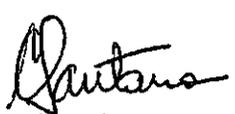


1. Publicação nº <i>INPE-2402-TDL/089</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH/ECO</i>	Programa <i>FRH/ECO</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>ANTENAS REFLETORAS</i> <i>ANTENAS</i> <i>ÓPTICA FÍSICA SINTÓTICA</i>			
7. C.D.U.: <i>621.396.677.3</i>			
8. Título <i>TEORIA ASSINTÓTICA DE ESPALHAMENTO DE REFLETORES AXIALMENTE SIMÉTRICOS</i>		10. Páginas: <i>113</i>	
		11. Última página: <i>F.4</i>	
9. Autoria <i>Carlos Alberto Iennaco Miranda</i>		12. Revisada por  <i>Carlos Eduardo Santana</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas <i>O campo espalhado por uma superfície de revolução qualquer quando iluminada por fontes com polarização linear, circular ou elíptica, pode ser calculado pelo método da Óptica Física, que consiste na integração da corrente induzida na superfície refletora. Na maioria dos casos de interesse, as integrais de campo não possuem solução exata e tem-se que recorrer a métodos numéricos. Pelo método da Óptica Física Assintótica, as integrais que fornecem o campo espalhado são avaliadas de maneira analítica simplificada pelo método de fase estacionária. Os métodos da Óptica Física e sua aproximação assintótica foram comparados com a Teoria Geométrica Uniforme da Difração. Os diagramas de radiação obtidos para superfícies parabólica e hiperbólica, utilizando-se a formulação desenvolvida nos três métodos foram comparados, sendo que pelos métodos assintóticos há uma apreciável no tempo gasto para o cálculo do campo irradiado. Para refletores grandes em relação ao comprimento de onda, é vantajosa a utilização da Óptica Física tendo-se em vista que esta fornece os diagramas de radiação com boa precisão, quando comparados com a solução não-aproximada.</i>			
15. Observações <i>Dissertação de Mestrado em Eletrônica e Telecomunicações aprovada em 22 de dezembro de 1981.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Eletrônica e Telecomunicações

Dr. Áydano Barreto Carleial


Presidente

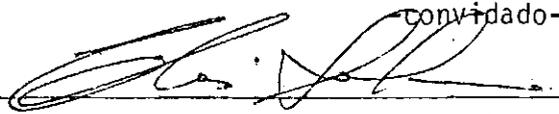
Dr. Carlos Eduardo Santana


Orientador

Dr. Antonio Roberto Panicalli


Membro da Banca
convidado-

Dr. Clovis Solano Pereira


Membro da Banca

Candidato: Carlos Alberto Iennaco de Miranda

São José dos Campos, 22 de dezembro de 1981

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Dr. Carlos Eduardo Santana pela sua orientação. Sua participação através de sugestões, críticas e revisões, foi fundamental para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

The field scattered by a general surface of revolution when illuminated by linearly, circularly or elliptically polarized feeds, can be calculated by the Physical Optics method, which consists of the integration of the current induced in the reflector surface. Generally, the field integrals can not be carried out analytically and it is necessary to use numerical methods. By the Asymptotic Physical Optics method, the integrals that yield the scattered field can be evaluated analytically by the method of stationary phase. The methods of the Physical Optics and its asymptotic approximation were compared with the Uniform Geometrical Theory of Diffraction. The radiation patterns obtained for parabolic and hyperbolic surfaces, using the formulation developed in the three methods, were compared. It is found that with the asymptotic methods, there is an appreciable reduction in the processing time for the calculation of the radiated field. For large reflectors it is advantageous to use the approximation of the Physical Optics, since it yields the radiation patterns with good accuracy, when compared to the full Physical Optics solution.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>iv</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>xi</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DO CAMPO ESPALHADO POR UMA SUPERFÍCIE GERAL DE REVOLUÇÃO, USANDO ÓPTICA FÍSICA</u>	3
<u>CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DO CAMPO ESPALHADO POR UMA SUPERFÍCIE GERAL DE REVOLUÇÃO USANDO ÓPTICA FÍSICA ASSINTÓTICA</u>	9
3.1 - Preparação das equações de campo para uma avaliação assintótica	9
3.2 - Avaliação assintótica das equações 3.5	11
3.3 - Campo total irradiado	17
3.4 - Interpretação do campo espalhado, nas regiões de observações para superfícies convexas e côncavas	18
<u>CAPÍTULO 4 - CAMPO ESPALHADO POR UMA SUPERFÍCIE REFLETORA, USANDO TEORIA GEOMÉTRICA UNIFORME DA DIFRAÇÃO</u>	21
4.1 - Princípio do método	21
4.2 - Coeficientes de difração	26
4.3 - Aplicação a superfícies côncavas	32
4.3.1 - Campo difratado em Q_+	35
4.3.2 - Campo difratado em Q_-	37
4.3.3 - Campo total irradiado	39
4.4 - Aplicação a superfícies convexas	39
4.4.1 - Campo difratado em Q_+	42
4.4.2 - Campo difratado em Q_-	43
4.4.3 - Campo da Óptica Geométrica	45
4.4.4 - Campo total irradiado	48
<u>CAPÍTULO 5 - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DESENVOLVIDOS E CONCLUSÕES</u>	49
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

- APÊNDICE A - CÁLCULO DA NORMAL E DO ELEMENTO DE ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE GERAL DE REVOLUÇÃO
- APÊNDICE B - CAMPO IRRADIADO PELO ALIMENTADOR
- APÊNDICE C - EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DO CAMPO ESPALHADO
- APÊNDICE D - FORMAS INTEGRAIS DAS FUNÇÕES DE BESSEL
- APÊNDICE E - CÁLCULO DE INTEGRAIS FINITAS PELO MÉTODO DE FASE ESTACIONÁRIA
- APÊNDICE F - DETERMINAÇÃO DOS RAIOS DE CURVATURA DAS FRENTES DE ONDA REFLETIDAS

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Geometria para as Equações 2.1a e 2.1b	3
2.2 - Geometria para o espalhamento da superfície de revolução ..	5
3.1 - Regiões de observação do campo espalhado por uma superfície convexa, no plano $\phi = 0^0$	19
3.2 - Regiões de observação do campo espalhado por uma superfície côncava, no plano $\phi = 0^0$	20
4.1 - Reflexões em uma superfície curva	24
4.2 - Geometria para o sistema de raios fixos	27
4.3 - Geometria dos raios difratados para uma parabolóide	32
4.4 - Plano da borda do parabolóide	34
4.5 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_+	36
4.6 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_-	38
4.7 - Geometria para pontos de difração na borda de um refletor axialmente simétrico com alimentados no foco	40
4.8 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_+	41
4.9 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_-	44
5.1 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma parábola com alimentador no foco	52
5.2 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma parábola com alimentador no foco	53
5.3 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma parábola com alimentador no foco	54
5.4 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma parábola com alimentador no foco	55
5.5 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	56
5.6 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	57
5.7 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	58
5.8 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	59
5.9 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	60
5.10 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	61

	<u>Pág.</u>
5.11 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	62
5.12 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	63
5.13 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	64
5.14 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	65
5.15 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	66
5.16 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	67
5.17 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	68
5.18 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	69
5.19 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco	70
5.20 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco	71
B.1 - Geometria para a descrição dos campos irradiados pelo alimentador	B.1
F.1 - Geometria para o cálculo dos raios de curvatura das frentes de onda refletida	F.2

LISTA DE SÍMBOLOS

- \bar{D} - Coeficiente diádico de difração
- D_s, D_h - Coeficientes escalares de difração
- $\vec{E}_s(P)$ - Campo elétrico espalhado, para o ponto de observação P
- \vec{E}_i - Campo elétrico incidente na superfície refletora
- E_θ - Componente do campo elétrico espalhado na direção θ
- E_ϕ - Componente do campo elétrico espalhado na direção ϕ
- E_θ^t - Campo elétrico total irradiado na direção θ
- E_ϕ^t - Campo elétrico total irradiado na direção ϕ
- E_θ^\pm - Campo elétrico irradiado na direção θ correspondente aos pontos finais
- E_ϕ^\pm - Campo elétrico irradiado na direção ϕ correspondente aos pontos finais
- $\bar{E}(s)$ - Campo elétrico da Óptica Geométrica no ponto de coordenada s
- $\bar{E}_0(0)$ - Termo principal da expansão de Luneberg-Kline para o campo elétrico em $s = 0$
- $\bar{E}^d(s)$ - Campo elétrico difratado em s
- $\bar{E}^i(Q_e)$ - Campo elétrico incidente no ponto Q_e
- $E_{\beta_0}^d$ - Componente do campo elétrico difratado, paralela ao plano de difração.
- $E_{\beta_0}^i$ - Componente do campo elétrico incidente, paralela ao plano de incidência
- E_ϕ^d - Componente do campo elétrico difratado, perpendicular ao plano de difração

- E_{ϕ}^i - Componente do campo elétrico incidente, perpendicular ao plano de incidência
- $F(x)$ - Função de transição
- $g(\theta')$ - Função que fornece a superfície refletora
- $\vec{H}_S(P)$ - Campo magnético espalhado, para o ponto de observação P
- $\vec{H}^d(s)$ - Campo magnético difratado em s
- $H_{\beta_0}^d$ - Componente do campo magnético difratado, paralela ao plano de difração
- $H_{\beta_0}^i$ - Componente do campo magnético incidente, perpendicular ao plano
- $I_{e_{\theta}}^{\pm}$ - Contribuição dos pontos finais na direção θ
- $I_{e_{\phi}}^{\pm}$ - Contribuição dos pontos finais na direção ϕ
- $I_{s_{\theta}}^{\pm}$ - Contribuição dos pontos estacionários na direção θ
- $I_{s_{\phi}}^{\pm}$ - Contribuição dos pontos estacionários na direção ϕ
- $I_{s_{\theta}}$ - Contribuição do ponto estacionário correspondente ao raio refletido da Óptica Geométrica, na direção θ
- $I_{s_{\phi}}$ - Contribuição do ponto estacionário correspondente ao raio refletido da Óptica Geométrica, na direção ϕ
- \vec{J}_S - Densidade de corrente elétrica superficial
- k - Constante de propagação do meio
- L - Parâmetro distância
- L^i - Parâmetro distância, relativo ao limite de sombra

L^r	- Parâmetro distância, relativo ao limite de reflexão
\hat{n}	- Versor normal à superfície refletora
\hat{n}_e	- Versor normal à borda, dirigido no sentido contrário ao seu centro de curvatura
Q_{\pm}	- Pontos de difração
Q_e	- Ponto de difração na borda
Q_r	- Ponto de reflexão
\hat{s}	- Versor na direção do raio difratado
R	- Distância da fonte ao ponto de difração
\hat{s}^i	- Versor na direção do raio incidente
s^{\pm}	- Argumentos das funções W
Y_c	- Admitância característica do meio
z_r^i	- Argumentos da função de transição
W	- Função que remove a singularidade nas transições
α	- Parâmetro do termo de fase na integração
β	- Parâmetro das funções de Bessel
$\hat{\beta}_o$	- Versor paralelo ao plano de difração
$\hat{\beta}'_o$	- Versor paralelo ao plano de incidência
β_o	- Ângulo entre o raio incidente e a tangente à borda
γ_{\pm}^{\pm}	- Ângulos de incidência para os pontos Q_{\pm}
γ_{\pm}^{\pm}	- Ângulos de difração para os pontos Q_{\pm}
ϵ_o	- Permissividade do vácuo

- ρ_1, ρ_2 - Raios principais de curvatura de uma frente de onda
- ρ_1^i, ρ_2^i - Raios principais de curvatura de uma frente de onda incidente
- ρ_1^r, ρ_2^r - Raios principais de curvatura de uma frente de onda refletida
- ρ_e^i - Raio principal de curvatura de uma frente de onda incidente, no plano de incidência
- ρ_e^r - Raio principal de curvatura de uma frente de onda refletida, no plano de reflexão
- ρ - Coordenada da superfície refletora
- μ_0 - Permeabilidade do vácuo
- $\hat{\phi}$ - Versor normal ao plano de difração
- $\hat{\phi}'$ - Versor normal ao plano de incidência
- ψ - Fase do campo espalhado

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento dos computadores, o uso de métodos numéricos para a análise e o projeto de antenas refletoras tornou-se comum. Em certos casos, as precisões obtidas na análise por computadores excedem às aquelas conseguidas com um trabalho experimental cuidadoso. Além disso, o tempo e o custo das medidas são comparáveis aos da análise numérica, quando não pesam em favor da última. Na prática, o que ocorre é o uso do computador, na fase de projeto, e as medidas no teste final de verificação do sistema.

Este trabalho trata do estudo de métodos que diminuem o tempo de processamento e que mantêm boa precisão no cálculo do campo espalhado por superfícies refletoras de revolução.

No Capítulo 2 introduz-se o método da Óptica Física para o cálculo do campo distante espalhado por uma superfície de revolução qualquer, quando iluminada por fontes com polarização linear, circular ou elíptica. No método da Óptica Física, aproxima-se a corrente, na superfície refletora, através da corrente calculada pela teoria da Óptica Geométrica, e usa-se a integração desta distribuição de corrente para a determinação do campo espalhado. Na maioria dos casos de interesse, esta integral não possui solução exata e tem-se de recorrer a métodos numéricos. Apesar do tempo de computação necessário, o método da Óptica Física é bastante útil para a análise de sistemas refletores, principalmente perto do eixo de radiação de antenas focadas no infinito; nesta situação é o método mais preciso que se conhece. Para refletores muito grandes em comparação com o comprimento de onda ($D/\lambda > 60$), o tempo excessivamente grande de computação requerido para a avaliação das integrais da Óptica Física torna este método inviável para a fase exploratória do projeto embora seja assim mesmo utilizado para a verificação teórica final.

No Capítulo 3 as integrais da Óptica Física que fornecem o campo espalhado são calculadas de maneira analítica aproximada pelo método de fase estacionária. Este tipo de análise, denominado Óptica Física Assintótica, foi inicialmente usado por Rusch (1974). Sua solução, que é singular no limite de reflexão, foi recentemente melhorada por Knop (1975) e Safak (1976).

No Capítulo 4 introduz-se a Teoria Geométrica Uniforme da Difração (Kouyoumjian and Pathak, 1974), aplicando-a ao cálculo do campo espalhado por superfícies refletoras axialmente simétricas dos tipos côncava e convexa.

A comparação entre os três métodos é feita no Capítulo 5, utilizando-se os diagramas de radiação de superfícies parabólicas e hiperbólicas, nos planos E e H, calculados aplicando-se os métodos desenvolvidos.

Com os métodos assintóticos, apesar de serem limitados nas regiões axiais há uma redução apreciável no tempo gasto para o cálculo do campo irradiado. A utilização destes, no entanto, é vantajosa para a análise de refletores grandes em relação ao comprimento de onda, pois fornecem os diagramas de radiação com boa precisão, quando comparados com o método da Óptica Física. Estes métodos apresentam a característica de identificar as partes do refletor que mais contribuem para o campo em um dado ponto de observação, dando assim mais visão de projeto ao engenheiro. A combinação dos métodos da Óptica Física, da Óptica Física Assintótica e da Teoria Geométrica Uniforme da Difração, utilizando-se o primeiro para o cálculo do campo nas regiões onde os métodos assintóticos falham é considerada uma ferramenta rápida e de precisão razoável para um grande número de problemas reais.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DO CAMPO ESPALHADO POR UMA SUPERFÍCIE GERAL DE REVOLUÇÃO, USANDO ÓPTICA FÍSICA

O campo eletromagnético espalhado por uma superfície S fica perfeitamente caracterizado se se conhecem as densidades de correntes superficiais nesta superfície. Em particular, pelo teorema da equivalência, mostra-se que, para o cálculo do campo externo a S , basta o conhecimento da densidade da corrente elétrica superficial, \vec{J}_S . Se o interesse for no campo distante espalhado, i.e, o campo para pontos de observação suficientemente afastados da superfície S , este pode ser escrito, na geometria da Figura 2.1 como (Silver, 1965):

$$\vec{E}_S(P) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi R} e^{-jkR} \iint_S [\vec{J}_S - (\vec{J}_S \cdot \hat{R}) \hat{R}] e^{jk\hat{\rho} \cdot \hat{R}} dS \quad (2.1a)$$

$$\vec{H}_S(P) = \frac{j\omega\epsilon_0}{4\pi R} e^{-jkR} \iint_S \left[\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} (\vec{J}_S \times \hat{R}) \right] e^{jk\hat{\rho} \cdot \hat{R}} dS \quad (2.1b)$$

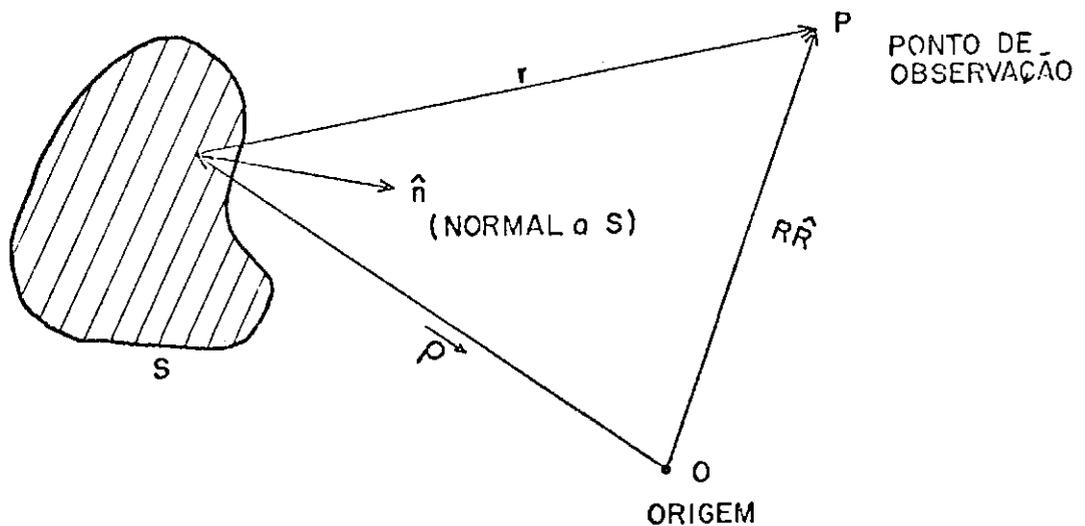


Fig. 2.1 - Geometria para as Equações 2.1a e 2.1b.

Estas equações são exatas desde que se conheça \vec{J}_S e podem ser utilizadas para a análise do campo espalhado por qualquer tipo de refletor. Naturalmente, a fonte do campo espalhado, \vec{J}_S , é induzida no refletor por ondas incidentes conhecidas. Desta forma, em princípio, é possível estabelecer uma equação integral que permita a determinação exata de \vec{J}_S . Entretanto, a solução, normalmente numérica, desta equação integral é impraticável para refletores grandes em comparação com o comprimento de onda. Na prática, recorre-se a formas aproximadas da corrente induzida. A aproximação mais usual, aplicável quando se trata de superfícies suaves e grandes em comparação com o comprimento de onda, é a da Óptica Física. Dividindo-se a superfície S em regiões iluminadas e em sombra, segundo os conceitos da Óptica Geométrica, a aproximação da Óptica Física para \vec{J}_S é

$$\vec{J}_S = \begin{cases} 2(\vec{n} \times \vec{H}_i) & \text{- nas regiões iluminadas} \\ 0 & \text{- nas regiões de sombra} \end{cases} \quad (2.2)$$

onde \vec{H}_i é o campo magnético incidente conhecido, e o fator 2 aparece porque a superfície S é supostamente de material condutor perfeito.

A aproximação da Óptica Física para \vec{J}_S , quando usada nas integrais das Equações 2.1, fornece resultados com precisões compatíveis com as dos valores experimentais, mesmo para refletores de diâmetro da ordem de $3 - 4\lambda$. Para refletores tão pequenos, seria de se esperar que a corrente induzida da Óptica Física se tornasse menos precisa, uma vez que a influência das bordas se acentua. O mesmo poderia ser dito para refletores com raios de curvatura não muito grandes em comparação com o comprimento de onda. Não há explicação rigorosa para o fato da aproximação da Óptica Física funcionar tão bem fora de suas limitações naturais. A aproximação falha quando há interação entre campos espalhados por várias superfícies e quando se trata de refletores que projetam raios em si mesmo.

Neste capítulo, a integral das Equações 2.1, será particularizada para o cálculo do campo espalhado por uma superfície qualquer de revolução. Esta classe de superfícies representa um caso especial, uma vez que, como será mostrado, a integração na direção azimutal pode ser avaliada analiticamente, transformando-se, desta forma, o problema da determinação do campo espalhado, no cálculo de uma integral simples.

Considerando-se a geometria da Figura 2.2 a equação polar geral de uma superfície de revolução segundo o eixo z pode ser escrita como:

$$k\rho(\theta') = -1/g(\theta') \quad (2.3)$$

$$\theta_0 \leq \theta' \leq \pi$$

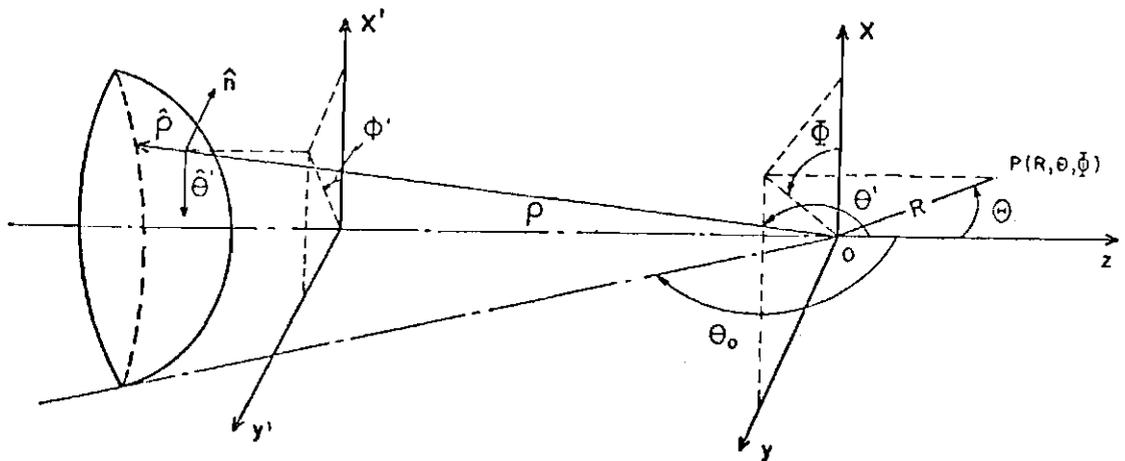


Fig. 2.2 - Geometria para o espalhamento da superfície de revolução.

Para calcular a corrente \vec{J}_S na aproximação da Óptica Física, Equação 2.2, são necessárias as expressões da normal e do campo \vec{H}_i . Mostra-se, no Apêndice A, que o versor \hat{n} normal a S, dirigido no sentido indicado na Figura 2.2 é dado por (veja a Equação A.7).

$$\hat{n} = \frac{\hat{\rho} + \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \hat{\phi}'}{\left[1 + \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (2.4)$$

Para o campo elétrico do alimentador, \vec{E}_i , supõe-se a forma geral descrita no Apêndice B para fontes pontuais situadas em O. No Apêndice C mostra-se o desenvolvimento da expressão do campo espalhado para o caso de excitação por tais alimentadores. Com o intuito de simplificar as expressões resultantes e de melhor compreender os aspectos físicos do problema, tratar-se-á, daqui por diante somente com alimentadores descritos por (veja a Expressão B.11).

$$\vec{E}_i = -\sqrt{G_f(\theta')} (\mu_{\theta'} \cos \phi' \hat{\theta}' + \text{sen } \phi' \hat{\phi}') \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad (2.5)$$

que pode representar um grande número de alimentadores práticos desde que

$$\mu_{\theta'} = \begin{cases} 1 & \text{para alimentadores polarizados como fontes de Huygens} \\ -\cos \theta' & \text{para alimentadores polarizados como dipolos segundo o eixo x.} \end{cases}$$

Particularizando-se as expressões do campo espalhado do Apêndice C, para o caso de excitação por alimentadores descritos pela Equação 2.5, tem-se:

$$\vec{E}_S = \frac{e^{-jkR}}{R} \{E_{\theta} \hat{H} + E_{\phi} \hat{\Phi}\} \quad (2.6)$$

com E_0 e E_ϕ dados através das expressões:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_0 \\ E_\phi \end{Bmatrix} &= \pm \left(\frac{1}{2} \right) \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta' \sqrt{G_f(\theta')} e^{-j\alpha} \sin \theta'}{[g(\theta')]^2} \\ &\begin{Bmatrix} \nu_{\theta'} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix} [g'(\theta') \sin \theta' - g(\theta') \cos \theta'] [J_0(\beta) \mp J_2(\beta)] \\ 2j \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} [g'(\theta') \cos \theta' + g(\theta') \sin \theta'] J_1(\beta) \\ g(\theta') \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix} [J_0(\beta) \pm J_2(\beta)] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo

$$\alpha = (\cos \theta' \cos \theta - 1)/g(\theta') = k\rho (1 - \cos \theta' \cos \theta)$$

$$\beta = - \sin \theta \sin \theta' / g(\theta') = k\rho \sin \theta \sin \theta'$$

As integrais da Equação 2.7 são difíceis de ser calculadas analiticamente e são, em geral, avaliadas numericamente, na forma apropriada em que se encontram, por códigos de quadratura (método de Simpson, por exemplo). A dificuldade aparece quando se deseja calcular o campo de refletores grandes, em pontos de observação afastados do eixo, pois o argumento, β , das funções de Bessel pode tomar valores elevados, o que produzirá oscilações rápidas no integrando da Equação 2.7. Por exemplo, para um refletor parabólico de 120λ de diâmetro e razão foco/diâmetro igual a 0,4, para um ponto de observação em $\theta = 60^\circ$, tem-se $\beta \approx 300$. Supondo-se que na integração numérica tome-se pelo menos 10 pontos do integrando, por período, das funções de Bessel, isto implica aproximadamente 1000 pontos de amostragem do integrando para cada ϕ de observação. Vê-se logo que o processo de integração numérica

demanda um tempo de computação impraticavelmente longo para antenas grandes. No capítulo seguinte introduzir-se-á um método assintótico para o cálculo rápido das integrais da Óptica Física.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DO CAMPO ESPALHADO POR UMA SUPERFÍCIE GERAL DE REVOLUÇÃO, USANDO ÓPTICA FÍSICA ASSINTÓTICA

3.1 - PREPARAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO PARA UMA AVALIAÇÃO ASSINTÓTICA

Notou-se no fim do Capítulo 2 que os integrandos da Equação 2.7 são funções que oscilam rapidamente para pontos de observação afastados do eixo. Este comportamento é devido à presença do parâmetro β nos argumentos das funções de Bessel. Para a avaliação assintótica daquelas integrais, após identificado este parâmetro grande, é necessário colocá-las em uma forma apropriada, isolando nos integrandos, as funções de variação lenta e as de variação rápida. Observa-se, pelas deduções do Apêndice C, que as funções de Bessel presentes na Equação 2.7 representam os resultados das integrações em ϕ' . Se estas funções de Bessel forem substituídas por suas representações integrais dadas no Apêndice D, as integrais da Equação 2.7 aparecem como produtos de integrais \bar{s} em θ' e \bar{s} em ϕ' . As integrais \bar{s} em ϕ' podem ser avaliadas assintoticamente pelo método da fase estacionária, descrito no Apêndice E, pois são da forma da Equação D.2 que possui um núcleo que varia lentamente com a variável ϕ' e um parâmetro grande, β em seu termo de fase. Encontra-se que a contribuição dos pontos finais é igual a zero e a contribuição dos pontos estacionários localizados em

$$\phi'_+ = \phi \quad (3.1)$$

e

$$\phi'_- = \phi + \pi \quad (3.2)$$

fornece a forma assintótica das funções de Bessel:

$$J_m(\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}} \cos\left\{\beta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \left[e^{j(\beta - \pi/4 - m\pi/2)} + e^{-j(\beta - \pi/4 - m\pi/2)} \right] \quad (3.3)$$

Substituindo-se a Equação 3.3 na 2.7 e rearranjando-se, pode-se escrever o campo espalhado como a soma das contribuições dos dois pontos estacionários:

$$E_\theta = E_\theta^+ + E_\theta^- \quad (3.4a)$$

$$E_\phi = E_\phi^+ + E_\phi^- \quad (3.4b)$$

onde

$$\left. \begin{matrix} E_\theta^\pm \\ E_\phi^\pm \end{matrix} \right\} = \int_\theta^\pi \left[\begin{matrix} h_\theta \\ h_\phi \end{matrix} \right] (\theta', \phi'_\pm) e^{j\psi(\theta', \phi'_\pm)} d\theta' \quad (3.5)$$

O núcleo destas integrais é dado por:

$$h_\theta(\theta', \phi'_\pm) = j \left\{ \frac{1}{2} \cos\phi \sqrt{\frac{2Gf(\theta')}{\pi\beta}} \cdot \frac{\text{sen}\theta'}{[g(\theta')]^2} \cdot \mu_\theta \left\{ \cos\theta [g'(\theta') \text{sen}\theta' - g(\theta') \cos\theta'] \mp [g'(\theta') \cos\theta' + g(\theta') \text{sen}\theta'] \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \text{sen}\theta \right\} \right\} e^{\mp j\pi/4} \quad (3.6a)$$

$$h_\phi(\theta', \phi'_\pm) = -j \left\{ \frac{1}{2} \text{sen}\phi \sqrt{\frac{2Gf(\theta')}{\pi\beta}} \frac{\text{sen}\theta'}{g(\theta')} \right\} e^{\mp j\pi/4} \quad (3.6b)$$

Os termos de fase são dados por

$$\psi(\theta', \phi'_{\pm}) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta' \mp \theta}{2}}{g(\theta')} = -2k\rho(\theta') \operatorname{sen}^2 \frac{\theta' \mp \theta}{2} \quad (3.7)$$

As funções h_{θ} e h_{ϕ} variam lentamente com θ' , enquanto $k\rho(\theta')$ pode ser identificado como um parâmetro grande no termo de fase $\psi(\theta', \phi'_{\pm})$. Consequentemente, as integrais da Equação 3.5 estão em forma apropriada para avaliação por métodos assintóticos.

