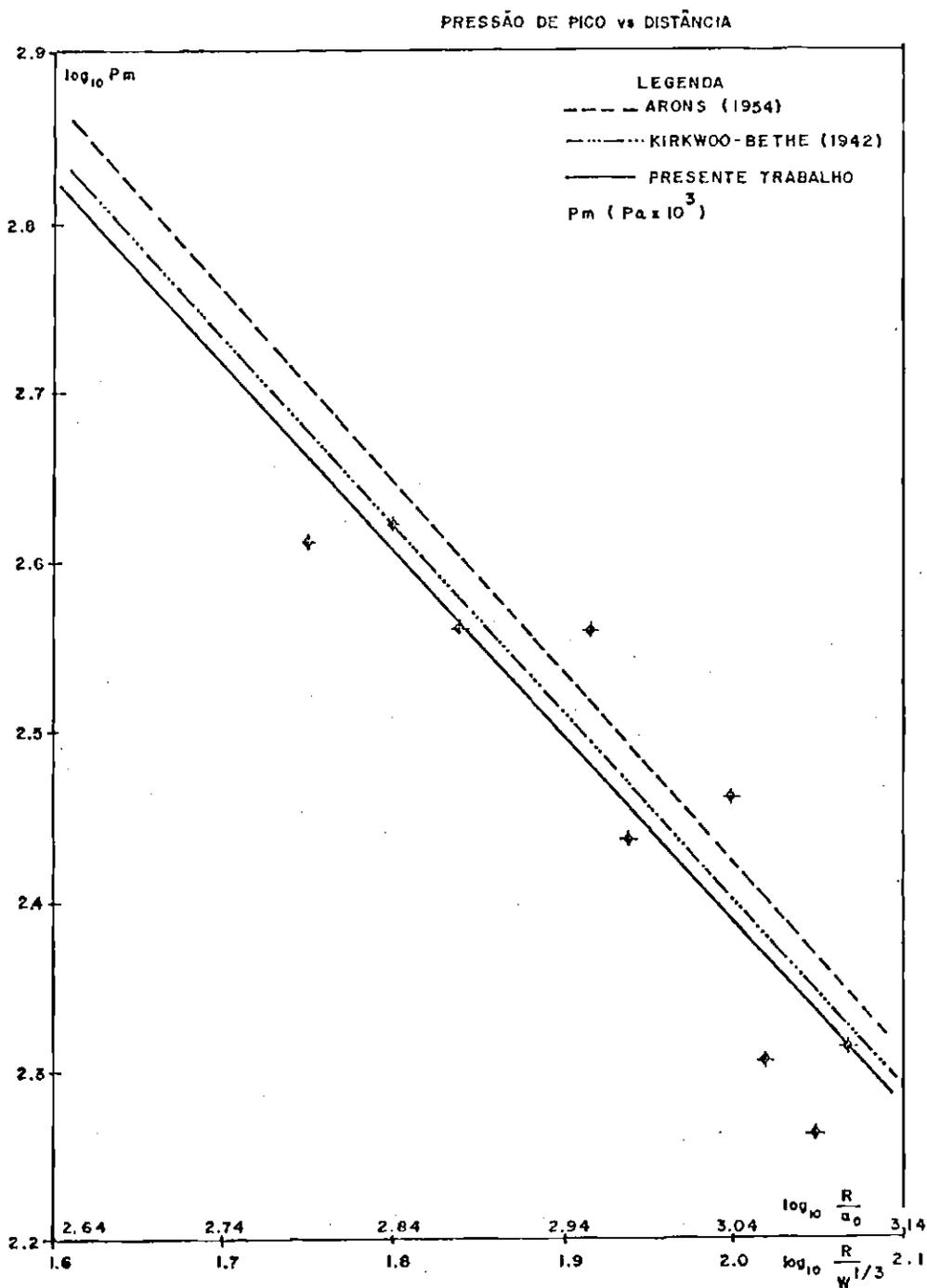


Fig. 5.6 - Pressão de pico vs. distância.

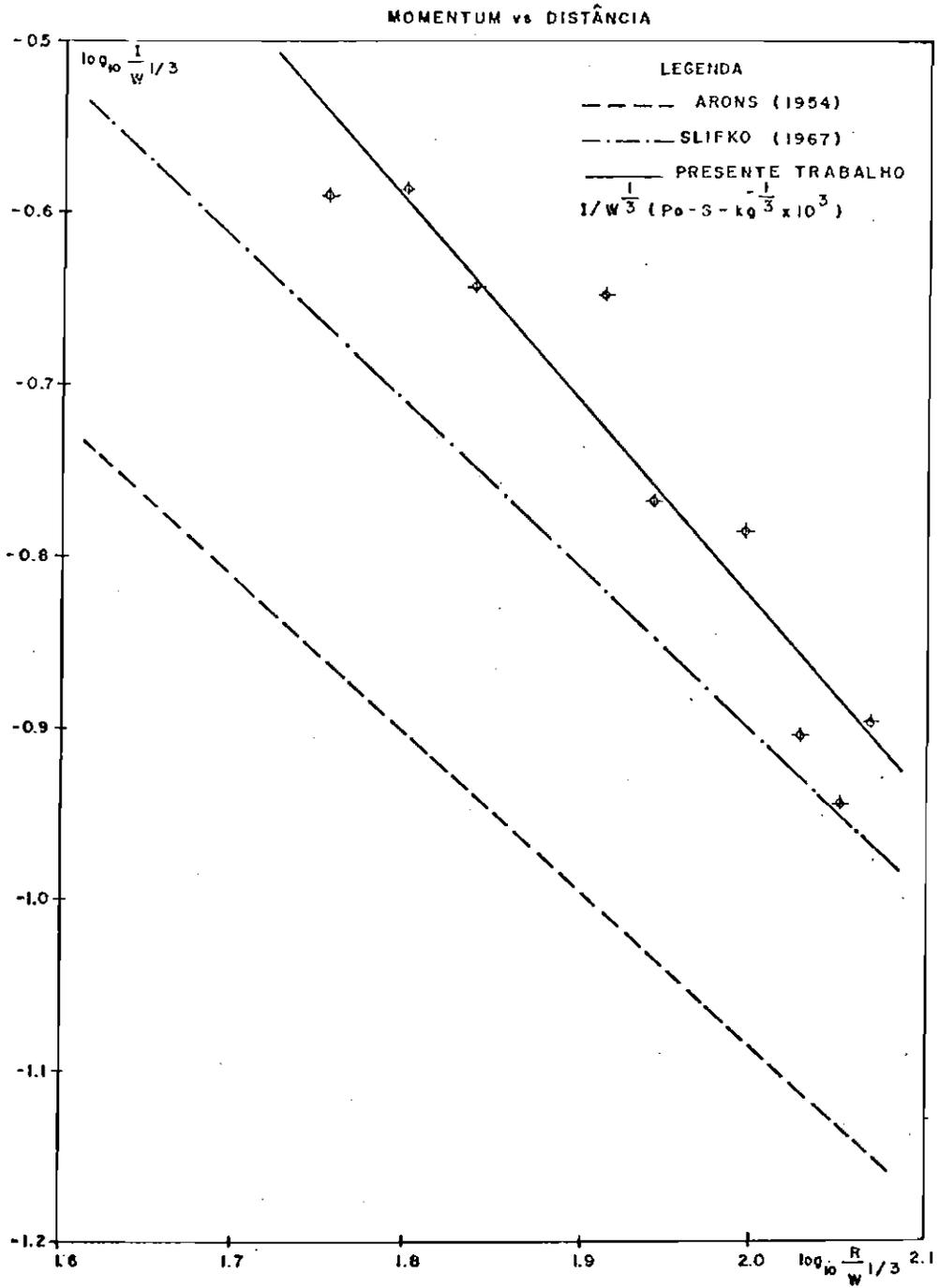


Fig. 5.7 - Impulso específico vs. distância.

