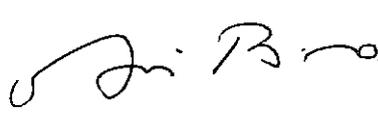
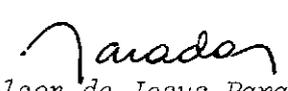


1. Publicação nº <i>INPE-2608-TDL/105</i>	2. Versão	3. Data <i>Dez., 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH/DMC</i>	Programa <i>ERH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>DETERMINAÇÃO DE ATITUDE FILTRO DE KALMAN ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA</i>			
7. C.D.U.: <i>521.3:629.7.076.6</i>			
8. Título <i>DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS ATRAVÉS DE ESTIMADORES DE ESTADO</i>		10. Páginas: <i>109</i>	
		11. Última página: <i>D.2</i>	
9. Autoria <i>Roberto Vieira da Fonseca Lopes</i>		12. Revisada por  <i>Atair Rios Neto</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
14. Resumo/Notas <i>Neste trabalho é desenvolvido e testado um procedimento básico para estimação da atitude de satélites artificiais terrestres. Inicialmente são analisados aspectos relacionados com a determinação e controle da atitude, necessários à formação do problema. No procedimento de estimação são utilizadas técnicas de compensação do modelo dinâmico e de dosagem adaptativa do ruído, juntamente com o filtro estendido de Kalman. A atitude "real" de dois satélites artificiais, simulada em computador digital, foi utilizada para testar o desempenho do procedimento. Os resultados obtidos permitem tirar conclusões preliminares a respeito da utilização do procedimento na determinação da atitude dos dois primeiros satélites da Missão Espacial Completa Brasileira.</i>			
15. Observações <i>Dissertação de mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 16 de abril de 1982.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Santiago Alves Tavares

Santiago Alves Tavares

Presidente

Dr. Atair Rios Neto

Atair Rios Neto

Orientador

Eng. Ricardo Negreiros de Paiva, MSc.

Ricardo Negreiros de Paiva

Co-Orientador

Dr. Hernani Luiz Brinati

Hernani Luiz Brinati

Membro da Banca
-convidado-

Dr. Eduardo Whitaker Bergamini

Eduardo Whitaker Bergamini

Membro da Banca

Candidato: Roberto Vieira da Fonseca Lopes

São José dos Campos, 16 de abril de 1982

Ao Rei consagro o que compus.
(Salmo 45, v.1)

ABSTRACT

A basic procedure to estimate the attitude of Earth artificial satellites is developed and tested. Inicially, topics related with attitude determination and control, needed in the problem formulation, are analysed. Techniques to compensate for dynamic modelling and to treat adaptively the state noise are used, in the estimation procedure, together with the extended Kalman filter. The "real" attitude of two artificial satellites, simulated in a digital computer, was used to test the procedure's performance. The results allow to draw preliminary conclusions about the use of the procedure in the attitude determination software of the two initial satellites of the Brazilian Complete Space Mission.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pelas facilidades con
cedidas à realização deste trabalho através do projeto ORBAT.

Ao Dr. Atair Rios Neto pela estruturação geral do traba
lho e pela orientação segura ao longo do seu desenvolvimento, tendo sa
bido achar tempo para opinar sobre as questões mais fundamentais sem
pre que solicitado.

Ao MSc. Ricardo Negreiros de Paiva pela sugestão do tema
da pesquisa, pelo constante interesse e notável dedicação ao trabalho
de orientação tanto do conteúdo como da redação do texto e pela paciên
cia e bom humor demonstrados, mesmo quando nossas idéias momentaneamen
te divergiam...

Aos demais membros da banca examinadora pelas sugestões
oportunas por ocasião da apresentação preliminar do trabalho.

A todos os que me apoiaram. Em particular aos colegas Hé
lio Koiti Kuga, Valdemir Carrara e João Moro, na parte computacional;
Décio Castilho Ceballos, na revisão preliminar do Capítulo 3; e Marce
lo Lopes de Oliveira e Souza, no envio de referências externas sobre o
assunto, sem o que o trabalho estaria seriamente prejudicado.

À minha esposa, Alair Aparecida Leme Lopes, e à minha fi
lha, Paulina Leme Lopes, pela positividade com que aguardaram o cumpri
mento de mais esta etapa em minha carreira profissional.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>xi</i>
LISTA DE TABELAS	<i>xiii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>xv</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Considerações gerais	1
1.1.1 - Predição	2
1.1.2 - Determinação	2
1.1.3 - Controle	3
1.2 - Abordagem do problema	5
<u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS</u>	7
2.1 - Referenciais	7
2.2 - Quaternions e dinâmica de atitude	9
2.2.1 - Propriedades	9
2.2.2 - Relações e conceitos	10
2.2.3 - Equação da dinâmica de atitude	12
2.3 - Modelagem física	13
2.3.1 - Órbita do satélite	13
2.3.2 - "Órbita" solar	13
2.3.3 - Campo geomagnético	14
2.3.4 - Torques	14
2.3.5 - Forma da Terra	16
2.4 - Os sensores: aspectos gerais	17
2.4.1 - Sensor solar	17
2.4.2 - Sensor de horizonte infravermelho	18
2.4.3 - Sensor magnético	18
<u>CAPÍTULO 3 - PROCEDIMENTOS UTILIZADOS</u>	21
3.1 - Técnicas de estimação ótima	21
3.1.1 - Filtro estendido de Kalman	21
3.1.2 - Compensação do modelo dinâmico	26

	<u>Pág.</u>
3.1.3 - Técnica de ruído adaptativo	28
3.2 - Determinação de atitude	30
3.2.1 - Considerações, identificação de variáveis e hipóteses ...	31
3.2.2 - Equacionamento	37
<u>CAPÍTULO 4 - TESTES E ANÁLISE DO PROCEDIMENTO</u>	41
4.1 - Especificação dos testes	41
4.2 - Resultados e análises	48
4.2.1 - Primeiro teste	49
4.2.2 - Segundo teste	54
4.2.3 - Precisão angular	58
<u>CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</u>	61
5.1 - Situação	61
5.2 - Crítica	62
5.3 - Conclusões	67
5.4 - Sugestões	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
APÊNDICE A - QUATERNIONS	
APÊNDICE B - TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO: DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO DAS EQUAÇÕES DE PSEUDO-OBSERVAÇÕES	
APÊNDICE C - CÁLCULO DA FUNÇÃO $h(z)$ E DE SEU GRADIENTE	
APÊNDICE D - CÁLCULO DO GRADIENTE DE $f(z)$	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Fluxograma de um teste simulado do estimador de atitude ...	4
1.2 - Esquema simplificado do controlador-estimador de atitude ..	5
2.1 - Referencial conhecido em terra ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) e referencial solidário ao satélite ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)	8
2.2 - Sistema geocêntrico inercial	8
2.3 - Sistema geocêntrico solidário à Terra	9
2.4 - Torques em função da altitude	17
2.5 - Sensor solar digital de dois eixos	18
3.1 - Gráfico qualitativo do nível de informação, N, versus sofisticação na modelagem dinâmica, S, para valores crescentes de precisão	33
3.2 - Componentes de C no referencial inercial e do satélite	36
4.1 - Primeiro satélite brasileiro (em cima, duas vistas) e satélite francês TD-1A (em baixo)	42
4.2a- Torques simulados, 1º caso (1 - aerodinâmico; 2 - solar; 3 - gravitacional)	44
4.2b- Torques simulados, 2º caso (1 - aerodinâmico; 2 - solar; 3 - gravitacional)	45
4.3 - Ângulo (λ) entre a direção do Sol e do Nadir nas órbitas selecionadas para os testes	47
4.4 - Resíduo normalizado: 1º teste	50
4.5 - Ângulo λ entre o Sol e a Terra: 1º teste	51
4.6 - $\Delta q(2)$ e $\delta q(1)$: 1º teste	51
4.7 - $\delta \omega(1)$ e $\Delta \omega(2)$: 1º teste	52
4.8 - Aceleração não-modelada: real (2) e estimada (1): 1º teste.	53
4.9 - Resíduo normalizado: 2º teste	55
4.10- $\delta q(1)$ e $\Delta q(2)$: 2º teste	55
4.11- $\delta \omega(1)$ e $\Delta \omega(2)$: 2º teste	56
4.12- Aceleração não-modelada: real (2) e estimada (1): 2º teste .	57
4.13- $\delta \theta_1$ (1), $\delta \theta_2$ (2) e $\delta \theta_3$ (3): 1º teste	59
4.14- $\delta \theta_1$ (1), $\delta \theta_2$ (2) e $\delta \theta_3$ (3): 2º teste	60

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - Características dos satélites simulados	41
4.2 - Principais informações sobre a simulação	43
5.1 - Características de alguns métodos e sistemas de determina- ção de atitude	64

LISTA DE SÍMBOLOS

- A - Vetor de referência para as observações.
- C - Vetor satélite - centro da Terra.
- ϵ - Vetor de aceleração não-modelada.
- $E\{\cdot\}$ - Operador esperança.
- F - Matriz de derivadas parciais relativas ao estado.
- f - Função vetorial do estado.
- H - Matriz de derivadas parciais das observações.
- H_p - Matriz de derivadas parciais das pseudo-observações.
- h - Função vetorial que relaciona as observações com o estado.
- I - Matriz identidade.
- J_2 - Segundo termo zonal do campo geogravitacional.
- J_x - Momento principal de inércia no eixo x.
- J_y - Momento principal de inércia no eixo y.
- J_z - Momento principal de inércia no eixo z.
- K - Ganho de Kalman (matriz).
- k - Indica avaliação no instante t_k .
- M - Vetor intensidade do campo geomagnético.
- m - Dimensão do vetor de observações.
- N - Torques externo.
- n - Dimensão do vetor de estado.
- P - Matriz de covariância do erro no estado.
- P_p - Matriz de covariância do erro em σ .
- Q - Matriz de covariância do ruído no estado.
- q - Vetor dos parâmetros simétricos de Euler.
- R - Matriz de covariância do erro nas observações.

- r - Resíduo observado.
- r_v - Resíduo verdadeiro.
- \tilde{r} - Resíduo normalizado.
- S - Versor na direção satélite-Sol.
- t - Tempo.
- T - Energia cinética de rotação.
- v - Ruído branco gaussiano nas observações.
- x - Vetor de estado.
- y - Vetor de observações.
- Y_p - Vetor de pseudo-observações.
- Z - Vetor de estado estendido.
- W - Ruído branco gaussiano no estado.
- Δq - Erro na estimativa do quaternion de atitude.
- $\Delta \omega$ - Erro na estimativa da velocidade angular.
- $\Delta \theta$ - Vetor de erro angular na estimativa da atitude nos três eixos.
- δq - Precisão do estimador para o quaternion de atitude.
- $\delta \omega$ - Precisão do estimador para a velocidade angular.
- $\delta \theta$ - Precisão angular do estimador para a atitude nos três eixos.
- $\delta_{i,j}$ - Delta de Kröenecker.
- $\delta(t - \tau)$ - Função delta de Dirac.
- σ - Vetor composto pela diagonal da matriz Q .
- $\lambda_{1,2,3}$ - Razão de momentos principais de inércia.
- λ - Ângulo de separação entre a Terra e o Sol, vistos do satélite.
- η - Ruído das pseudo-observações.
- ω - Vetor velocidade angular.
- $\hat{\cdot}$ - Indica valor estimado.

- $\bar{\cdot}$ - Indica valor de referência.
- \cdot - Indica derivada em relação a t .
- $\hat{\cdot}$ - Denota quaternion.
- τ - Indica transposição.
- \times - Indica produto vetorial.
- \otimes - Indica produto na álgebra de quaternions.
- $*$ - Indica conjugado.
- ϕ - Matriz de transição do estado.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A determinação da atitude a partir de observações de sensores é uma necessidade básica para o controle de atitude e para a maior parte dos experimentos realizados por um satélite. Este trabalho utiliza técnicas modernas de filtragem para obter um algoritmo preciso e em tempo real de estimação de atitude. Após algumas considerações introdutórias, que visam localizar precisamente o problema em pauta, segue-se um capítulo de fundamentos (Capítulo 2) que objetiva fornecer informações necessárias à compreensão do conteúdo principal do trabalho. No terceiro capítulo, técnicas de estimação ótima são apresentadas e aplicadas ao problema de determinação de atitude, sendo este cuidadosamente equacionado. O procedimento é testado, e os resultados são analisados no quarto capítulo, ilustrando e comprovando sua eficiência. Conclusões finais são apresentadas no último capítulo.

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Entende-se por atitude de um satélite, a sua orientação angular no espaço, em relação a algum referencial conhecido. Uma escolha adequada deste referencial se dá em função do propósito com que se fará uso da atitude. Para expressar numericamente esta orientação, define-se um outro referencial, solidário ao corpo do satélite, como por exemplo, o coincidente com os eixos principais de inércia.

Três são as áreas primárias de interesse com relação à atitude de satélites: predição, determinação e controle. As três são interdependentes e voltadas para o cumprimento de cada uma das fases da missão do satélite, a saber, pré-lançamento, manobras, operação e análises posteriores, como se depreende da descrição a seguir.

1.1.1 - PREDIÇÃO

Predição consiste em calcular, a partir de condições iniciais dadas, a atitude do satélite em função do tempo, quando não se dispõe de observações. Está fundamentada no modelo dinâmico de atitude. Requer também informações sobre a órbita que permitam o conhecimento, a cada instante, dos torques que agem no satélite e a identificação do referencial adotado. Aplica-se a estudos na fase de projeto do satélite (simulação de atitude, análise de estabilidade, etc.), bem como durante a vida útil, quer no apoio à determinação de órbita e atitude (na propagação da atitude entre duas observações consecutivas), quer no apoio ao controle destes elementos (na previsão de momentos adequados para tomada de decisões). Nas fases de projeto e apoio ao controle, via de regra, são utilizados modelos dinâmicos de órbita e atitude sofisticados, numa tentativa de reproduzir ao máximo as condições reais. Já no apoio à determinação, utilizam-se modelos mais grosseiros, tendo em vista a necessidade de rapidez de cálculo e os pequenos intervalos de tempo considerados em cada propagação.