A avaliação assintótica das integrais em ϕ' leva a interpretação física de que as contribuições mais importantes para o campo em pontos afastados da direção axial, dado pela Equação 2.1, provêm somente daqueles pontos situados na intersecção do plano $\phi' = \phi$ com a superfície S. A avaliação assintótica das integrais da Equação 3.5 identificará, por sua vez, quais as vizinhanças dos pontos em θ' , na curva de intersecção da superfície S com o plano $\phi' = \phi$, que mais contribuem para o campo espalhado.

3.2 - AVALIAÇÃO ASSINTÓTICA DAS EQUAÇÕES 3.5

As integrais da Equação 3.5 podem ser calculadas assintoticamente pelo método de fase estacionária, descrito no Apêndice E. Os pontos de fase estacionária são aqueles que anulam a derivada do termo de fase. Como

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta'} = \frac{[\cos(\theta' \mp \theta) - 1] g'(\theta') + \operatorname{sen}(\theta' \mp \theta) g(\theta')}{[g(\theta')]^2} \quad (3.8)$$

então os pontos estacionários são dados por

$$\theta'_{\pm} = \pm \theta \quad (3.9)$$

os quais desaparecem do intervalo de integração ($\theta_0 \leq \theta' \leq \pi$), quando o ponto de observação passa pelo limite de sombra. A Equação 3.8 fornece ainda um ponto estacionário que corresponde ao ponto de reflexão do raio refletido da Óptica Geométrica clássica. Fazendo-se o numerador desta equação igual a zero, acha-se o ângulo que o raio refletido faz com o eixo z em função do ângulo que o raio incidente faz com este eixo. Então:

$$\theta = \theta' - 2 \operatorname{atan} \left(\frac{g(\theta')}{g'(\theta')} \right) \quad (3.10a)$$

ou

$$\theta = \theta' - 2 \operatorname{atan} \left(- \frac{\rho(\theta')}{\rho'(\theta')} \right) \quad (3.10b)$$

Para o caso particular em que a superfície S é um parabolóide de revolução, este outro ponto de fase estacionária é indeterminado quando $\theta = 0^0$. A equação polar para uma superfície refletora do tipo parabólica é dada por:

$$\rho = \frac{2f}{1 - \cos\theta'} \quad (3.11)$$

onde f é a distância focal. Substituindo-se a Equação 3.11 na 3.10b verifica-se que $\theta = 0^0$, para todos os ângulos de incidência, ou seja, os raios refletidos são paralelos ao eixo z.

A avaliação assintótica das integrais da Equação 3.5, quando os pontos estacionários se aproximam uniformemente dos pontos finais é explicada no Apêndice E. Usando-se a Equação E.6, a Equação 3.5 pode ser escrita assintoticamente como:

$$E_{\theta}^{\pm} = I_{e\theta}^{\pm} + I_{s\theta}^{\pm} W(S_{\pm} e^{j\pi/4}) \quad (3.12a)$$

$$E_{\phi}^{\pm} = I_{e\phi}^{\pm} + I_{s\phi}^{\pm} W(S_{\pm} e^{j\pi/4}) \quad (3.12b)$$

onde a única contribuição de pontos finais é devida aos pontos em $\theta' = \theta_0$, uma vez que os núcleos das integrais 3.5 tornam-se iguais a zero para $\theta' = \pi$. Usando-se a Equação E.5 obtêm-se a contribuição dos pontos finais:

$$I_{e\theta}^{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \cos \phi \sqrt{\frac{2Gf(\theta_0)}{\pi\beta(\theta_0)}} \operatorname{sen} \theta_0 \mu_{\theta_0} \left\{ \cos \theta \left[g'(\theta_0) - \frac{-g(\theta_0)\cos\theta_0}{1} \mp \frac{[g'(\theta_0)\cos\theta_0 + g(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0] \operatorname{sen}\theta}{1} \right] \right\}}{e^{j \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_0 \mp \theta)/2}{g'(\theta_0)}}} e^{\mp j \pi/4} \quad (3.13a)$$

$$I_{e\phi}^{\pm} = \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\phi \sqrt{\frac{2G_f(\theta_0)}{\pi\beta(\theta_0)}} \operatorname{sen}\theta_0 g(\theta_0) \right.}{\operatorname{sen}(\theta_0 \mp \theta) g(\theta_0) + [\cos(\theta_0 \mp \theta) - 1] g'(\theta_0)} \cdot \left. e^{j \frac{2 \operatorname{sen}^2 (\theta_0 \mp \theta)/2}{g(\theta_0)}} \right\} e^{\mp j \pi/4}$$

(3.13b)

Da Equação E.4 obtêm-se a contribuição dos pontos estacionários:

$$I_{S\theta}^{\pm} = \mp \mu_{\theta} \cos\phi \sqrt{G_f(\theta)} \quad (3.14a)$$

$$I_{S\phi}^{\pm} = \mp \operatorname{sen}\phi \sqrt{G_f(\theta)} \quad (3.14b)$$

A função $W(S_{\pm} e^{j\pi/4})$ é definida pela Equação E.10 com o argumento dado por:

$$S^+ = \pm \sqrt{|\psi(\theta_0, \phi_+)|} \quad (\theta_0 - \theta) \gtrsim 0 \quad (3.15a)$$

$$S^- = \pm \sqrt{|\psi(\theta_0, \phi_-)|} \quad (\theta_0 + \theta) \gtrsim 0 \quad (3.15b)$$

o qual é calculado pela Equação E.7. Nas regiões de sombra e iluminada, a função W torna-se igual a unidade ou zero, respectivamente, para pontos de observação afastados do limite de sombra.

A contribuição do ponto estacionário correspondente ao raio refletido da superfície refletora é obtida usando-se a Equação E.4, e a relação entre o ângulo de reflexão e o ângulo de incidência é dada por 3.10a ou 3.10b. Tem-se então:

$$I_{S\theta}(\theta, \theta', \phi'_+) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_{\theta'\theta'}(\theta', \phi'_+)|}} h_{\theta}(\theta', \phi'_+) e^{j[\psi(\theta', \phi'_+) \pm \pi/4]}$$

para $\psi(\theta', \phi'_+) \gtrless 0$ (3.16)

$$I_{S\phi}(\theta, \theta', \phi'_+) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_{\theta'\theta'}(\theta', \phi'_+)|}} h_{\phi}(\theta', \phi'_+) e^{j[\psi(\theta', \phi'_+) \pm \pi/4]}$$

para $\psi_{\theta'\theta'}(\theta', \phi'_+) \gtrless 0$ (3.17)

A derivada segunda do termo de fase é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{\theta'\theta'}(\theta', \theta'_+) &= \frac{\cos(\theta - \theta') [g(\theta')]^2 + 2 \sin(\theta - \theta') g(\theta') g'(\theta')}{[g(\theta')]^3} + \\ &+ \frac{[\cos(\theta' - \theta) - 1] g''(\theta') g(\theta') - 2[\cos(\theta - \theta') - 1] [g'(\theta')]^2}{[g(\theta')]^3} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Os termos de fase, $h_{\theta}(\theta', \phi'_+)$ e $h_{\phi}(\theta', \phi'_+)$, são dados respectivamente pelas Equações 3.7, 3.6a e 3.6b. Quando o ponto estacionário aproxima-se do ponto final, $I_S(\Omega)$ torna-se descontínua, e a aproximação da Equ

ção E.6 é usada para o cálculo da contribuição do ponto estacionário, com o argumento da função W sendo dado por:

$$S_{\theta_0} = \pm \sqrt{|\psi(\theta', \phi'_+) - \psi(\theta_0, \phi'_+)|} \quad \theta_0 - \theta' \geq 0 \quad (3.19)$$

com

$$\psi(\theta', \phi'_+) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta' - \theta}{2}}{g(\theta')}$$

e

$$\psi(\theta_0, \phi'_+) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}}{g(\theta_0)}$$

Para ângulos de incidência $\theta' > \theta_0$ ou $\theta < \theta_c$, sendo θ_c o ângulo de reflexão para um raio incidente na borda, tem-se

$$S_{\theta_0} = - \sqrt{|\psi(\theta', \phi'_+) - \psi(\theta_0, \theta'_+)|} \quad (3.20)$$

Para ângulos $\theta' < \theta_0$ ou $\theta > \theta_c$ a continuidade dos campos foi conseguida, mantendo-se a correspondência entre θ e θ' através de 3.10a ou seja:

$$S_{\theta_0} = + \sqrt{|\psi(\theta', \theta'_+) - \psi(\theta_0, \phi'_+)|} \quad (3.21)$$

3.3 - CAMPO TOTAL IRRADIADO

O campo total irradiado por uma superfície refletora \bar{e} é igual à soma do campo direto do alimentador com o campo espalhado, dado pelas Equações, 3.12a e 3.12b. Pode-se escrever então:

$$E_{\theta}^t = E_{\theta}^+ + E_{\theta}^- - I_{S\theta}^+ U(\theta - \pi/2) + I_{S\theta}(\theta, \theta', \phi_+^') \cdot W(S_{\theta_0} e^{j\pi/4}) \quad (3.22a)$$

$$E_{\phi}^t = E_{\phi}^+ + E_{\phi}^- - I_{S\phi}^+ U(\theta - \pi/2) + I_{S\phi}(\theta, \theta', \phi_+^') W(S_{\theta_0} e^{j\pi/4}) \quad (3.22b)$$

onde o campo do alimentador \bar{e} é expresso na forma da contribuição do ponto estacionário. O último termo da Equação 3.22a e 3.22b corresponde ao ponto estacionário relativo ao campo refletido da superfície refletora. Para pontos de observação $\pi/2 < \theta < \theta_0$, os campos E_{θ}^+ e E_{θ}^- são dados por:

$$E_{\theta}^+ = I_{e\theta}^+ + I_{S\theta}^+ W(|s^+| e^{j\pi/4}) U(\theta - \pi/2) U(\theta_0 - \theta) \quad (3.23a)$$

$$E_{\theta}^- = I_{e\theta}^- + I_{S\theta}^- W(|s^-| e^{j\pi/4}) U(\theta - \pi/2) \quad (3.23b)$$

Para a região $\theta > \theta_0$ tem-se:

$$E_{\theta}^+ = I_{e\theta}^+ + I_{S\theta}^+ (1 - W(|s^+| e^{j\pi/4})) U(\theta - \theta_0) U(\theta - \pi/2) \quad (3.24a)$$

$$E_{\theta}^- = I_{e\theta}^- + I_{S\theta}^- W(|s^-| e^{j\pi/4}) U(\theta - \pi/2) \quad (3.24b)$$

Os campos E_{ϕ}^+ e E_{ϕ}^- , para $\pi/2 < \theta < \theta_0$, são dados por:

$$E_{\phi}^+ = I_{e\phi}^+ + I_{s\phi}^+ W(|s^+| e^{j\pi/4}) U(\theta - \pi/2) U(\theta_0 - \theta) \quad (3.25a)$$

$$E_{\phi}^- = I_{e\phi}^- + I_{s\phi}^- W(|s^-| e^{j\pi/4}) U(\theta - \pi/2) \quad (3.25b)$$

Para a região $\theta > \theta_0$ tem-se

$$E_{\phi}^+ = I_{e\phi}^+ + I_{s\phi}^+ (1 - W(|s^+| e^{j\pi/4})) U(\theta - \theta_0) U(\theta - \pi/2) \quad (3.26a)$$

$$E_{\phi}^- = I_{e\phi}^- + I_{s\phi}^- W(|s^-| e^{j\pi/4}) U(\theta - \pi/2) \quad (3.26b)$$

3.4 - INTERPRETAÇÃO DO CAMPO ESPALHADO NAS REGIÕES DE OBSERVAÇÃO PARA SUPERFÍCIES CONVEXAS E CÔNCAVAS

Para ângulos próximos de $\theta = 0^0$ e π o parâmetro β torna-se pequeno, não sendo possível, portanto, uma avaliação assintótica nestas regiões, usando-se o método de fase estacionária.

O campo espalhado por superfícies convexas (Figura 3.1), para ângulos de observação entre 0_+^0 e θ_c , é devido à contribuição dos pontos finais e do ponto estacionário que corresponde ao ponto de reflexão do raio refletido da Óptica Geométrica. Para ângulos de observação entre θ_c e θ_0 , a contribuição para o campo espalhado é devida somente aos pontos finais, e, a partir do limite de sombra aos pontos estacionários $\theta' = \pm \theta$ e aos pontos finais.

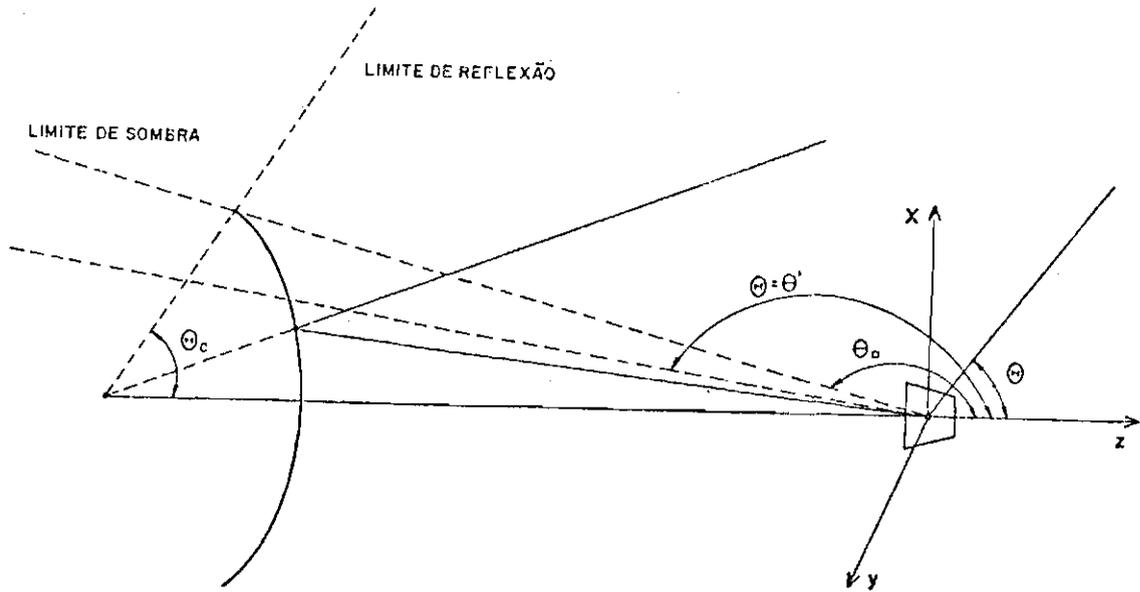


Fig. 3.1 - Regiões de observação do campo espalhado por uma superfície convexa, no plano $\phi = 0^\circ$.

O campo espalhado por superfícies côncavas (Figura 3.2) nas três regiões, é devido às contribuições do mesmo tipo de pontos das superfícies convexas, para estas regiões. No caso da superfície refletora ser uma parábola, θ_c é igual a 0° , e todos os pontos estacionários correspondentes aos pontos de reflexão da Óptica Geométrica contribuem para a direção $\theta = 0^\circ$.

Para estes dois tipos de superfície nota-se que os pontos finais contribuem para o campo espalhado em todas as regiões, salientando a importância das bordas. Em particular, entre os limites de sombra e de reflexão, as bordas são as únicas partes do refletor que contribuem para o campo. A observação deste fato sugere o uso de técnicas para de

senfatizar o efeito das bordas (excitação menos intensa, moldagem, etc), quando se pretender a obtenção de campos menos intensos naquelas regiões.

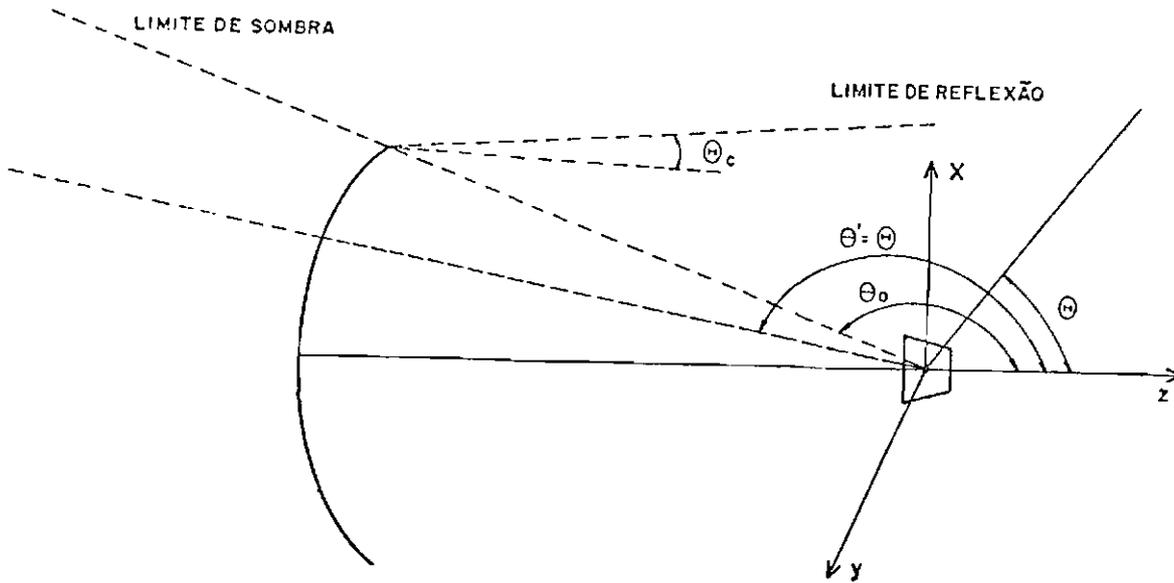


Fig. 3.2 - Regiões de observação do campo espalhado por uma superfície côncava, no plano $\phi = 0^\circ$.

CAPÍTULO 4

CAMPO ESPALHADO POR UMA SUPERFÍCIE REFLETORA, USANDO TEORIA GEOMÉTRICA UNIFORME DA DIFRAÇÃO

4.1 - PRINCÍPIO DO MÉTODO

O espalhamento do campo produzido por refletores que podem ser considerados grandes em relação ao comprimento de onda permite uma interpretação geométrica simples em termos de raios refletidos e difratados os quais satisfazem a uma extensão do princípio de Fermat. O método iniciado por Keller (1953), conhecido como Teoria Geométrica da Difração (TGD), é baseado na solução assintótica da equação de onda para uma onda plana incidente na borda de um semiplano, condutor perfeito. A solução de Keller falha nas regiões de transição adjacentes aos limites de sombra (LS) e de reflexão (LR). Kouyoumjian and Pathak, 1974 desenvolveram a Teoria Geométrica Uniforme da Difração, TGUD, onde os coeficientes de difração da TGD foram modificados pela introdução de um fator multiplicativo que envolve integrais de Fresnel. Este fator, denominado função de transição, tem um comportamento tal que, se o ponto de observação estiver localizado no LS ou no LR, compensa a singularidade do coeficiente de Keller, resultando num campo finito nestes limites.

O campo total espalhado por uma superfície refletora pode ser dado por

$$\vec{E}^t(\vec{r}) = \vec{E}^g(\vec{r}) + \vec{E}^d(\vec{r}) \quad (4.1)$$

onde \vec{E}^g é o campo clássico da Óptica Geométrica, OG, e \vec{E}^d é o campo difratado. Ambos podem ser escritos como séries de potências assintóticas de $(-jk)^{-1}$, denominadas expansões de Luneberg-Kline

$$\vec{E}^g(\vec{r}) = e^{-jks(\vec{r})} \sum_{m=0}^{\infty} (-jk)^{-m} \vec{\ell}_m^g(\vec{r}) \quad (4.2)$$

$$\vec{E}^d(\vec{r}) = e^{-jks(\vec{r})} (k)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-jk)^{-m} \vec{\ell}_m^d(\vec{r}) \quad k \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

onde \vec{r} é o vetor posição, e $s(\vec{r})$ representa o deslocamento da frente de onda.

Para estes campos alguns princípios gerais podem ser enunciados:

- a) O campo da TGUD é assintótico de ordem $k^{-1/2}$, enquanto o campo da Óptica Geométrica é de ordem k^0 .
- b) A TGUD não possui regiões de sombra.
- c) O campo difratado propaga-se ao longo de raios, os quais são de terminados pela generalização do princípio de Fermat para incluir pontos em bordas, vértices e superfícies suaves na trajetória do raio.
- d) A difração, como a reflexão e a transmissão são fenômenos locais em alta frequência, isto é, dependem somente da natureza das bordas da superfície e do campo incidente nas vizinhanças do ponto de difração.
- e) A onda difratada propaga-se ao longo de seus raios de modo que (1) a potência é conservada num tubo de raios, e (2) a fase ao longo do caminho é igual ao produto do número de onda k do meio pela distância s .

Para se obter o campo da OG, uma expansão de Luneberg-Kline é usada para o campo incidente assim como para o campo refletido, onde somente os termos principais das séries são considerados. Substituindo-se o campo na equação de onda obtêm-se a equação iconal e as

equações de transporte. Destas equações obtêm-se o campo da Óptica Geométrica na forma geral:

$$\bar{E}(s) = \bar{E}_0(0) e^{-jk\psi(0)} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1+s)(\rho_2+s)}} e^{-jks} \quad (4.4)$$

onde

$\bar{E}_0(0)$ \equiv termo principal da expansão de Luneberg-Kline para o campo elétrico em $s = 0$;

$\psi(0)$ \equiv superfície equifásica ou frente de onda em $s = 0$;

$\rho_1 \rho_2$ \equiv raios principais de curvatura da frente de onda em $s = 0$;

k \equiv constante de propagação do meio;

s \equiv distância do ponto de observação ao ponto de referência ($s = 0$);

$\bar{E}(s)$ \equiv campo elétrico em s .

Esta equação pode também ser obtida da Óptica Geométrica Clássica, empregando-se conservação de potência num tubo de raios. Os pontos $s = -\rho_1$ e $s = -\rho_2$ identificam as cásticas, onde há uma convergência de raios, implicando uma amplitude infinita para o campo.

Para um raio incidente (\bar{E}^i) numa superfície S , perfeitamente condutora (Figura 4.1), o campo elétrico refletido da Óptica Geométrica é dado por:

$$\bar{E}^r(s) = \bar{E}^i(Q_r) \cdot \bar{R} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r+s)(\rho_2^r+s)}} e^{-jks} \quad (4.5)$$

onde ρ_1^r, ρ_2^r são os raios principais de curvatura da frente de onda refletida no ponto de reflexão Q_R , e \bar{R} é o coeficiente de reflexão diádico que, em notação matricial para o caso de superfície perfeitamente condutora, é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

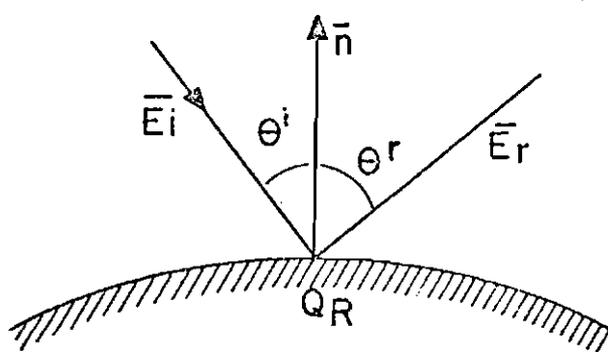


Fig. 4.1 - Reflexão em uma superfície curva.

Se uma superfície curva S tem uma borda curva caracterizada pela descontinuidade em seu vetor normal, o cálculo do campo difratado por esta borda é feito de maneira análoga ao campo refletido na superfície. Considera-se uma aproximação de alta frequência, onde somente o termo principal da série é levado em conta; este é relacionado com o campo incidente no ponto de difração, através do coeficiente diádico de difração.