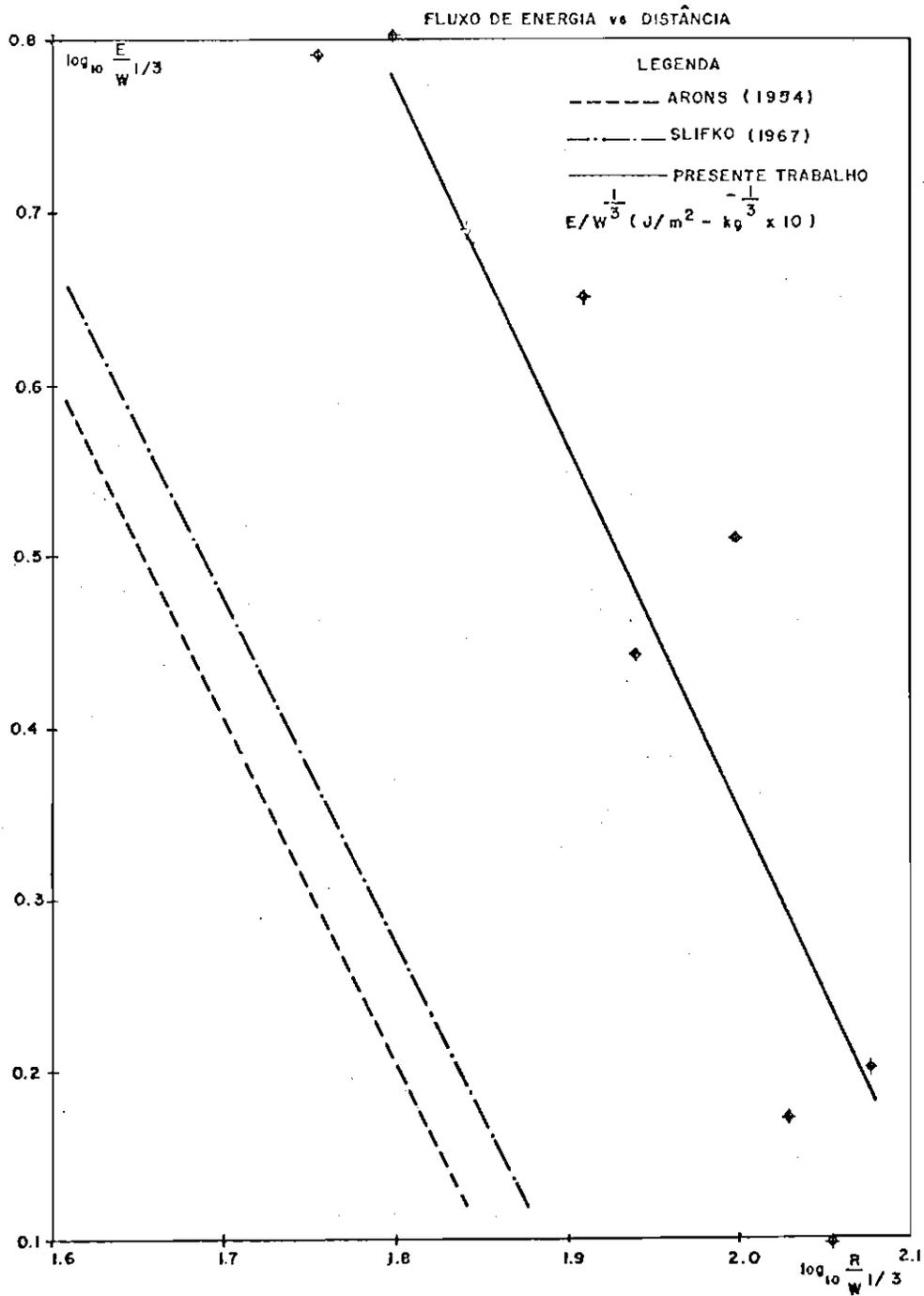


Fig. 5.8 - Fluxo de energia vs. distância.

No caso da carga nº 5, a fotografia da Figura 5.9 (tirada no dia do experimento) evidencia o fato de que o explosivo principal não foi totalmente atuado, justificando de modo concreto a sua exclusão.



Fig. 5.9 - Detonação incompleta (5º tiro).

As expressões obtidas foram:

$$P_m = 4,75 \times 10^4 (R/W^{1/3})^{-1,12}$$

$$I/W^{1/3} = 37,2 (R/W^{1/3})^{-1,18}$$

$$E/W^{1/3} = 77 \times 10^3 (R/W^{1/3})^{-2,25}$$

As expressões obtidas por Arons (1954), mostradas no gráfico:

$$P_m = 5.23 \times 10^4 (R/W^{1/3})^{-1,13}$$

$$I/W^{1/3} = 6.68 (R/W^{1/3})^{-0,94}$$

$$E/W^{1/3} = 9.62 \times 10^3 (R/W^{1/3})^{-2,08}$$

e as obtidas por Slifko (1967), extrapoladas para a profundidade de 20 m, são:

$$P_m = 5.30 \times 10^4 (R/W^{1/3})^{-1,13}$$

$$I/W^{1/3} = 11.71 (R/W^{1/3})^{-0,97}$$

$$E/W^{1/3} = 10.7 \times 10^3 (R/W^{1/3})^{-2,07}$$

Nos três conjuntos de expressões,  $W$  é dado em kg,  $R$  em metros,  $P_m$  em Pa  $\times 10^3$ ,  $I/W^{1/3}$  em Pa-s-kg $^{-1/3}$   $\times 10^3$  e  $E/W^{1/3}$  em J/m $^2$ -kg $^{-1/3}$   $\times 10$ .

Por outro lado, os resultados da teoria de Kirkwood-Bethe podem ser sintetizados pela relação:

$$P_m = \frac{K}{(R/a_0) [\ln(R/a_0)]^{1/2}} \quad (5.1)$$

onde  $K$  é uma constante que é determinada por meio de introdução, na expressão 5.1, dos valores experimentais correspondentes aos vários  $R/a_0$ ,

tirando-se para K a média aritmética. Conclui-se que  $K = 75.1 \times 10^7$ . Seu gráfico é apresentado também na Figura 5.6.