1.1.2 - DETERMINAÇÃO

Determinação da atitude de um satélite consiste em calcular a sua atitude em função do tempo quando se dispõe de observações sobre ela. Tais observações provêm de sensores de atitude e/ou giroscópios instalados no satélite. Os procedimentos de cálculo podem ser determinísticos ou estatísticos, os do primeiro tipo apresentam sérias dificuldades quanto à precisão. A aplicação da determinação de atitude em tempo real se dá no apoio ao controle de órbita (no direcionamento dos foguetes de transferência e correção de órbita) e de atitude (na realimentação dentro do processo de determinação dos parâmetros de controle). Para estes fins, pode ser executada a bordo ou em terra. O uso do cálculo a bordo atende às necessidades de controle automático feito a bordo, estando restrito, contudo, devido a limitações computacionais. Tais limitações tendem a diminuir, por outro lado, com o crescente desenvolvimento na área de microcomputadores. O uso de cálculo em terra

atende às necessidades de controle feito em terra e conta com os recursos computacionais necessários. Outrossim, a determinação de atitude pode ser aplicada, em tempo posterior, a análises pós-missão (na avaliação do desempenho do controle, da estabilidade, etc. e na interpretação dos resultados de experimentos realizados pelo satélite).

1.1.3 - CONTROLE

Por controle de atitude entende-se toda ação necessária para forçar o satélite a ter a atitude desejada, especificada pela missão, durante sua vida útil. Tal função quer o conhecimento da atitude e órbita do satélite a cada instante e manipula torques provenientes de fontes externas (gradiente de gravidade, campo geomagnético, pressão de radiação solar, etc.) ou internas (foguetes, volantes de inércia, etc.) para atingir seu objetivo. A ação do controle se divide em duas fases importantes: manobra e estabilização. Na fase de manobras o objetivo é permitir tanto a colocação do satélite em sua órbita final e atitude especificada (aquisição), como eventuais mudanças na atitude ao longo de sua vida útil, conforme as especificações da missão. A fase de estabilização visa manter o satélite na atitude especificada e requer, normalmente, pequenas correções de atitude comparadas com as da fase de manobra.

O esquema a seguir (Figura 1.1) permite visualizar a interação das três áreas na fase de teste do estimador de atitude, quando se faz necessário simular as observações. Fica patente também a necessidade do pré-processamento de dados, onde são eliminadas observações espúreas e compatibilizadas os sinais dos sensores com o tipo de entrada requerido no estimador de atitude. O mesmo esquema, numa forma mais simplificada e padrão, é visto na Figura 1.2, onde se retrata o caso de controle em malha fechada. A parte hachurada da figura ressalta o item principal a ser tratado neste trabalho.

Com estas considerações iniciais fica localizado e delimitado o papel da determinação de atitude.

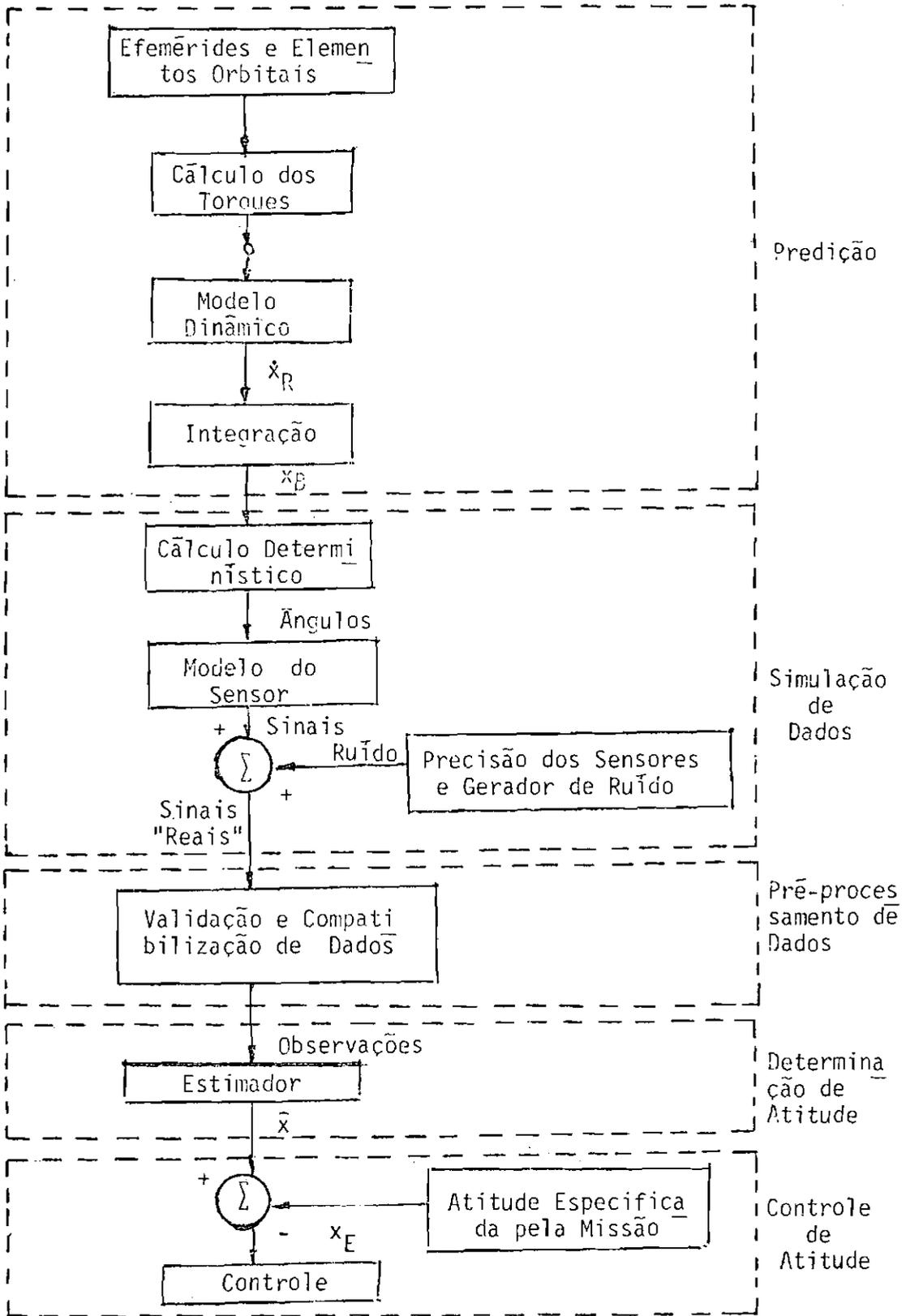


Fig. 1.1 - Fluxograma de um teste simulado do estimador de atitude.

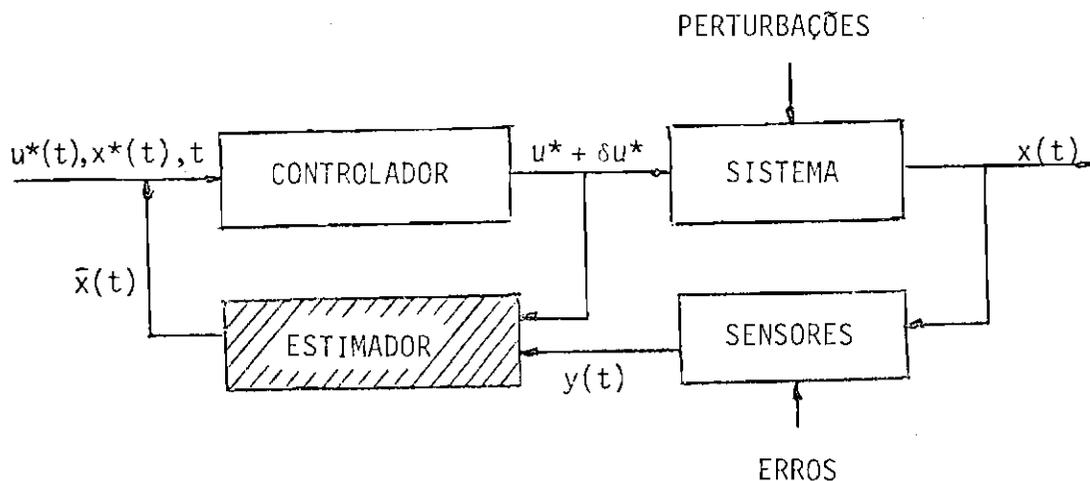


Fig. 1.2 - Esquema simplificado do controlador-estimador de atitude.

1.2 - ABORDAGEM DO PROBLEMA

Com o crescente uso de satélites artificiais cada vez mais sofisticados e com rigorosos requisitos de missão, tornou-se fundamental o controle de atitude. Este por sua vez, no caso de controle ativo, requer o conhecimento do valor da variável a ser controlada, ficando evidente a necessidade da determinação da atitude.

Um grande número de procedimentos de determinação de atitude tem sido desenvolvido, quase sempre para aplicações em situações específicas (Pivovarov, 1979; Bhist et alii, 1981; Moek and Traas, 1981), com particularizações quanto à dinâmica de atitude em função do tipo de estabilização adotado.

No presente trabalho tem-se por objetivo o desenvolvimento de um procedimento básico de estimação para a determinação da atitude em satélites artificiais terrestres. Não se pretende desenvolver um procedimento voltado à solução de um problema prático, específico, e sim analisar o problema da determinação de atitude como um todo e documentar seus diversos aspectos. São utilizadas técnicas de estimação ótima, particularmente o filtro estendido de Kalman com compensação do mo

delo dinâmico e técnica de ruído adaptativo (Jazwinski, 1970; Ingram, 1971; Rios Neto e Kuga, 1982). A primeira técnica citada tem sido usada em vários campos, demonstrando versatilidade e eficácia. A segunda permite o tratamento de efeitos não muito bem conhecidas ou de difícil modelagem na dinâmica da atitude. A última provê solução para problemas de divergência. O emprego de tais técnicas é justificado pelos amplos recursos matemáticos que representam. Com elas torna-se possível o uso de modelagem dinâmica pobre sem comprometer os resultados. Quanto às observações, admite-se que sejam obtidas por sensores de bordo, pré-processadas e disponíveis durante o período considerado. Será elaborada uma rotina computacional derivada do procedimento desenvolvido. Tal rotina deverá atender à necessidade de processamento em tempo real, satisfazendo às exigências para o controle em terra.

A modelagem física (posição realtiva do Sol, movimento orbital do satélite, dinâmica da atitude do satélite e torques que nele atua, etc.) e dos sensores, não sendo o objetivo principal deste trabalho, são abordadas apenas o suficiente para a sua compreensão.

O procedimento desenvolvido será testado em relação ao movimento "real" (simulação) de um satélite ao redor de seu centro de massa. Para tanto será simulado, em computador digital, o movimento de um satélite através de modelos que procurem representar ao máximo as condições reais.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS

Neste capítulo são abordados diversos conceitos que são utilizados como ferramenta no trabalho (Seções 2.1 e 2.2).

Atitude de satélites artificiais tem sido um campo pouco explorado em termos de trabalhos desenvolvidos no País até o presente. Assim sendo, e na expectativa de execução da primeira missão espacial brasileira, justifica-se uma abordagem explanativa sobre temas que, fugindo ao escopo principal, constituem, entretanto, um suporte para o trabalho (Seções 2.3 e 2.4).

2.1 - REFERENCIAIS

Dois são os referenciais necessários à caracterização numérica da atitude: um solidário ao corpo do satélite e outro conhecido em terra. A orientação do primeiro em relação ao segundo define a atitude do satélite (ver Figura 2.1). Para o primeiro, adotam-se os eixos principais de inércia (nominais) do satélite. Para o segundo, adota-se o sistema de coordenadas inerciais geocêntricas, descrito na Figura 2.2. Neste sistema, \hat{i} é um versor que aponta para o equinócio vernal, na intersecção do plano do equador terrestre com o plano da órbita da Terra ao redor do Sol (eclíptica); \hat{k} é um versor na direção e sentido do vetor velocidade angular terrestre; e \hat{j} é o produto vetorial de \hat{k} por \hat{i} . Embora tal sistema não seja absolutamente inercial, pode-se considerá-lo como tal, com uma precisão maior do que um minuto de arco por ano, o que é mais do que suficiente para os fins deste trabalho. Vale lembrar que o fato de este sistema ser geocêntrico é uma particularização sem inconvenientes quando se trata de atitude, uma vez que esta diz respeito a rotações e não a translações.

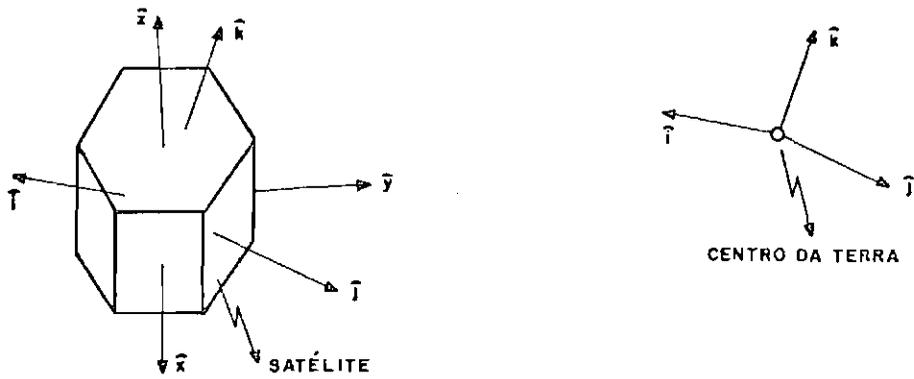


Fig. 2.1 - Referencial conhecido em terra ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) e referencial solidário ao satélite ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$).

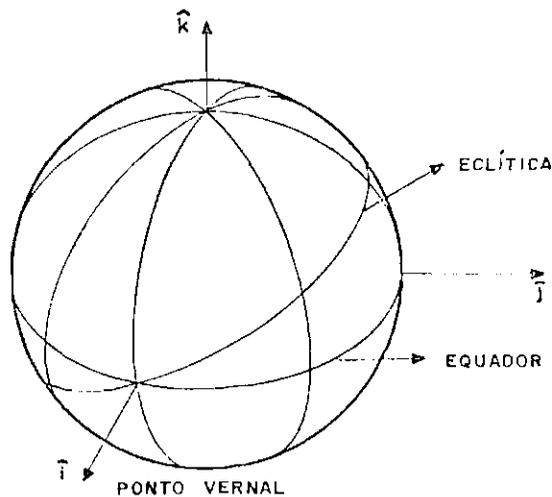


Fig. 2.2 - Sistema geocêntrico inercial.