Para o campo elétrico difratado por uma borda, a expressão genérica é dada por

$$\bar{E}^d(s) \sim \bar{E}^i(Q_e) \cdot \bar{D}(\hat{s}, \hat{s}^i) \cdot \sqrt{\frac{\rho}{s(\rho+s)}} e^{-jks} \quad (4.6)$$

enquanto o campo magnético resulta em:

$$\vec{H}^d(s) = Y_c \vec{s} \times \vec{E}^d(s) \quad (4.7)$$

onde

- Q_e \equiv ponto de difração;
- s \equiv distância do ponto de difração ao ponto de observação;
- \hat{s}^i, \hat{s} \equiv versores nas direções dos raios incidente e difratado, respectivamente;
- \bar{D} \equiv coeficiente diádico de difração;
- Y_c \equiv admitância característica do meio.

Na equação 4.6, ρ é a distância geométrica entre a borda e a segunda cônica dos raios difratados, a qual é dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{\hat{n}_e \cdot (\hat{s}^i - \hat{s})}{a \sin^2 \beta_0} \quad (4.8)$$

sendo:

- ρ_e^i \equiv raio de curvatura da frente de onda incidente no ponto de difração na borda, tomado no plano que contém o raio incidente e a tangente a borda. (Para uma onda esférica incidente, ele é igual à distância do centro de fase da fonte à borda);
- \hat{n}_e \equiv versor normal à borda e dirigido no sentido contrário ao de seu centro de curvatura;
- a \equiv raio de curvatura no ponto de difração;
- β_0 \equiv ângulo entre o raio incidente e a tangente à borda.

Na Equação 4.8, a distância ρ é positiva se não houver cônica ao longo do caminho de propagação do raio difratado, e negativa se a segunda cônica situar-se entre Q_e e o ponto de observação. O campo calculado da Equação 4.6 não é válido na cônica, mas um deslocamento de fase de $+\pi/2$ será introduzido naturalmente para o campo difratado, no segundo caso, como acontece para o campo da Óptica Geométrica.

4.2 - COEFICIENTES DE DIFRAÇÃO

O ângulo de difração β_d , para um raio incidente numa borda curva num ponto Q_e , é igual ao ângulo de incidência β'_0 , de modo que os raios difratados que divergem de Q_e formam um cone cujo semi-ângulo é β'_0 e cujo eixo é a tangente à borda, de acordo com o princípio de Fermat. O raio incidente e o raio refletido da superfície em Q_e também estão sobre o cone de raios difratados (Figura 4.2).

Se um sistema de coordenadas de borda fixa é usado para descrever as componentes dos campos incidente e difratado, o coeficiente diádico de difração será a soma de sete diádes (Keller, 1953), e na forma matricial, o coeficiente de difração é uma matriz 3×3 com sete elementos não-nulos.

Kouyoumjian and Pathak (1970) introduziram um sistema de coordenadas de raios fixos, análogo àquele usado para simplificar o cálculo do coeficiente de reflexão diádico, em que são definidos dois planos, sendo um o plano de incidência de borda fixa, que contém o raio incidente e o versor tangente à borda, e o outro o plano de difração, que contém o raio difratado e o versor tangente à borda (Figura 4.2). O coeficiente de difração fica então reduzido a uma matriz 2×2 , não sendo necessário mais que duas diádes para descrevê-lo.

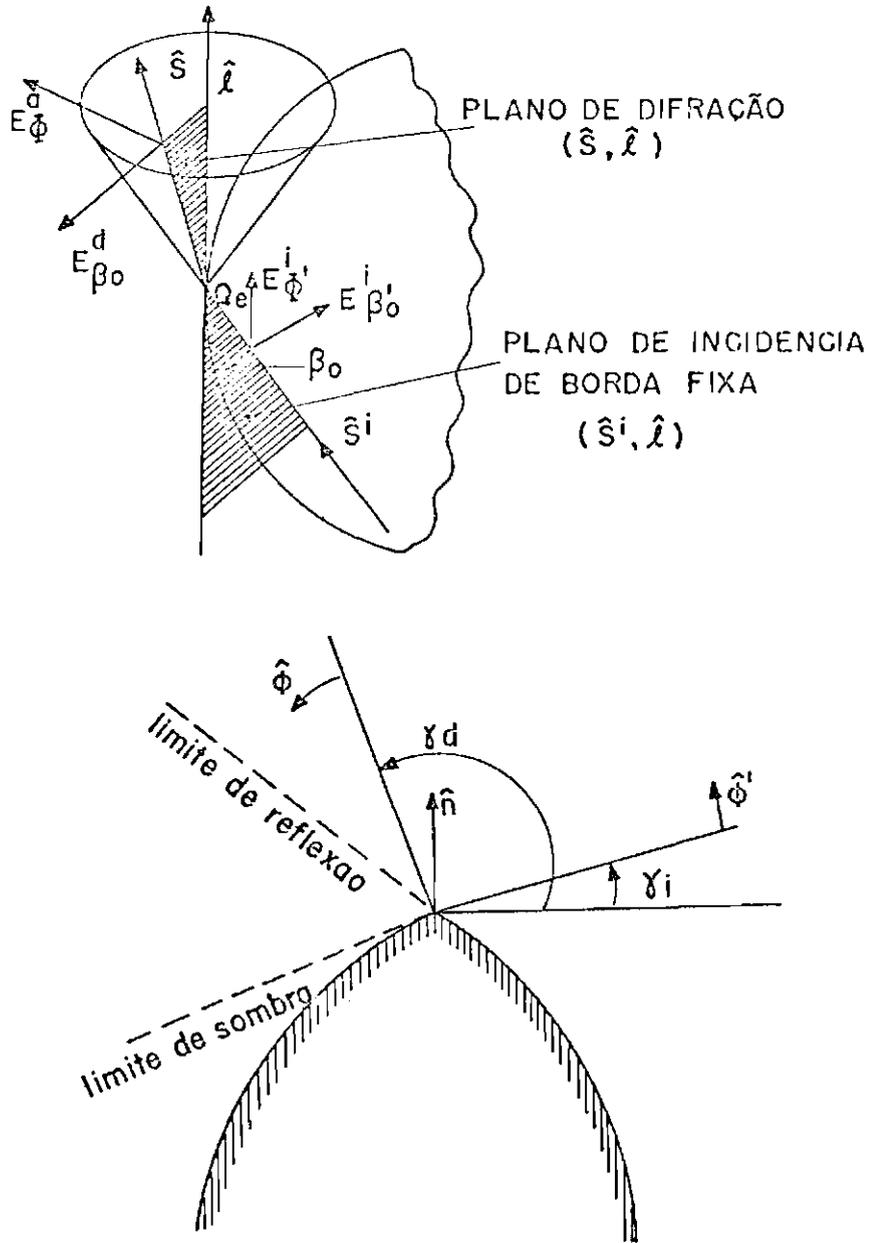


Fig. 4.2 - Geometria para o sistema de raios fixos.

Os versores $\hat{\phi}'$ e $\hat{\phi}$ são perpendiculares ao plano de incidência e de difração respectivamente, e $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\beta}_0$ são paralelos aos mesmos planos, ou seja:

$$\hat{\beta}'_0 = \hat{s}^i \times \hat{\phi}' \quad (4.9a)$$

$$\hat{\beta}_0 = \hat{s} \times \hat{\phi} \quad (4.9b)$$

As componentes dos campos elétrico e magnético, incidente e difratado, paralelas à borda de uma superfície, satisfazem a equação de onda juntamente com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Decompondo-se estas em componentes paralelas e perpendiculares aos planos de difração e de incidência resulta das Equações 4.6 e 4.7

$$\begin{bmatrix} E_{\beta_0}^d \\ E_{\phi}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\phi}^i \end{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho}{s(\rho+s)}} e^{-jks} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{bmatrix} H_{\phi}^d \\ H_{\beta_0}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\phi}^i \\ H_{\beta_0}^i \end{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho}{s(\rho+s)}} e^{-jks} \quad (4.11)$$

assim, o coeficiente de difração \bar{D} é expresso como uma matriz diagonal 2 x 2, representado em forma diádica, pela soma de duas diádes. D_s e D_h são os coeficientes escalares de difração que satisfazem às condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente. Em termos de D_s e de D_h :

$$\bar{D} = -\hat{\beta}'_0 \hat{\beta}_0 D_s - \hat{\phi}' \hat{\phi} D_h \quad (4.12)$$

Kouyoumjian and Pathak (1970) determinaram a solução asintótica para o problema escalar de difração de bordas curvas em superfícies curvas. Esta solução é baseada no método de Keller, para o problema canônico. A justificativa do método é que tanto a difração como a reflexão, em alta frequência são fenômenos locais, podendo-se aproximar a geometria da borda curva por uma cunha, onde a borda reta da cunha é tangente à borda curva no ponto de incidência.

Kouyoumjian and Pathak (1970) eliminaram as singularidades nos coeficientes de difração de Keller, existentes nas regiões de transição, pela introdução de fatores que tendem a zero, quando o denominador tende a zero. Para o caso de bordas curvas em superfícies curvas, estes são dados por:

$$D_{sh}^i = \frac{e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k} \sin\beta_0} \left\{ \frac{F[z^i e^{j\pi/4}]}{\cos\left(\frac{\gamma_d - \gamma_i}{2}\right)} \mp \frac{F[z^r e^{j\pi/4}]}{\cos\left(\frac{\gamma_d + \gamma_i}{2}\right)} \right\} \quad (4.13)$$

A função Z^i é definida por:

$$z^i = \sqrt{2kL^i} \left| \cos\left\{ \frac{\gamma_d \mp \gamma_i}{2} \right\} \right| \quad (4.14)$$

O parâmetro L é tido como um parâmetro distância, que depende do tipo de iluminação e cuja expressão geral é obtida quando se iguala a zero, nos limites de sombra e de reflexão, a soma dos termos descontínuos do campo total. Para o caso geral de uma borda curva em uma superfície curva, a condição para o campo ser contínuo no limite de sombra (Kouyoumjian and Pathak, 1974) é:

$$L^i = \frac{s(\rho_e^i + s) \rho_1^i \rho_2^i \sin^2 \beta_0}{\rho_e^i (\rho_1^i + s) (\rho_2^i + s)} \quad (4.15)$$

e para ser contínuo no limite de reflexão:

$$L^r = \frac{s(\rho_e^r + s) \rho_1^r \rho_2^r \sin^2 \beta_0}{\rho_e^r (\rho_1^r + s) (\rho_2^r + s)} \quad (4.16)$$

onde:

ρ_1^i, ρ_2^i : são os raios principais de curvatura da frente de onda incidente em Q_e ;

ρ_1^r, ρ_2^r : os raios principais de curvatura da frente de onda refletida em Q_e ;

ρ_e^r : raio de curvatura da frente de onda refletida no plano que contém o raio refletido e a tangente à borda.

A expressão para ρ_e^r é dada por:

$$\frac{1}{\rho_e^r} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{2(\tilde{n} \cdot \tilde{n}_e)(\tilde{s}^i \cdot \tilde{n})}{a \sin^2 \beta_0} \quad (4.17)$$

onde \tilde{n} é o versor normal à superfície em Q_e .

A função de transição, $F(Z^i e^{j\pi/4})$, fornece uma medida da distância angular entre o ponto de observação, P , e o limite de sombra e é dada por:

$$F(z e^{\pm j\pi/4}) = 2 \sqrt{\pi} z e^{\pm j(z^2 + \pi/4)} Q(z e^{\pm j\pi/4}) \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned}
 Q(z e^{\pm j \pi/4}) &= \frac{e^{\pm j \pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{\mp j t^2} dt = \\
 &= U(-z) + \operatorname{sgn}(z) \frac{e^{\pm j \pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{|z|}^{\infty} e^{\mp j t^2} dt \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

No limite de sombra, o fator $\cos(\gamma_d - \gamma_i/2)$, no denominador do primeiro termo dos coeficientes de difração, torna-se zero, contudo $F [z^i e^{j \pi/4}]$ simultaneamente torna-se zero e o quociente permanece finito.

$$\frac{F [z^i e^{j \pi/4}]}{\cos \left[\frac{\gamma_d - \gamma_i}{2} \right]} \xrightarrow{\gamma_d \rightarrow \pi + \gamma_i} 2\pi \sqrt{\frac{L^i}{\lambda}} e^{j \pi/4} \quad (4.20)$$

O mesmo acontece no limite de reflexão onde $\gamma_d + \gamma_i = \pi$:

$$\frac{F [z^r e^{j \pi/4}]}{\cos \left[\frac{\gamma_d - \gamma_i}{2} \right]} \xrightarrow{\gamma_d \rightarrow \pi - \gamma_i} 2\pi \sqrt{\frac{L^r}{\lambda}} e^{j \pi/4} \quad (4.21)$$

Pode-se mostrar que (Felsen and Marcuvitz, 1973):

$$Q(z e^{\pm j \pi/4}) \sim U(-z) + \frac{e^{\mp j(z^2 + \pi/4)}}{2\sqrt{\pi} z} |z| \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

e a função de transição se aproxima da unidade para pontos de observação afastados das regiões de transição.

4.3 - APLICAÇÃO A SUPERFÍCIES CÔNCAVAS

Como exemplo de aplicação da TGUD, a superfícies do tipo côncavo, considere-se o refletor parabólico, de raio a cuja borda está no plano XY como apresentado na Figura 4.3. O foco do parabolóide está em F que é a origem do sistema de coordenadas (x, y, z) ; 2α é o ângulo subtendido pelo parabolóide, sendo (ρ, θ', ϕ') e (R, θ, ϕ) as coordenadas da fonte e do ponto de observação.

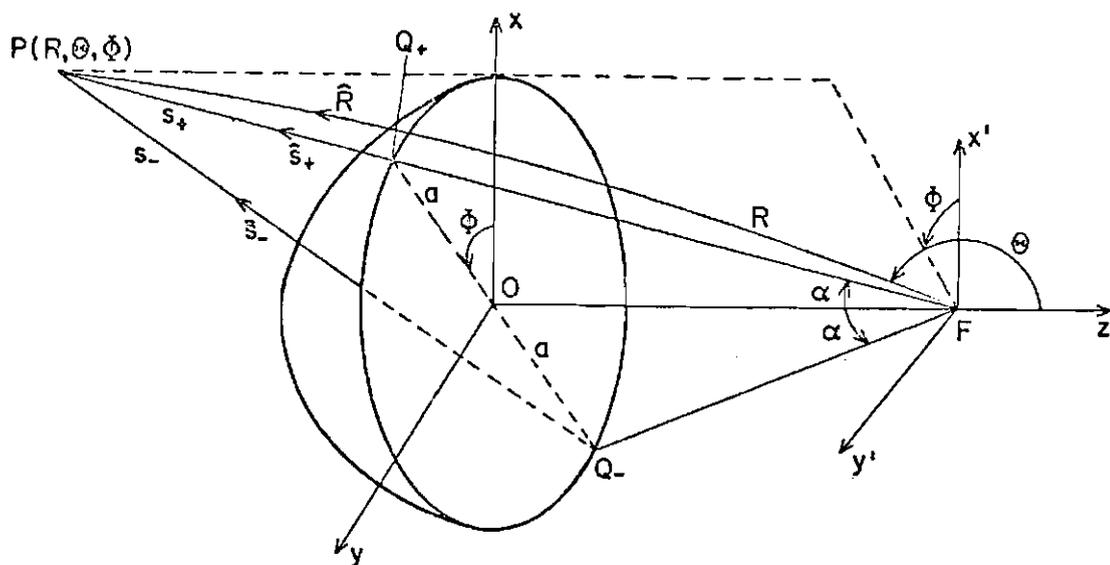


Fig. 4.3 - Geometria dos raios difratados para um parabolóide.

A maior contribuição para o campo radiado em $P(R, \theta, \phi)$, de acordo com a extensão do princípio de Fermat, provém de dois pontos estacionários, $Q_+(\rho_0, \pi-\alpha, \phi)$ e $Q_-(\rho_0, \pi-\alpha, \phi+\pi)$, situados na borda do parabolóide, sendo (ρ, θ', ϕ') o sistema de coordenadas de referência.

A TGUD falha nas regiões próximas de $\theta = 0^0$ e $\theta = \pi$, pois são regiões de cônica. Para $\theta = \pi$, todos os pontos da borda do parabolóide difratam com intensidades iguais, enquanto para $\theta = 0^0$, além da difração da borda, deve-se levar em conta a contribuição de cada ponto da superfície do parabolóide.

Os raios que contribuem para o campo distante espalhado, considerando-se somente difração de primeira ordem, seguem três caminhos, $F Q_+ P$, $F Q_- P$ e $F P$, que corresponde à radiação direta do alimentador.

Uma vez que $R \gg OF$, e todos os raios estão no mesmo plano, pode-se fazer as seguintes aproximações:

$$\bar{s}_{\pm} \approx \bar{R} \tag{4.23}$$

$$s_{\pm} \approx R$$

para os termos de amplitude do campo e

$$s_{\pm} \approx R - \rho_0 \cos(\alpha \pm \theta) \tag{4.24}$$

para os de fase, onde

\bar{s}_{\pm} são versores ao longo dos raios difratados de Q_{\pm} ;

\bar{e}_{\pm} vetores unitários tangentes em Q_{\pm} ;

$\bar{n}_{e\pm}$ vetores unitários que saem do centro de curvatura da borda.

O raio de curvatura da borda do parabolóide \bar{e} a para cada plano Φ . Então, das Figuras 4.3 e 4.4 pode-se escrever

$$\hat{n}_{e\pm} \cdot \hat{s}_{\pm}^i = \text{sen}\alpha \quad (4.25)$$

$$\hat{n}_{e\pm} \cdot \hat{s}_{\pm} = \pm \text{sen}\theta \quad (4.26)$$

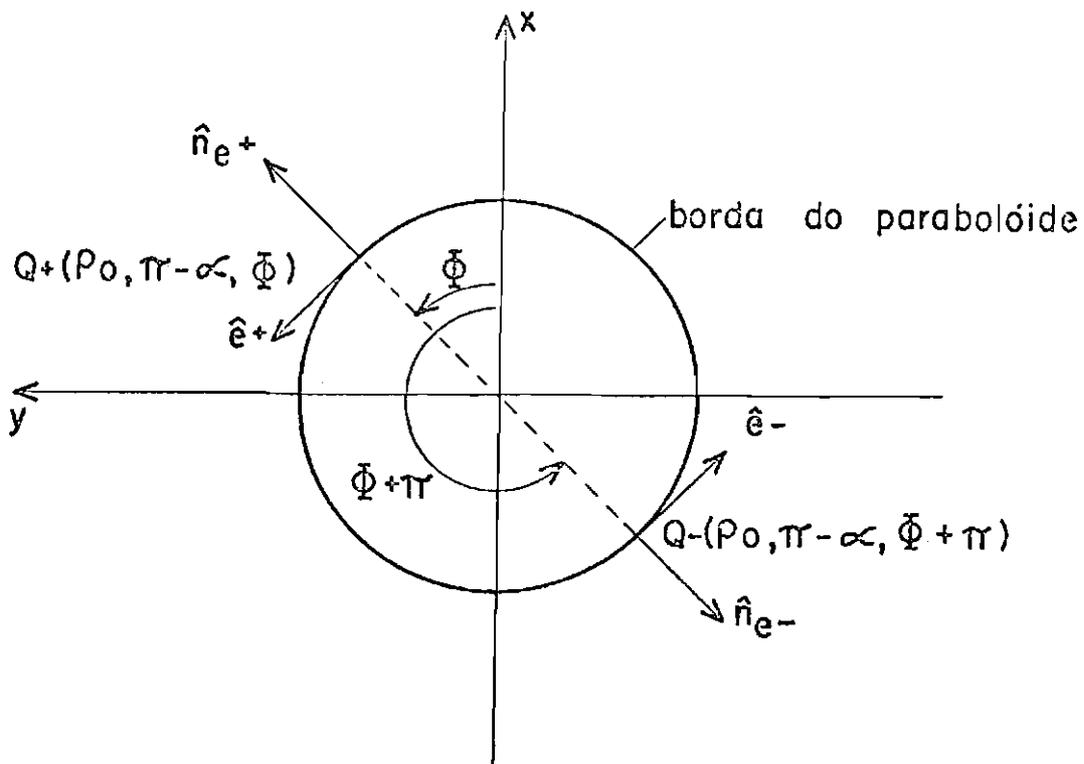


Fig. 4.4 - Plano da borda do parabolóide.

Para uma onda esférica incidente na borda tem-se

$$\rho_e^i = \rho_0 \quad (4.27)$$

Substituindo-se as Relações 4.24 a 4.26 na Equação 4.8 obtêm-se, para as distâncias da cônica:

$$\rho_{\pm} = \pm \rho_o \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta} \quad (4.28)$$

Para os parâmetros L^i e L^r , supondo-se o ponto de observação em campo distante, obtêm-se:

$$L^i = \rho_o \quad (4.29)$$

$$L^r \rightarrow \infty$$

4.3.1 - CAMPO DIFRATADO EM Q_+

Da Figura 4.5 encontra-se para os ângulos de incidência e de difração:

$$\gamma_i^+ = \frac{\pi - \alpha}{2} \quad (4.31a)$$

$$\gamma_d^+ = \theta + \frac{\pi + \alpha}{2} \quad (4.31b)$$

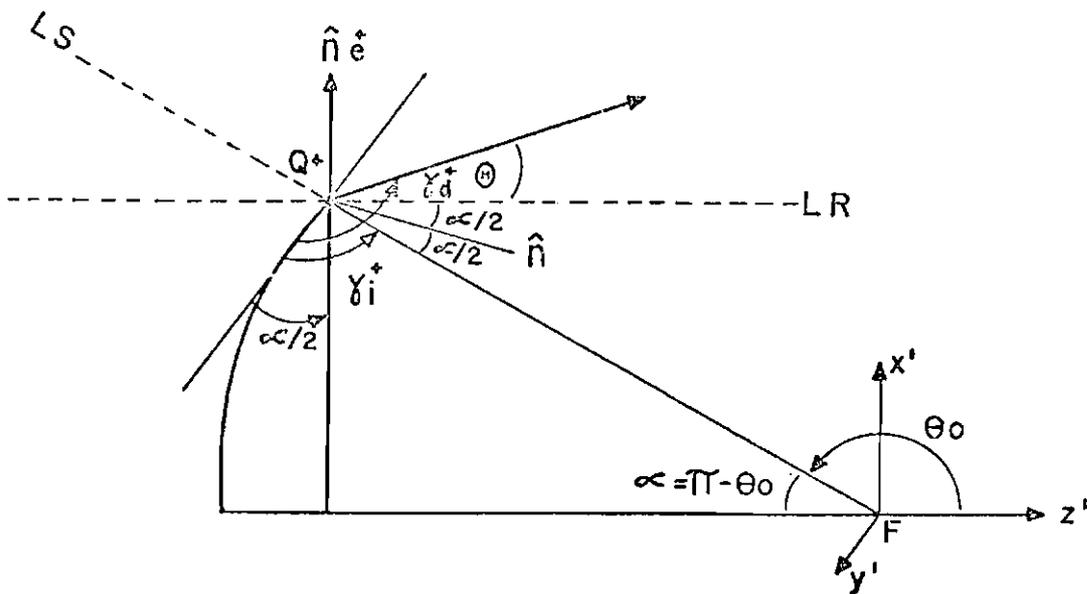


Fig. 4.5 - Geometria dos raio incidentes e difratados em Q_+

Substituindo-se as Equações 4.26 a 4.30 na 4.13 encontra-se para os coeficientes da difração em Q^+ :

$$D_{ns}^+ = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{F(z^i e^{j\pi/4})}{\cos(\frac{\theta + \alpha}{2})} \pm \frac{1}{\cos(\frac{\theta + \pi}{2})} \right] \quad (4.32)$$

com z^i dado por

$$z^i = \sqrt{2k\rho_0} \left| \cos \frac{\theta + \alpha}{2} \right| \quad (4.33)$$

Usando-se as Equações 4.10 e 4.11 obtêm-se o campo difratado em Q^+ , na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} E_{\theta}^+ \\ E_{\phi}^+ \end{array} \right\} &= \frac{e^{-jkR}}{R} \begin{Bmatrix} D_h^+ \\ D_s^+ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{G_f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha}{\rho_0 \operatorname{sen} \theta}} \cdot \\ &\cdot e^{-j(k\rho_0^2 \cos^2 \frac{\alpha+\theta}{2})} \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde $G_f(\alpha)$ é o diagrama de potência do alimentador em $\theta' = \pi - \alpha$.

4.3.2 - CAMPO DIFRATADO EM Q_-

Da Figura 4.6 obtêm-se, para os ângulos de incidência e de difração, respectivamente:

$$\gamma_i^- = \frac{\pi - \alpha}{2} \quad (4.35a)$$

$$\gamma_d^- = \frac{\pi + \alpha}{2} - \theta \quad \text{para} \quad \begin{cases} \theta < \frac{\pi + \alpha}{2} \\ \theta > \frac{\pi + \alpha}{2} \end{cases} \quad (4.35b)$$

$$\gamma_d^- = \frac{5\pi}{2} - \theta + \frac{\alpha}{2}$$

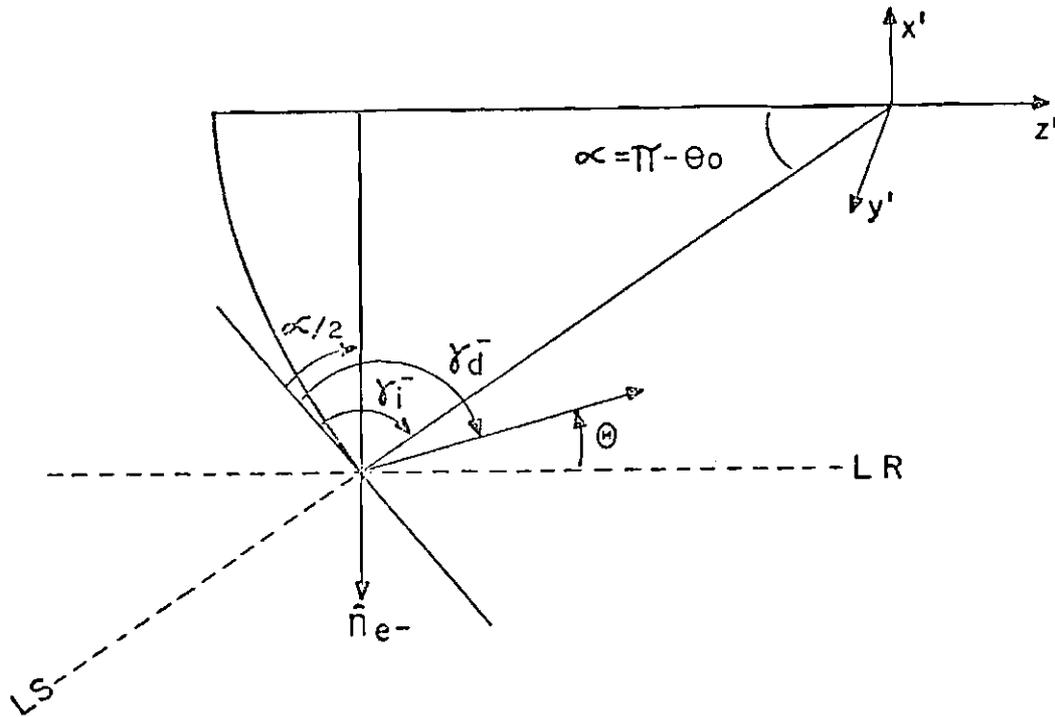


Fig. 4.6 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_- .