É interessante ressaltar que o valor de K tirado da Expressão 3.46:

$$P_m(R) = \left(\frac{a_0}{R}\right) \left[\frac{\rho_0 c_0}{\beta}\right]^{-1/2} \left[\frac{P_0/\alpha}{\ln(R/a_0)}\right]^{1/2}$$

ou seja:  $K = (\rho_0 c_0)^{1/2} (P_0/\alpha)^{1/2}$  é aproximadamente igual a  $12.9 \times 10^8$ , com valores de  $\rho_0$ ,  $c_0$ ,  $\beta_0$ ,  $P_0$  e  $\alpha$  dados pela Tabela 3.2 e que o valor de K encontrado mediante a ajustagem dos dados experimentais obtidos no trabalho de Poché Jr. (1972) é de aproximadamente  $K = 19.8 \times 10^8$ .

Não foi apresentado o gráfico da Expressão 3.62, tendo em vista que, para os valores de  $R/a_0$  considerados, as Expressões 3.46 e 3.62 são do tipo 5.1.

As curvas obtidas para o impulso específico e para o fluxo de energia mostram que os valores obtidos no presente trabalho são superiores aos obtidos por Arons (1954) (que não isolou os efeitos da profundidade) e por Slifko (1967), extrapoladas para a profundidade de 20 m. É importante ressaltar que este último trabalhou na faixa de 500 a 1.400 pés de profundidade. As expressões obtidas por este último para  $I/W^{1/3}$  e  $E/W^{1/3}$  e que isolam os efeitos da profundidade são:

$$I/W^{1/3} = 36.1(Z_0)^{-1/3}(R/W^{1/3})^{-0,97} \quad (5.2)$$

$$E/W^{1/3} = 21400(Z_0)^{-1/5}(R/W^{1/3})^{-2,07} \quad (5.3)$$

onde  $Z_0$  é a profundidade em metros + 10,05 metros (pressão atmosférica); R é dado em metros; W, em kg; e  $I/W^{1/3}$ , em  $\text{Pa-s-kg}^{-1/3} \times 10^3$  e  $E/W^{1/3}$  em  $\text{J/m}^2\text{-kg}^{-1/3} \times 10$ .

### 5.3 - PERÍODO ENTRE PULSOS

Este parâmetro é definido como sendo o intervalo de tempo, em segundos, entre a chegada do pico principal e a do pico secundário, e ligado à profundidade, de acordo com Slifko, pela relação:

$$\frac{T_1}{W^{1/3}} = 2.098(Z_0)^{-5/6} \quad (5.4)$$

onde  $Z_0$  é a profundidade em metros + 10,05 metros.

Nas curvas analisadas e nas quais se pode distinguir o pico secundário, verifica-se um período de aproximadamente 28,5 milissegundos, dando para  $T_1/W^{1/3}$  um valor de  $35,5 \times 10^{-3} \text{-s-kg}^{-1/3}$  que, ajustado à Relação 5.4 dá, para o expoente de  $Z_0$ , - 1.23.

### 5.4 - ESPECTRO DE ENERGIA

A Figura 5.10 apresenta o espectro obtido, utilizando-se a técnica FFT mencionada na Seção 4.6. Escolheu-se uma curva típica onde foi retirada a parte refletida, embora, segundo os resultados obtidos por Gaspin et alii (1979), o espectro não se modifica fundamentalmente em virtude de tal remoção.

A sub-rotina utilizada (Oppenheim, 1975) aceita um número de pontos que seja potência de 2. A Figura 5.10 mostra o espectro até a frequência de 3.7 kHz, valor máximo compatível com o número de pontos (256) tomados como amostras do sinal  $p(t)$ .

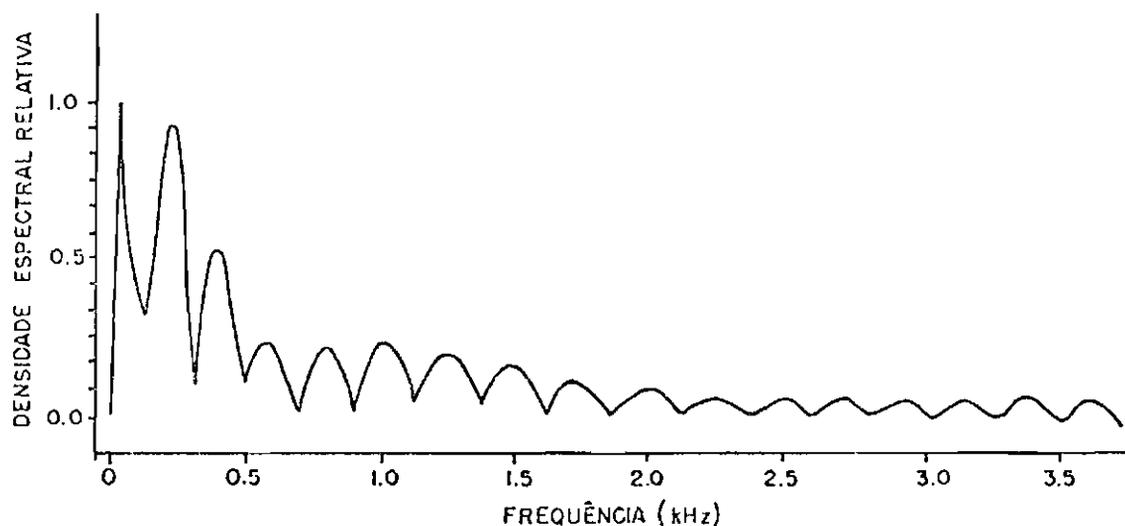


Fig. 5.10 - Espectro de frequência.

#### 5.5 - REFLEXÃO NA SUPERFÍCIE

Uma inspeção das Figuras 5.2 e 5.5 mostra imediatamente que a hipótese linear descrita pela Relação 3.54 pode ser aplicada, por exemplo, à detonação representada na Figura 5.2. A representada pela Figura 5.3, por outro lado, torna o uso de tal hipótese inadequado.

A Figura 5.11 mostra o uso da hipótese linear para detonação a 40 m, vendo-se que este se aplica razoavelmente para o caso com  $A = 3,53$ , sendo  $A$  o fator de escala que aparece na Expressão 3.54. Provavelmente tais indefinições no tratamento da parte refletida estão ligadas ao fenômeno da cavitação que acompanha as explosões e cuja natureza ainda está pouco esclarecida.

A tentativa do tratamento teórico da cavitação pode ser encontrada, por exemplo, em Kennard (1943) e, mais recentemente, em Cushing (1969).

Na Figura 5.12 é mostrada a onda com a parte refletida removida mediante o uso daquela hipótese.