Outros referenciais também são importantes ao processo de estimação de atitude. Por exemplo, um referencial solidário ao satélite, alinhado com um sensor de atitude, é utilizado para transferir as medidas deste sensor para o referencial do satélite. Já o sistema geocêntrico solidário à Terra, representado na Figura 2.3, é utilizado para descrever o campo geomagnético, conforme a Seção 2.3.3. Uma única rotação em torno do eixo de rotação terrestre (eixo \hat{k}) leva o sistema geocêntrico inercial ao geocêntrico solidário à Terra. O ângulo de rotação associado é função somente do tempo. O versor \hat{i}' é na direção e sentido do meridiano de Greenwich, latitude zero.

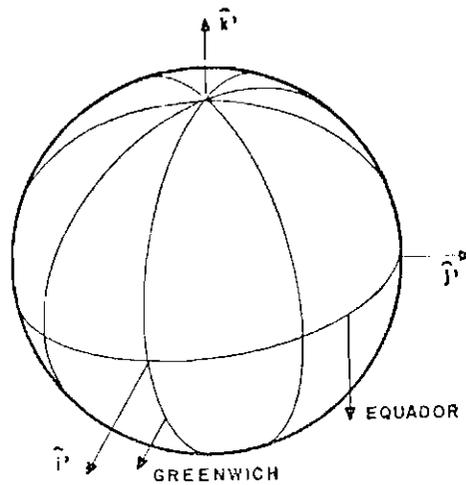


Fig. 2.3 - Sistema geocêntrico solidário à Terra.

2.2 - QUATERNIOS E DINÂMICA DE ATITUDE

O quaternion \bar{q} é um ente matemático composto de uma parte vetorial e outra escalar. Sua definição é dada por:

$$\underline{\bar{q}} \triangleq q_1 \hat{i} + q_2 \hat{j} + q_3 \hat{k} + q_4, \quad (2.1)$$

onde os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} definem a base de um referencial. Por exemplo, e sem perda de generalidade, este referencial pode ser o inercial geocêntrico, definido na Seção 2.1.

2.2.1 - PROPRIEDADES

As propriedades básicas dos quaternions são as seguintes:

a) Conjugado:

$$\underline{\bar{q}^*} \triangleq -q_1 \hat{i} - q_2 \hat{j} - q_3 \hat{k} + q_4$$

b) Multiplicação:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \\ 1 \end{matrix} \right\} \otimes \{ \bar{i} : \bar{j} : \bar{k} : 1 \} \triangleq \begin{bmatrix} -1 & \bar{k} & -\bar{j} & \bar{i} \\ -\bar{k} & -1 & \bar{i} & \bar{j} \\ \bar{j} & -\bar{i} & -1 & \bar{k} \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & 1 \end{bmatrix},$$

onde o sinal \otimes indica multiplicação na álgebra de quaternions.

c) Módulo:

$$|q| \triangleq q \otimes q^* \equiv q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

2.2.2 - RELAÇÕES E CONCEITOS

Além das propriedades já descritas, são importantes as seguintes relações e conceitos sobre quaternions:

a) Interpretação geométrica:

No caso particular em que as componentes do quaternion são os parâmetros simétricos de Euler, também chamados parâmetros de Rodriguez-Hamilton, tem-se que:

$$\underline{q} = \text{sen} \frac{\theta}{2} [\bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \cos \beta + \bar{k} \cos \lambda] + \cos \frac{\theta}{2},$$

onde os ângulos são interpretados geometricamente como:

- $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \lambda$ - cos-senos diretores de um eixo de rotação (eixo de Euler);
- θ - um ângulo de rotação executada em torno do referido eixo,

que definem a rotação que leva o referencial inercial adotado para um referencial arbitrário. Se este referencial arbitrário for solidário ao corpo do satélite (por exemplo os eixos principais de inércia do sa

têlite), o quaternion se torna uma medida da atitude do satélite, denominada quaternion de atitude. Observa-se que $|\underline{q}| = 1$ neste caso.

b) Rotação:

No caso do item anterior, dado um vetor genérico com coordenadas nos sistemas inercial e do satélite dadas respectivamente por:

$$\underline{U}_I^T = \{U_i : U_j : U_k\}$$

$$\underline{U}_S^T = \{U_x : U_y : U_z\}$$

demonstra-se que (ver Apêndice A):

$$\underline{U}_S = \underline{q}^* \otimes \underline{U}_I \otimes \underline{q}, \quad (2.2)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} U_x \tilde{i} + U_y \tilde{j} + U_z \tilde{k} &= (-q_1 \tilde{i} - q_2 \tilde{j} - q_3 \tilde{k} + q_4) \otimes (U_i \tilde{i} + U_j \tilde{j} + U_k \tilde{k}) \otimes \\ &\otimes (q_1 \tilde{i} + q_2 \tilde{j} + q_3 \tilde{k} + q_4). \end{aligned}$$

Note-se que \underline{U}_S e \underline{U}_I são quaternions com parte escalar nula.

c) Derivação:

Utilizando ainda o quaternion de módulo unitário e na forma do item (a), demonstra-se que (ver Apêndice A):

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \underline{q} \otimes \underline{\omega}, \quad (2.3)$$

$$\underline{\omega} \triangleq \omega_x \tilde{i} + \omega_y \tilde{j} + \omega_z \tilde{k},$$

onde ω_x , ω_y e ω_z são as componentes do vetor velocidades angular instantânea do referencial do satélite neste mesmo referencial. A Equação 2.3 pode ser escrita na forma matricial:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} q, \quad (2.4)$$

onde q é a matriz coluna composta pelos elementos do quaternion q :

$$q^T = \{q_1 : q_2 : q_3 : q_4\}.$$

2.2.3 - EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE ATITUDE

A equação de Lagrange para o movimento de um corpo em torno de seu centro de massa pode ser escrita em função das chamadas quase-coordenadas⁽¹⁾ ω , na seguinte forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\omega)}{\partial \dot{\omega}} + \frac{\partial T(\omega)}{\partial \omega} = N. \quad (2.5)$$

Na relação acima, o vetor N é formado pelas componentes do torque externo em relação ao centro de massa, atuante no corpo, no referencial coincidente com seus eixos principais de inércia; T é a energia cinética de rotação do corpo; Ω é a matriz anti-simétrica associada a ω , sendo:

$$T = \frac{1}{2} [J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2], \quad (2.6)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

onde J_x , J_y e J_z são os momentos principais de inércia. Com as Equações 2.5, 2.6 e 2.7 derivam-se as equações de Euler para o movimento de um corpo em relação a seu centro de massa:

(1) O termo "quase-coordenadas" denota, no caso, o fato de não haver correspondência entre ω e alguma coordenada angular α na forma $\omega = \dot{\alpha}$.

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \lambda_1 \omega_y \omega_z + \frac{N_1}{J_x}, & \lambda_1 &= \frac{J_y - J_z}{J_x} \\ \dot{\omega}_y &= \lambda_2 \omega_z \omega_x + \frac{N_2}{J_y}, & \lambda_2 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \\ \dot{\omega}_z &= \lambda_3 \omega_x \omega_y + \frac{N_3}{J_z}, & \lambda_3 &= \frac{J_x - J_y}{J_z}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

As Equações 2.4 e 2.8 acopladas compõem a dinâmica da atitude de um corpo. Maiores detalhes sobre quaternions e dinâmica de atitude são apresentados nas referências Wertz (1978), Meirovitch, (1970), Whittaker (1965) e Mayo (1978).

2.3 - MODELAGEM FÍSICA

Nesta seção são considerados aspectos da modelagem da órbita do satélite, "órbita" do Sol, campo magnético terrestre, forma da Terra e torques que atuam no satélite.

2.3.1 - ÓRBITA DO SATÉLITE

O conhecimento da posição do centro de massa do satélite no espaço a cada instante é importante para dar sentido às medidas dos sensores (magnético e de horizonte), descritos na Seção 2.4. O trabalho supõe esta informação como dado de entrada fornecido por um estimador de órbita. No caso do teste relatado no Capítulo 4, é utilizado um simulador de órbita desenvolvido por Negreiros de Paiva (1980b).

2.3.2 - "ÓRBITA" SOLAR

A posição relativa da Terra no plano da eclíptica é uma informação essencial para a interpretação das medidas de um sensor solar. Tal posição é função apenas da data. No presente trabalho é utilizado um programa gerador de efemérides do Sol, desenvolvido por Medeiros e Kuga (1980).

2.3.3 - CAMPO GEOMAGNÉTICO

A determinação do torque induzido pelo campo magnético terrestre no satélite e a interpretação das medidas de um sensor magnético requerem o conhecimento do vetor intensidade do campo geomagnético M . Este campo tem como fonte geradora principal um dipolo magnético. O campo total pode ser descrito por uma série de esféricos harmônicos, conforme o modelo gaussiano, e fornecido no sistema geocêntrico solidário à Terra. Cabe assinalar o alto grau de incerteza no conhecimento de M para altitudes acima de quatro raios terrestres. O fato se agrava com a perturbação causada pela ação solar (Wertz, 1978). Particularmente crítica é a situação na faixa de altitudes dos satélites geossíncronos (6.6 raios terrestres), onde o modelo gaussiano já não se aplica.

2.3.4 - TORQUES

É extensa a lista de torques que atuam em um satélite terrestre. Alguns deles são relacionados a seguir, com breve consideração acerca de cada um.

a) Gravitacional terrestre

O potencial gravitacional terrestre é modelado como o potencial de uma massa pontual acrescido de perturbações ditas zonais, tesserais e setoriais. Estas se devem à não-esfericidade terrestre. A mais importante é devida ao achatamento nos pólos, representada pelo segundo termo zonal, J_2 . A interação deste potencial com o potencial gravitacional do satélite gera um torque inversamente proporcional ao cubo do raio de uma órbita; este torque age no sentido de estabilizar o satélite com o eixo de menor momento de inércia apontado para a Terra. Para efeito de torque, a ação das perturbações mencionadas é, em geral, desprezível, sendo suficiente o modelo de massa pontual para o potencial gravitacional terrestre.

b) Aerodinâmico

A ação da atmosfera sobre o corpo do satélite gera um torque que é função principalmente da velocidade do satélite em relação à atmosfera; da densidade atmosférica nas proximidades do satélite; do seu formato; e da própria atitude do satélite em relação ao fluxo atmosférico local. Outros fatores menos importantes são o peso molecular médio das moléculas e a temperatura do ar nas proximidades do satélite, bem como a rugosidade e temperatura da superfície do satélite. Alguns destes fatores são de difícil determinação, exigindo hipóteses simplificadoras e muito cálculo usando a teoria cinética dos gases.

c) Magnético

Cargas induzidas pela atmosfera na carcaça do satélite, correntes em circuitos internos, magnetismo permanente (como no caso de barras magnéticas utilizadas para controle de atitude) ou induzido, interagem com o campo geomagnético, gerando torques. Os parâmetros que definem o campo magnético do satélite não são conhecidos precisamente, e envolvem cálculos complexos cujos resultados estão em geral sujeitos a erros consideráveis. Em alguns trabalhos aplicados a casos em que se torna importante o efeito deste torque, o momento magnético do satélite é estimado juntamente com a atitude. É usual que no projeto de um satélite cuidados sejam tomados de modo a minimizar o efeito da histerese magnética e das correntes internas.

d) Pressão de radiação

Este torque resulta da transmissão de parte da quantidade de movimento associada à radiação solar para o satélite, através de sua superfície iluminada. Depende de vários fatores, como a intensidade da radiação solar, forma, temperatura e característica de reflexão da carcaça do satélite e da atitude deste em relação ao Sol. Considerações sobre a forma do satélite e sua órbita são incluídas para a análise de sombras, contribuindo para a complexidade algébrica no cálculo deste torque.

e) Outros

De menor importância são os torques devidos ao albedo, potencial gravitacional do Sol e da Lua, ao vento solar, ao vento térmico, ao arrasto coulombiano, etc.

f) Controle

Finalmente existem os torques de controle, como os produzidos por jatos de gás quente ou frio, partes móveis (volantes de inércia), etc.

Cabe ainda relacionar que, principalmente em satélites com apêndices longos, existem torques internos devidos à elasticidade. Embora este tipo de torque, por ser interno, não afete a atitude do satélite como um todo, pode mesmo superar os demais em seus efeitos na atitude do corpo principal do satélite, a qual se pretende determinar.

O presente trabalho utiliza, para efeito de simulação, um programa desenvolvido por Moro (1982), capaz de levar em conta os torques: gravitacional terrestre (modelo de massa pontual); aerodinâmico e de pressão de radiação.

Uma idéia qualitativa da importância relativa dos diversos tipos de torques em função da altitude do satélite é fornecida pela Figura 2.4 (Beletskii, 1966).

2.3.5 - FORMA DA TERRA

Devido ao uso de sensor de horizonte infravermelho, é necessário modelar a aparência infravermelha da Terra a fim de transformar a medida do sensor em ângulos que relacionem o satélite com o centro da Terra. Neste trabalho, entretanto, admite-se que esta transformação seja feita no pré-processamento de dados.

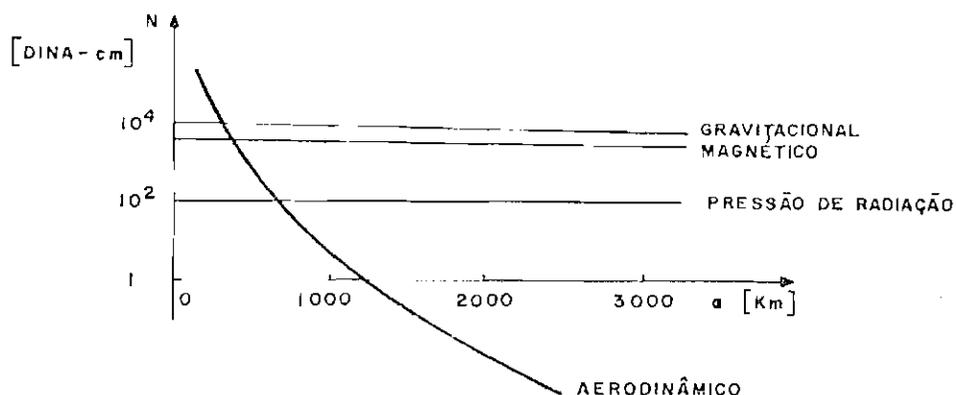


Fig. 2.4 - Torques em função da altitude.