Supondo-se não existir raios difratados entre $\pi/2$ e $(\pi+\alpha)/2$ encontra-se da Equação 4.13 o coeficiente de difração em Q_- .

$$D_{hs}^- = \frac{\epsilon_0 e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k'}} \left[\frac{F(z^i e^{j\pi/4})}{\cos\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right)} \pm \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)} \right] \quad (4.36)$$

onde:

$$\epsilon_0 = \begin{cases} 1 & \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta < (\pi+\alpha)/2 \\ -1 & \theta > (\pi+\alpha)/2 \end{cases} \quad (4.37)$$

$$z^i = \sqrt{2k\rho_0'} \left| \cos\left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right) \right| \quad (4.38)$$

O campo difratado em Q_- é dado por

$$\begin{Bmatrix} E_{\theta}^- \\ E_{\phi}^- \end{Bmatrix} = - \frac{e^{-jkR}}{R} \begin{Bmatrix} D_h^- \\ D_s^- \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{G_f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha}{\rho_o \operatorname{sen} \theta}} \cdot e^{-j \left[2 k \rho_o \cos^2 \left(\frac{\alpha - \theta}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \right]} \quad (4.39)$$

4.3.3 - CAMPO TOTAL IRRADIADO

O campo total irradiado em $P(R, \theta, \phi)$ é igual à soma dos dois campos difratados com o campo direto do alimentador onde ele fo observável. Então:

$$\begin{Bmatrix} E_{\theta}^t \\ E_{\phi}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{\theta}^+ \\ E_{\phi}^+ \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{\theta}^- \\ E_{\phi}^- \end{Bmatrix} + \sqrt{G_f(\theta)} U[(\theta_o - \theta)(\theta - \pi/2)] \quad (4.40)$$

4.4 - APLICAÇÃO A SUPERFÍCIES CONVEXAS

Como no caso de superfícies côncavas, considera-se um re_fletor axialmente simétrico com uma fonte pontual que emite ondas esféricas. Então, somente dois raios difratados nas bordas são possíveis para o ponto de observação $P(R, \theta, \phi)$. Estes raios são difratados de Q_+ , onde o plano $\phi' = \phi$ corta a borda, e de Q_- da intersecção do plano $\phi' = \phi + \pi$ (Figura 4.7). Para superfícies convexas axialmente simétricas a TGUD também falha nas regiões próximas de $\theta = 0^0$ e $\theta = \pi$, pois são regiões de cônica.

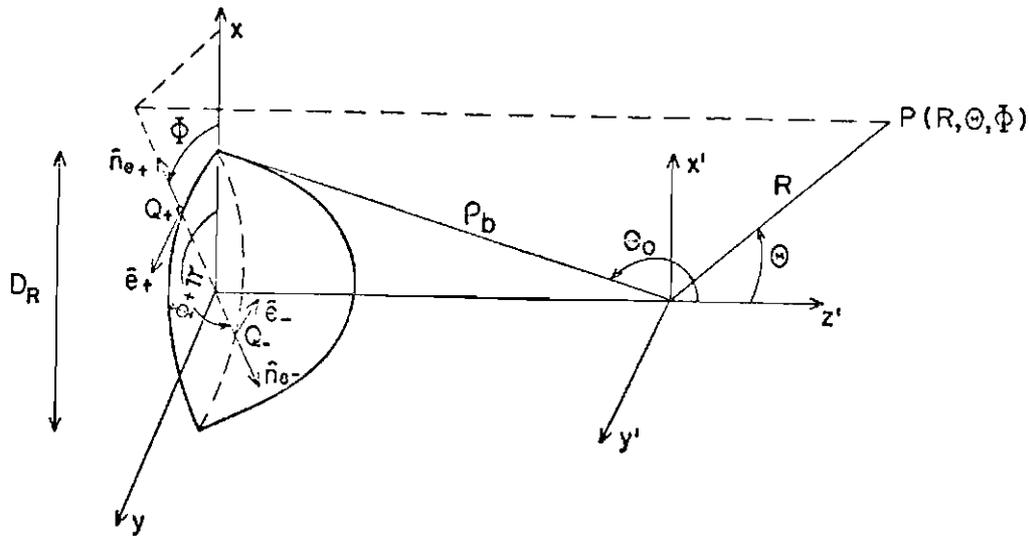


Fig. 4.7 - Geometria para pontos de difração na borda de um refletor axialmente simétrico com alimentador no foco.

As aproximações para os termos de amplitude do campo, para pontos de observação situados na região de campo distante são:

$$\tilde{s}_{\pm} \approx \bar{R} \quad (4.41)$$

$$s_{\pm} \approx R$$

e para os termos de fase:

$$s_{\pm} \approx R - Z_b \cos \Theta \mp D_R/2 \sin \Theta \quad (4.42)$$

onde Z_b é a coordenada da borda ($Z_b < 0$) e D_R é o diâmetro de refletor. O raio de curvatura da borda é $D_R/2$, e obtém-se, como no caso da superfície côncava, a seguinte relação para a distância da cônica:

$$\rho_{\pm} = \pm \frac{D_R/2}{\text{sen}\theta} = \pm \frac{\rho_b \text{sen } \theta_o}{\text{sen } \theta} \quad (4.43)$$

onde ρ_b e θ_o são respectivamente a distância do centro de fase à borda, para uma onda esférica incidente, e a coordenada θ' da borda.

Os parâmetros L_i e L_r são obtidos com o auxílio das Equações 4.15, 4.16 e 4.17 sendo

$$L_i = \rho_b \quad (4.44a)$$

$$L_r = \frac{\rho_1^r \rho_2^r \text{sen } \theta_c}{D_R/2} \quad (4.44b)$$

onde:

ρ_1^r e ρ_2^r são os raios principais de curvatura da frente de onda refletida em Q_+ , calculados no Apêndice F,

$D_R/2 / \text{sen}\theta_c$ é a distância da cônica, calculada na direção do limite da reflexão (Figura 4.8).

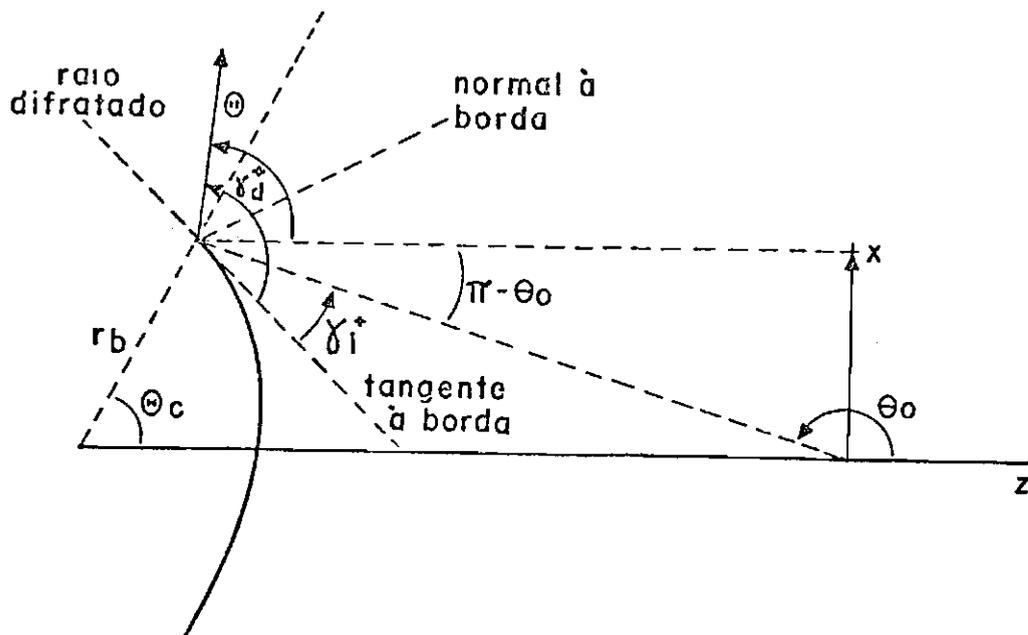


Fig. 4.8 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_+ .

4.4.1 - CAMPO DIFRATADO EM Q_+

Da Figura 4.8 encontra-se para os ângulos de incidência e de difração:

$$\gamma_i^+ = \frac{\theta_o - \theta_c}{2} \quad (4.45a)$$

$$\gamma_d^+ = \theta + \pi - \frac{\theta_o - \theta_c}{2} \quad (4.45b)$$

Substituindo-se as Equações 4.41 a 4.43 na 4.13 encontram-se as seguintes expressões para os coeficientes de difração em Q_+ :

$$D_{hs}^+ = \frac{e^{-j \pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left\{ \frac{F(z^i e^{j \pi/4})}{\text{sen} \left(\frac{\theta - \theta_o}{2} \right)} \pm \frac{F(z^r e^{-j \pi/4})}{\text{sen} \left(\frac{\theta - \theta_c}{2} \right)} \right\} \quad (4.46)$$

com z^i e z^r dados por:

$$z^i = \sqrt{2kL^i} \left| \text{sen} \left(\frac{\theta - \theta_o}{2} \right) \right| \quad (4.47a)$$

$$z^r = \sqrt{2kL^r} \left| \text{sen} \left(\frac{\theta - \theta_c}{2} \right) \right| \quad (4.47b)$$

O campo difratado em Q_+ é dado por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{d\theta}^+ \\ E_{d\phi}^+ \end{Bmatrix} &= \frac{E_{f\theta}(\theta_o, \phi') \exp(-jk \rho_b)}{\rho_b} \cdot \sqrt{\frac{D_R/2}{\text{sen } \theta}} \cdot \\ &\cdot \{ \exp\{jk [z_b \cos\theta + D_R/2 \text{sen}\theta]\} \} \begin{Bmatrix} D_h^+ \\ D_s^+ \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde $E_{f\theta}$, (θ_o, ϕ') é o campo do alimentador incidente na borda do refletor.

4.4.2 - CAMPO DIFRATADO EM Q_-

Da Figura 4.9 obtêm-se para os ângulos de incidência e de reflexão:

$$\gamma_i^- = \frac{\theta_o - \theta_c}{2} \quad (4.49a)$$

$$\gamma_d^- = \pi - \frac{\theta_o + \theta_c}{2} - \theta \quad \theta < \pi - \frac{\theta_o + \theta_c}{2} \quad (4.49b)$$

$$\gamma_d^- = 3\pi - \theta - \frac{\theta_o + \theta_c}{2} \quad \theta > \pi - \frac{\theta_o + \theta_c}{2} \quad (4.49c)$$

Para o raio difratado de Q_- , as funções de transição tornam-se unitárias, uma vez que não há regiões de transição para limites de sombra e de reflexão, ficando o parâmetro z sempre grande. Supondo-se que não há difração superficial em Q_- nem na parte côncava do refletor, os coeficientes de difração tornam-se zero para ângulos de observação entre a tangente à superfície e $\pi/2$.

Da Equação 4.3 obtêm-se os coeficientes de difração que são dados por:

$$D_n^- = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left\{ \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\theta_c + \theta}{2}\right)} \pm \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\theta_c - \theta}{2}\right)} \right\}$$

$$0 < \theta \leq \pi - \frac{\theta_o + \theta_c}{2} \quad (4.50a)$$

$$D_{hs}^- = 0 \quad \pi - \frac{\theta_o - \theta_c}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (4.50b)$$

$$D_{hs}^- = \frac{e^{-j \pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left\{ \frac{1}{\text{sen} \left(\frac{\theta + \theta_o}{2} \right)} \pm \frac{1}{\text{sen} \left(\frac{\theta + \theta_c}{2} \right)} \right\}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \quad (4.50c)$$

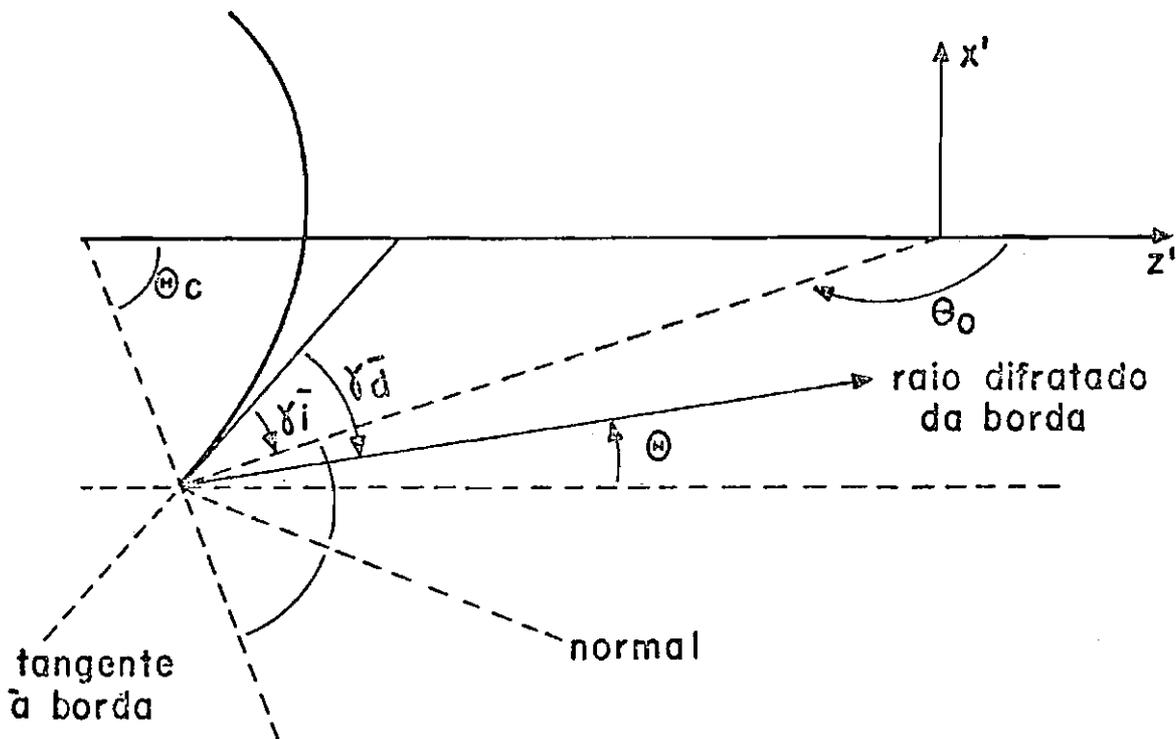


Fig. 4.9 - Geometria dos raios incidentes e difratados em Q_-

O campo difratado em Q_- fica então como

$$\left. \begin{array}{l} E_{d\theta}^- \\ E_{d\phi}^- \end{array} \right\} = \left\{ - \frac{E_{f\theta'}(\theta'_o, \phi' + \pi) \exp(-jk_r b)}{\rho_b} \right\} \cdot \left\{ \exp(j\pi/2) \cdot \sqrt{\frac{D_R/2}{\text{sen}\theta}} \right\} \left\{ \exp \{ jk [z_b \cos \theta - D_R/2 \text{sen}\theta] \} \right\} \frac{D_h^-}{D_s^-} \quad (4.51)$$

4.4.3 - CAMPO DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

No cálculo do campo total espalhado por superfícies convexas, para ângulos de observação, maiores que 0° e menores que θ_c , inclui-se o campo da Óptica Geométrica. O campo refletido em um ponto P a uma distância s do ponto de reflexão Q_r , dado pela Equação 4.5 pode ser colocado na forma:

$$\bar{E}_r(P) = \bar{E}_r(Q_r) \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)}} e^{-jks} \quad (4.52)$$

onde $\bar{E}_r(Q_r)$ é o campo no ponto Q_r imediatamente após a reflexão, e ρ_1^r e ρ_2^r são os raios principais de curvatura da frente de onda refletida, calculados no Apêndice F.

O campo imediatamente após a reflexão no refletor é dado pela equação:

$$\bar{E}_r(Q_r) = 2(\hat{n} \cdot \bar{E}_i) \hat{n} - \bar{E}_i \quad (4.53)$$

onde \hat{n} é a equação da normal calculada no Apêndice A (Veja a Equação A.7), dada por

$$\hat{n} = \frac{\hat{\rho} + \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \hat{\theta}'}{\left[1 + \left\{ \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad (4.54)$$

e \vec{E}_i , o campo incidente na superfície refletora, dado pela Equação 2.5 e que pode ser escrito na forma:

$$\vec{E}_i = \frac{e^{-j k \rho}}{\rho} \left[E_E \mu_{\theta'} \cos \phi' \hat{\theta}' + E_H \sin \phi' \hat{\phi}' \right] \quad (4.55)$$

onde E_E e E_H são os diagramas de radiação nos planos E e H.

Substituindo-se as Equações 4.55 e 4.54 na 4.53 e fazendo-se a mudança de coordenadas:

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \phi' \sin \theta' + \hat{y} \sin \phi' \sin \theta' + \hat{z} \cos \theta' \quad (4.56a)$$

$$\hat{\theta}' = \hat{x} \cos \phi' \cos \theta' + \hat{y} \sin \phi' \cos \theta' - \hat{z} \sin \theta' \quad (4.56b)$$

$$\hat{\phi}' = -\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi' \quad (4.56c)$$

obtêm-se o campo $\vec{E}_r(Q_r)$ em função das coordenadas \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} . Com uma segunda transformação de coordenadas, dadas por:

$$\bar{x} = \bar{R} \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \cos\theta \cos\phi \bar{\theta} - \operatorname{sen}\phi \bar{\phi} \quad (4.57a)$$

$$\bar{y} = \bar{R} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \bar{\theta} + \cos\phi \bar{\phi} \quad (4.57b)$$

$$\bar{z} = \bar{R} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \bar{\theta} \quad (4.57c)$$

obtêm-se as componentes de $\bar{E}_r(Q_r)$ em θ e ϕ , coordenadas do ponto de observação

$$E_{r\theta} = E_E \mu_{\theta'} \cos(\theta - \theta') \frac{\left[\left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 - 1 \right]}{\left[\left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 + 1 \right]} -$$

$$- E_E \mu_{\theta'} \operatorname{sen}(\theta - \theta') \frac{2 \frac{g'(\theta')}{g(\theta')}}{\left[1 + \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 \right]} \quad (4.58)$$

$$E_{r\phi} = - E_H \quad (4.59)$$

O campo da Óptica Geométrica, para as componentes θ e ϕ , será dado por:

$$\left. \begin{array}{l} E_{r\theta}(P) \\ E_{r\phi}(P) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} E_{r\theta}(Q_r) \\ E_{r\phi}(Q_r) \end{array} \right\} \sqrt{\frac{r \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-j k s} \quad (4.60)$$

4.4.4 - CAMPO TOTAL IRRADIADO

O campo total irradiado em $P(R, \theta, \phi)$ é igual à soma dos dois campos difratados, mais o campo da Óptica Geométrica e o campo direto do alimentador onde eles forem observáveis. Então:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} E_{\theta}^t \\ E_{\phi}^t \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} E_{\theta}^+ \\ E_{\phi}^+ \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} E_{\theta}^- \\ E_{\phi}^- \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} E_{r\theta}(P) \\ E_{r\phi}(P) \end{array} \right\} U(\theta_c - \theta) + \\ &+ \sqrt{G_f(\theta)} U[(\theta_0 - \theta)(\theta - \pi/2)] \end{aligned} \quad (4.61)$$

CAPÍTULO 5

COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DESENVOLVIDOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho calculou-se o campo espalhado por superfícies do tipo parabólica e hiperbólica, nos planos E e H, utilizando-se os métodos da Óptica Física (OF) e sua aproximação, a Óptica Física Assintótica (OFA), e a Teoria Geométrica Uniforme da Difração (TGUD), sendo que para a OFA estendeu-se a teoria previamente disponível para superfícies côncavas. Os resultados obtidos foram comparados entre si com o intuito de avaliar a precisão destes três métodos para as diversas regiões de observação.

As Figuras 5.1 a 5.4 mostram os diagramas de radiação de um parabolóide ($D/\lambda = 15$), nos planos E e H, alimentado pelo foco com um alimentador do tipo $\cos^n(\theta)$, $n = 2$. As Figuras 5.5 a 5.8 mostram os diagramas de radiação de uma hiperbolóide ($D/\lambda = 25$), nos planos E e H, alimentado pelo foco com um alimentador que possui diagrama do tipo $\cos^n(\theta)$, $n = 42$. Para esta última superfície há uma rápida variação do campo incidente em suas bordas. As Figuras 5.9 a 5.12 mostram os diagramas do mesmo hiperbolóide, em que o campo relativo incidente na borda não tem variação rápida. As Figuras 5.13 a 5.16 mostram os diagramas de radiação de um hiperbolóide ($D/\lambda = 10,3$) nos planos E e H, alimentado pelo foco com um alimentador do tipo $\cos^n(\theta)$, $n = 42$. Finalmente, as Figuras 5.17 a 5.20 mostram a hipérbole do exemplo anterior, com o alimentador fornecendo uma iluminação do tipo uniforme.

Para todos os diagramas, no plano H, nota-se boa concordância dos resultados obtidos pelos três métodos, para pontos de observação fora da região de sombra. Isto pode ser atribuído ao fato de que para o vetor campo elétrico incidente paralelo à borda, a parábola, a hipérbole ou outro qualquer refletor comportam-se localmente como um semiplano, para o qual a formulação da TGUD é exata. O mesmo não acontece para os diagramas no plano E, para os quais a curvatura da superfície do refletor tem uma grande influência. Nas regiões fora dos limites de sombra e de reflexão, as correntes induzidas na superfície do refletor, na dire

ção \hat{z} , ou seja, na direção de seu eixo de simetria, têm uma irradiação apreciável no plano E, mas não no plano H. A Equação 2.7 mostra a parcela do campo devida a esta corrente induzida. Este resultado também foi observado por Safak (1976), para o caso de uma parábola.

Comparando-se os resultados da OF e da OFA, para pontos de observação na região da sombra $160^\circ < \theta < 180^\circ$, vê-se que o campo da OF apresenta um comportamento diferente daquele da OFA. Isto se torna mais pronunciado para aqueles casos onde a variação do campo é mais rápida das bordas do refletor, como apresentado nas Figuras 5.5 e 5.6. Esta diferença de comportamento diminui para iluminações de borda do tipo normal, ou seja, o campo relativo na borda é aproximadamente -10dB, como nas Figuras 5.9, 5.10, 5.13 e 5.14, e torna-se nula para alimentador que fornece uma iluminação do tipo uniforme (Figuras 5.17 e 5.18).

Quando se comparam a OFA e a TGUD, na região de sombra para os casos apresentados, nota-se uma diferença entre as amplitudes das oscilações. Contudo, é interessante notar que esta diferença é bem menor que aquela entre a OF e a OFA. Trabalhos teóricos e experimentais de Knop and Ostertag (1977), Rusch (1974) e Ratnasiri et alii (1970) também noticiam esta diferença para superfícies côncavas. James (1976) apresentou uma correção para as correntes da Óptica Geométrica na borda de um semiplano, que faz com que o campo espalhado por este, usando-se as equações da OF ou da OFA, seja igual ao do TGUD para o qual a solução é exata. Knop and Ostertag (1977) corrigiram os coeficientes de difração obtidos por Knop (1975) para o OFA, onde se considerava o problema na borda da parábola como o problema do semiplano e supunha-se a iluminação na borda localmente plana e uniforme (o que acontece para muitos alimentadores empregados) desprezando-se então o efeito de difração "slope". Os diagramas de radiação para uma parábola foram medidos e constatou-se uma concordância aceitável com os cálculos teóricos.

Nas regiões axiais do refletor tanto o método da Óptica Física Assintótica quanto a Teoria Geométrica Uniforme da Difração divergem, por serem estas regiões de cônica, ou seja, a contribuição dos pontos finais somam-se em fase nesta região. Na região axial, em frente ao refletor, é conveniente portanto o uso da Óptica Física por ser contínua e precisa.

Quanto ao tempo de processamento, este é bem menor quando se utilizam a OFA e a TGUD ao invés da OF. Para a hipérbole de $10,3 \lambda$ de diâmetro, o tempo de processamento foi cerca de 40 vezes menor, utilizando-se os métodos assintóticos que possuem tempos de processamento comparáveis.

Utilizando-se a aproximação assintótica das Equações 2.1 vê-se que a maior contribuição para o campo irradiado provém de três pontos estacionários. Dois destes pontos estão localizados na intersecção do plano ϕ (onde se situa o ponto de observação) e as bordas do refletor. Este pontos correspondem à contribuição dos pontos finais. O terceiro ponto estacionário corresponde ao ponto de reflexão no refletor. Para ângulos de observação maiores que θ_0 (limite de sombra), este ponto se situa no refletor e corresponde à intersecção do raio emitido pela fonte que ilumina o refletor e a superfície deste. O campo devido às correntes induzidas nestes pontos do refletor cancela o campo do alimentador atrás do refletor, produzindo portanto uma sombra geométrica perfeita. Isto pode ser visto através das Equações 2.22a e 2.24a.

Conclui-se, portanto, que o método da Óptica Física é preciso em grande parte da região angular, falhando na região de sombra. O método da TGUD torna-se impreciso para o plano E, onde a curvatura da superfície refletora tem influência e o método da OFA, bem como o da OF apresentam falhas, na região de sombra. Utilizando-se então uma combinação dos três métodos, pode-se fazer uma análise preliminar com boa precisão, para o projeto de diversos tipos de antenas refletoras.