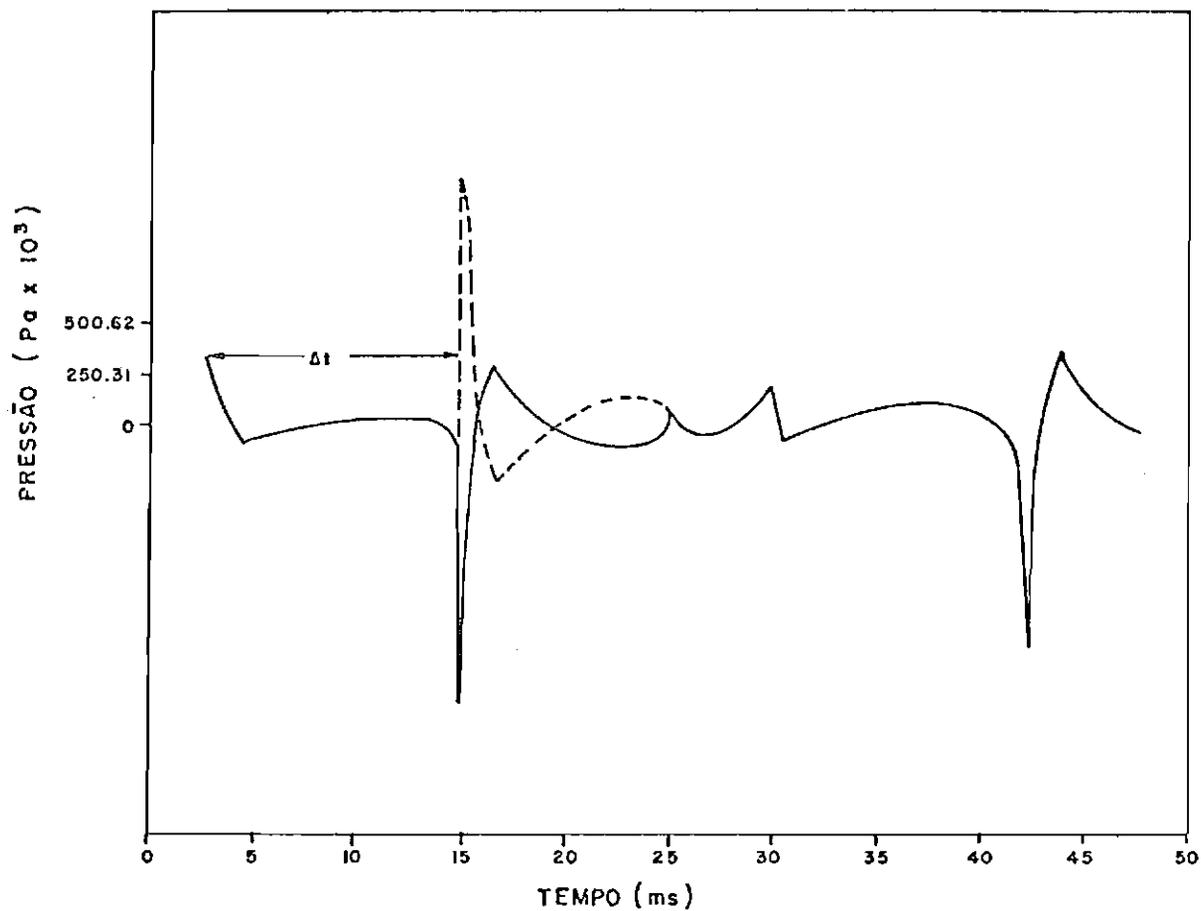


Fig. 5.11 - Aplicação da hipótese linear com  $A = 3,533$  para a detonação a 40 m (Figura 5.2).

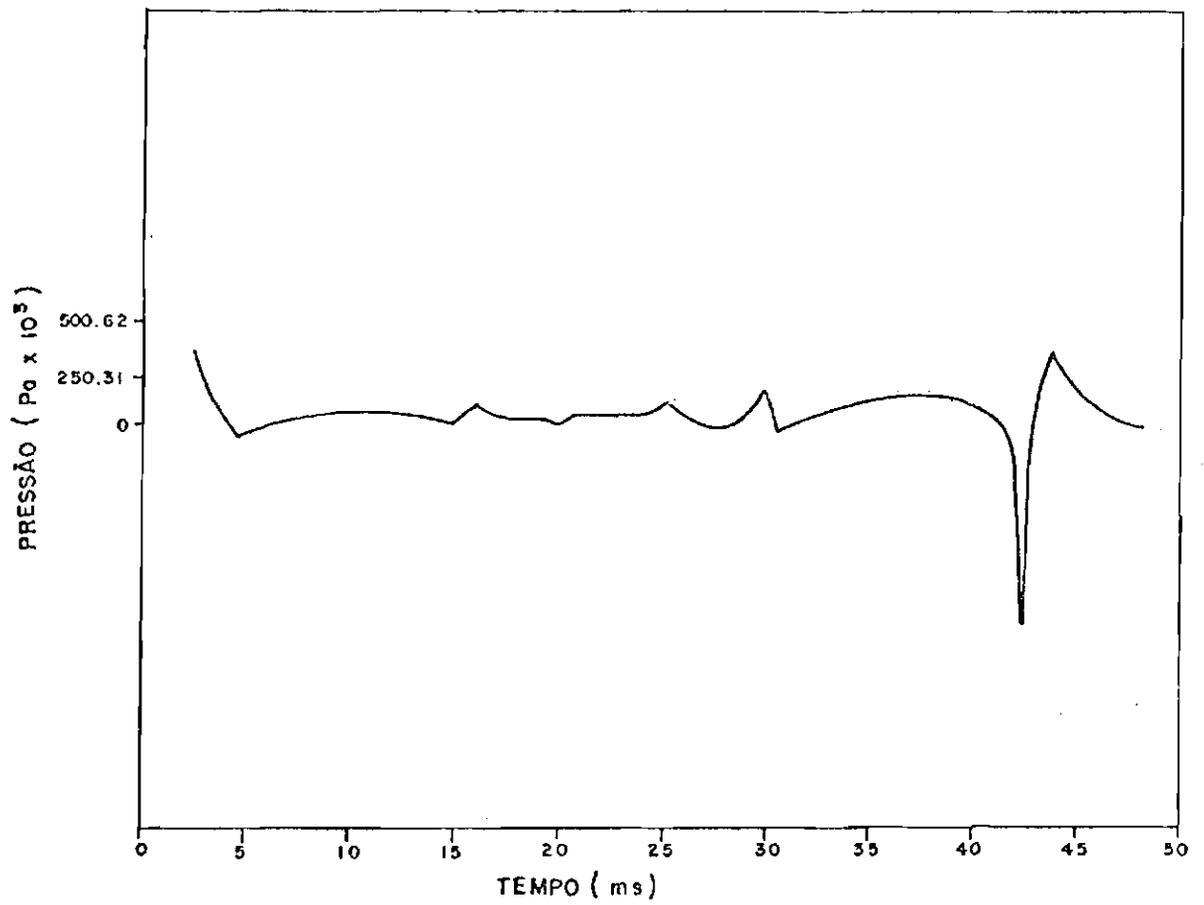


Fig. 5.12 - Remoção da parte refletida mediante o uso de hipótese linear.



## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 6.1 - CONCLUSÕES

Os resultados apresentados no Capítulo 5 permitem concluir que:

- a) Os valores obtidos para a pressão de pico são totalmente compatíveis com os resultados de Arons (1954).
- b) A discrepância no valor da constante K (Equação 5.1) em relação ao obtido com os dados da Tabela 3.2 revela que as condições locais e as circunstâncias particulares de cada experimento têm forte influência nos resultados.

Como já mencionado na Seção 5.2, há uma diferença no valor de K em relação ao obtido por Poché Jr. (1972), que possivelmente tem sua origem no fato de que esse autor trabalhou com pequenos detonadores ( $\approx 10^{-3}$  lb). A diferença em relação ao valor obtido no presente trabalho está ligada provavelmente à distribuição de salinidade, de temperatura, de densidade, etc., características do local (Moreira da Silva, 1972) além de os experimentos terem sido realizados numa faixa de profundidade até então não examinada.

- c) Os resultados obtidos para o impulso específico (impulso/unidade de área) da onda de choque sugerem que, na profundidade adotada, a funcionalidade com  $Z_0$  seja diferente da apresentada na Expressão 5.2, já que a faixa usada por Slifko (1967) vai de 500 a 14.000 pés, bem superior à do presente trabalho, ou seja: para a profundidade do trabalho, o expoente de  $Z_0$  é diferente de  $-1/3$ .

As discrepâncias observadas nas inclinações ( $\approx 0$  (18%)) estão ligadas provavelmente às imprecisões na computação das integrais. Certamente essas diferenças seriam diminuídas caso fosse usado num sistema de vários hidrofones e adotado o valor médio registrado, como no trabalho de Hicks et alii (1974). É claro que tal observação se aplica também aos dados relativos à pressão de pico (embora a discrepância observada neste caso tenha sido menor que 1%, reforçando a suposição acima).

- d) Observações semelhantes às do impulso específico se aplicam aos resultados obtidos para o fluxo de energia no que se refere à influência da profundidade. Aqui também persiste a sugestão que o expoente obtido por Slifko e mostrado na Expressão 5.3 não é adequado para a faixa de profundidade na qual está incluída a do presente trabalho. De novo, as discrepâncias nas inclinações das retas ( $\approx 0$  (9%)) têm as mesmas causas que as do caso acima (imprecisão na computação das integrais), e medidas semelhantes às sugeridas poderiam ser tomadas para que fossem sanadas tais diferenças.
- e) O efeito da profundidade das explosões também se manifesta no valor obtido para o período entre pulsos, mostrando mais uma vez que o expoente de  $Z_0$  obtido à luz dos dados é diferente do expoente que aparece na Expressão 5.4 referente ao trabalho de Slifko (1967).
- f) O espectro de energia mostrado na Figura 5.10 mostra, para a profundidade adotada, que o máximo de densidade de energia ocorre aproximadamente na frequência fundamental entre os picos principal e secundário, como era de se esperar (Weston, 1960). Deve ser notado que Blaik and Christian (1965a, b) concluíram que quanto maior a profundidade, mais o comportamento do espectro se afasta do modo  $f_m = 1/T_1$ .

- g) A indefinição quanto à possibilidade da aplicação da hipótese linear prende-se ao fato de que a onda refletida pode passar por região ainda cavitada. Apesar disto, a hipótese linear pode ser aplicada para determinadas detonações, embora o valor de A na Expressão 3.54 seja de difícil previsão.

Provavelmente sugestões de modelos não-lineares devem ser analisadas, e aprofundados os estudos nessa área, a fim de se ter uma melhor compreensão do fenômeno.

## 6.2 - SUGESTÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

O presente trabalho deve ser interpretado como um ponto de partida para que futuras investigações possam ser efetuadas com o objetivo de estender o conhecimento sobre o assunto.

A faixa de profundidade utilizada no desenvolvimento do presente trabalho é, como se sabe, a de maior importância no emprego de armas submarinas. Certamente daí a inexistência de artigos publicados que envolvem aquela camada.

Infelizmente, o tempo e o instrumental disponíveis precluíram até certo ponto a obtenção da fartura de pontos desejada. Por isto, por exemplo, não foram possíveis resultados mais conclusivos sobre a reflexão superficial. E mais, a confiabilidade dos dados poderia ser aumentada ainda mais se fossem detonadas várias cargas a uma mesma distância e tirada a média dos valores obtidos e/ou se fossem usados vários hidrofones.

Outra recomendação seria o acoplamento de uma câmara fotográfica à tela do osciloscópio, como esquematizado na Figura 6.1.

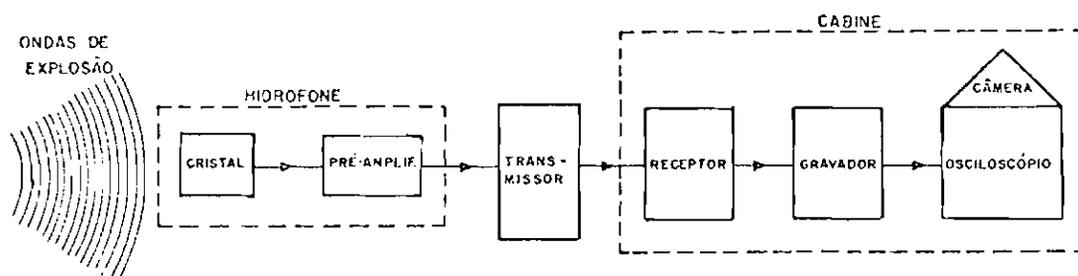


Fig. 6.1 - Esquema experimental sugerido.

Uma outra direção a seguir seria o experimento em pequena escala na qual, embora as condições sejam mais críticas e o instrumental mais sofisticado com o uso de "gauges" ou hidrofones especiais e osciloscópio com maior poder de resolução, há a vantagem de independência de condições de tempo, mar, etc., além do custo ser bem menor. Vale ressaltar que ainda não se conhece nenhum trabalho em pequena escala, cujo propósito seja a análise de onda refletida na superfície. Ao que tudo indica este é um rumo que poderia ser seguido em análises posteriores para melhor conhecimento do fenômeno.