2.4 - OS SENSORES: ASPECTOS GERAIS

Uma breve descrição sobre os tipos de sensores a serem utilizados nos testes do Capítulo 4 é feita a seguir. Não há, entretanto, nenhuma restrição no trabalho ao uso de outros tipos de sensores ora não relacionados.

2.4.1 - SENSOR SOLAR

O sensor solar mede um ângulo que relaciona o vetor satélite-Sol com um eixo de referência conhecido, no satélite. Um conjunto de sensores solares convenientemente distribuídos no satélite fornecem, após pré-processamento, os co-senos diretores do Sol no referencial do satélite. Os sensores podem ser analógicos (fornecem co-senos diretores) ou digitais (fornecem ângulos discretos); de amplo campo visual ou de ajuste fino; próprios para satélites estabilizados por rotação ou por outros tipos de estabilização. A Figura 2.5 mostra um sensor solar digital que mede componentes da direção do Sol em dois eixos. Uma lâmina de luz solar penetra no sensor através das fendas na sua parte superior e impressiona as células solares localizadas na sua base. As células configuram uma sequência de bits que permitem codificar o ângulo do Sol ao redor de cada eixo.

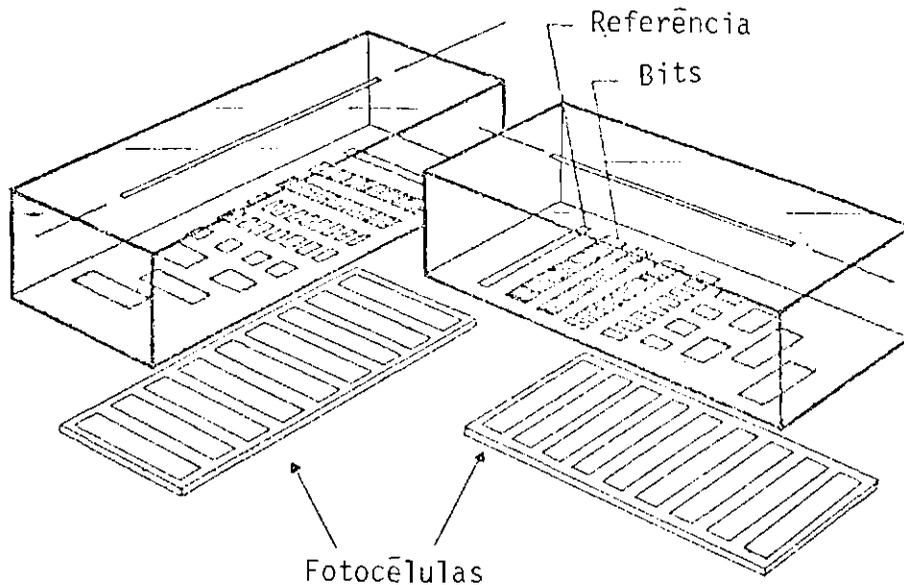


Fig. 2.5 - Sensor solar digital de dois eixos.

2.4.2 - SENSOR DE HORIZONTE INFRAVERMELHO

Este sensor é sensível à radiação infravermelha. Ao girar junto com o satélite (no caso de este ser estabilizado por rotação) ou por um mecanismo próprio, seu campo visual detecta a passagem do espaço (frio) para a Terra (quente) e vice-versa. Após o pré-processamento obtém-se o ângulo entre o vetor satélite-centro-da-Terra e um eixo do satélite.

2.4.3 - SENSOR MAGNÉTICO

Também de interesse é o sensor magnético que utiliza a propriedade de indução magnética para medir a projeção do vetor intensidade do campo geomagnético M , no eixo do sensor. Assim, três sensores ortogonalmente dispostos no satélite fornecem, após o pré-processamento, os co-senos diretores de M no referencial do satélite. A existência de um campo magnético próprio do satélite pode afetar a precisão deste tipo de sensor, exigindo correções e calibrações a bordo.

Para efeito de simulação das observações, este trabalho utilizará um programa desenvolvido por Moro (1982). Um estudo mais de talhado sobre sensores pode ser encontrado em Wertz (1978).

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS UTILIZADOS

Neste capítulo são apresentadas as técnicas de estimação ótima a serem utilizadas (Seção 3.1) e sua aplicação ao problema de determinação de atitude (Seção 3.2). Ênfase especial é dada a esta última parte. As técnicas apresentadas não têm caráter de alternativas isoladas. Pelo contrário, elas se complementam formando um único procedimento de estimação de atitude (Seção 3.2). A primeira delas é o filtro estendido de Kalman, o corpo do procedimento. Algumas modificações são adotadas no sentido de melhorar seu desempenho computacional. Já a segunda - compensação do modelo dinâmico - provê uma solução para a dificuldade na modelagem da dinâmica que rege o sistema, sendo, entretanto, dependente da boa escolha da matriz de covariância do ruído no estado. A terceira - técnica de ruído adaptativo - completa o esquema, estimando a referida matriz. Na segunda seção são identificados os parâmetros e variáveis do problema de determinação de atitude, justificadas as hipóteses assumidas e equacionando o modelo dinâmico e o das observações.

3.1 - TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO ÓTIMA

3.1.1 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

O problema de estimação de estado em tempo real se apresenta frequentemente na seguinte forma:

Calcular

$$\hat{x}_K^{(nx1)} \triangleq E\{x(t_K) / \hat{x}_0, y_1, y_2, \dots, y_K\}, \quad (3.1)$$

$$P_K^{(nxn)} \triangleq E\{[x(t_K) - \hat{x}_K][x(t_K) - \hat{x}_K]^T / \hat{x}_0, y_1, y_2, \dots, y_K\}, \quad (3.2)$$

dado que

$$y_{\ell}^{(m \times 1)} = h_{\ell}(x(t_{\ell}), t_{\ell}) + v_{\ell} , \quad \ell = 1, 2, \dots, K , \quad (3.3)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(t) \cdot w(t) , \quad (3.4)$$

onde y_{ℓ} é o vetor de observações no instante t_{ℓ} ; x é o vetor de estado; h_{ℓ} , f e g são funções conhecidas; e v_{ℓ} e w são ruídos brancos gaussianos não-correlacionados entre si, que representam as imprecisões nas observações e no modelo dinâmico respectivamente, com estatísticas dadas por:

$$E\{v_{\ell}\} = 0 \quad , \quad E\{v_{\ell} v_{j}^T\} = \delta_{\ell j} R_{\ell}^{(m \times m)} ,$$

$$E\{w(t)\} = 0 \quad , \quad E\{w(t) \cdot w^T(\tau)\} = \delta(t - \tau) \cdot Q(t)^{(s \times s)} ,$$

onde R_{ℓ} e Q são matrizes diagonais definidas positivas conhecidas; $\delta_{\ell j}$ é o delta de Kroenecker, e $\delta(t - \tau)$ é a função delta de Dirac. Admite-se ainda que o estado no instante inicial seja uma variável aleatória gaussiana não-correlacionada com v_{ℓ} nem com $w(t)$, com média \hat{x}_0 e covariância P_0 conhecidas, como indicado a seguir:

$$E\{x(t_0)\} = \hat{x}_0 \quad ,$$

$$E\{[x(t_0) - \hat{x}_0][x(t_0) - \hat{x}_0]^T\} = P_0 \quad ,$$

$$E\{x(t_0) \cdot v_i^T\} = 0 \quad ,$$

$$E\{x(t_0) \cdot w^T(t)\} = 0 .$$

Nos casos em que as funções f e h_{ℓ} são lineares, a solução pode ser obtida pelo filtro de Kalman na sua forma comum. Caso contrário, torna-se necessário utilizar outro tipo de filtro, como por exemplo o filtro estendido de Kalman. Neste filtro as funções f e h_{ℓ} são aproximadas por suas respectivas séries de Taylor truncadas na primeira ordem, em torno de uma solução de referência, $\bar{x}(t)$, definida por:

$$\bar{x}(t) \triangleq E\{x(t)/\bar{x}_{K-1}\} , \quad t_{K-1} \leq t < t_K , \quad (3.5)$$

ou seja, as Equações 3.3 e 3.4 são linearizadas:

$$\delta y_\ell \triangleq y_\ell - h_\ell(\bar{x}(t_\ell)) \cong H_\ell \delta x(t_\ell) + v_\ell , \quad \ell = 1, 2, \dots, K,$$

$$\delta \dot{x} \cong F(\bar{x}, t) \delta x + g(t) w(t),$$

onde

$$\delta x \triangleq x(t) - \bar{x}(t) ,$$

$$H_\ell^{(m \times n)} \triangleq \left. \frac{\partial h_\ell(x)}{\partial x} \right|_{x = \bar{x}(t_\ell)} , \quad (3.6)$$

$$F(\bar{x}, t)^{(n \times n)} \triangleq \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x = \bar{x}(t)} . \quad (3.7)$$

Com esta aproximação torna-se possível aplicar o procedimento do filtro de Kalman a sistemas não-lineares. O algoritmo de estimação do filtro estendido de Kalman é dado por (Guelb et alii, 1974):

1. Condições iniciais: \bar{x}_0 e P_0 .

2. Propagação da solução de referência e da matriz de covariância do seu erro, do instante t_{K-1} ao instante t_K , por meio da seguinte dinâmica:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t) , \quad t_{K-1} \leq t < t_K , \quad (3.8)$$

$$\dot{\bar{P}} = F(\bar{x}, t) \bar{P} + \bar{P} F^T(\bar{x}, t) + g(t) Q(t) g^T(t) , \quad (3.9)$$

onde

$$\bar{P}(t) \triangleq E\{\delta x \delta x^T\} , \quad (3.10)$$

sendo a Equação 3.9 uma equação de Ricatti. As condições iniciais no intervalo são as seguintes:

$$\bar{x}(t_{K-1}) = \bar{x}_{K-1} \quad , \quad (3.11)$$

$$\bar{P}(t_{K-1}) = P_{K-1} \quad . \quad (3.12)$$

3. Atualização da estimativa do estado e de sua matriz de covariância por meio das observações feitas no instante t_K , conforme as seguintes equações:

$$\bar{x}_K = \bar{x}_K + K_K [y_K - h_K(\bar{x}_K)] \quad , \quad (3.13)$$

$$P_K = \bar{P}_K - K_K H_K \bar{P}_K \quad . \quad (3.14)$$

onde, por conveniência de notação, $\bar{x}_K = \bar{x}(t_K)$, $\bar{P}_K = \bar{P}(t_K)$, e K é o ganho de Kalman, dado por:

$$K_K^{(n \times m)} = \bar{P}_K H_K^T [H_K \bar{P}_K H_K^T + R_K]^{-1} \quad . \quad (3.15)$$

4. Reinicialização, substituindo K por $K+1$ e voltando ao item 2.

O cálculo do ganho de Kalman conforme a Equação 3.15 envolve uma inversão de matriz que pode representar uma dificuldade computacional. Sorenson (1966) propôs uma técnica de processamento sequencial do vetor de observações em que se evita a inversão dessa matriz. Sua aplicação está restrita aos casos em que os ruídos nas observações sejam não-correlacionados (ou seja, a matriz de covariância R_K seja diagonal). Tal restrição, entretanto, é satisfeita na prática para grande parte dos problemas de estimação.

Utilizando esta técnica, as equações do item 3 do algoritmo de estimação apresentado passam a ser recursivas no processamento do vetor de observações, como se segue:

$$\hat{x}_{K,i} = \hat{x}_{K,i-1} + K_{K,i} [y_{K,i} - h_{K,i} + H_{K,i}(\bar{x}_K - \hat{x}_{K,i-1})] , \quad (3.16)$$

$$P_{K,i} = P_{K,i-1} - K_{K,i} H_{K,i} P_{K,i-1} , \quad (3.17)$$

$$K_{K,i} = P_{K,i-1} H_{K,i}^T [H_{K,i} P_{K,i-1} H_{K,i}^T + R_{K,i}]^{-1} , \quad (3.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, m ,$$

onde $y_{K,i}$ e $h_{K,i}$ são as i -ésimas componentes de y_K e da função $h_K(\bar{x}_K)$ respectivamente; $H_{K,i}$ é a i -ésima linha da matriz H_K ; e

$$\bar{x}_{K,0} \triangleq \bar{x}_K , \quad (3.19)$$

$$P_{K,0} \triangleq \bar{P}_K , \quad (3.20)$$

$$\hat{x}_{K,m} \triangleq \bar{x}_K , \quad (3.21)$$

$$P_{K,m} \triangleq P_K . \quad (3.22)$$

Uma hipótese que tem sido feita com sucesso no sentido de evitar a integração da equação de Ricatti (Equação 3.9) na propagação de \bar{P} e obter um procedimento mais simples, é admitir o intervalo de tempo entre t_K e t_{K+1} suficientemente pequeno de modo a tornara realização do ruído branco $W(t)$ numericamente constante neste intervalo. Ou seja, admite-se que $t_{K+1} - t_K$ seja um zero numérico para o argumento de $W(t)$. Com tal hipótese encontra-se uma nova expressão para a propagação de $\bar{P}(t)$ de t_K a t_{K+1} (Ingram, 1971), a ser utilizada no item 2 do algoritmo de estimação:

$$\bar{P}_{K+1} = \phi_K P_K \phi_K^T + \Gamma_K Q_K \Gamma_K^T , \quad (3.23)$$

onde ϕ_K é a matriz de transição do estado linearizado, do instante t_K a t_{K+1} , obtido pela equação:

$$\dot{\phi}(t, t_K) = F(\bar{x}, t) \phi(t, t_K) \quad , \quad t_K \leq t \leq t_{K+1} \quad , \quad (3.24)$$

com

$$\phi(t_K, t_K) = I^{(n \times n)} \quad , \quad (3.25)$$

$$\phi_K \triangleq \phi(t_{K+1}, t_K) \quad , \quad (3.26)$$

e, ainda na Equação 3.23,

$$\Gamma_K = \int_{t_K}^{t_{K+1}} \phi(t_{K+1}, \tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau \quad . \quad (3.27)$$

A integração necessária ao cálculo de Γ_K pode ser feita de forma aproximada, como por exemplo pela regra do trapézio em um único passo, o que não significa nenhuma incoerência em vista da aproximação já feita ($W(t)$ constante em cada intervalo t_K a t_{K+1}). Assim, no caso de se usar a regra do trapézio, Γ_K é dado por:

$$\begin{aligned} \Gamma_K &= \frac{1}{2} [\phi(t_{K+1}, t_{K+1}) \cdot g(t_{K+1}) + \phi(t_{K+1}, t_K)](t_{K+1} - t_K) = \\ &= \frac{1}{2} [g(t_{K+1}) + \phi_K g(t_K)](t_{K+1} - t_K) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Note-se que o ruído $W(t)$, com esta hipótese, passa a ser tratado como uma sequência gaussiana branca, W_K , com a matriz de covariância associada Q_K .