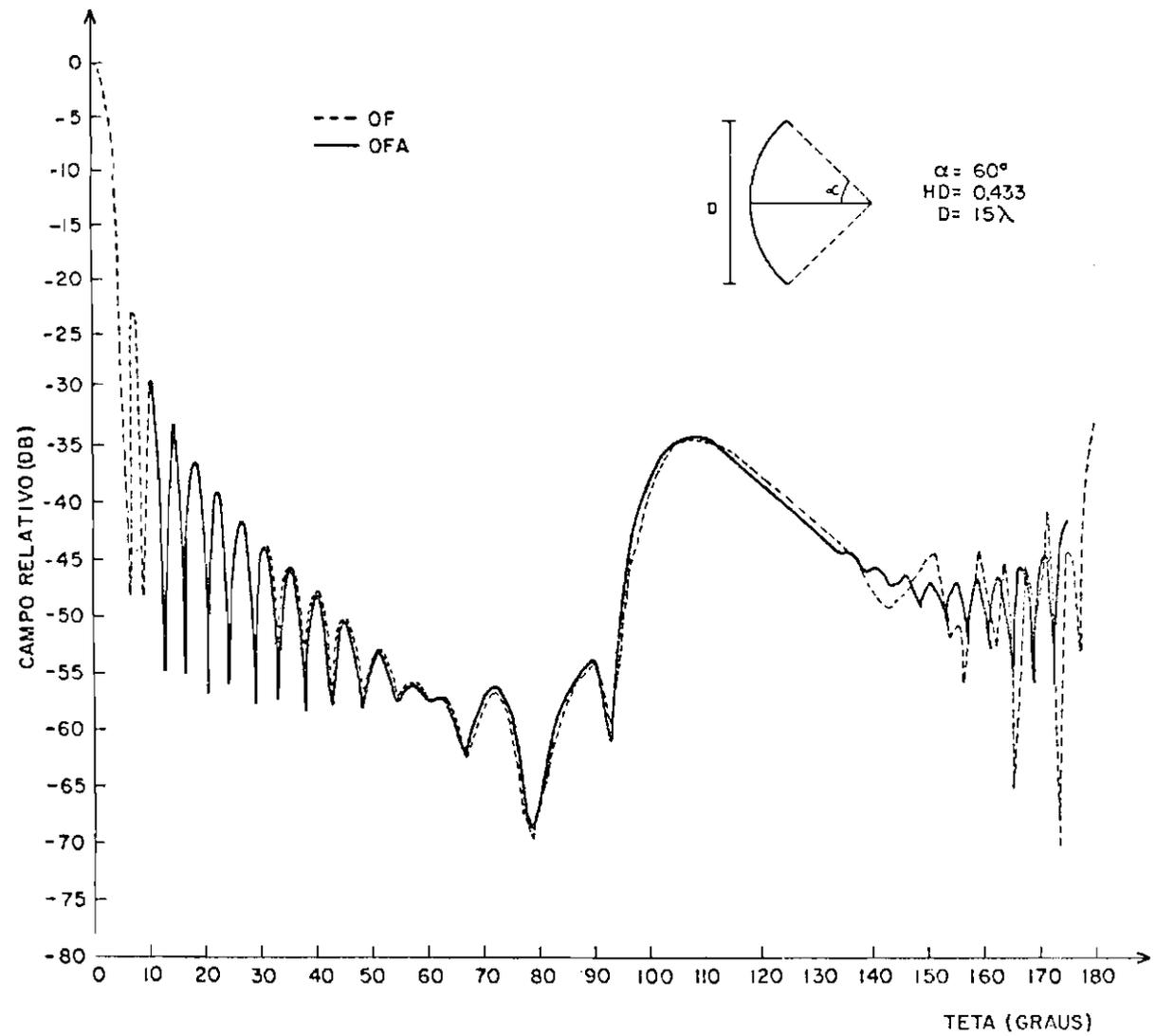


Fig. 5.1 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma parábola com alimentador no foco.

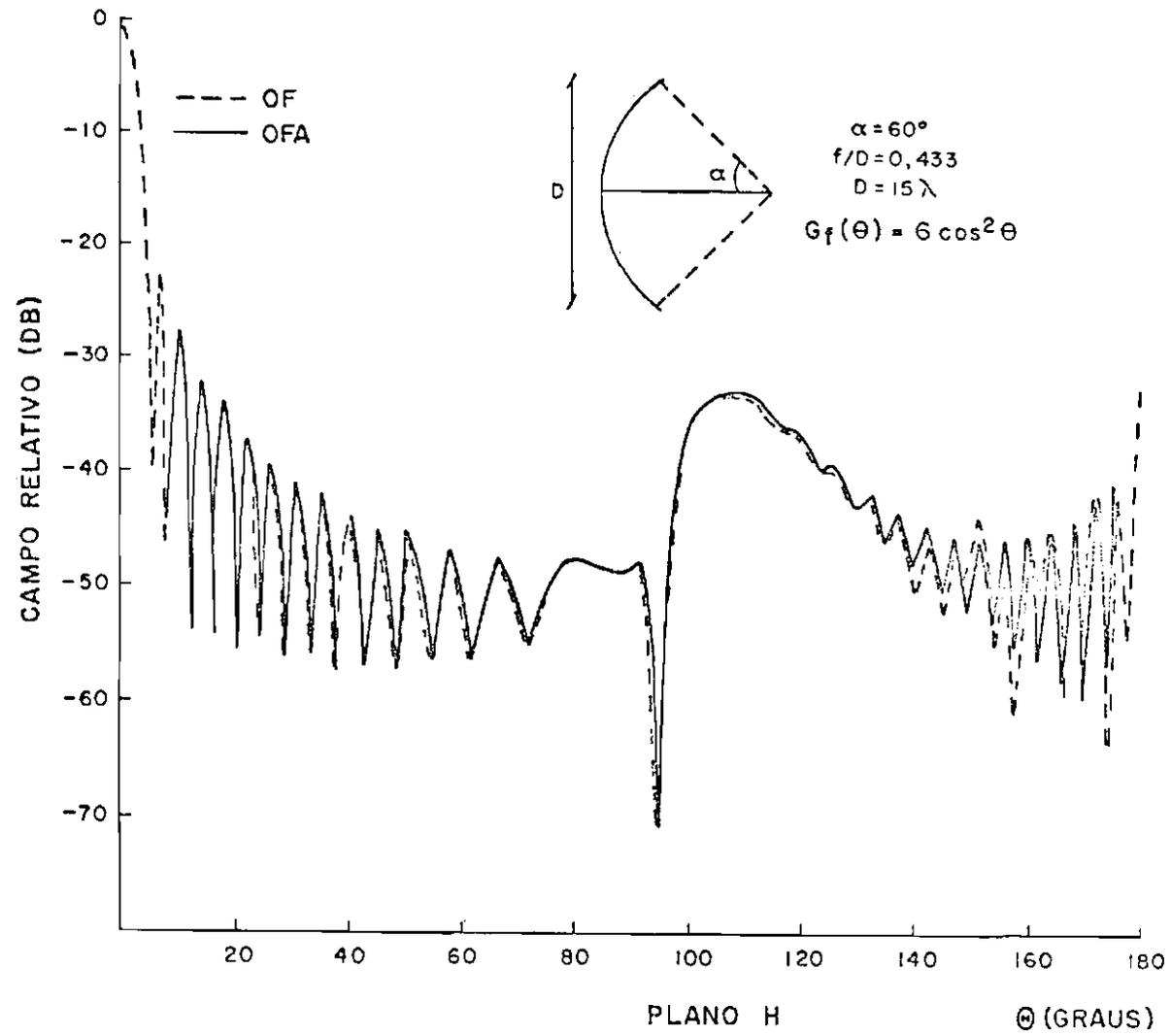


Fig. 5.2 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma parábola com alimentador no foco.

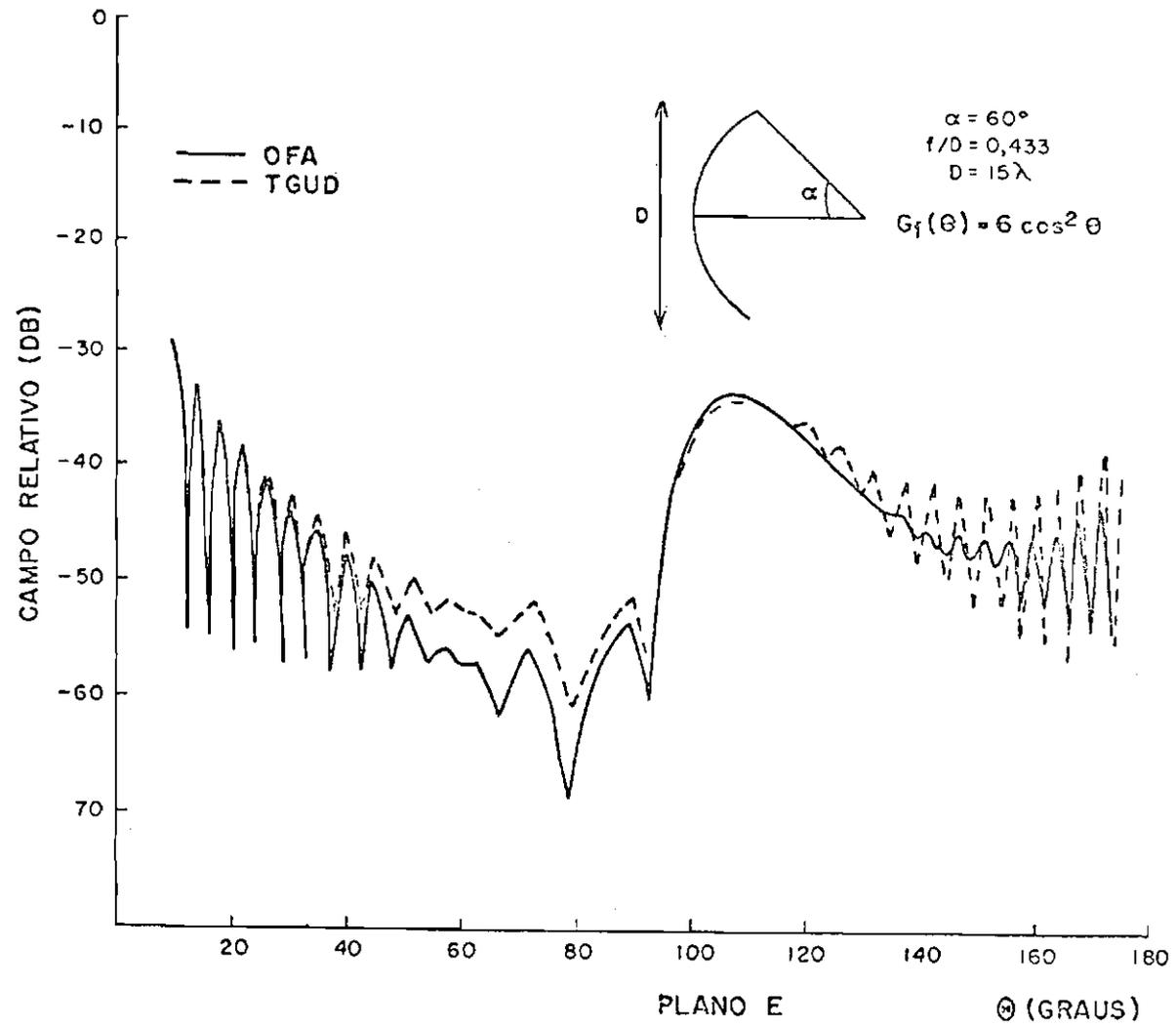


Fig. 5.3 - Diagrama de radiação, no plano E , de uma parábola com alimentador no foco.

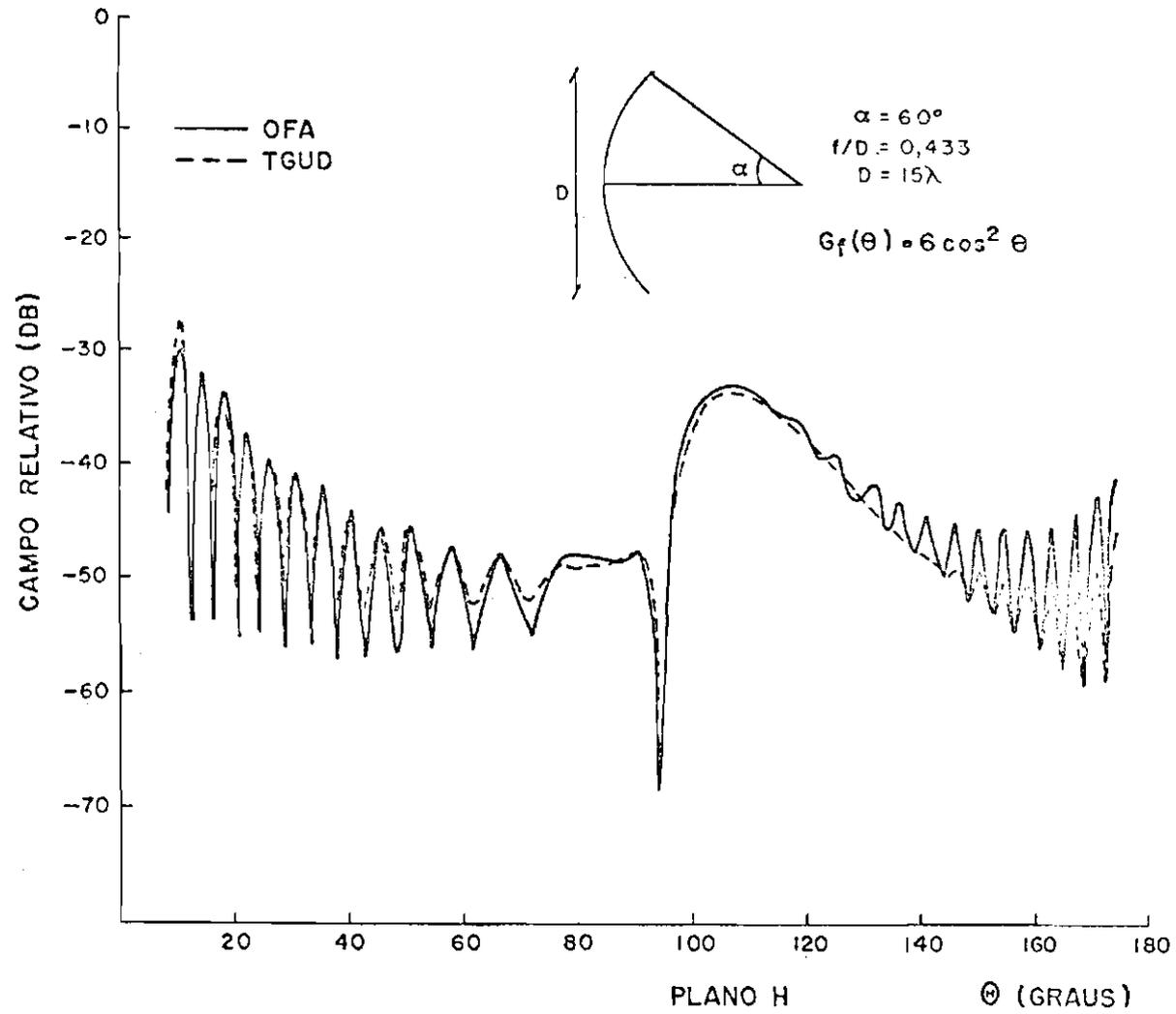


Fig. 5.4 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma parábola com alimentador no foco.

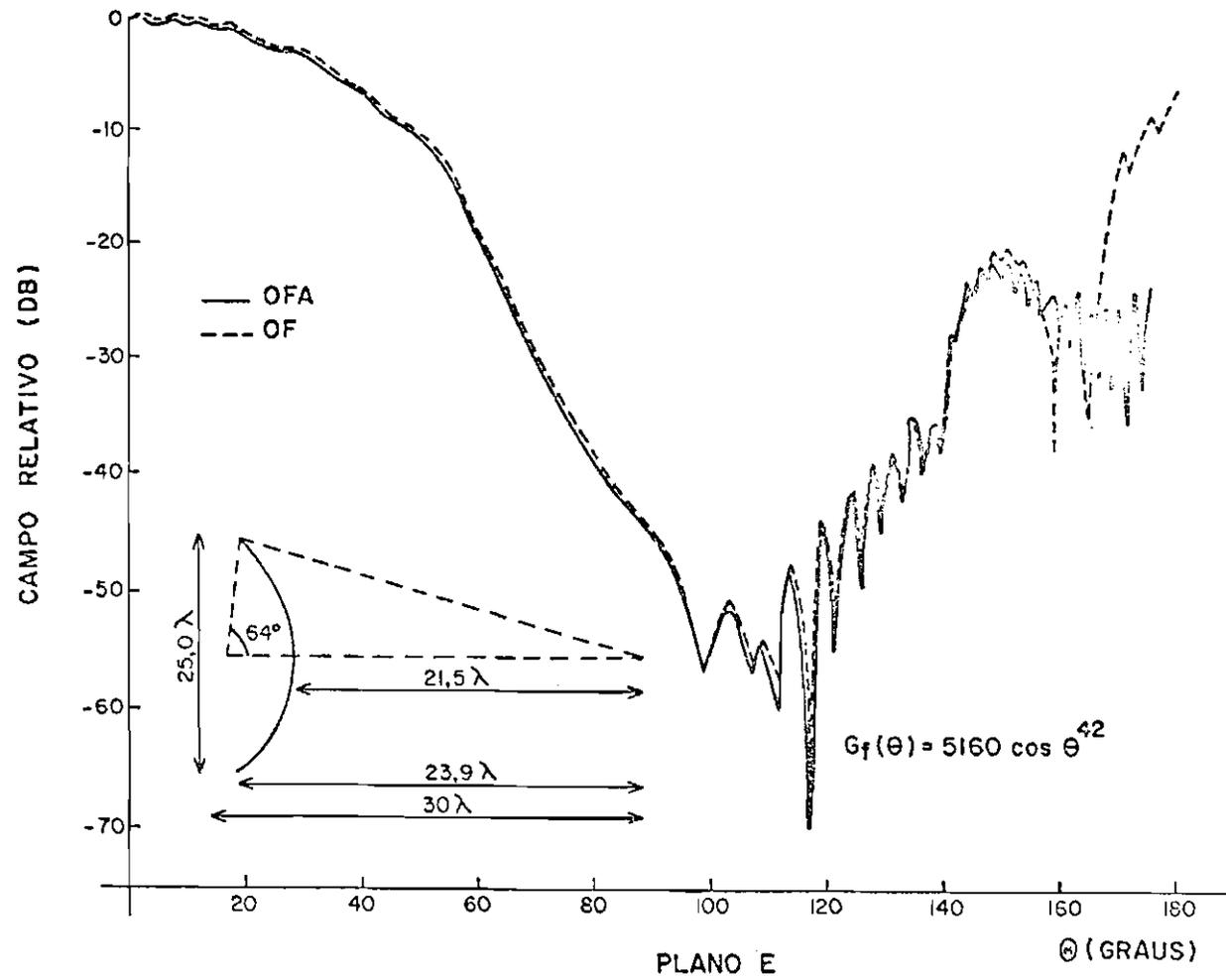


Fig. 5.5 - Diagrama de radiação de uma hiperbõle no plano E, com alimentador no foco.

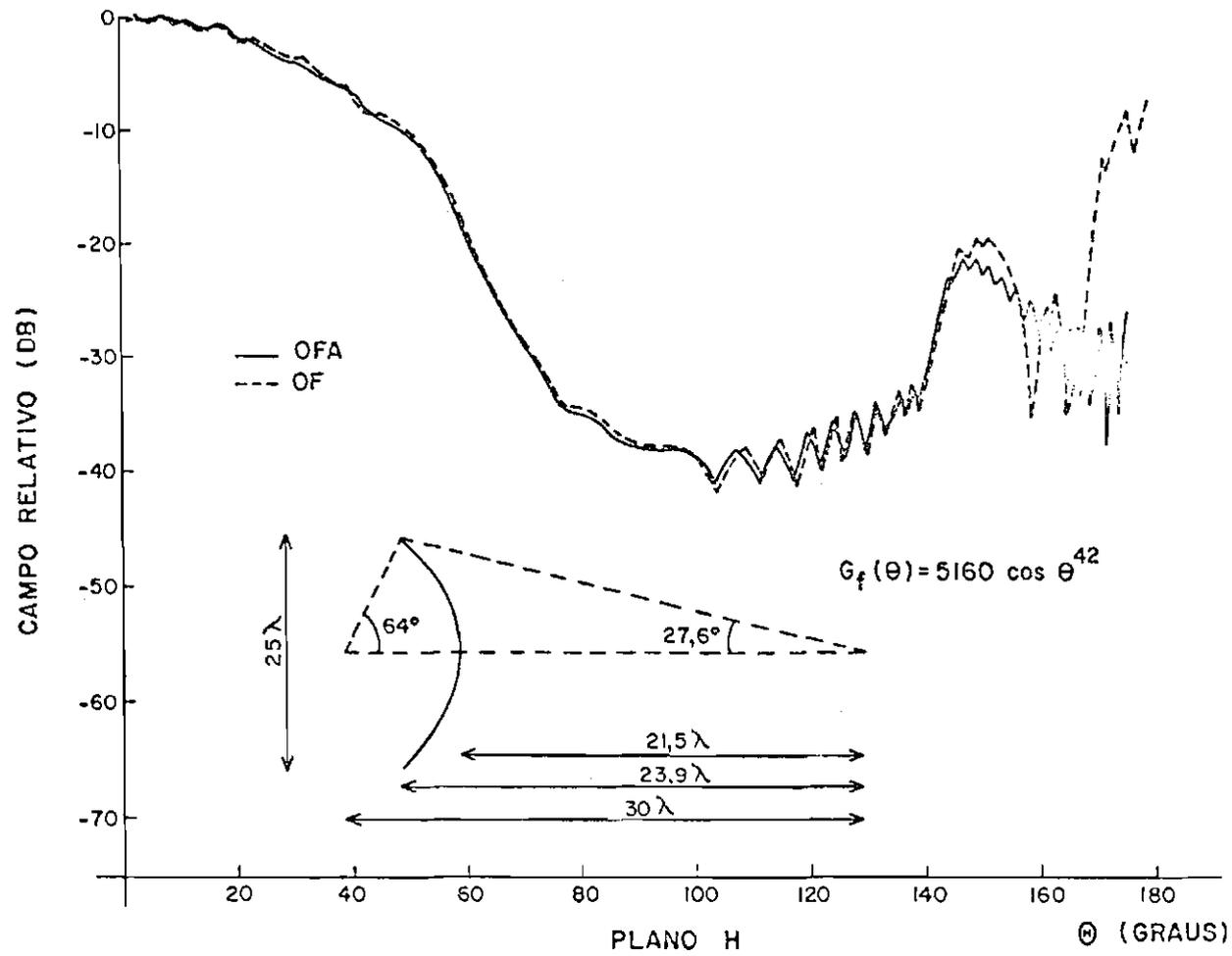


Fig. 5.6 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

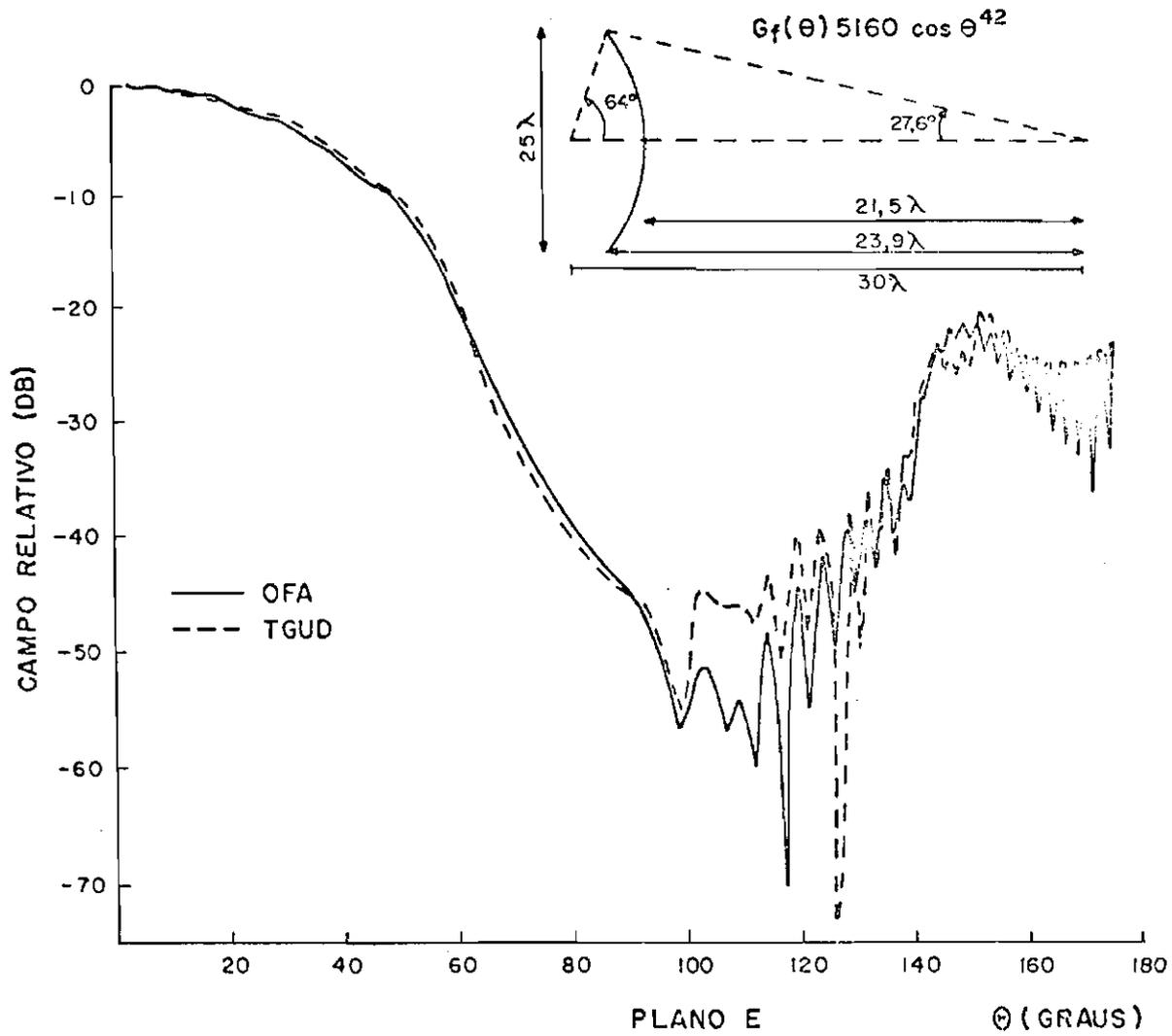


Fig. 5.7 - Diagrama de radiação, no plano E de uma hipérbole com alimentador no foco.