Finalmente, embora o TNT seja por excelência o explosivo padrão, vale a pena mencionar a necessidade de que os experimentos relacionados com a propagação de ondas de explosão submarinas na profundidade usada sejam realizados com outros explosivos, isto é, aqueles atualmente em uso nas armas submarinas empregadas pela Marinha.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARONS, A.B. Secondary pressure pulses due to gas globe oscillation in underwater explosions II - selection of adiabatic parameters in the theory of oscillation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 20(3):277-282, May 1948.
- Underwater explosions shock wave parameters at large distances from the charge. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26(3):343-346, May 1954.
- ARONS, A.B.; COLE, R.H. Design and use of piezoelectric gauges for measurement of large transient pressures. *The Review of Scientific Instruments*, 21(1):31-38, Jan. 1950.
- ARONS, A.B.; SLIFKO, J.P.; CARTER, A. Secondary pressure pulses due to gas globe oscillation in underwater explosions I - Experimental data. *Journal of the Acoustical Society of America*, 20(3):271-276, May 1948.
- BEYER, R.T. *Nonlinear acoustic*. [Washington, D.C.], Department of the Navy, Naval sea Systems command, 1974.
- BJØRNØ, L.; LEVIN, P. Underwater explosion research using small amounts of chemical explosives. *Ultrasonics*, 14(6):263-267, Nov. 1976.
- BLACKSTOCK, D.T. Connection between the FAY and FUBINI solutions for plane sound waves of finite amplitude. *Journal of the Acoustical Society of America*, 39(6):1019-1026, June 1966.
- BLAIK, M.; CHRISTIAN, E.A. Near surface measurements of deep explosions II - Energy spectra of small-charges. *Journal of the Acoustical Society of America*, 38(1):57-62, July 1965a.
- Near surface measurements of deep explosions I - Pressure pulses from small-charges. *Journal of the Acoustical Society of America*, 38(1):50-56, July 1965b.
- COLE, R.H. *Underwater explosions*. New Jersey, Princeton, 1948.

- COOK, M.A. *The science of high explosives*. New York, Reinhold, 1963.
- CUSHING, V. *On the theory of bulk cavitation*; final Report. Rockville, Eng. Phys. Co., 1969.
- GASPIN, J.B. *Depth scaling of underwater explosion source levels*. Silver Spring, Nav. Sur. Weapons Center, 1975. (Tech. Report 75-182).
- GASPIN, J.B.; SHULER, V.K. *Source levels of shallow underwater explosions*. Silver Spring, Naval Ordnance Laboratory, 1971. (Report NOLTR 71-160).
- GASPIN, J.B.; GOERTNER, J.A.; BLATSTEIN, I.M. The determination of acoustical source levels for shallow underwater explosions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66(5):1453-1462, Nov. 1979.
- HAYES, W.D. *Gasdynamics discontinuities*. New Jersey, Princeton University Press, 1960. (Princeton Aeronautical Paperbacks n<sup>o</sup> 3).
- HICKS, J.A.; KENDREW, E.L.; PEMBER, W.J. *Pressed TNT as a standard for the assesement of underwater explosions*. Waltham Abbey, Explosives Research and Development Establishment, 1974. (Technical Report n<sup>o</sup> 164).
- JENSEN, F.B. *Weak shock waves in water generated by small detonators*. Lingby, The Technical University of Denmark, 1972. Report n<sup>o</sup> 38.
- KENNARD, E.H. Cavitation in an elastic liquid. *Physics Review*, 63(5,6):172-181, 1943.
- KEYS, D.A. A piezoelectric method of measuring explosion pressures. *Philosophical Magazine*, 42:473-487, Oct. 1921.
- KHRISTOFOV, B.D. Parameters of shock waves and gaseous bubbles arising during underwater explosions of small PETN charges. *ARS Journal Supplement*, 1788-1790, Nov. 1962.
- KIRKWOOD, J.G.; BETHE, H.A. *Progress report on "The pressure wave produced by an underwater explosion I"*. Washington, D.C. Office of Scientific Research and Development, 1942. (Report n<sup>o</sup> 588).

- KIRKWOOD, J.G.; BRINKLEY JUNIOR, S.R. *Theory of the propagation of shock waves from explosive sources in air and water*. Washington, D.C. Office of Scientific Research and Development, 1945. (Report nº 4814).
- KOROTKOV, P.F.; LOBANOV, V.S.; KHRISTOFOROV, B.D. Calculation of an underwater explosion on the basis of experimental data on bubble expansion. *Combustion, explosion and shock waves*, 8:459-464, Dec. 1972.
- LAMB, H. The early stages of a submarine explosive. *Philosophical Magazine*, 45:257-265, Feb. 1923.
- LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Mecanique des fluides*. Moscou, MIR, 1971.
- MOREIRA DA SILVA, P. *Oceanografia física*. Rio de Janeiro, CNPq, 1972.
- OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R.W. *Digital signal processing*. Englewood Cliffs, Printice-Hall, 1975.
- OSBORNE, F.M.; TAYLOR, A.H. Nonlinear propagation of underwater shock waves. *Physical Reviews*, 70(5,6):322-328, Sept. 1946.
- POCHÉ JUNIOR, L.B. Underwater shock wave pressures from small detonators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(5,P.2):1733-1737, 1972.
- ROGERS, P.H. Weak shock solution for underwater explosive shock waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 62(6):1412-1419, Dec. 1977.
- SLIFKO, J.P. *Pressure-pulse characteristics of deep explosions as functions of depth and range*. Silver Spring, United States Naval Ordenance Laboratory, 1967. (Report 67-87).
- SPIEGEL, M.R. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas*. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1979.
- TAYLOR, G.I. The dynamics of the combustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives. *Proceedings of Royal Society A*, 200:235-247, 1950.

- U.S. NAVY Characteristics of shock waves in air. Washington, D.C., s.d. (NAVORD Report 6085, cap. 2).
- VANZANT, B.W.; De HART, R.C. Effect of hydrostatic pressure on shock waves from underwater explosions. *Journal of Applied Physics*, 36(10):3116-3117, Oct. 1965.
- WESTON, D.E. Underwater explosions as acoustics sources. *Proc. Phys. Society*, 76(P2):233-249, Mar. 1960.
- WILSON, F.B.; KISTIAKOVSKY, G.B. *The hydrodynamic theory of detonation and shock waves*. Washington, D.C. Office of Scientific Research and Development, 1941. (Report n<sup>o</sup> 114).
- ZEL'DOVICH, B.; RAIZER, P. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. New York, Academic, 1966.

## APÊNDICE A

### DEDUÇÕES DE ALGUMAS RELAÇÕES

#### a) Relação 3.19

Seja a função  $f$  de duas variáveis.

Sendo assim:

$$\int_a^x f(t,y)dt = F(x,y) - F(a,y)$$

Donde:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f(t,y)dt = \frac{\partial}{\partial x} [F(x,y) - F(a,y)] = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$$

Analogamente

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^b f(t,y)dt = - f(x,y) \quad (\text{A.1})$$

Correspondentemente:

$$t = \tau + \int_x^R \frac{dr}{c}$$

Logo:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_R = \gamma = 1 \left(\frac{\partial I}{\partial \tau}\right)_R \quad (\text{A.2})$$

onde

$$I = \int_{a(\tau)}^R \frac{dr}{\bar{c}}$$

Mas

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \tau}\right)_R = \frac{dI}{d\tau},$$

jã que a derivada é efetuada, acompanhando-se a frente da onda. Logo, ter-se-ã

$$\frac{dI}{d\tau} = \left(\frac{\partial I}{\partial \tau}\right) + \left(\frac{\partial I}{\partial a}\right) \frac{\partial a}{\partial \tau} \quad (\text{A.3})$$

tendo em vista que I é função de a e  $\tau$ . Todavia

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial I}{\partial \tau}\right)_a &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{a(\tau)}^R \frac{dr'}{\bar{c}(r', \tau)} \right\}_a = \\ &= \int_{a(\tau)}^R \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{dr'}{\bar{c}(r', \tau)} \right) = - \int_{a(\tau)}^R \frac{1}{\bar{c}^2} \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} \right)_{r'} dr' \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

e:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial a}\right) = \frac{1}{\bar{c}_a(\tau)}, \quad (\text{A.5})$$

em virtude de A.1.