3.1.2 - COMPENSAÇÃO DO MODELO DINÂMICO

Na prática, frequentemente, a dinâmica de estado pode ser colocada na forma:

$$\dot{x} = f_0(x(t), t) + f_1(x(t), t) \quad (3.29)$$

onde f_0 é uma função conhecida e f_1 é pouco conhecida ou de difícil modelagem. A compensação do modelo dinâmico (Ingram, 1971) é uma técnica que trata adequadamente deste problema. Basicamente, esta técnica consiste em substituir f_1 na Equação 3.29 por um processo estocástico que possua uma componente correlacionada ao longo do tempo e outra puramente aleatória, obtendo-se assim uma compensação estatística para f_1 . Tal aproximação é bastante feliz, uma vez que, em geral, o objetivo principal não é a determinação precisa de f_1 , mas sim a estimação do estado x . Sua aplicação se estende, em princípio, a qualquer tipo de problema de estimação, pois não é feita nenhuma hipótese sobre a natureza de f_1 . A grande vantagem obtida é, portanto, a simplificação resultante na dinâmica. O processo estocástico utilizado é o de Gauss-Markov de primeira ordem, dado por:

$$\dot{\varepsilon} = -b\varepsilon + W(t) \quad ,$$

onde b é uma matriz dada e $W(t)$ é um processo branco gaussiano com matriz de covariância $Q(t)$. Com isto, contorna-se a dificuldade na modelagem dinâmica, que é reescrita como:

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t), t) + \varepsilon(t) \quad , \quad (3.30)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = -b\varepsilon(t) + W(t) \quad , \quad (3.31)$$

onde $\varepsilon(t)$ compensa a parte não-modelada, sendo por isso denominada "aceleração não-modelada". A matriz b é, neste trabalho, admitida diagonal e constante, e seus elementos $b_{i,i}$ são escolhidos em testes de simulação.

Definindo um vetor de estado estendido, o problema recai no caso do item anterior (3.1.1):

$$Z^T \triangleq \{x^T : \varepsilon^T\} \quad , \quad (3.32)$$

$$\dot{Z} = f(Z(t), t) + g.W(t) \quad , \quad (3.33)$$

onde f e g são identificados imediatamente nas Equações 3.30 e 3.31.

Este procedimento tem sido utilizado (Ingram, 1971; Rios Neto, 1973 e Negreiros de Paiva, 1980a) e apresentado resultados satisfatórios. Seu bom desempenho está vinculado à qualidade e frequência das observações. Quanto à escolha da matriz $Q(t)$, é um aspecto crítico e está relacionada com as características das componentes da dinâmica que se pretende compensar com a aceleração não-modelada ε . É preciso saber, entretanto, se a escolha adotada foi acertada e, mais ainda, garantir uma escolha adequada, a cada instante, em um procedimento em tempo real. A seção seguinte trata apropriadamente desta questão.

3.1.3 - TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO

A aplicação do filtro estendido de Kalman a um problema específico enfrenta, não raramente, uma dificuldade denominada divergência. Nesta, o erro real cometido na estimativa do estado torna-se muito frequentemente maior, em módulo, que seu valor médio quadrático previsto, ou seja:

$$[\bar{x}_{iK} - x_i(t_K)]^2 > P_{i,iK}$$

o fenômeno se detecta pelo acontecimento simultâneo de dois fatos:

- A matriz de covariância P_K se torna pequena, indicando convergência e com isso o ganho de Kalman K_K fica pequeno, reduzindo a influência das observações na estimativa.
- Incompatibilidade entre o resíduo observado $y_K - h(\bar{x}_K)$ e suas propriedades estatísticas calculadas.

Dentre as possíveis causas do fenômeno estão: a não-linearidade das equações da dinâmica e das observações; modelagem incompleta ou mesmo incorreta destas equações; erros tendenciosos de observa

ção; erros numéricos; e escolha inadequada da matriz de covariância do ruído, Q_K , além de outros identificados em aplicações específicas.

Na seção anterior foi apresentada uma solução para o problema da má modelagem dinâmica, ficando em aberto a questão da escolha da matriz Q_K . Nesta seção utiliza-se uma técnica de ruído adaptativo recentemente desenvolvida (Rios Neto e Kuga, 1982) que estima Q_K a partir de uma hipótese que assegura a coerência entre o resíduo e suas propriedades estatísticas, evitando assim a divergência. A hipótese admitida foi a de máxima verossimilhança do resíduo verdadeiro, r_v , definido por:

$$r_{v_i}^2 \triangleq [h_{K,i}(x_K) - h_{K,i}(\bar{x}_K)]^2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.34)$$

ou seja:

$$r_{v_i}^2 = E\{[h_{K,i}(x_K) - h_{K,i}(\bar{x}_K)]^2\}. \quad (3.35)$$

O desenvolvimento desta relação permite estabelecer uma equação denominada pseudo-observação (ver Apêndice B).

$$Y_{PK} = H_{PK} \sigma_K + \eta_K \quad (3.36)$$

onde Y_{PK} é o vetor ($m \times 1$) de pseudo-observações, e η_K , um ruído branco representado por um vetor ($m \times 1$), admitido gaussiano, caracterizados por:

$$Y_{PK,i} \triangleq [y_{K+1,i} - h_{K+1,i}(\bar{x}_{K+1})]^2 + R_{K+1,i} + H_{K+1,i} \phi_K P_K \phi_K^T H_{K+1,i}^T, \quad (3.37)$$

$$E\{\eta_{K,i}^2\} = 4[y_{K+1,i} - h_{K+1,i}(\bar{x}_{K+1})]^2 R_{K+1,i} + 2R_{K+1,i}^2, \quad (3.38)$$

onde $y_{K,i}$ e $h_{K,i}$ são as i -ésimas componentes dos vetores y_K e h_K , respectivamente; $H_{K,i}$ é a i -ésima linha da matriz H_K ; e $R_{K,i}$ é o i -ésimo

elemento da diagonal da matriz R_K . Ainda na Expressão 3.36, H_{PK} é a matriz (mxs) cujos elementos são os quadrados dos elementos do produto matricial $H_K \Gamma_K$, e σ_K é o vetor (sx1) composto pelos elementos da diagonal da matriz de covariância Q_K que se pretende estimar. Como o lado direito da Equação 3.37 é totalmente conhecido no instante t_K , Y_{PK} pode ser calculado e assumir o papel de observação no processo de estimação de σ_K . O processamento destas pseudo-observações por um filtro de Kalman possibilita estimar $\hat{\sigma}_K$ paralelamente ao estado. Isto equivale a determinar um Q_K adequado o qual, em coerência com a hipótese adotada, tenderá a evitar a ocorrência do fenômeno de divergência na estimação do estado. Neste propósito admite-se como informação a priori a última estimativa:

$$\hat{\sigma}_K = \hat{\sigma}_{K-1} \quad , \quad (3.39)$$

$$\hat{P}_{PK} = P_{PK-1} \triangleq E\{[\sigma_{K-1} - \hat{\sigma}_{K-1}][\sigma_{K-1} - \hat{\sigma}_{K-1}]^T\} \quad . \quad (3.40)$$

Um cuidado deve ser tomado durante o processo de estimação de σ_K : $\hat{\sigma}_K$ nunca pode assumir valores negativos, pois é um vetor de variâncias. Nos casos em que isso ocorrer, deve-se-lhe impor o valor nulo.

Com isto se completa o algoritmo de estimação.

3.2 - DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

Nesta seção serão aplicadas as técnicas apresentadas na seção anterior ao problema de determinação de atitude. O que se pretende é relacionar, com precisão, o referencial coincidente com os eixos principais de inércia do satélite com o referencial inercial, ambos descritos na Seção 2.1. O desenvolvimento, em princípio, não particulariza o tipo de satélite artificial envolvido, sua órbita ou sua estabilização, sendo portanto de caráter geral.

3.2.1 - CONSIDERAÇÕES, IDENTIFICAÇÃO DE VARIÁVEIS E HIPÓTESES

Para se colocar o problema de determinação de atitude na forma de um de estimação ótima, é necessário definir três aspectos. Primeiramente, define-se o estimador a ser utilizado, tendo em vista os resultados a serem alcançados. Deve-se levar em conta, para tanto, os requisitos de missão e as características do satélite envolvido (órbita, sistema de sensores de atitude, tipo de estabilização). Em seguida, identificam-se as variáveis de estado e o vetor de observações. Finalmente são feitas as hipóteses que tornam os modelos dinâmicos e de observação compatíveis com o estimador adotado. Estes três aspectos são detalhados a seguir.

a) Considerações sobre o estimador adotado

Para que uma dada precisão na determinação de atitude seja assegurada, deve haver um compromisso entre a sofisticação da modelagem dinâmica, o nível de informação e a frequência de observações.

Para sofisticação na modelagem dinâmica entende-se o quanto ela é completa nos tipos de torque que abrange, o quanto é truncada ou linearizada nas expressões algébricas e o quanto é exata nos parâmetros referentes aos torques e às características do satélite. Já o nível de informação exprime a quantidade de informações independentes sobre a variável de estado, suprida pelas observações, e engloba os seguintes conceitos:

- precisão nas observações;
- quantidade de sensores independentes;
- sensibilidade das observações às variações no estado.

A frequência de observações influencia a precisão obtida na medida em que está ligada ao intervalo de tempo em que a precisão no estado se deteriora devido à propagação entre duas observações consecutivas pelo modelo dinâmico.

O compromisso mencionado se caracteriza por: quanto mais rudimentar for a modelagem dinâmica, mais necessárias se tornam observações frequentes e com alto nível de informação. No limite, o procedimento se tornaria de natureza apenas geométrica (não haveria a necessidade de modelar a dinâmica).

O nível de informação e a frequência de observações são limitadas pelas restrições na qualidade, quantidade e adequabilidade dos sensores, bem como capacidade computacional em processar todas as medidas em tempo real, além daquelas referentes ao processo de comunicação da informação (amplificação, codificação, transmissão, recepção e decodificação). Por sua vez, a sofisticação na modelagem dinâmica sofre limitações referentes a: restrições computacionais (tais como precisão e tempo de processamento); complexidade algébrica envolvida; e principalmente ao desconhecimento parcial acerca dos torques atuantes no satélite e das características deste (particularmente os momentos principais de inércia e a posição dos eixos principais de inércia). Assim, uma vez fixada a precisão requerida, a faixa disponível de possibilidades torna-se restrita, conforme enfoca a Figura 3.1. Somente dentro deste contexto é que se pode justificar a escolha de um determinado modelo dinâmico.

Quando um satélite se encontra estabilizado por rotação, a energia cinética de rotação é muito maior que o trabalho realizado pelos torques externos atuantes no satélite durante o período entre duas observações consecutivas, a ponto de se poder desprezá-los. Neste caso, uma modelagem dinâmica da atitude que considere o movimento do tipo de Euler-Poinsot (ou seja, torque externo nulo) já é suficiente para se situar na região viável. É o caso do satélite francês D2B (Robert, 1976). Entretanto, à medida que a velocidade angular diminui, o trabalho realizado pelos torques citados vai-se tornando relevante e o modelo Euler-Poinsot inadequado (satélites estabilizados nos três eixos, por exemplo). Por outro lado, a modelagem destes torques enfrenta, geralmente, as duras limitações já citadas no parágrafo anterior.

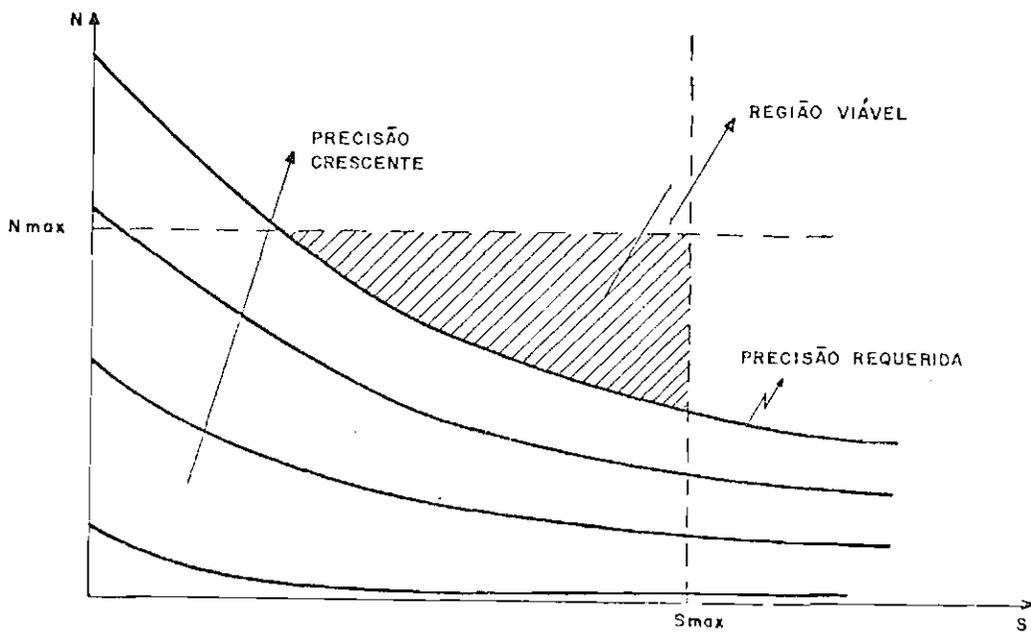


Fig. 3.1 - Gráfico qualitativo do nível de informação, N , versus sofisticação na modelagem dinâmica, S , para valores crescentes de precisão.