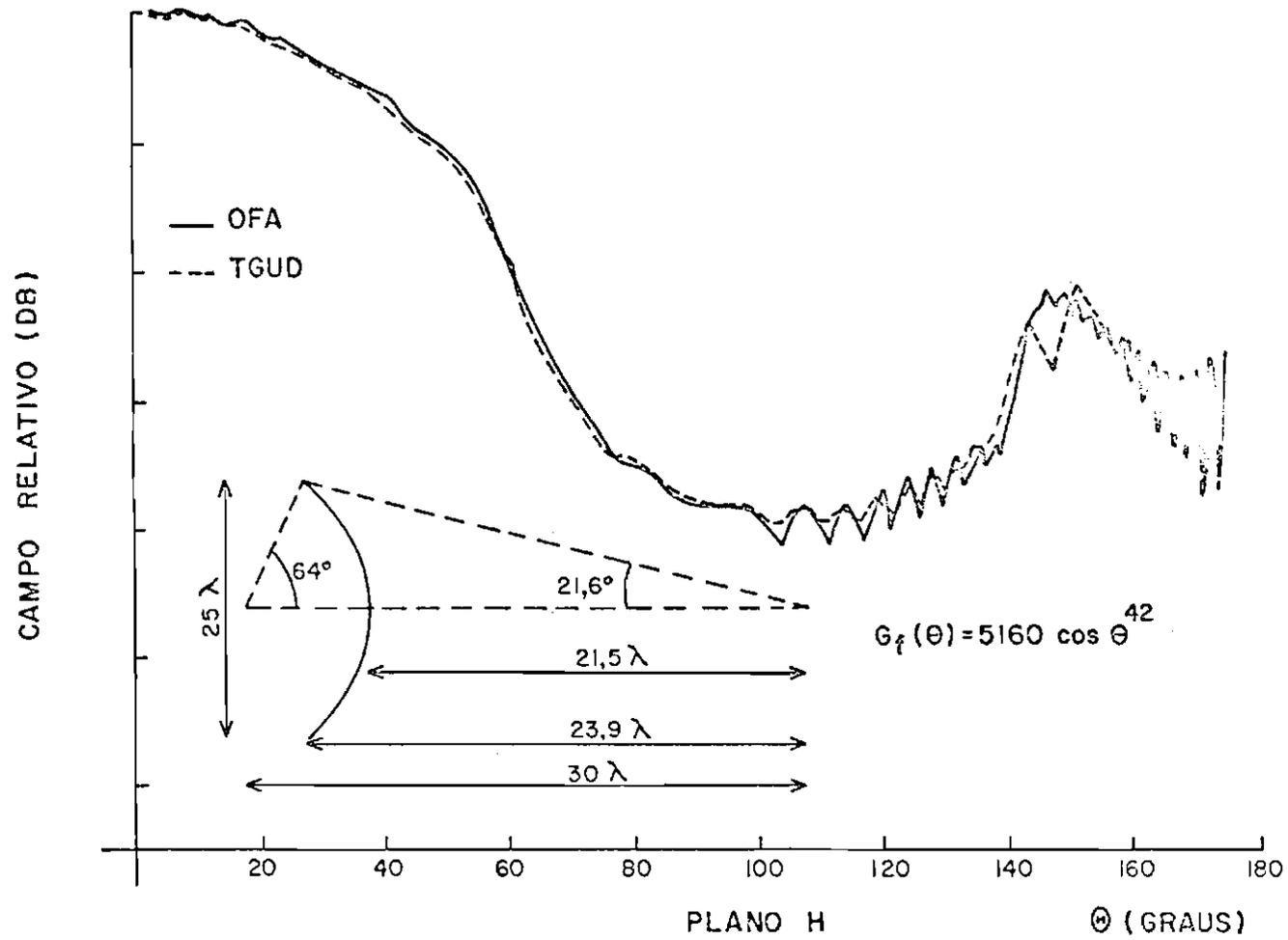


Fig. 5.8 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

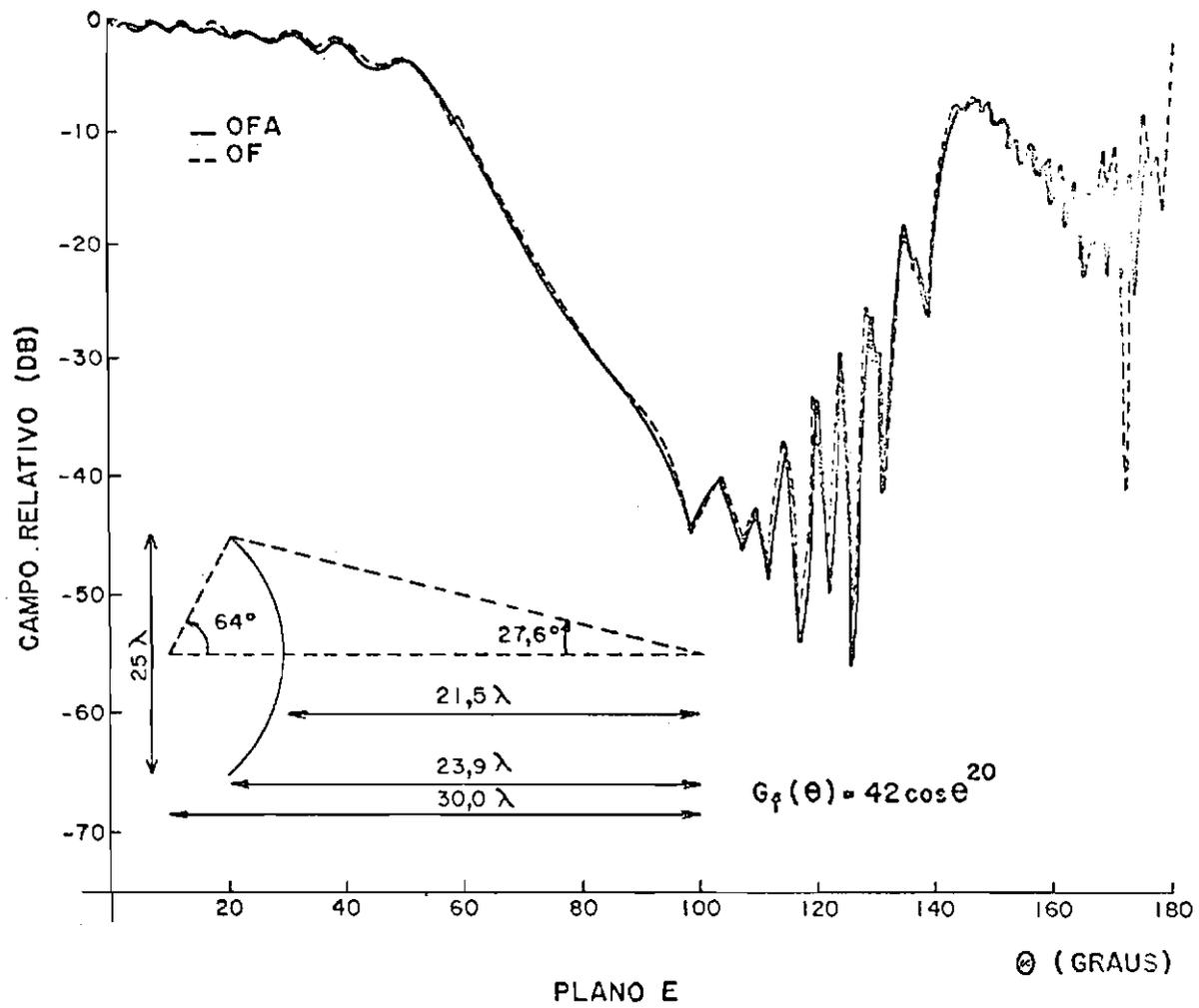


Fig. 5.9 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco.

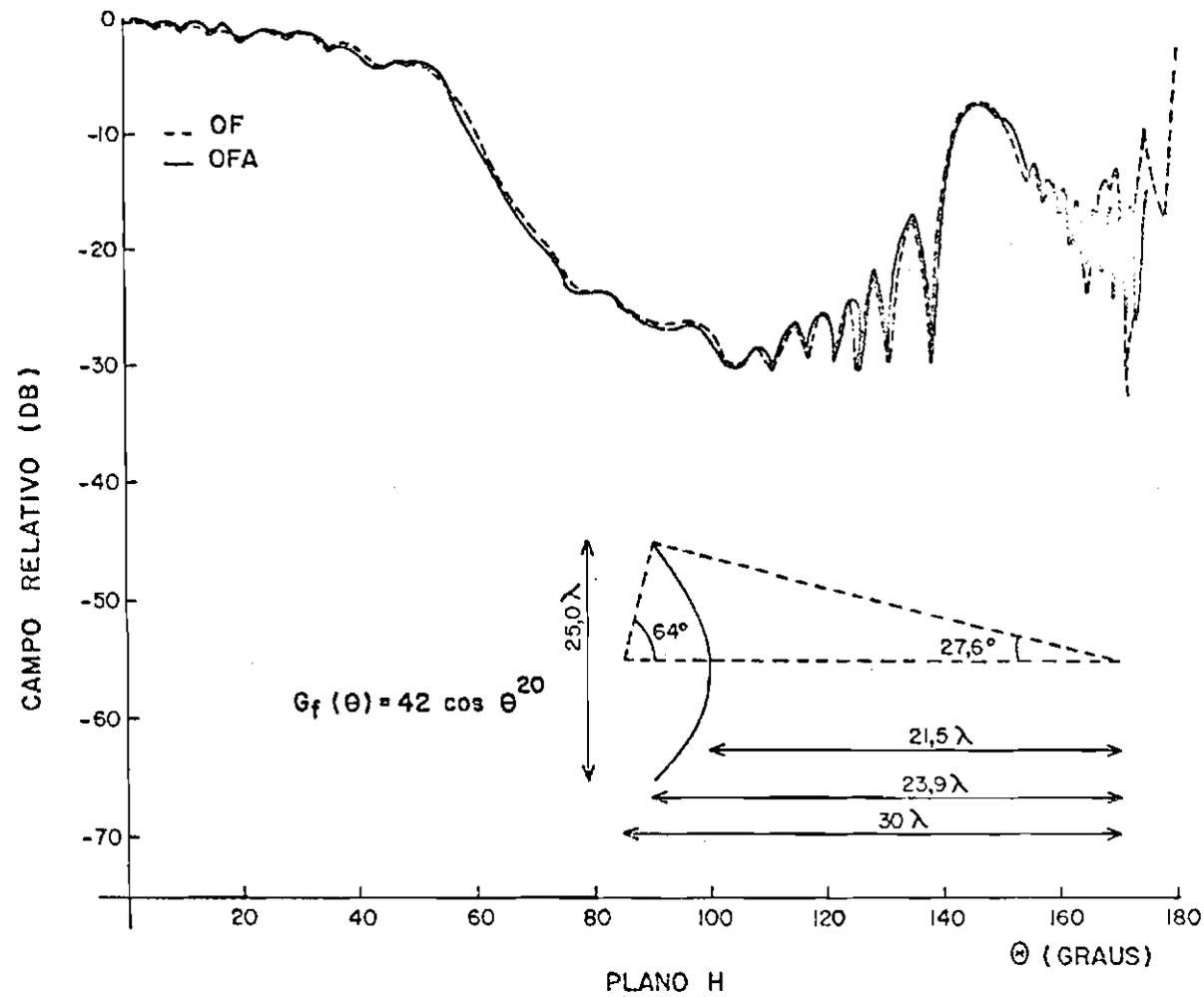


Fig. 5.10 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

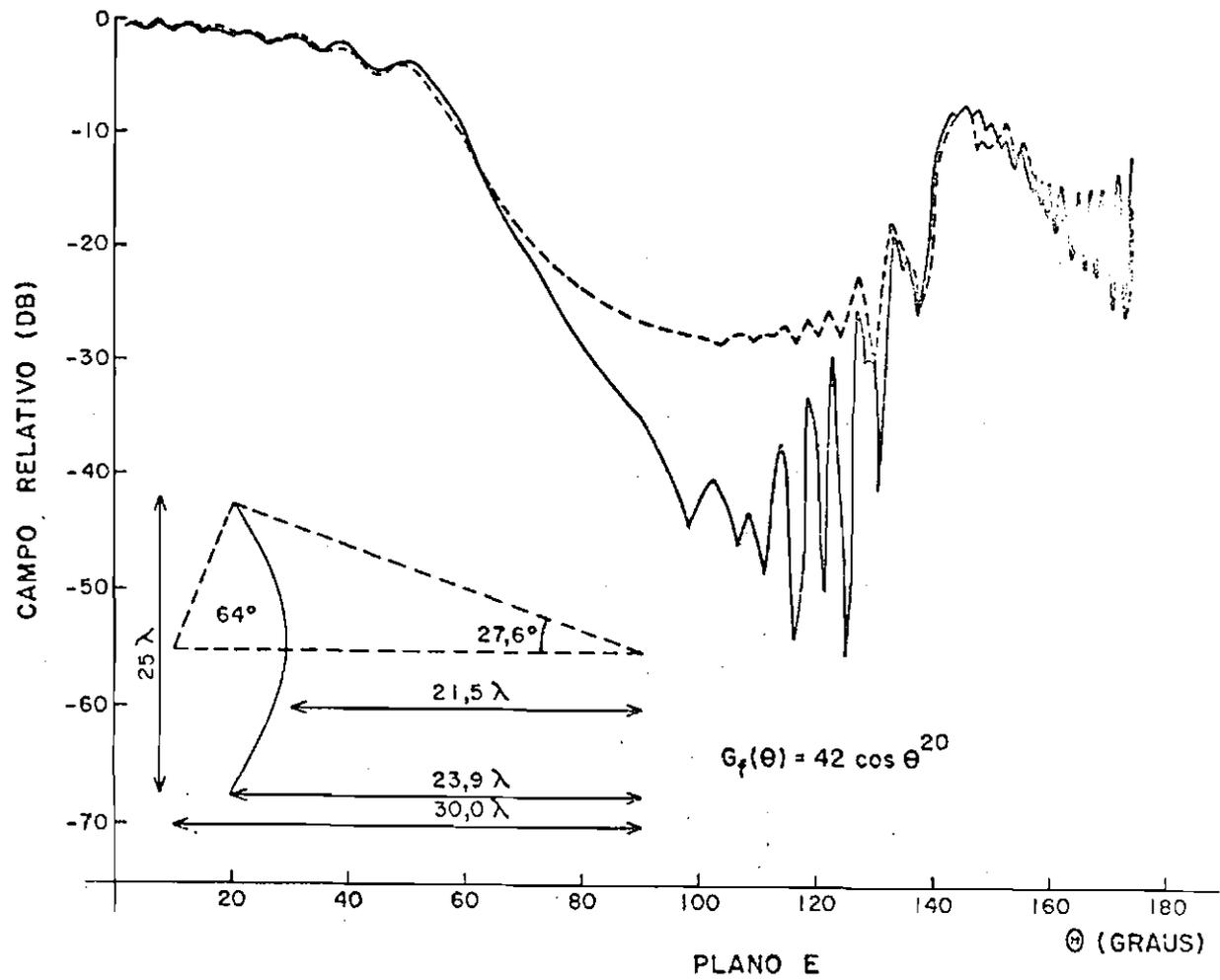


Fig. 5.11 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco.

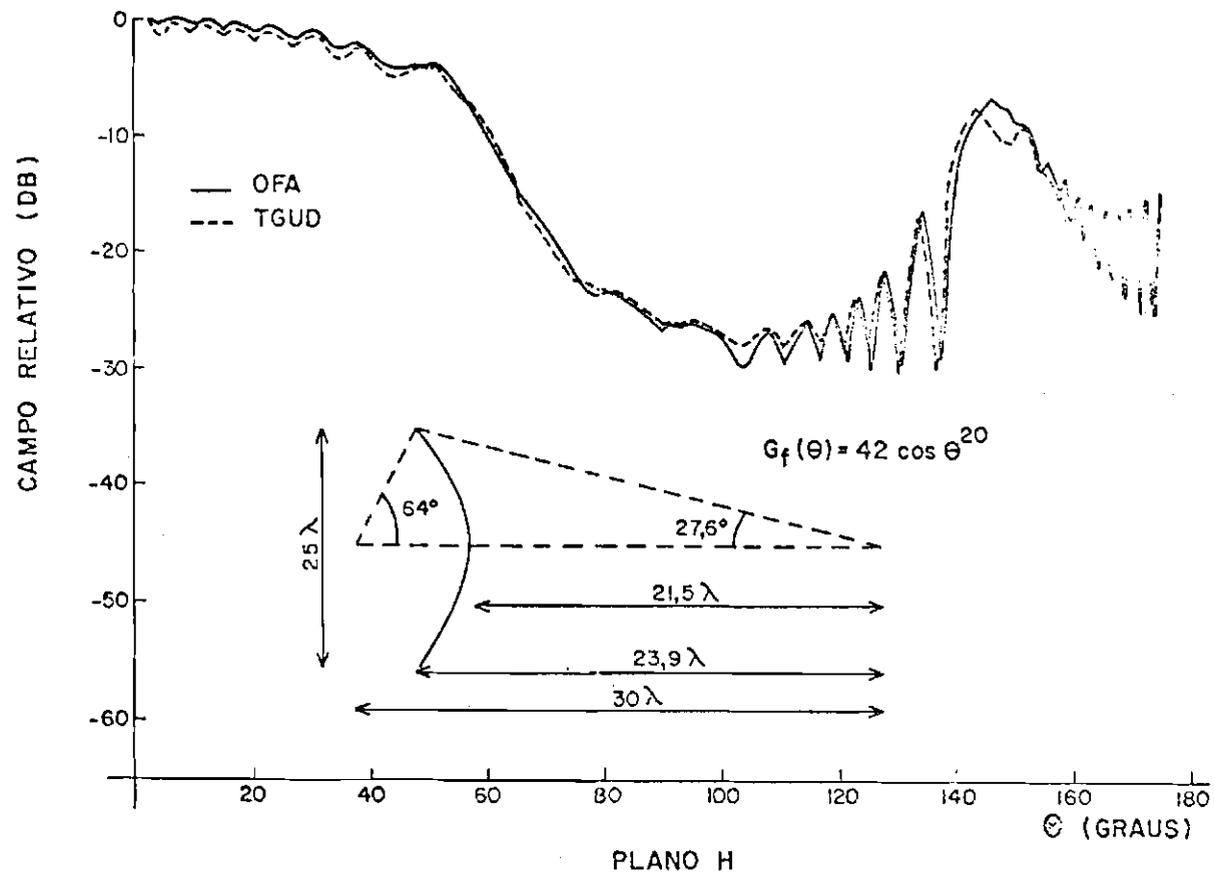


Fig. 5.12 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

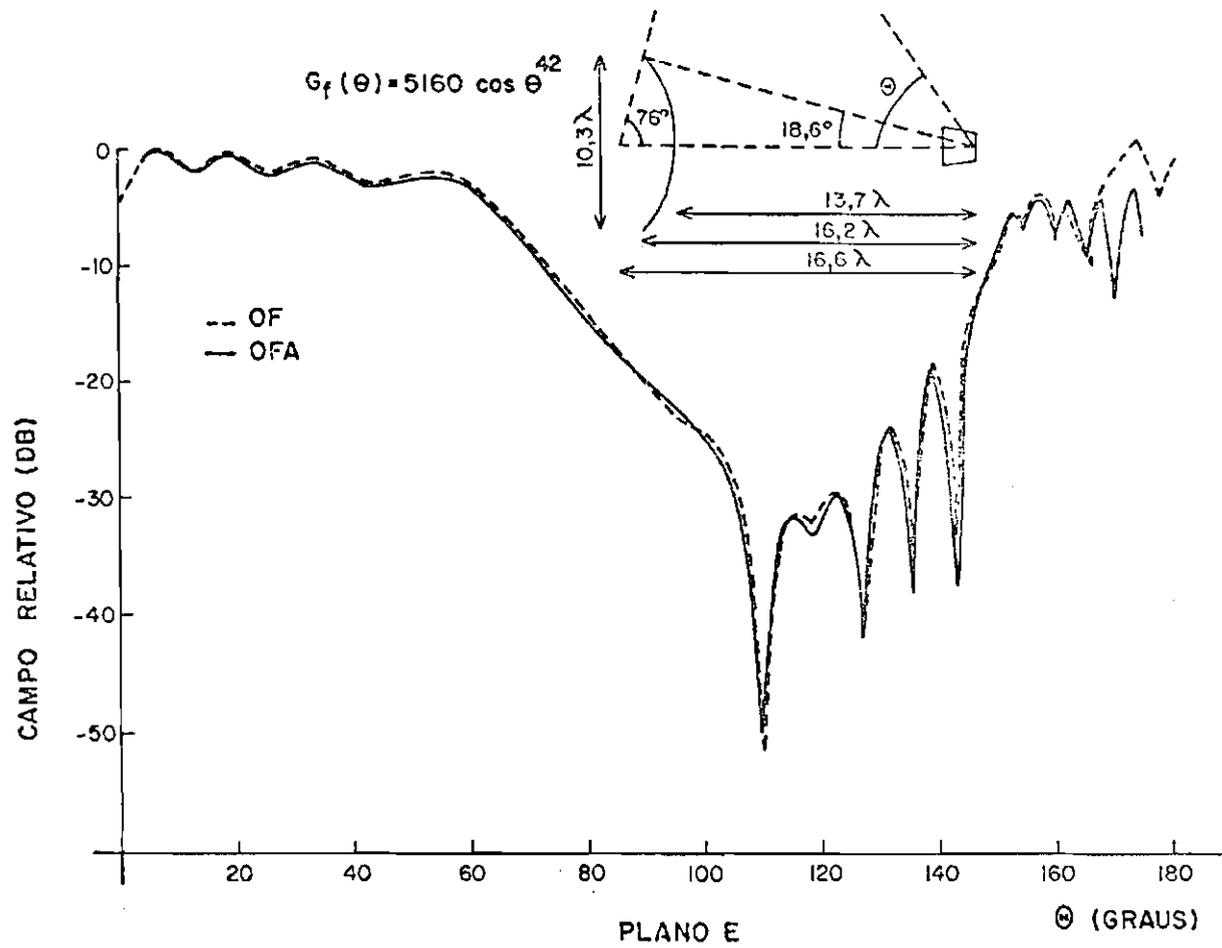


Fig. 5.13 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco.

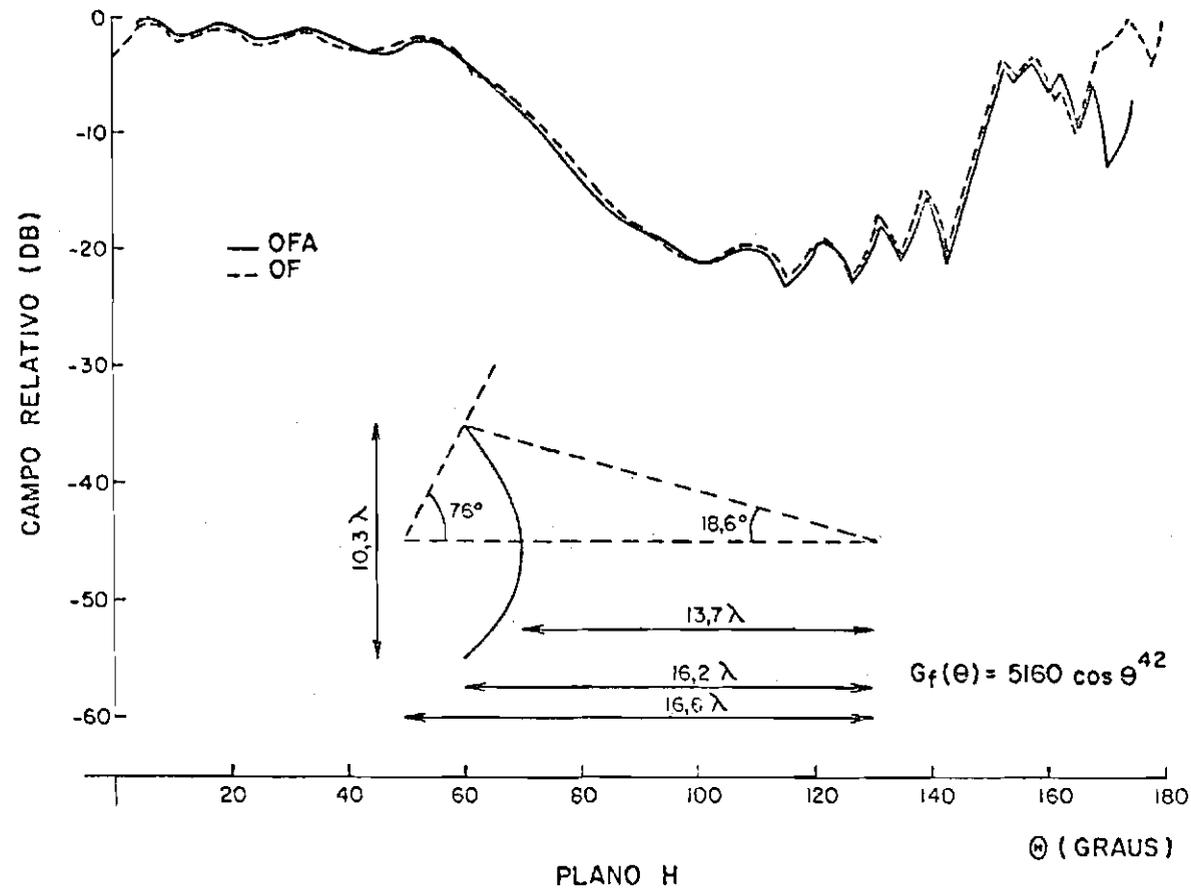


Fig. 5.14 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipébole com alimentador no foco.

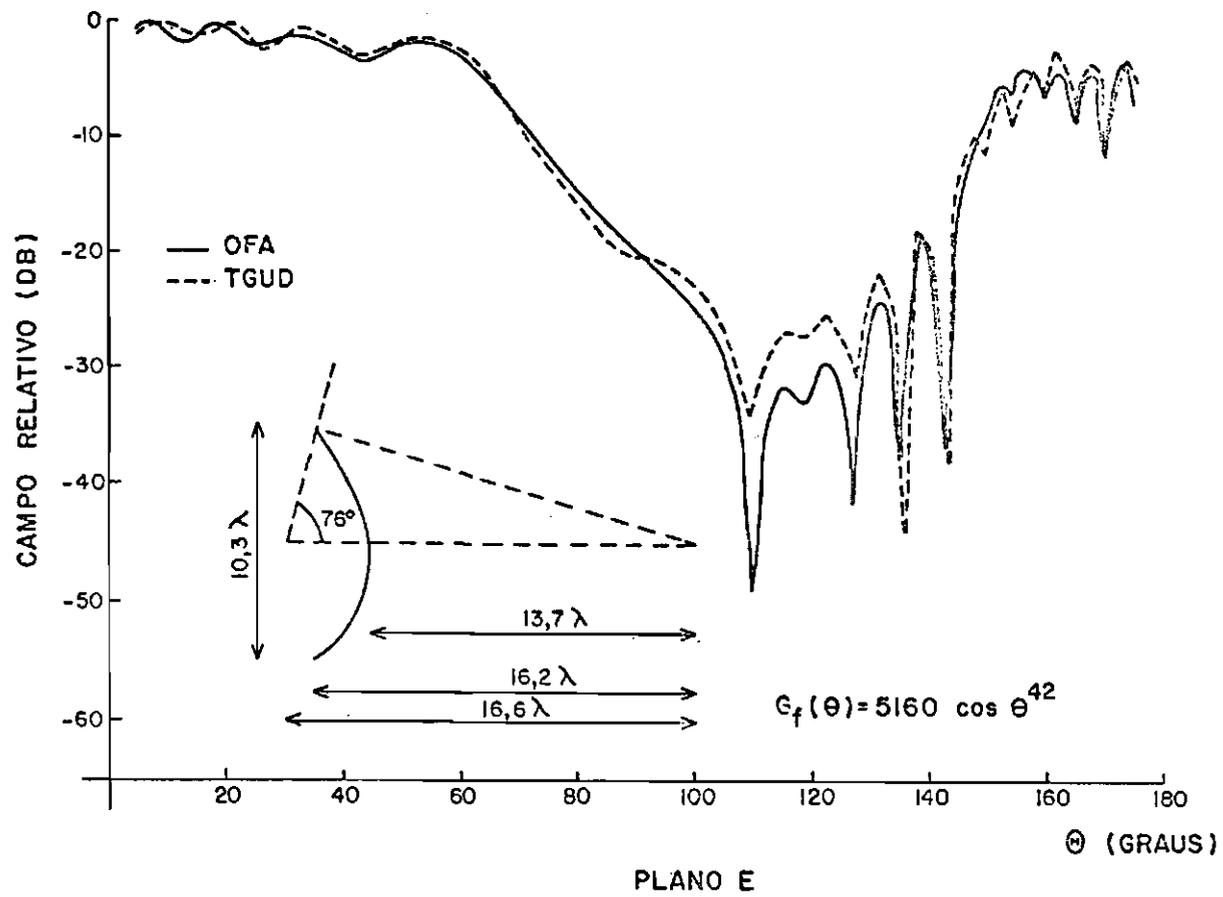


Fig. 5.15 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco.