Combinando-se as Relações A.2, A.4 e A.5 ter-se-á para  $\gamma$ :

$$\gamma = 1 - \int_{a(\tau)}^R \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau}\right)_{r'} dr' - \frac{u_a(\tau)}{\bar{c}_a(\tau)}$$

onde  $u_a(\tau)$  e  $\bar{c}_a(\tau)$  são, respectivamente, as velocidades de partícula e as características na superfície da esfera de gases.

b) Relação 3.24

A obtenção de  $dr$  a partir da Expressão 3.23 dá:

$$dr = \frac{G_a(\tau)(1 + 2\beta\sigma)}{c_0^2 (1 + \beta\sigma)^2} d\sigma$$

Substituindo-se este valor na Expressão 3.19, lembrando-se que pode ser assumido que  $u_a(\tau) = \sigma_a$ , vem, para  $\gamma$ :

$$\gamma = 1 - \frac{\sigma_a}{\bar{c}_a} - \int_{\sigma}^{\sigma_a} \frac{r}{c_0^3 \sigma^2 (1 + \beta\sigma)^2 (1 + 2\beta\sigma)} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} d\sigma \quad (\text{A.6})$$

Usando-se agora a primeira das Relações 3.22 e 3.23, ter-se-á, após a substituição, na Relação A.6:

$$\gamma = 1 - \frac{\sigma_a}{c(1 + \beta\sigma_a)} - \frac{2\beta}{c_0^2} \frac{dG_a(\tau)}{d\tau} \int_{\sigma}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{\sigma(1 + \beta\sigma)(1 + 2\beta\sigma)^2}$$

A resolução da integral (Spiegel, 1979) aliada ao fato de que  $z_a = 1/\beta\sigma_a$ ,  $z = 1/\beta\sigma$ , resultará, para  $\gamma$ :

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\beta c_0(z_a + 1)} - \frac{2\beta}{c_0^2} G'_a(\tau) \left[ \ln \frac{z}{z_a} - \frac{4(z - z_a)}{(z + 1)(z_a + 1)} \right]$$

onde

$$G'_a(\tau) = \frac{dG_a(\tau)}{d\tau}$$

c) Relação 3.26

O valor de  $\tau_0$  dado pela Relação 3.25 é:

$$\tau_0 = \frac{\beta}{c_0^2} \left\{ \int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{2G_a(\tau_0) - F_a(\tau'_0)}{\sigma'(1 + \beta\sigma')} d\sigma' + \frac{G_a(\tau_0) - G_1}{\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)} + J_0(\tau_0)G_a(\tau_0) \right\}$$

que se transforma em:

$$\tau_0 = \frac{\beta}{c_0^2} \left\{ 2G_a(\tau_0)y - \int_{\sigma}^{\sigma_1} \frac{G_a(\tau'_0)d\sigma'}{\sigma'(1 + \beta\sigma')} \right\} - N(\tau_0) \quad (A.7)$$

tendo em vista a expressão para  $y$ .

Diferenciando-se a Expressão A.7 em relação a  $\tau_0$ , ter-se-á:

$$1 = \frac{\beta}{c_0^2} \left\{ 2G_a(\tau_0) \frac{dy}{d\tau_0} + 2G'_a(\tau_0)y - \frac{d}{dy} \left[ \frac{G_a(\tau'_0)d\sigma'}{\sigma'(1+\beta\sigma')^3} \frac{dy}{d\tau_0} \right] \right\} - N'(\tau_0)$$

ou:

$$1 = \frac{\beta}{c_0^2} \left\{ 2G_a(\tau_0) \frac{dy}{d\tau_0} + 2G'_a(\tau_0)y - G_a(\tau_0) \frac{dy}{d\tau_0} \right\} - N'(\tau_0)$$

donde:

$$1 + N'(\tau_0) = \frac{\beta}{c_0^2} \left\{ G_a(\tau_0) \frac{dy}{d\tau_0} + 2G'_a(\tau_0)y \right\} \text{ que } \bar{e} \text{ a Relação 3.26.}$$

d) Relação 3.27

Da Relação 3.26:

$$\frac{dy}{d\tau} + 2 \frac{G'_a(\tau_0)}{G_a\tau_0} y = \frac{c_0^2}{\beta} \frac{1 + N'(\tau_0)}{G_a\tau_0}$$

Esta equação diferencial é do tipo:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

cuja solução é:

$$y \exp \left\{ \int f dx \right\} - \int g \exp \left\{ \int f dx \right\} dx = \text{cte.}$$

que aplicada à Relação 3.26 dará:

$$y \exp \left\{ 2 \int \frac{G'_a(\tau_0)}{G_a(\tau_0)} d\tau_0 \right\} -$$

$$\frac{c_0^2}{\beta} \int_0^{\tau_0} \frac{1 + N'(\tau_0)}{G_a(\tau_0)} \exp \left\{ 2 \int \frac{G'_a(\tau_0)}{G_a(\tau_0)} d\tau_0 \right\} d\tau_0 = \text{cte};$$

$$y [G_a(\tau_0)]^2 - \frac{c_0^2}{\beta} \int_0^{\tau_0} [1 + N'(\tau_0)] G_a(\tau_0) d\tau_0 = \text{cte}$$

A condição de contorno  $y = 0$  para  $\tau_0 = 0$ , obriga que  $\text{cte} = 0$ . Sendo assim:

$$y = \frac{c_0^2}{\beta G_a(\tau_0)^2} \int_0^{\tau_0} [1 + N'(\tau_0)] G_a(\tau_0) d\tau_0 \quad (\text{A.8})$$

Da expressão de  $N(\tau_0)$ , mostrada na Relação 3.26:

$$N'(\tau_0) = \frac{1}{c_0^2} \left[ \frac{G'_a(\tau_0)}{\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)} + G'_a J_0 + J'_0 G_a \right]$$

Esta expressão levada na Relação A.8 dá para  $y$ :

$$y = \frac{c_0^2}{\beta [G_a(\tau_0)]^2} \int_0^{\tau_0} G_a(\tau_0) d\tau_0 + \frac{c_0^2}{\beta [G_a(\tau_0)]^2} \left\{ -\frac{1}{c_0^2 \sigma_1 (1 + \beta\sigma_1)^2} \frac{G_a^2 - G_1^2}{2} - \frac{1}{c_0^2} \int_0^{\tau_1} G_a dJ_0 - \frac{1}{c_0^2} \int_{G_1}^{G_a} J_0 G_a dG_a \right\}$$

ou:

$$y = \frac{c_0^2}{\beta [G_a(\tau_0)]^2} \int_0^{\tau_0} G_a(\tau_0) d\tau_0 - \frac{G_a^2 - G_1^2}{2\beta (1 + \beta\sigma_1) [G_a(\tau_0)]^2} -$$

$$\frac{1}{2\beta [G_a(\tau_0)]^2} (G_a^2 J_1 - G_1^2 J_1) - \frac{1}{2\beta [G_a(\tau_0)]^2} \int G_a^2 dJ_0$$