No estimador adotado no presente trabalho, os torques externos não são modelados, sendo entretanto compensados conforme a técnica de compensação do modelo dinâmico, descrita na Seção 3.1.2. Com isto pretende-se situar o modelo dinâmico numa faixa intermediária, mais precisa que o movimento de Euler-Poinsot e menos complexa que a modelagem dos torques e atender a uma faixa mais ampla de possibilidades quanto aos requisitos da missão, independentemente do tipo de estabilização do satélite.

b) Seleção do vetor de estado

A caracterização da atitude e de sua dinâmica pode ser suprida por ângulos de Euler; elementos da matriz de rotação (co-senos diretores), também chamada de matriz de atitude; quaternions, além de outros menos usuais. Ângulos de Euler apresentam singularidades e as demais dificuldades associadas às funções trigonométricas, enquanto a matriz de rotação conta com elevada redundância de informação (9 elementos, com apenas 3 independentes). O uso de quaternions é adotada neste

trabalho por evitar os inconvenientes dos outros modos citados. Outros sím, quaternions têm sido utilizados em outros trabalhos na área (Wertz, 1978; Stuck, 1972 e Plotnikov et alii, 1979), nos quais suas vantagens são evidenciadas. De acordo com esta escolha, o vetor de estado é definido por (ver Seção 2.2.3):

$$x^T \underline{\Delta} \{q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : \omega_x : \omega_y : \omega_z\} \quad (3.41)$$

Um vetor de estado estendido é definido para a utilização da técnica de compensação do modelo dinâmico:

$$z^T \underline{\Delta} \{x^T : \epsilon^T\} \quad (3.42)$$

onde ϵ é o vetor (3x1) que representa a aceleração não-modelada. Outros elementos poderiam fazer parte do vetor de estado, tais como: o momento magnético do satélite (conforme anteriormente mencionado na Seção 2.3.4, item c); os momentos principais de inércia; desalinhamentos, atrasos e parâmetros de ajuste dos sensores. Procedimentos que se utilizam de elementos deste tipo visam, em geral, alta precisão.

c) Seleção do vetor de observações

A identificação do vetor de observações depende do tipo, número e configuração dos sensores utilizados no satélite. Atualmente existe uma grande variedade de sistemas de sensores, e cada satélite possui o seu próprio, na maioria dos casos, com características diferentes dos demais. Como o presente trabalho não está vinculado a um satélite específico, dois sistemas serão considerados a fim de demonstrar a versatilidade do procedimento. O número de tipos de sensores para garantir a observabilidade da atitude em três eixos é dois, sendo o adotado neste trabalho. Um maior número de tipos de sensores pode ser utilizado, resultando numa maior precisão mas, em contrapartida, numa maior carga no processamento. Quanto ao número de sensores de cada tipo, pode eventualmente ser maior do que um, visando confiabilidade e continuidade de observações. Entretanto isto sõ afeta diretamente o prê

-processamento, enquanto a configuração do vetor de observações em na da se modifica.

O primeiro sistema considerado permite dispor dos co-se nos diretores do Sol (S_x , S_y e S_z) e do centro da Terra (C_x , C_y e C_z) no referencial do satélite. O vetor de observações neste caso é definido por:

$$y^T \underline{\Delta} \{C_x : C_y : C_z : S_x : S_y : S_z\} \quad . \quad (3.43a)$$

Numa análise superficial, tal sistema seria particularmente adequado para satélites a grandes altitudes (na altitude geossíncrona, por exemplo), onde o período relativo de ocultação do Sol é pequeno na órbita do satélite, e o campo geomagnético, enfraquecido, já não representa uma referência confiável.

O segundo sistema de sensores de atitude considerado é o que permite dispor dos co-senos diretores da Terra e do campo geomagnético na região do satélite (M_x , M_y e M_z), no referencial do satélite. Neste caso, o vetor de observações é definido por:

$$y^T \underline{\Delta} \{C_x : C_y : C_z : M_x : M_y : M_z\} \quad . \quad (3.43b)$$

Este sistema seria adequado para satélite de baixas altitudes (1000 km por exemplo). Deve-se ressaltar, entretanto, que a questão da escolha de um sistema de sensores requer uma análise mais profunda e particular para cada missão.

d) Vetor de referência para as observações

Em correspondência às componentes do vetor de observações estão as suas componentes no sistema inercial, conhecidas em terra a cada instante, desde que seja conhecida a posição do satélite em sua órbita (ver Figura 3.2). Com estas últimas componentes define-se um vetor de referência para as observações, A , associado a y em cada caso, se segue:

- 1º caso: $A^T \triangleq \{C_i : C_j : C_k : S_i : S_j : S_k\}$; (3.44a)

- 2º caso: $A^T \triangleq \{C_i : C_j : C_k : M_i : M_j : M_k\}$. (3.44b)

O vetor A é utilizado para relacionar as observações com estado.

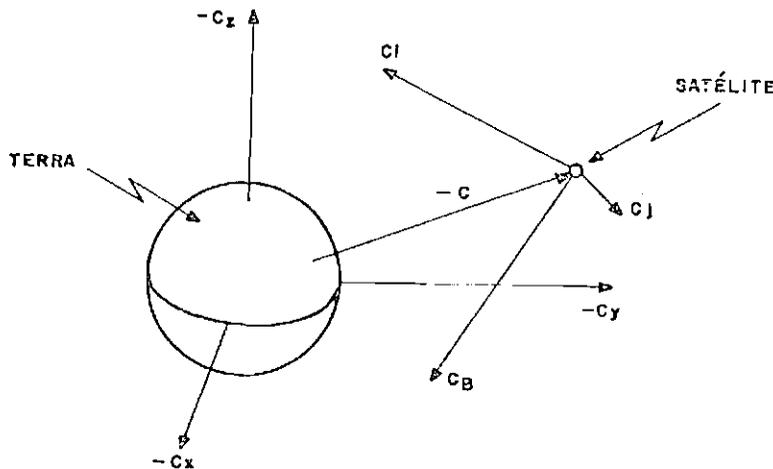


Fig. 3.2 - Componentes de C no referencial inercial e do satélite.

e) Hipóteses na modelagem das observações

O vetor de referência para as observações, A , é, a princípio, admitido perfeitamente conhecido. Esta aproximação parece ser válida, pois as imprecisões envolvidas são irrelevantes em comparação com a dos sensores em geral. A grande vantagem desta hipótese é evitar a complicação representada pela correlação entre o ruído nas observações e o vetor de estado.

Admite-se que o erro nas observações seja uma sequência branca com distribuição gaussiana e matriz de covariância diagonal conhecida. Tal aproximação, via de regra, reflete bem a realidade, além de atender aos requisitos do filtro empregado.

As observações são admitidas disponíveis a intervalos constantes de tempo durante o período considerado.

3.2.2 - EQUACIONAMENTO

Com as hipótese, definições e considerações feitas na Seção anterior, a dinâmica de atitude passa a ser dada por:

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2} (q_2 \omega_z - q_3 \omega_y + q_4 \omega_x) ,$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2} (-q_1 \omega_z + q_3 \omega_x + q_4 \omega_y) ,$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2} (q_1 \omega_y - q_2 \omega_x + q_4 \omega_z) ,$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2} (-q_1 \omega_x - q_2 \omega_y - q_3 \omega_z) ,$$

$$\dot{\omega}_x = \lambda_1 \omega_y \omega_z + \epsilon_1 ,$$

$$\dot{\omega}_y = \lambda_2 \omega_x \omega_z + \epsilon_2 ,$$

$$\dot{\omega}_z = \lambda_3 \omega_x \omega_y + \epsilon_3 ,$$

$$\dot{\epsilon}_1 = -b_{1,1} \epsilon_1 + W_1 ,$$

$$\dot{\epsilon}_2 = -b_{2,2} \epsilon_2 + W_2 ,$$

$$\dot{\epsilon}_3 = -b_{3,3} \epsilon_3 + W_3 ,$$

e o problema de determinação de atitude como um todo passa a ter as seguintes equações:

$$\dot{Z} = f(Z) + G W_{K-1} , \quad t_{K-1} \leq t < t_K , \quad (3.45)$$

$$Y_K = h_K(Z_K) + V_K , \quad (3.46)$$

onde

$$E\{W_i W_j^T\} = \delta_{i,j} Q_i \quad , \quad (3.47)$$

$$E\{V_i V_j^T\} = \delta_{i,j} R_i \quad , \quad (3.48)$$

sendo R_i matriz (6x6) diagonal conhecida; Q_i matriz (3x3) diagonal cujos elementos formam o vetor σ_i (3x1) estimado simultaneamente ao estado; $\delta_{i,j}$ é o delta de Kroenecker; e ainda:

$$G^T = [0_{3,7} : I_3] \quad , \quad (3.49)$$

onde $0_{3,7}$ é a matriz nula (3x7) e I_3 é a matriz identidade (3x3). A função $f(Z)$ é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} (Z_5 Z_4 + Z_7 Z_2 - Z_6 Z_3) \quad , \\ f_2 &= \frac{1}{2} (Z_6 Z_4 - Z_7 Z_1 + Z_5 Z_3) \quad , \\ f_3 &= \frac{1}{2} (Z_7 Z_4 + Z_6 Z_1 - Z_5 Z_2) \quad , \\ f_4 &= \frac{1}{2} (-Z_5 Z_1 - Z_6 Z_2 - Z_7 Z_3) \quad , \\ f_5 &= \lambda_1 Z_6 Z_7 + Z_8 \quad , \\ f_6 &= \lambda_2 Z_7 Z_5 + Z_9 \quad , \\ f_7 &= \lambda_3 Z_5 Z_6 + Z_{10} \quad , \\ f_8 &= -b_{1,1} Z_8 \quad , \\ f_9 &= -b_{2,2} Z_9 \quad , \\ f_{10} &= -b_{3,3} Z_{10} \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

A função $h_K(Z_K)$ é calculada a partir da Relação 2.2 no Apêndice C. As derivadas parciais das funções $f(Z)$ e $h_K(Z_K)$ necessárias no processo de estimação são fornecidas nos Apêndices D e C respectivamente.

Considera-se ainda que W e V são não-correlacionados entre si e com o erro na estimativa inicial do estado, $\hat{Z}_0 - Z_0$. \hat{Z}_0 e P_0 podem ser obtidos por vários métodos. O método algébrico de determinação de atitude, por exemplo, é bastante simples. Com duas observações nos referenciais inercial e do satélite, constrói-se um triedro que permite escrever a seguinte relação:

$$M_S = A M_I \quad , \quad (3.51)$$

onde A é a matriz de atitude e:

$$M_S = \left[S_S : \frac{S_S \times C_S}{|S_S \times C_S|} : S_S \times \frac{S_S \times C_S}{|S_S \times C_S|} \right] \quad , \quad (3.52)$$

$$M_I = \left[S_I : \frac{S_I \times C_I}{|S_I \times C_I|} : S_I \times \frac{S_I \times C_I}{|S_I \times C_I|} \right] \quad . \quad (3.53)$$

Desde que S e C sejam paralelos (observações colineares), A pode ser obtido resolvendo a Equação 3.51:

$$A = M_S M_I^T \quad (3.54)$$

uma vez que M_I é ortonormal. O quaternion de atitude pode ser obtido de A como se segue:

$$q_4 = \frac{1}{2} (1 + A_{1,1} + A_{2,2} + A_{3,3})^{1/2} \quad ,$$

$$q_1 = \frac{1}{4q_4} (A_{2,3} - A_{3,2}) \quad , \quad (3.55)$$

$$q_2 = \frac{1}{4q_4} (A_{3,1} - A_{1,3}) ,$$

$$q_3 = \frac{1}{4q_4} (A_{1,2} - A_{2,1}) ,$$

ou por outros modos equivalentes, caso q_4 seja nulo (Wertz, 1978). O cálculo da matriz de covariância do quaternion obtido pelo método acima pode ser encontrado no trabalho de Shuster (1981), onde também apresenta outro método mais preciso.

Quanto à velocidade angular, pode ser inicializada com seu valor nominal, caso o satélite já esteja estabilizado. Caso contrário, e supondo a ausência de girômetros, pode-se construir "observações" artificiais de girômetros por diferenças finitas, utilizando duas ou mais observações subseqüentes dos sensores. Este método é descrito no trabalho de Robert (1976), onde é aplicado ao satélite francês D2B. Sua matriz de covariância pode ser escolhida a favor da segurança, uma vez que o estimador oferece rápida convergência.

Finalmente as acelerações não-modeladas podem ser inicializadas com valores nulos, uma vez que se tratam de perturbações. Uma matriz diagonal com elementos da ordem de grandeza do quadrado das perturbações atuantes, que podem ser avaliadas desde o projeto do satélite, é uma boa aproximação para sua matriz de covariância.

CAPÍTULO 4

TESTES E ANÁLISE DO PROCEDIMENTO

4.1 - ESPECIFICAÇÃO DOS TESTES

Para ilustrar o desempenho do procedimento, foram feitos testes onde foi simulada e estimada a atitude de dois satélites. Os satélites adotados foram, respectivamente, o primeiro da missão espacial brasileira e o TD-1A (francês) o qual se assemelha ao segundo satélite brasileiro. As características gerais dos satélites adotados são dadas na Tabela 4.1 e na Figura 4.1. Os elementos e parâmetros envolvidos nos testes de simulação são apresentados na Tabela 4.2 e na Figura 4.2. O programa utilizado na simulação da atitude e das observações foi o desenvolvido por Moro (1982), conforme menção anterior na Seção 2.3.4.