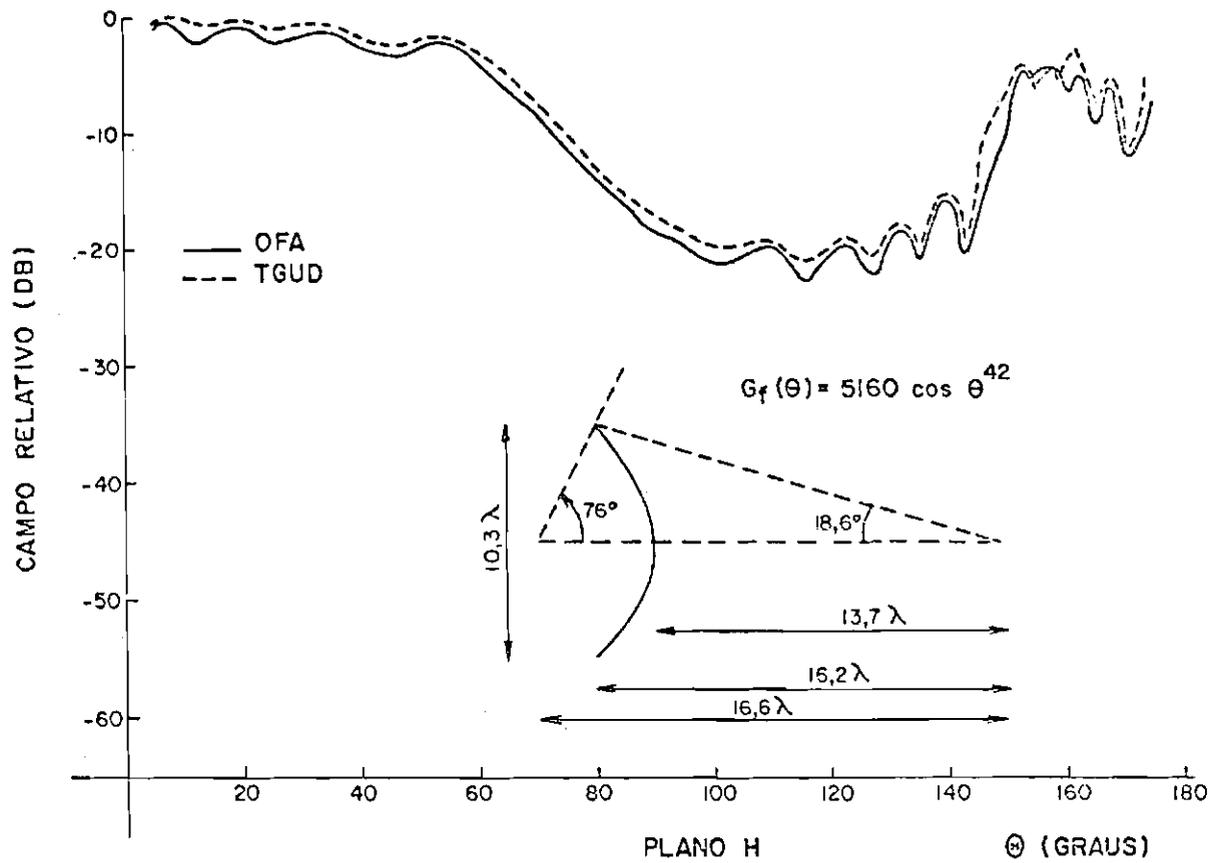


Fig. 5.16 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

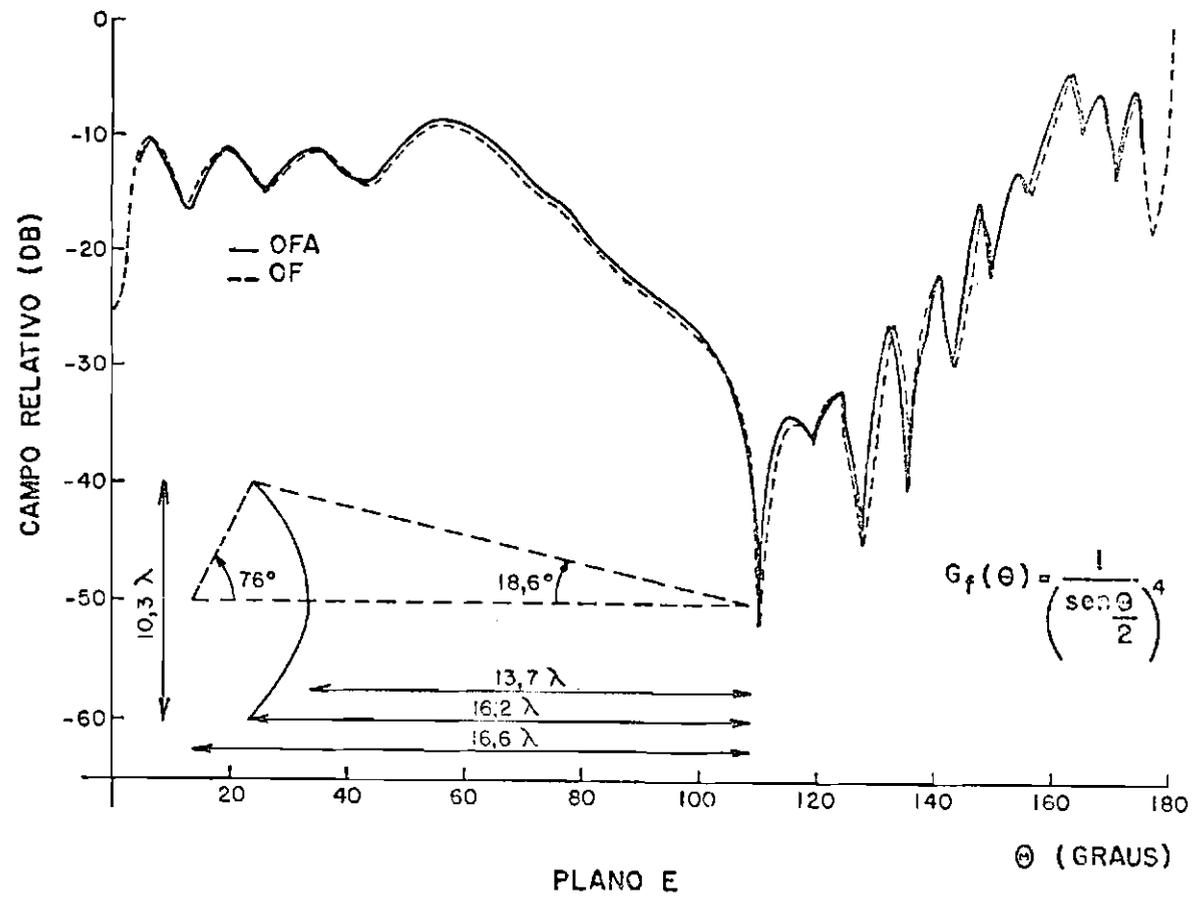


Fig. 5.17 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco.

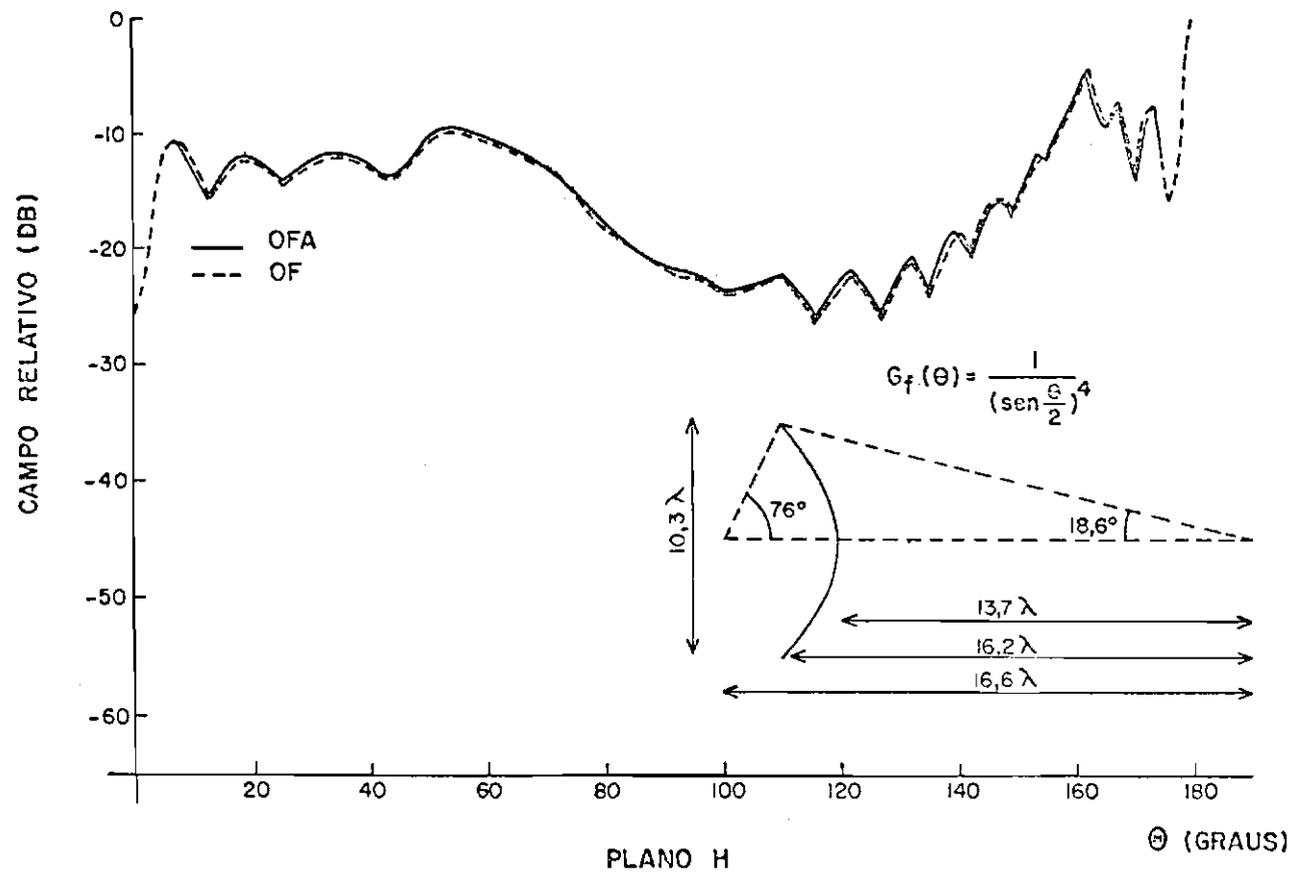


Fig. 5.18 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

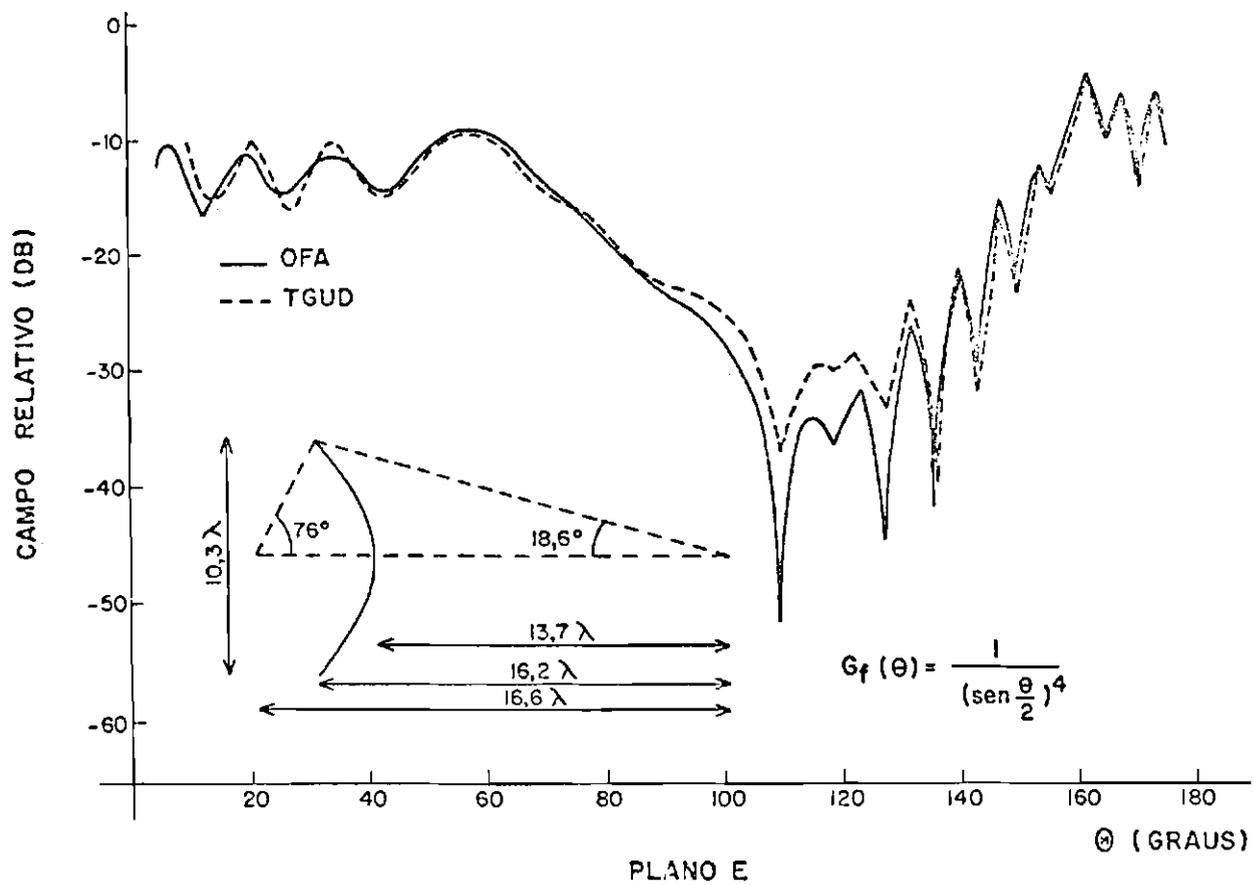


Fig. 5.19 - Diagrama de radiação, no plano E, de uma hipérbole com alimentador no foco.

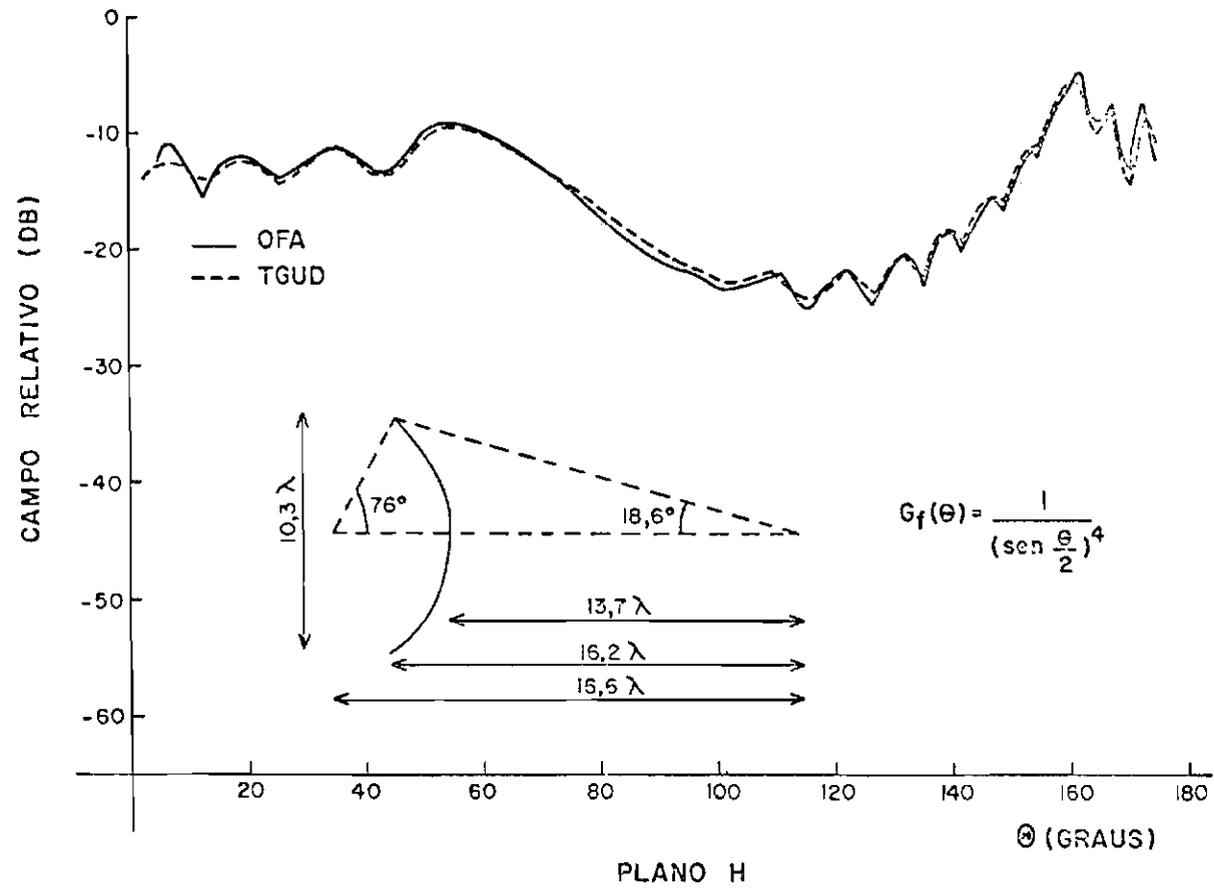


Fig. 5.20 - Diagrama de radiação, no plano H, de uma hipérbole com alimentador no foco.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. *Handbook of Mathematical functions*. New York, Dover, 1.965.
- COLLIN, R.E.; ZUCKER, F.J. *Antenna Theory*. New York, N.Y., Mc Graw-Hill, 1.969. Part 2
- FELSEN, L.B.; MARCUVITIZ, N. *Radiation And Scattering of waves*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1.973. Cap.4, V. 370-441.
- JAMES, G.L. *Geometrical Theory of diffraction of eletromagnetic Waves*. Sterenage, Peter Peregrinus, 1.976.
- KELLER, J.B. A geometrical theory of diffraction. In McGill University Symposium on Microwave Optics. Montreal, Jun., 1.953.
- KNOP, C.M. An Extension of Rusch's Asymptotic Physical Optics Diffraction Theory of a Paraboloid Antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.*, AP-23 (5):741-743, Sept. 1.975.
- .; OSTERTAG, E.L. A note on the Asymptotic Physical Optics Solution to the scattered fields from a Paraboloidal reflector. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-25 (4): 531-534, July 1.977.
- KOUYOUMJIAN, R.G.; PATHAK, P.H. *The dyadic diffraction coefficient for a perfectly conducting wedge*. Columbus, OH, Ohio State University, Electroscience Laboratory, 1.970.
- . A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *Proceedings of the IEEE*, 62 (11) 1.448-1.461, Nov 1.974.
- MITRA, R. *Numerical and asymptotic techniques in electromagnetics*. New York, N.Y., Springer, 1.975.
- RATNASARI, P.A.J.; KOUYOUMJIAN, R.G.; PATHAK, P.H. The wide angle side lobes of reflector antennas. Columbus, OH, Ohio State University, Eletroscience Lab., Dept. of Elec. Engr., 1.970. (Technical Report 2.183-1).

- RUSCH, W.V.T.; POTTER, P.D. *Analysis of reflector antennas*. New York, N.Y., Academic, 1.970.
- RUSCH, W.V.T. *Antennas Notes*. Lyngby, Elektromagnetics Institute, Technical University of Denmark, 1.974. V.2 (NB 84)
- SAFAK, M. Calculation of radiation patterns of paraboloidal reflectors by high-frequency asymptotic techniques. *Electronics Letters*, 12 (9): 229-231, 1.976.
- SILVER, S. *Microwave Antenna Theory and design*. New York, N.Y., Dover, 1.965.

APÊNDICE A

CÁLCULO DA NORMAL E DO ELEMENTO DE ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE GERAL DE REVOLUÇÃO

Usando-se as coordenadas da Figura 2.2, uma superfície geral de revolução pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos\theta' \\ x &= \rho \operatorname{sen}\theta' \cos\phi' \\ y &= \rho \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\phi' \end{aligned} \tag{A.1}$$

Substituindo-se a Equação 2.3, nas A.1, têm-se

$$\begin{aligned} z &= \frac{\cos\theta'}{k g(\theta')} \\ x &= \frac{\operatorname{sen}\theta' \cos\phi'}{k g(\theta')} \\ y &= \frac{\operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\phi'}{k g(\theta')} \end{aligned} \tag{A.2}$$

A normal a uma superfície refletora é dada por:

$$\hat{n} = \mu \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \tag{A.3}$$

onde

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$u_1 < u < u_2 \quad v_1 < v < v_2$$

e

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}$$

$$\vec{r}_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u=u_0, v=v_0}$$

Fazendo-se os parâmetros u e v iguais a θ' e ϕ' respectivamente tem-se

$$\vec{r}_{\theta'} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta'}, \frac{\partial y}{\partial \theta'}, \frac{\partial z}{\partial \theta'} \right) \quad (A.5)$$

onde

$$\frac{\partial x}{\partial \theta'} = - \frac{\cos \theta' \cos \phi'}{k g(\theta')} + \frac{\text{sen} \theta' \cos \phi' g'(\theta')}{k g^2(\theta')}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta'} = - \frac{\cos \theta' \text{sen} \phi'}{k g(\theta')} + \frac{\text{sen} \theta' \text{sen} \phi' g'(\theta')}{k g^2(\theta')}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta'} = \frac{\text{sen} \theta'}{k g(\theta')} + \frac{\cos \theta' g'(\theta')}{k g^2(\theta')}$$

e

$$\vec{r}_{\phi'} = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi'}, \frac{\partial y}{\partial \phi'}, \frac{\partial z}{\partial \phi'} \right) \quad (A.6)$$

onde

$$\frac{\partial x}{\partial \phi'} = \frac{\text{sen} \theta' \text{sen} \phi'}{k g(\theta')}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi'} = - \frac{\text{sen} \theta' \cos \phi'}{k g(\theta')}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi'} = 0$$

Substituindo-se as Equações A.5 e A.6 na A.3 obtêm-se, para a normal:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\rho} + \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \vec{\theta}'}{\left[1 + \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{A.7})$$

O elemento de área da superfície é calculado por:

$$dS = | \vec{r}_u \times \vec{r}_v | \Delta u \Delta v \quad (\text{A.8})$$

ou substituindo-se as coordenadas usadas como parâmetros:

$$dS = | \vec{r}_{\theta'} \times \vec{r}_{\phi'} | d\theta' d\phi' \quad (\text{A.9})$$

Pela substituição das Equações A.5 e A.6 na Equação A.9 obtém-se a seguinte equação para o elemento de área:

$$dS = \frac{\text{sen}\theta'}{k^2 g^2(\theta')} \left[1 + \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta' d\phi' \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B

CAMPO IRRADIADO PELO ALIMENTADOR

Considerando-se a região entre a superfície refletora e o sistema alimentador sem cargas, homogênea, isotrópica e com condutividade de zero, os campos elétrico e magnético podem ser descritos pelas equações de onda vetoriais homogêneas:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + k^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + k^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{B.1b})$$

onde \vec{E} é o campo elétrico, \vec{H} é o campo magnético, e k é a constante de propagação no espaço livre.

O sistema de coordenadas que descreve o alimentador e o sistema refletor é mostrado na Figura B.1. Os sistemas refletores normalmente convertem ondas esféricas em planas ou ondas esféricas em esféricas e, portanto, é natural descrever a radiação do alimentador em coordenadas esféricas.

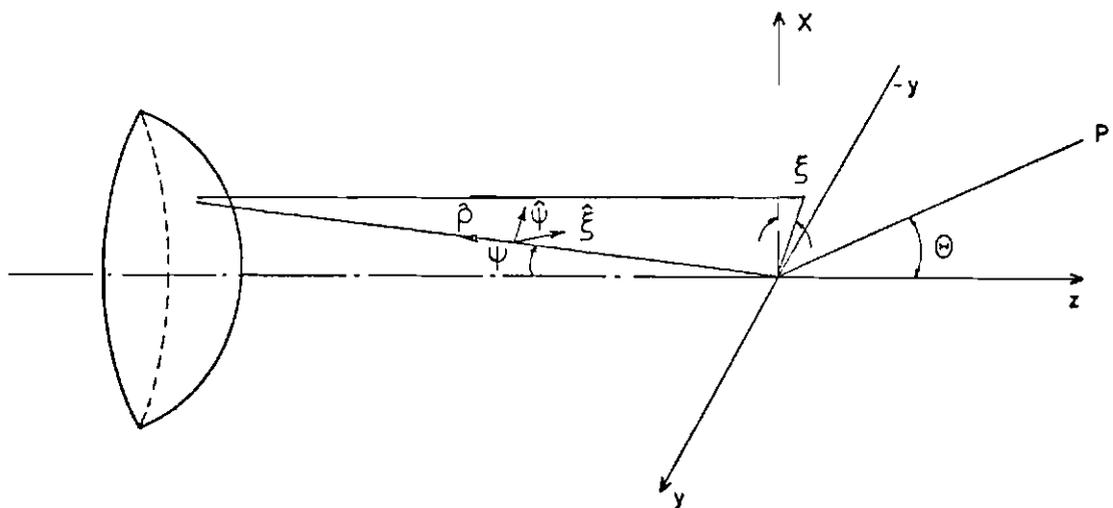


Fig. B.1 - Geometria para a descrição dos campos irradiados pelo alimentador.

Hã três famílias de soluções vetoriais independentes, \vec{L}_{mn} , \vec{M}_{mn} e \vec{N}_{mn} , para as Equações B.1. As \vec{L}_{mn} representam ondas planas e não serão consideradas mais. As soluções \vec{M}_{mn} e \vec{N}_{mn} representam os campos complexos \vec{E} e \vec{H} de uma família de ondas transversais elétricas e magnéticas. As componentes de campo são dadas por:

Ondas TE_{mn}

$$\vec{E}_{mn} = j Z_0 \vec{M}_{mn} \quad (B.2a)$$

$$\vec{H}_{mn} = \vec{N}_{mn} \quad (B.2b)$$

Ondas TM_{mn}

$$\vec{E}_{mn} = \vec{N}_{mn} \quad (B.3a)$$

$$\vec{H}_{mn} = (j/Z_0) \vec{M}_{mn} \quad (B.3b)$$

O campo em uma região qualquer do espaço livre pode ser representado, dependendo da fonte que o excitou, por uma superposição de modos TE, TM, ou por uma combinação de ambos.