Como  $J_1 = 0$ , (valor de  $J_0$  em  $t = 0$ ), vem:

$$y = \frac{c_0^2}{\beta [G_a(\tau_0)]^2} \int_0^{\tau_0} G_a(\tau_0) d\tau_0 - \frac{G_a - G_1^2}{2\beta\sigma_1(1 + \beta\sigma_1) [G_a(\tau_0)]^2} -$$

$$\frac{J_0}{2\beta} - \frac{1}{[G_a(\tau_0)]^2} \int_{\sigma_a}^{\sigma_1} \frac{G_a^2 d\sigma}{\sigma_a^2 (1 + \beta\sigma_a)^2}$$

ou, tendo em vista a segunda das Equações 3.22:

$$y = \frac{c_0^2}{\beta [G_a(\tau_0)]^2} \int_0^{\tau} G_a(\tau_0) d\tau_0 - \frac{G_a^2 - G_1^2}{2\beta\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)^2 G_a^2} -$$

$$\frac{J_0}{2\beta} - \frac{c_0^2}{2\beta [G_a(\tau_0)]^2} \int \frac{G_a^2}{\Omega^2} d\sigma$$

Como porêm,  $G_a(\tau) = G(\tau) = a\Omega$ , vem finalmente:

$$y = \frac{c_0^2}{\beta G_a(\tau_0)^2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_a} G_a(\tau_0) d\tau_0 - \frac{G_a^2 - G_1^2}{2\beta\sigma_1(1 + \beta\sigma_1)^2 G_a^2} - \frac{J_0}{2\beta}$$

$$c_0 a_0 G_1 J / 2 G_a^2$$

onde

$$J_1 = (c_0/\Omega_1) \int \left( \frac{a}{a_0} \right) d\sigma_a, \text{ que é a Relação 3.27}$$

e) Relação 3.49

A Relação 3.31 dá para z:

$$z = 1 + \frac{q}{2r_1} + \left[ \frac{q}{r_1} + \left( \frac{q}{r_1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow \infty$ , e z tenderã:

$$z = 1 + \frac{q}{2r_1} + \left[ \left( \frac{q}{r_1} \right) \left( 1 + \frac{4r_1}{q} \right) \right]^{1/2} =$$

$$1 + \frac{q}{2r_1} + \frac{q}{2r_1} \left[ 1 + \frac{4r_1}{q} \right]^{1/2} \cong \frac{q}{r_1} \quad (\text{A.9})$$

Assim, pela Relação 3.32, para  $q$  muito grande e em virtude da Relação A.9:

$$\begin{aligned}y &= \ln z - \ln z_1 + 2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z_1^2}\right) \\&= \ln q - \ln \Gamma_1 - \ln z_1 + \frac{2\Gamma_1}{q} - \frac{2}{z_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_1}{q}\right) + \frac{1}{2z_1^2} \\&= \ln q - \ln \Gamma_1 \\&= \ln q\end{aligned}$$

Tendo em vista que  $u_1$  (e conseqüentemente  $\sigma_1$ ) é grande, pode-se aproximar:  $1/\beta\sigma_1 = 0$ , tendo como conseqüência  $z_1 = 1$ . Mas pela Relação 3.35:

$$K_1 = 1 + \frac{\alpha(z-1)}{2z_1} - \frac{\alpha J_1}{2} = 1 + \frac{\alpha(z_1-1)}{2z_1}$$

onde foi desprezado o valor da integral  $J_1$ .

Pelas considerações feitas conclui-se então que  $K_1 \approx 1$ .

Desprezando-se também o valor da integral  $J_0$ , ter-se-á:

$$K_0(q) = \Gamma_1 y$$

levando-se os valores de  $K_1$  e  $K_0(q)$  na Relação 3.36,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-1 + \sqrt{4\alpha\Gamma_1 \ln q + 1}}{2\alpha\Gamma_1 \ln q} = \frac{2}{1 + [1 + 4\alpha\Gamma_1 \ln q]^{1/2}} = \\
 &= \frac{2}{1 + \left[1 + 4\alpha \frac{\beta P_0}{\rho_0 c_0} \ln q\right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha \frac{\beta P_0}{\rho_0 c_0} \ln q}} = \\
 &= \left(\frac{\rho_0 c_0}{\beta}\right) \left(P_0 \ln \frac{R}{a_0 x}\right)^{-1/2} \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

Coloca-se a Expressão A.10 na seguinte forma:

$$x = A \left[ \ln \left( \frac{R}{a_0 x} \right) \right]^{-1/2} \quad \text{onde } A \text{ é constante.}$$

Tem-se então:

$$\ln \left( \frac{R}{a_0 x} \right) = \frac{A^2}{x^2}$$

ou:

$$\ln \left( \frac{R}{a_0} \right) = \frac{A^2}{x^2} + \ln x$$

quando

$$R \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0.$$

Mas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{A^2}{x^2} + \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A^2}{x^2} \left[ 1 + \frac{\ln x}{A^2/x^2} \right]$$

quando  $x \rightarrow 0$ , o termo  $\ln x/A^2/x^2$  tende para:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln x}{A^2/x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{A^2(-2)x^{-3}} \text{ (por L'Hopital) } = 0$$

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A^2}{x^2} \left[ 1 + \frac{\ln x}{A^2/x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A^2}{x^2}$$

donde, para R grande:

$$\ln \frac{R}{a_0} = \frac{A^2}{x^2}$$

donde se tira:

$$x = \left( \frac{\rho_0 c_0}{\beta} \right)^{1/2} \left( \alpha P_0 \ln \frac{R}{a_0} \right)^{-1/2}$$

que é a Relação 3.49

Esta expressão, introduzida na Relação 3.48, fornece a Expressão 3.51.

f) Relação 3.50

O valor de  $\gamma$  dado pela Relação 3.38 e em virtude da Expressão A.9 fica:

$$\gamma = - \frac{\beta}{c_0^2} G'_a(\tau_0) \ln q$$

Porém, tendo em vista as Expressões 3.30 e 3.37:

$$\gamma = \frac{2\beta}{c_0^2} \frac{1}{\theta_1} x G_1 \ln \left( \frac{R}{a_0 x} \right) = Ax \left( \ln \frac{R}{a_0} - \ln x \right) \quad (A.11)$$

onde  $A$  é constante.

Da Relação A.11 ter-se-á, quando  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{\gamma}{A} + x \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma}{xA} = \ln \frac{R}{a_0}$$

Tem-se então:

$$\gamma = Ax \ln \left( \frac{R}{a_0} \right) = - \frac{2\beta}{c_0^2} G'_a(\tau_0) \ln \left( \frac{R}{a_0} \right) \text{ que é a Relação 3.50.}$$