TABELA 4.1

CARACTERÍSTICAS DOS SATÉLITES SIMULADOS

SATÉLITE	OBJETIVO	ÓRBITA: ELEMENTOS KEPLERIANOS	ESTABILIZAÇÃO	MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA
1 ϕ	COLETA DE DADOS	$a = 6875 \text{ km}$ $e = 0.004$ $i = 24^{\circ}$ $\Omega = 0^{\circ}$ $\omega_{\pi} = 160^{\circ}$	GRADIENTE DE GRAVIDADE: 2 EIXOS	$J_x = 323.39 \text{ kg-m}^2$ $J_y = 324.06 \text{ kg-m}^2$ $J_z = 10.135 \text{ kg-m}^2$
2 ϕ	EXPLORAÇÃO CIENTÍFICA (HELIOSSÍNCRONO)	$a = 6910 \text{ km}$ $e = .0027$ $i = 97.6^{\circ}$ $\Omega = 317.9^{\circ}$ $\omega_{\pi} = 90.6^{\circ}$	VOLANTES DE INÉRCIA: 3 EIXOS	$J_x = 225. \text{ kg-m}^2$ $J_y = 207. \text{ kg-m}^2$ $J_z = 121. \text{ kg-m}^2$

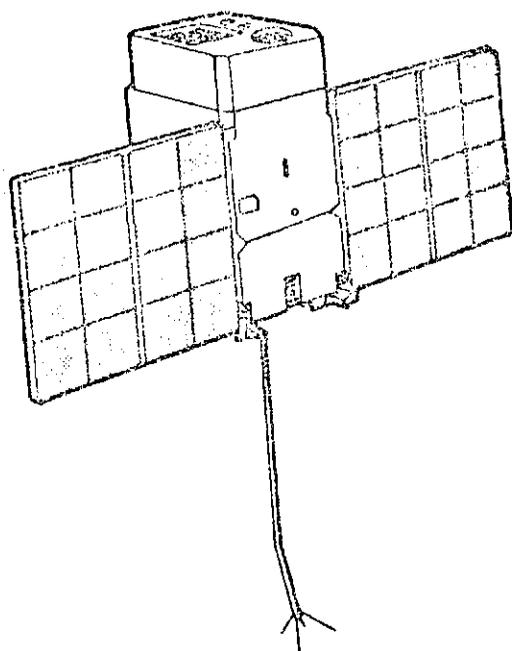
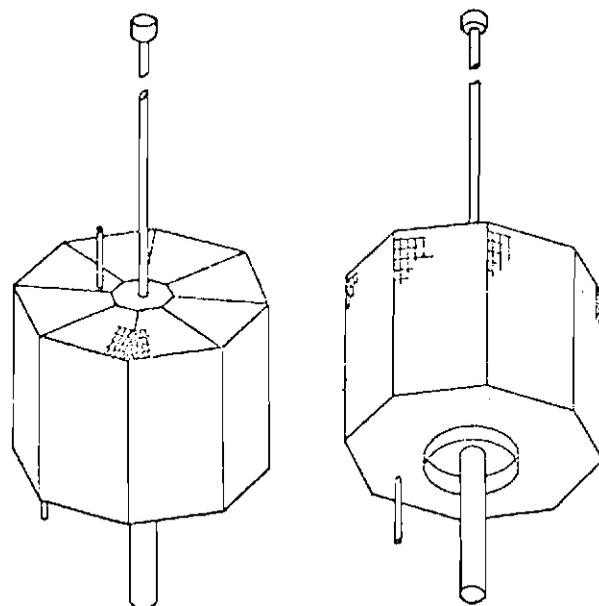


Fig. 4.1 - Primeiro satélite brasileiro. (em cima, duas vistas) e satélite francês TD-1A (em baixo).

TABELA 4.2

PRINCIPAIS INFORMAÇÕES SOBRE A SIMULAÇÃO

SAT.	TORQUES	SENSORES	FASE	PERÍODO	COND. INICIAL
19	GRAVITACIONAL AERODINÂMICO RADIAÇÃO SOLAR	SOLAR E DE HORIZONTE	IMEDIATAMENTE APÓS O ESTICAMENTO DO MASTRO	2/10/81 10h, 0 min ATÉ 10h, 15 min	$\omega_x = .001 \text{ rd s}^{-1}$ $\omega_y = .001 \text{ rd s}^{-1}$ $\omega_z = .001 \text{ rd s}^{-1}$ $q_1 = -q_4 = \sqrt{2}/2$
29	GRAVITACIONAL AERODINÂMICO RADIAÇÃO SOLAR	SOLAR E DE HORIZONTE	ANTES DE INICIAL O CONTROLE	16/05/72 0.h, 0 min ATÉ 0.h, 6 min	$\omega_x = .05 \text{ rd s}^{-1}$ $\omega_y = .05 \text{ rd s}^{-1}$ $\omega_z = .05 \text{ rd s}^{-1}$ $q_1 = -q_4 = \sqrt{2}/2$

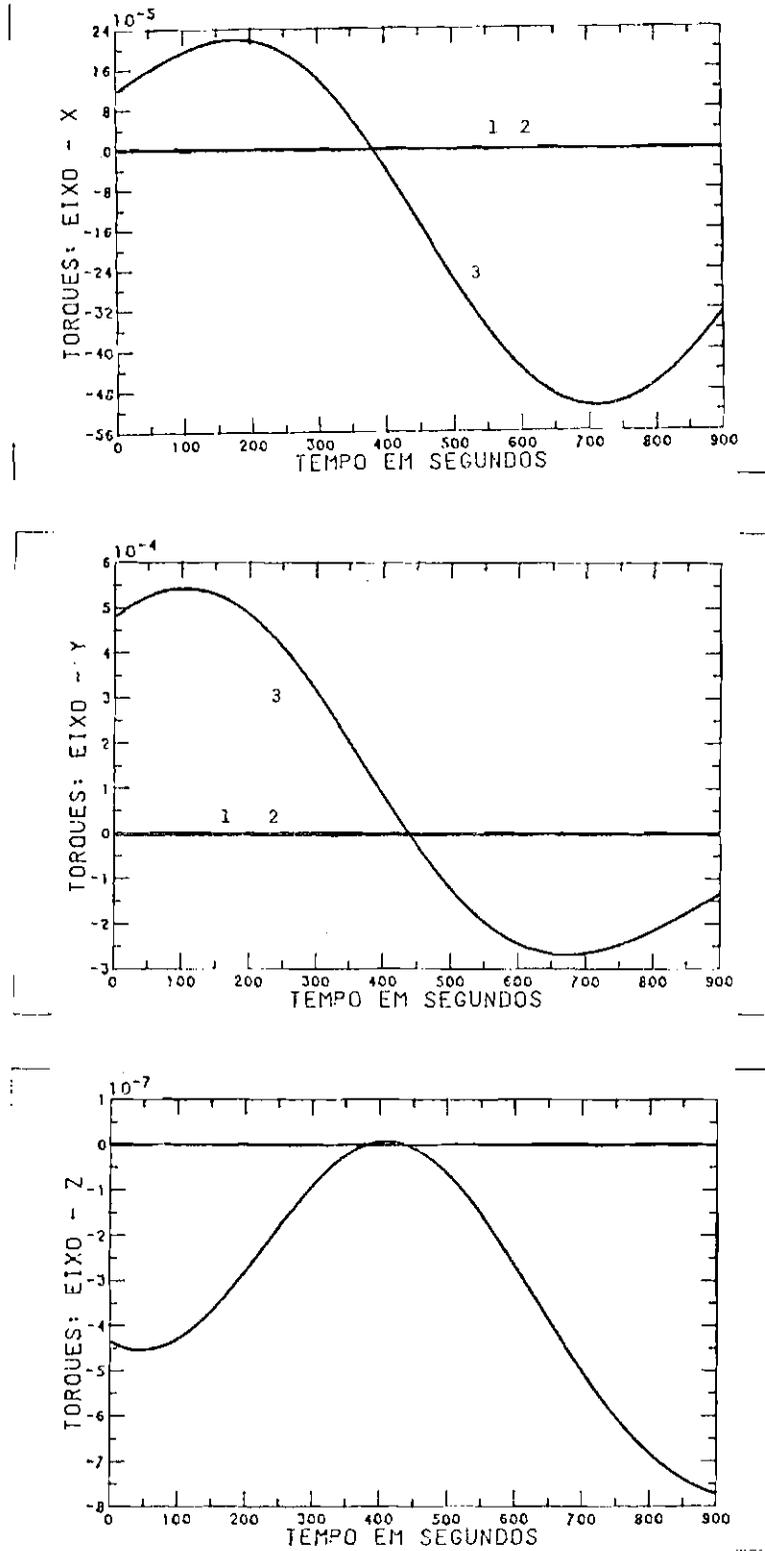


Fig. 4.2a - Torques simulados, 1º caso (1 - aerodinâmico; 2 - solar; 3 - gravitacional).

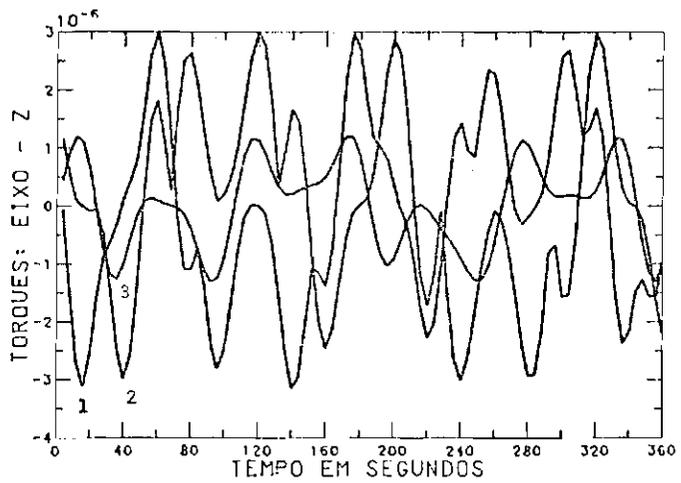
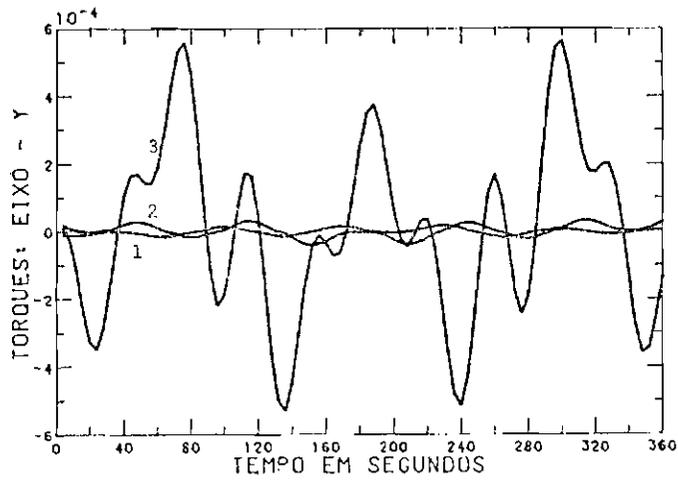
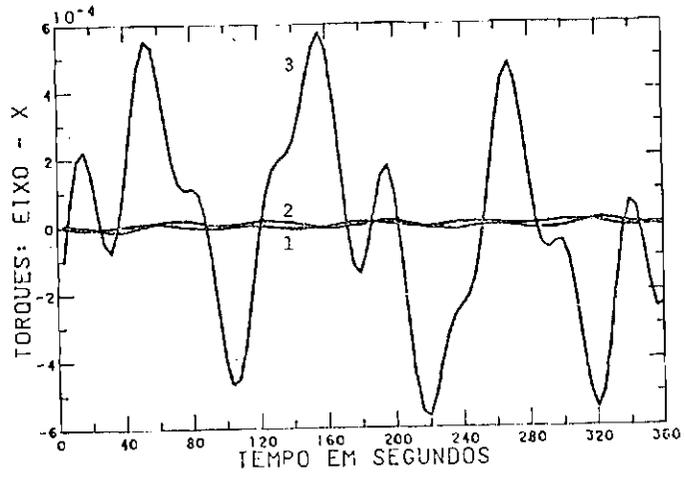


Fig. 4.2b - Torques simulados, 29 caso (1 - aerodinâmico; 2 - solar; 3 - gravitacional).

Em função da estrutura de simulação já existente, foram utilizados sensores solar e de horizonte para os dois satélites simulados. No caso do primeiro satélite não estão previstos sensores de horizonte na sua especificação preliminar e sim sensores magnéticos. Isto, porém, não invalida a simulação, uma que o usual é haver sensores de horizonte para determinação da direção Nadir (direção do centro da Terra). O torque magnético e o efeito da histerese magnética, embora não tenham sido incluídos na simulação, têm o seu efeito qualitativo incluído, uma vez que o potencial do campo geomagnético é semelhante ao potencial gravitacional, enquanto o efeito dissipativo da histerese magnética tem seu correspondente no torque aerodinâmico, também dissipativo.

Para implementar o procedimento de estimação de atitude, foi desenvolvida uma rotina em linguagem FORTRAN. Uma vez simulada a atitude dos satélites e as observações de seus sensores pela rotina de simulação, a rotina de estimação estima a atitude a partir das observações. Com isto podem-se comparar os valores simulados com os estimados e avaliar a eficiência do procedimento proposto.

Nos testes foi suposto que o pré-processamento de dados já havia sido feito e já estavam disponíveis para o estimador. As observações foram, portanto, nos dois casos, as componentes da posição do Sol e do centro da Terra (direção Nadir), nos três eixos do satélite, com uma precisão de 15' e 30' respectivamente, a cada quatro segundos. Estes valores de precisão e de frequência de observações (período de amostragem) são realísticos de acordo com a literatura (Wertz, 1978; Robert, 1976).

No caso do segundo satélite, sendo a órbita heliossíncrona, com passagem pelo equador às seis e às dezoito horas locais aproximadamente, as direções do Sol e do Nadir configuram sempre uma situação favorável, próxima à ortogonalidade. Não é este o caso para o primeiro satélite, onde na simulação foi propositadamente selecionado um

segmento de órbita em que ocorre colinearidade nas direções do Sol e do Nadir (ver Figura 4.3), dando margens assim à verificação da influência deste fator na precisão atingida nos resultados.