A dependência temporal das funções vetoriais, \vec{M}_{mn} e \vec{N}_{mn} , é da forma $e^{j\omega t}$; ψ é a coordenada polar; e ξ é a azimutal. Omitindo-se a dependência temporal, as funções vetoriais podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{mn} = & \mp \frac{m}{\text{sen}\psi} Z_n(k\rho) P_n^m(\cos\psi) \left[\begin{array}{c} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right] m \xi \hat{\psi} - \\ & - Z_n(k\rho) \frac{d}{d\psi} \left[P_n^m(\cos\psi) \right] \left[\begin{array}{c} \text{cos} \\ \text{sen} \end{array} \right] m \xi \hat{\xi} \end{aligned} \quad (B.4a)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{mn} = & \frac{1}{k\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho Z_n(k\rho) \right] \frac{d}{d\psi} \left[P_n^m(\cos\psi) \right] \left[\begin{array}{c} \text{cos} \\ \text{sen} \end{array} \right] m \xi \hat{\psi} \mp \\ & \mp \frac{m}{k\rho \text{sen}\psi} \frac{d}{d\rho} \left[\rho Z_n(k\rho) \right] P_n^m(\cos\psi) \left[\begin{array}{c} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right] m \xi \hat{\xi} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{n(n+1)}{k\rho} Z_n(k\rho) P_n^m(\cos\psi) \left[\frac{\cos}{\sin} \right] m \xi \hat{\rho} \quad (\text{B.4b})$$

onde $P_n^m(\cos\psi)$ são os polinômios associados de Legendre e, $Z_n(k\rho)$, as funções esféricas de Bessel. Para alimentadores que satisfazem a condição de radiação, as $Z_n(k\rho)$ são necessariamente funções de Hankel do tipo $h_n^{(2)}(k\rho)$ que representam ondas caminhantes, as quais saem do alimentador. O comportamento assintótico das funções de Hankel fornecem uma interpretação física das regiões de campo próximo, de Fresnel e de campo distante. Para a região de campo distante $k\rho \geq n^2$ as funções de Hankel esféricas são aproximadas por:

$$h_n^{(2)}(k\rho) \approx (j)^{n-1} (e^{-jk\rho}/k\rho) \quad (\text{B.5a})$$

e

$$\frac{1}{k\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho h_n^{(2)}(k\rho) \right] \approx j^n \frac{e^{-jk\rho}}{k\rho} \quad (\text{B.5b})$$

e as ondas possuem sincronismo de fase e amplitude que varia com o inverso da distância. Para a região de Fresnel $n \leq k\rho \leq n^2$ tem-se

$$h_n^{(2)}(k\rho) \approx (j)^{n+1} (e^{-jkf_1(\rho, n)}/k\rho) \quad (\text{B.6a})$$

$$\frac{1}{k\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho h_n^{(2)}(k\rho) \right] \approx (j)^n (e^{-jkf_2(\rho, n)}/k\rho) \quad (\text{B.6b})$$

e as ondas mantêm a mesma dependência em amplitude e não possuem sincronismo de fase. Para a região de campo próximo $0 < k\rho \leq n$:

$$h_n^{(2)}(k\rho) = f_3(\rho, n) \quad (\text{B.7a})$$

$$\frac{1}{k\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho h_n^{(2)}(k\rho) \right] = f_4(\rho, n) \quad (\text{B.7b})$$

as ondas possuem um comportamento diferente em amplitude e em fase. Nas equações acima f_1 , f_2 , f_3 e f_4 indicam a dependência entre ρ e n (Rusch and Potter, 1970).

Para um refletor situado na região de campo distante do alimentador, o diagrama de radiação deste pode ser escrito como uma série de modos TE_{mn} como:

$$E_f(\psi, \xi, \rho) = [E_\psi(\psi, \xi)\hat{\psi} + E_\xi(\psi, \xi)\hat{\xi}] e^{-jk\rho/\rho} \quad (B.8)$$

onde

$$\left. \begin{array}{l} E_\psi(\psi, \xi) \\ E_\xi(\psi, \xi) \end{array} \right\} = \sum_m \left[\left(\begin{array}{c} A_m(\psi) \\ C_m(\psi) \end{array} \right) \sin m \xi + \left(\begin{array}{c} B_m(\psi) \\ D_m(\psi) \end{array} \right) \cos m \xi \right]$$

onde $A_m(\psi)$, $B_m(\psi)$, $C_m(\psi)$ e $D_m(\psi)$ são funções complexas do índice da onda e do ângulo polar ψ , podendo portanto representar alimentadores com polarização linear, circular ou elíptica. Para um dado alimentador, estes coeficientes podem ser calculados, igualando-se o campo dado pela Equação B.8 com o campo em uma superfície esférica que envolve o alimentador e utilizando-se as relações de ortogonalidade das funções esféricas.

Para o caso especial de um sô modo propagando-se, $m=1$, e somente B_1 e C_1 reais, diferentes de zero, o campo do alimentador é linearmente polarizado. Se o plano xz contém o plano E do alimentador, escreve-se então, para o campo incidente na superfície refletora:

$$\vec{E}_i = [B_1(\psi) \cos \xi \hat{\psi} - C_1(\psi) \sin \xi \hat{\xi}] \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad (B.9)$$

Descrevendo-se o campo incidente em termos das coordenadas da Figura 2.2 tem-se:

$$\vec{E}_i = [-B_1(\theta') \cos\phi' \hat{\theta}' - C_1(\theta') \sin\phi' \hat{\phi}'] \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad (B.10)$$

Pode-se escrever então o campo do alimentador como:

$$\vec{E}_i = - \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} [B_1(\theta') \cos\phi' \hat{\theta}' + C_1(\theta') \sin\phi' \hat{\phi}'] \quad (B.11)$$

onde

$$B_2(\theta') = \sqrt{G_f(\theta')} \mu_{\theta'}$$

$$C_1(\theta') = \sqrt{G_f(\theta')}$$

e $G_f(\theta')$ é o diagrama de potência do alimentador. Se $\mu_{\theta'} = 1$ tem-se uma fonte com características de polarização de fonte de Huygens, ou seja, cada ponto da frente de onda dará origem a um campo com as mesmas características do emitido pelo alimentador. Se $\mu_{\theta'} = -\cos\theta'$ o alimentador terá características de polarização de um dipolo na direção \hat{x} .

APÊNDICE C

EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DO CAMPO ESPALHADO

O campo \vec{H}_i incidente na superfície refletora é dado por:

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta} \hat{\rho} \times \vec{E}_i \quad (C.1)$$

onde η é igual à impedância de onda no espaço livre e \vec{E}_i é dado de forma geral pela Equação B.8. Utilizando-se a Equação 2.2 obtêm-se para a densidade superficial de corrente, \vec{J}_s , a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \vec{J}_s = \frac{2 \exp(-jk\rho)}{\eta} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 \right]^{1/2}} \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m(\theta') \sin m \phi' + \right. \right. \\ \left. \left. + B_m(\theta') \cos m \phi' \right] \hat{\theta}' - \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m(\theta') \sin m \phi' + \right. \right. \\ \left. \left. + D_m(\theta') \cos m \phi' \right] \hat{\phi}' + \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m(\theta') \sin m \phi' + \right. \right. \\ \left. \left. + B_m(\theta') \cos m \phi' \right] \hat{\rho} \right\} \quad (C.2) \end{aligned}$$

Fazendo-se a mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{x} \cos \phi' \sin \theta' + \hat{y} \sin \phi' \sin \theta' + \hat{z} \cos \theta' \\ \hat{\theta}' &= \hat{x} \cos \phi' \cos \theta' + \hat{y} \sin \phi' \cos \theta' - \hat{z} \sin \theta' \\ \hat{\phi}' &= -\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi' \end{aligned} \quad (C.3)$$

obtêm-se a corrente em função das coordenadas \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} . Com uma segunda transformação de coordenadas, dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{R} \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} &= \hat{R} \sin \theta \sin \phi + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} &= \hat{R} \cos \theta - \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned} \quad (C.4)$$

obtêm-se as componentes de \vec{J}_s em θ e ϕ , coordenadas do ponto de observação:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} J_{s\theta} \\ J_{s\phi} \end{array} \right\} &= \frac{2}{n} \frac{\exp(-jk\rho)}{\rho} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \right)^2 \right]^{1/2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m(\theta') \cdot \right. \right. \\ &\cdot \left. \left. \begin{array}{l} \sin m\phi' + B_m(\theta') \cos m\phi' \end{array} \right] \left[\pm \cos\phi' \sin\theta' \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \cos\phi' \cos\theta' \right) \left(\begin{array}{l} \cos\theta \cos\phi \\ \sin\phi \end{array} \right) + \left(\sin\phi' \sin\theta' \frac{g'(\theta')}{g(\theta')} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \sin\phi' \cos\theta' \right) \left(\begin{array}{l} \cos\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{array} \right) - \left(\frac{g'(\theta')}{g(\theta')} \cos\theta' + \sin\theta' \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\begin{array}{l} \sin\theta \\ 0 \end{array} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m(\theta') \sin m\phi' + D_m(\theta') \cos m\phi' \right] \cdot \\ &\cdot \left. \left[\sin\phi' \left(\begin{array}{l} \cos\theta \cos\phi \\ -\sin\phi \end{array} \right) - \cos\phi' \left(\begin{array}{l} \cos\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{array} \right) \right] \right\} \quad (C.5) \end{aligned}$$

As componentes de campo em θ e ϕ são obtidas multiplicando-se escalarmente \vec{E} , dada pela Equação 2.1a, pelos versores $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$, respectivamente:

$$E_{\theta} = -j \frac{\omega u_0}{4\pi R} e^{-jkR} \int \int_S \hat{\theta} \cdot \vec{J}_s \exp(jk\vec{\rho} \cdot \hat{R}) dS \quad (C.6)$$

$$E_{\phi} = -j \frac{\omega u_0}{4\pi R} e^{-jkR} \int \int_S \hat{\phi} \cdot \vec{J}_s \exp(jk\vec{\rho} \cdot \hat{R}) dS \quad (C.7)$$

Observa-se que o campo \vec{E} não tem componente radial (direção \hat{R}) uma vez que esta se anula no integrando da Equação 2.1a. Substituindo-se as componentes da corrente nas Equações C.7 e C.8. e realizando-se as integrações em ϕ' , usando-se as Equações D.5 a D.8, o campo espalhado pode ser escrito como:

$$\vec{E}_s = \frac{\exp(-jkR)}{R} \left\{ E_{\theta} \hat{\theta} + E_{\phi} \hat{\phi} \right\} \quad (C.8)$$

com E_θ e E_ϕ dados por

$$\begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_\phi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} f_m(\theta) \\ h_m(\theta) \end{pmatrix} \sin m\phi + \begin{pmatrix} g_m(\theta) \\ k_m(\theta) \end{pmatrix} \cos m\phi \right] \quad (\text{C.9})$$

As funções $f_m(\theta)$, $g_m(\theta)$, $h_m(\theta)$, $k_m(\theta)$ são escritas como:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_m(\theta) \\ g_m(\theta) \end{Bmatrix} &= \left(\frac{1}{2}\right) j^m \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta' \ell^{-j\alpha} \operatorname{sen}\theta'}{[g(\theta')]^2} \left\{ \begin{bmatrix} A_m(\theta') \\ B_m(\theta') \end{bmatrix} [\cos\theta \cdot \right. \\ &\quad \cdot [g'(\theta')\operatorname{sen}\theta' - g(\theta')\cos\theta'] [J_{m-1}(\beta) - J_{m+1}(\beta)] - \\ &\quad \left. - 2j [g'(\theta')\cos\theta' + g(\theta')\operatorname{sen}\theta'] \operatorname{sen}\theta J_m(\beta) \right] \mp \\ &\quad \mp \begin{bmatrix} D_m(\theta') \\ C_m(\theta') \end{bmatrix} g(\theta')\cos\theta [J_{m-1}(\beta) + J_{m+1}(\beta)] \left. \right\} \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} h_m(\theta) \\ k_m(\theta) \end{Bmatrix} &= \left(\mp \frac{1}{2}\right) j^m \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta' \ell^{-j\alpha} \operatorname{sen}\theta'}{[g(\theta')]^2} \left\{ \begin{bmatrix} B_m(\theta') \\ A_m(\theta') \end{bmatrix} [\operatorname{sen}\theta' \cdot \right. \\ &\quad \cdot [g'(\theta') - g(\theta')\cos\theta'] \cdot [J_{m-1}(\beta) + J_{m+1}(\beta)] \pm \\ &\quad \left. \pm \begin{bmatrix} C_m(\theta') \\ D_m(\theta') \end{bmatrix} g(\theta') [J_{m-1}(\beta) - J_{m+1}(\beta)] \right\} \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

com α e β dados por:

$$\alpha = \frac{\cos\theta' \cos\theta - 1}{g(\theta')} = k\rho(\theta') (1 - \cos\theta' \cos\theta) \quad (\text{C.12})$$

$$\beta = \frac{\operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\theta}{g(\theta')} = k\rho(\theta') \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \quad (\text{C.13})$$

APÊNDICE D

FORMAS INTEGRAIS DAS FUNÇÕES DE BESSEL

Da definição das funções de Bessel (Abramovitz and Stegun, 1965) na forma integral:

$$J_m(\beta) = \frac{1}{2\pi j^m} \int_0^{2\pi} \cos m\phi \, e^{j\beta \cos \phi} \, d\phi \quad (D.1)$$

encontra-se

$$2\pi j^m J_m(\beta) \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} = \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos m\phi' \\ \sin m\phi' \end{Bmatrix} e^{j\beta \cos(\phi-\phi')} \, d\phi' \quad (D.2)$$

Usando-se D.2, com as relações trigonométricas

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (D.3)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad (D.4)$$

obtêm-se a solução das seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin m\phi' \sin \phi' e^{j\beta \cos(\phi-\phi')} \, d\phi' &= \\ &= -\pi j^{m+1} [J_{m-1}(\beta) \cos(m-1)\phi + J_{m+1}(\beta) \cos(m+1)\phi] \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin m\phi' \cos \phi' e^{j\beta \cos(\phi-\phi')} \, d\phi' &= \\ &= \pi j^{m+1} [J_{m+1}(\beta) \sin(m+1)\phi - J_{m-1}(\beta) \sin(m-1)\phi] \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos m\phi' \sin \phi' e^{j\beta \cos(\phi-\phi')} \, d\phi' &= \\ &= \pi j^{m+1} [J_{m-1}(\beta) \sin(m-1)\phi + J_{m+1}(\beta) \sin(m+1)\phi] \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi' \cos \phi' e^{j\beta \cos(\phi-\phi')} d\phi' =$$
$$= \pi j^{m+1} [J_{m+1}(\beta) \cos(m+1)\phi - J_{m-1}(\beta) \cos(m-1)\phi] \quad (D.8)$$

APÊNDICE E

CÁLCULO DE INTEGRAIS FINITAS PELO MÉTODO DE FASE ESTACIONÁRIA

Considerando-se as integrais do tipo:

$$I(\Omega) = \int_a^b f(x) e^{j\psi(x)} dx = \int_a^b f(x) e^{j\Omega q(x)} dx \quad (E.1)$$

onde Ω é um valor grande e positivo, e a e b são finitos. $f(x)$ e $q(x)$ são funções da variável real x , variando lentamente com esta, sendo $q(x)$ uma função real. Pode-se mostrar que, para $\Omega \rightarrow \infty$, a integral acima pode ser aproximada por (Felsen and Marcuvitz, 1973):

$$I(\Omega) \sim I_s(\Omega) U[(x_s - a)(b - x_s)] + I_e(\Omega) + O(\Omega^{-3/2}) \quad (E.2)$$

onde $U(\alpha)$ é a função de Heaviside definida por

$$U(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \quad (E.3)$$

$I_s(\Omega)$ é a contribuição de primeira ordem do ponto estacionário x_s , para o qual $\psi_x(x_s) = 0$ $a < x_s < b$:

$$I_s(\Omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_{xx}(x_s)|}} f(x_s) e^{j[\psi(x_s) \pm \frac{\pi}{4}]} \psi_{xx}(x_s) \lesseqgtr 0 \quad (E.4)$$

e $I_e(\Omega)$ é a contribuição de primeira ordem dos pontos finais:

$$I_e(\Omega) = \frac{f(b)}{j\psi_x(b)} e^{j\psi(b)} - \frac{f(a)}{j\psi_x(a)} e^{j\psi(a)} \quad (E.5)$$

Se o intervalo de integração contém vários pontos estacionários, $I_s(\Omega)$ é a soma dos termos correspondentes de cada x_s . Quando x_s coincide com um dos pontos finais a ou b , a contribuição deste ponto final é omitida na Equação E.5, e a contribuição do ponto estacionário é dividida por dois na Equação E.4. Se o intervalo de integração não contém pontos es

tacionários, U desaparece, e a integral é aproximada pela contribuição dos pontos finais. No caso em que o ponto final se aproxima do valor in finito, a contribuição correspondente deste ponto é omitida.

A aproximação acima falha quando x_s se aproxima de um dos pontos finais. Quando x_s se move continuamente em direção ou através de um dos pontos finais, o termo $I_s(\Omega)$ é descontínuo uma vez que o ponto de cela desaparece do intervalo de integração e $I_e(\Omega)$ diverge, desde que $\psi_x(x_s) \rightarrow \psi_x\{\frac{a}{b}\} \rightarrow 0$ quando $x_s \rightarrow \{\frac{a}{b}\}$. Para este caso, uma aproximação mais cuidadosa é necessária. Para simplificar a discussão, considere-se o caso em que x_s move em direção a a e passa por a . A integral na Equação E.1 pode então ser aproximada por (Felsen and Marcuvitz, 1973):

$$I(\Omega) \sim e^{j[\psi(x_s) \pm \pi/4]} \left\{ f(x_s)h_s Q(S_a e^{\mp j\pi/4}) + \frac{e^{\pm j(S_a^2 + \pi/4)}}{2\sqrt{\pi} S_a} \cdot [f(a)h_a - f(x_s)h_s] \right\} + \frac{f(b)}{j\psi_x(b)} e^{j\psi(b)} = I_e(\Omega) + I_s(\Omega) \cdot W(S_a e^{\mp j\pi/4}) \psi_{xx} \geq 0 \quad (E.6)$$

onde

$$S_a = \pm \sqrt{|\psi(x_s) - \psi(a)|} \quad (a - x_s) \geq 0 \quad (E.7)$$

$$h_s = \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_{xx}(x_s)|}} = h_a \quad x_s = a \quad (E.8)$$

$$h_a = \pm \frac{2\sqrt{\pi} S_a}{\psi_x(a)} \quad \psi_{xx}(x_s) \geq 0 \quad (E.9)$$

$$W(S_a e^{\mp j\pi/4}) = Q(S_a e^{\mp j\pi/4}) - \frac{e^{\pm j(S_a^2 + \pi/4)}}{2\sqrt{\pi} S_a} = \frac{e^{\mp j\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_{S_a}^{\infty} e^{\pm jt^2} dt - \frac{e^{\pm j(S_a^2 + \pi/2)}}{2 S_a} \right] \quad (E.10)$$

A função Q é definida como:

$$Q(z e^{\pm j\pi/4}) = \frac{e^{\pm j\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{\mp jt^2} dt = U(-z) + \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{e^{\pm j\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{|z|}^{\infty} e^{\mp jt^2} dt \quad (\text{E.11})$$

Pode-se mostrar que (Felsen and Marcuvitz, 1973):

$$Q(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{E.12})$$

e

$$Q(z e^{\pm j\pi/4}) \sim U(-z) + \frac{e^{\mp j(z^2 + \pi/4)}}{2\sqrt{\pi}z} \quad (\text{E.13})$$

quando $|z| \rightarrow \infty$

Para $|S_a|$ grande, e usando-se E.13 obtêm-se

$$W(S_a e^{\mp j\pi/4}) \sim U(-S_a) \quad |S_a| \rightarrow \infty \quad (\text{E.14})$$

Quando $x_s \rightarrow a$ ($S_a \rightarrow 0$), $Q(0) = \frac{1}{2}$ (Equação E.12) e a Equação E.6 reduz-se às contribuições do ponto estacionário e do ponto final:

$$I(\Omega) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi_{xx}(x_s)|}} f(x_s) e^{j[\psi(x_s) \pm \pi/4]} + \frac{f(b)}{j\psi_x(b)} e^{j\psi(b)} \quad \psi_{xx}(x_s) \geq 0 \quad (\text{E.15})$$

É interessante notar que, no caso da existência de um ponto estacionário que se move em direção e através de um ponto final, a contribuição do ponto estacionário é multiplicada pela função W , que remove a singularidade no ponto final considerado.

No caso em que x_s aproxima-se de b , S_a deve ser substituído por S_b , definido como:

$$S_b = \pm \sqrt{|\psi(x_s) - \psi(b)|} \quad (x_s - b) \gtrsim 0 \quad (\text{E.16})$$

APÊNDICE F

DETERMINAÇÃO DOS RAIOS DE CURVATURA DAS FRENTES DE ONDA REFLETIDAS

Para o caso de incidência em uma superfície de revolução, os raios principais de curvatura da frente de onda refletida são raízes da equação do segundo grau (Mittra, 1975):

$$(EG - F^2)\rho^2 + (Eg - 2Ff + Ge)\rho + (eg - f^2) = 0 \quad (F.1)$$

onde

$$E = \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial u} \quad (F.2a)$$

$$F = \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial v} \quad (F.2b)$$

$$G = \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial v} \quad (F.2c)$$

$$e = \frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial u} \quad (F.3a)$$

$$f = \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial u} \quad (F.3b)$$

$$g = \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \hat{S}_r}{\partial v} \quad (F.3c)$$

e \hat{S}_r é o vetor unitário à frente de onda refletida, \bar{R} é o vetor posição do ponto de reflexão, u é a distância do ponto de reflexão ao eixo de simetria, e v é o ângulo em azimute do ponto de reflexão. Para uma fonte pontual situada no eixo de simetria do sistema (no caso, o eixo z), pode-se mostrar que:

$$\rho_1^r = -e/E \quad (F.4a)$$

$$\rho_2^r = -g/G \quad (F.4b)$$

Para determinar os raios principais de curvatura da frente de onda refletida no refletor (ρ_1^r e ρ_2^r) considere-se a Figura F.1. Tem-se que:

$$x = u \cos v \quad (F.5a)$$

$$y = u \sin v \quad (F.5b)$$

$$z = \phi(u) \quad (F.5c)$$

e

$$u = \rho \operatorname{sen} \theta' = - \frac{\operatorname{sen} \theta'}{k g(\theta')} \quad (F.6a)$$

$$\phi(u) = \rho \operatorname{cos} \theta' = - \frac{\operatorname{cos} \theta'}{k g(\theta')} \quad (F.6b)$$

onde foi usada a equação geral polar de uma superfície de revolução, segundo o eixo z, dada pela Equação 2.3.

$$k\rho(\theta') = - 1/g(\theta') \quad (F.7)$$

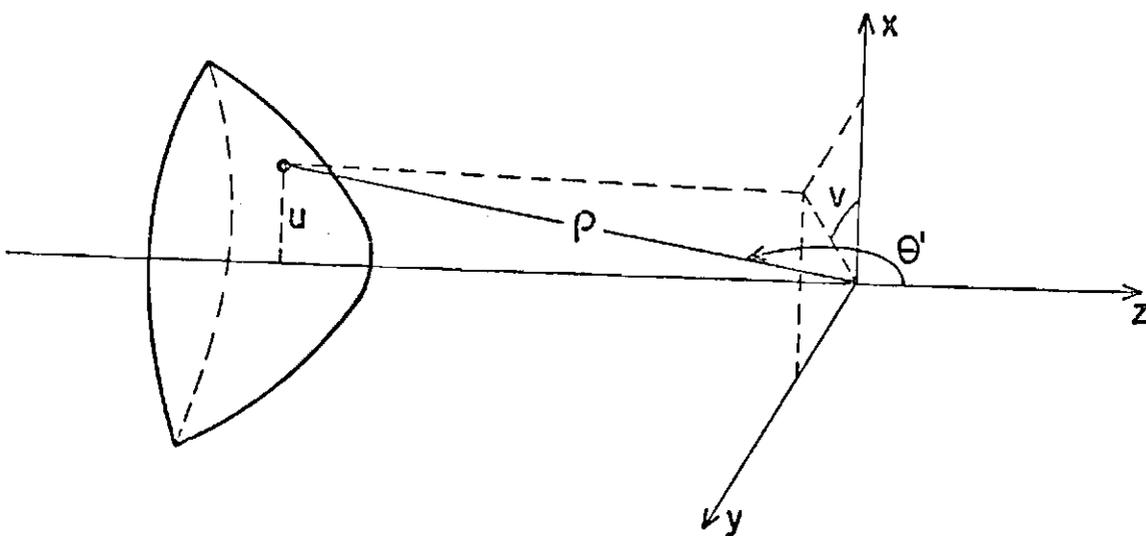


Fig. F.1 - Geometria para o cálculo dos raios de curvatura das frentes de onda refletidas.

O vetor posição do ponto de reflexão \bar{R} é dado por:

$$\bar{R} = u \cos v \bar{x} + u \sin v \bar{y} + \phi(u) \bar{z} \quad (\text{F.8})$$

e o vetor unitário \hat{S}_r normal \bar{a} frente de onda refletida por (Collin and Zucker, 1969):

$$\hat{S}_r = \hat{S}_i - 2(\hat{S}_i \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (\text{F.9})$$

onde \hat{S}_i é o versor normal \bar{a} frente de onda incidente e \hat{n} a normal \bar{a} superfície no ponto de reflexão. A equação da normal e \hat{S}_i podem ser obtidos, usando-se as Equações A.3 e F.8, fornecendo:

$$\hat{n} = \frac{-\phi' \cos v}{\sqrt{1 + \phi'^2}} \bar{x} - \frac{\phi' \sin v}{\sqrt{1 + \phi'^2}} \bar{y} + \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'^2}} \bar{z} \quad (\text{F.10})$$

$$\hat{S}_i = (u \cos v \bar{x} + u \sin v \bar{y} + \phi \bar{z}) / \sqrt{u^2 + \phi^2} \quad (\text{F.11})$$

Substituindo-se as Equações F.10 e F.11 na F.9, obtêm-se

$$\hat{S}_r = F_1(u) \cos v \bar{x} + F_1(u) \sin v \bar{y} + F_2(u) \bar{z} \quad (\text{F.12})$$

onde

$$F_1(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \phi^2}} \left[u - \frac{2\phi'(u\phi' - \phi)}{1 + \phi'^2} \right] \quad (\text{F.13})$$

e

$$F_2(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \phi^2}} \left[\phi + \frac{2(u\phi' - \phi)}{1 + \phi'^2} \right] \quad (\text{F.14})$$

Derivando-se parcialmente a Equação F.12 e F.8 em relação a, u e v, utilizando-se as Equações F.2, F.3 e F.4, obtêm-se, para os raios de curvatura principais da frente de onda refletida no refletor:

$$\rho_1^r = \frac{F_1'(u) + \phi'(u) F_2'(u)}{F_1'^2(u) + F_2'^2(u)} \quad (\text{F.15a})$$

$$\rho_2^r = \frac{u}{F_1(u)} \quad (\text{F.15b})$$