O intervalo de tempo simulado (tamanho da amostragem) foi escolhido suficientemente grande para se observar o comportamento do estimador: quinze minutos no primeiro teste e seis minutos no segundo. Um período maior de simulação acrescentaria pouca informação, além de ser irrealístico, considerando-se que o período de recepção de dados por uma estação rastreadora é da ordem de cinco a dez minutos para satélites nas altitudes consideradas.

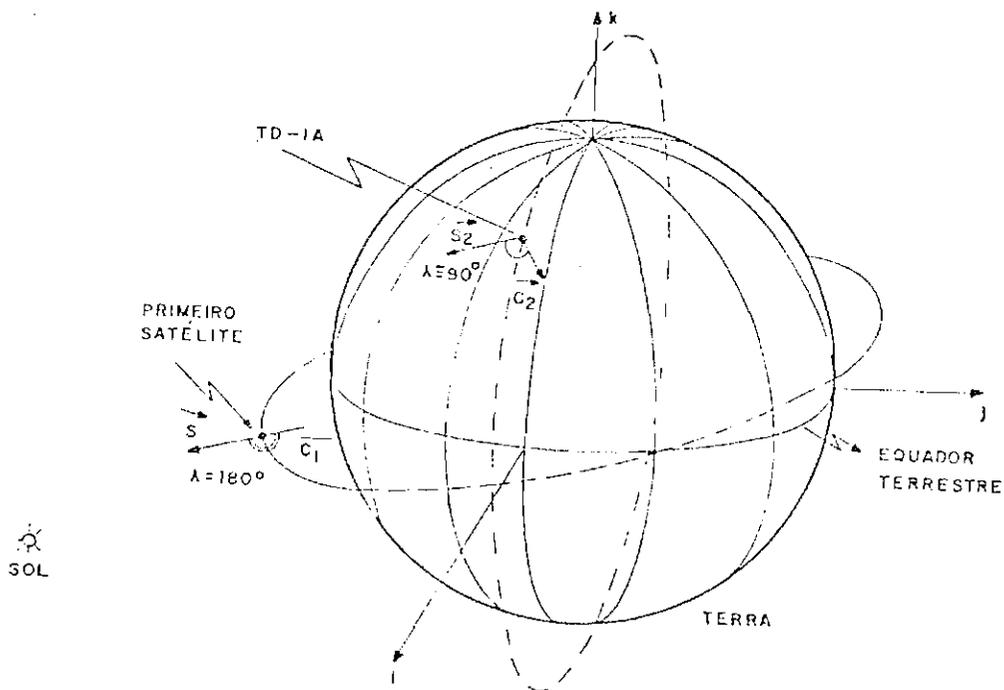


Fig. 4.3 - Ângulo (λ) entre a direção do Sol e do Nadir nas órbitas selecionadas para os testes.

As condições iniciais para o estimador são dadas a seguir:

$$Z_0^T = \{.7 : .1 : .1 : -.7 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0\} ,$$

$$P_{0,i,i} = \begin{cases} (.1)^2 & , i = 1,2,3,4 , \\ (.05)^2 & , i = 5,6,7 , \\ (2.10^{-6})^2 & , i = 8,9,10 , \end{cases}$$

$$P_{0,i,j} = 0 \quad , i \neq j .$$

Os valores de $P_{i,i}$ foram escolhidos a favor da segurança, considerando-se a precisão dos sensores e a ordem de grandeza prevista para a velocidade angular e para os torques atuantes nos satélites. A matriz diagonal b e o valor inicial da matriz de covariância de σ foram ajustados por meio de testes. Os valores adotados foram:

$$b_{i,i} = (180s)^{-1} \quad , i = 1,2 \text{ e } 3 ,$$

$$P_{\rho,i,i} = 10^{-22} \quad , i = 1,2,3 ,$$

$$P_{\rho,i,j} = 0 \quad , i \neq j .$$

4.2 - RESULTADOS E ANÁLISES

Para a apresentação dos resultados, definem-se as seguintes quantidades:

$$\Delta q \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^4 (\bar{Z}_i - Z_i)^2 \right\}^{1/2} , \quad (4.1)$$

$$\delta q \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^4 P_{i,i} \right\}^{1/2} , \quad (4.2)$$

$$\Delta \omega \triangleq \left\{ \sum_{i=5}^7 (\bar{Z}_i - Z_i)^2 \right\}^{1/2} , \quad (4.3)$$

$$\delta \omega \triangleq \left\{ \sum_{i=5}^7 P_{i,i} \right\}^{1/2} , \quad (4.4)$$

onde o símbolo Δ indica erro real e δ precisão estimada; os índices q e ω referem-se ao quaternion de atitude e $\dot{\alpha}$ velocidade angular, respectivamente; \hat{Z} é a estimativa do estado e Z o estado simulado. Outras grandezas de interesse também são trançadas: o ângulo λ de separação entre o Sol e a Terra vistos do satélite, e o resíduo normalizado definido por:

$$\tilde{r} \triangleq \left\{ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{r_i^2}{E\{r_i^2\}} \right\}, \quad (4.5)$$

donde, aplicando-se o operador esperança nos dois lados,

$$E\{\tilde{r}\} = 1,$$

sendo o índice i indicador da i -ésima componente do resíduo observado r , definido na Seção 3.1.3 por:

$$r \triangleq y - h(\bar{x})$$

Não ocorrendo divergência, \tilde{r} fica limitado a valores entre zero e três. Um gráfico de resíduo normalizado com valores tipicamente maiores do que nove indica divergência na estimativa.

4.2.1 - PRIMEIRO TESTE

O primeiro teste foi executado em um computador B6800, consumindo duzentos segundos de CPU para novecentos segundos de simulação. Os resultados estão registrados nas Figuras 4.4 a 4.8.

A Figura 4.4 mostra que o resíduo normalizado ficou em torno de seu valor esperado, uma condição necessária para haver convergência. A Figura 4.5 indica que na faixa entre 400s e 500s aproximadamente caracteriza-se a situação de colinearidade nas observações do Sol e da Terra ($\lambda \cong 180^\circ$), sendo, portanto, a região crítica do teste. Os erros reais nas estimativas do quaternion (Δq) e da velocidade angular

($\Delta\omega$) ficaram dentro das faixas de precisão calculadas, δq e $\delta\omega$ (ver Figuras 4.6 e 4.7). Isto significa que o filtro avaliou coerentemente a precisão de sua estimativa, ou seja, funcionou corretamente, sem divergir. Isto está de acordo com a análise do resíduo normalizado. Percebe-se claramente na Figura 4.6 uma acentuada perda de precisão na atitude no período correspondente ao da colinearidade nas observações. A velocidade angular, no entanto, não foi tão sensível ao problema. Note-se que mesmo na pior condição a convergência foi assegurada, conforme previsto pela técnica de ruído adaptativo. A precisão no final do teste foi da ordem de 0.01 para o quaternion e $18 \cdot 10^{-4}$ rd/s para a velocidade angular, o que já representa um aumento sensível de precisão com relação ao valor inicial, estando o ângulo Sol-Terra, λ , ainda longe da situação ideal (90°).

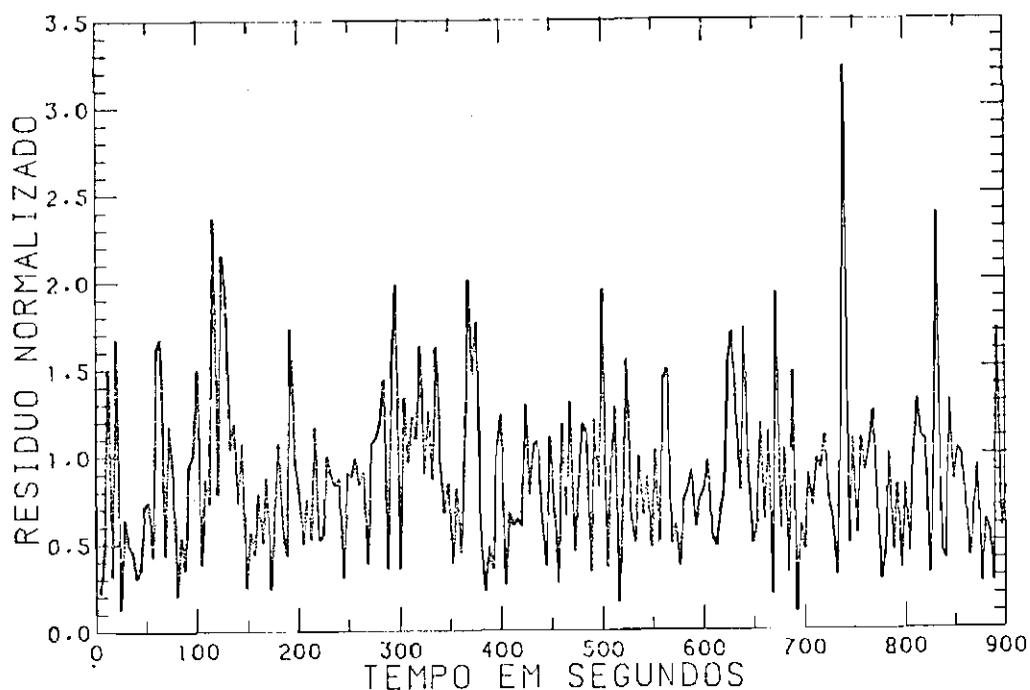


Fig. 4.4 - Resíduo normalizado: 1º teste.

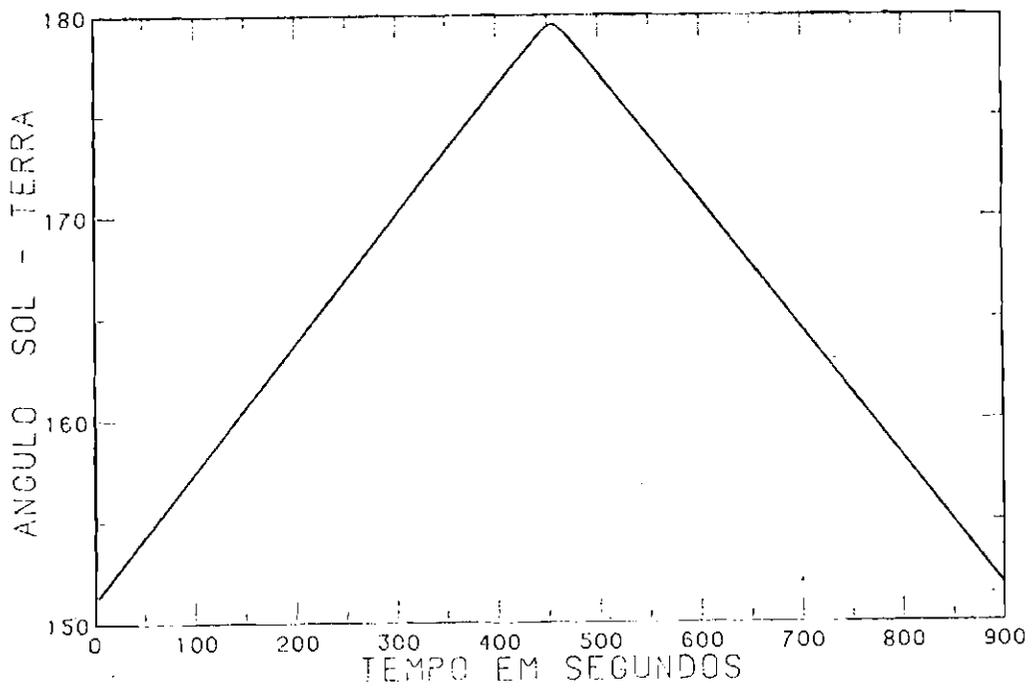


Fig. 4.5 - Ângulo λ entre o Sol e a Terra: 19 teste.

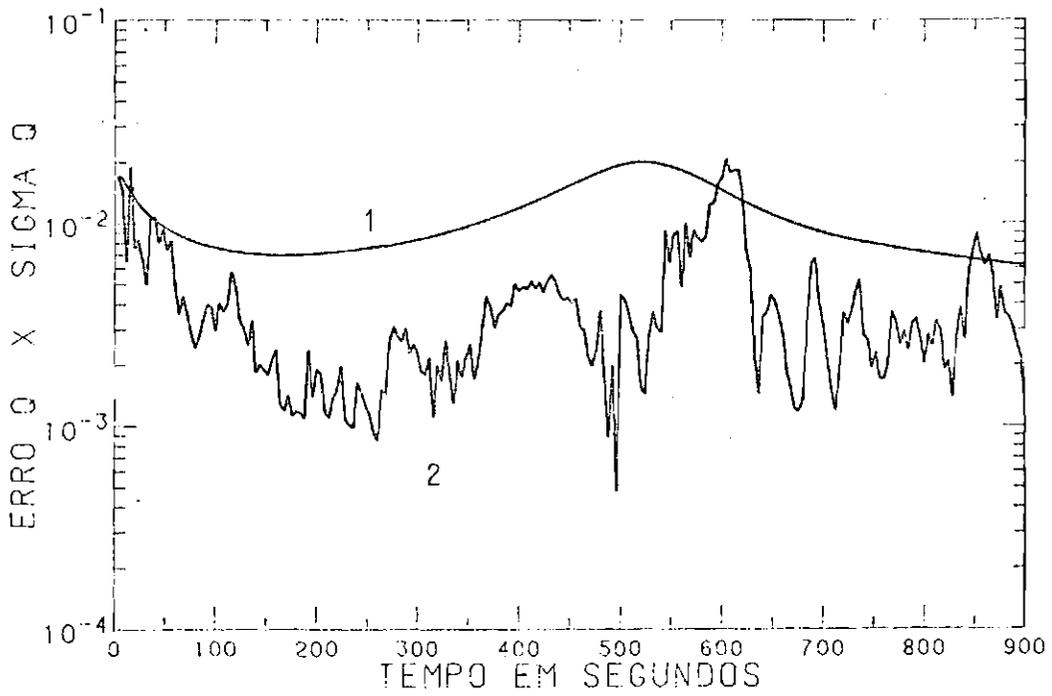


Fig. 4.6 - $\Delta q(2)$ e $\delta q(1)$: 19 teste.

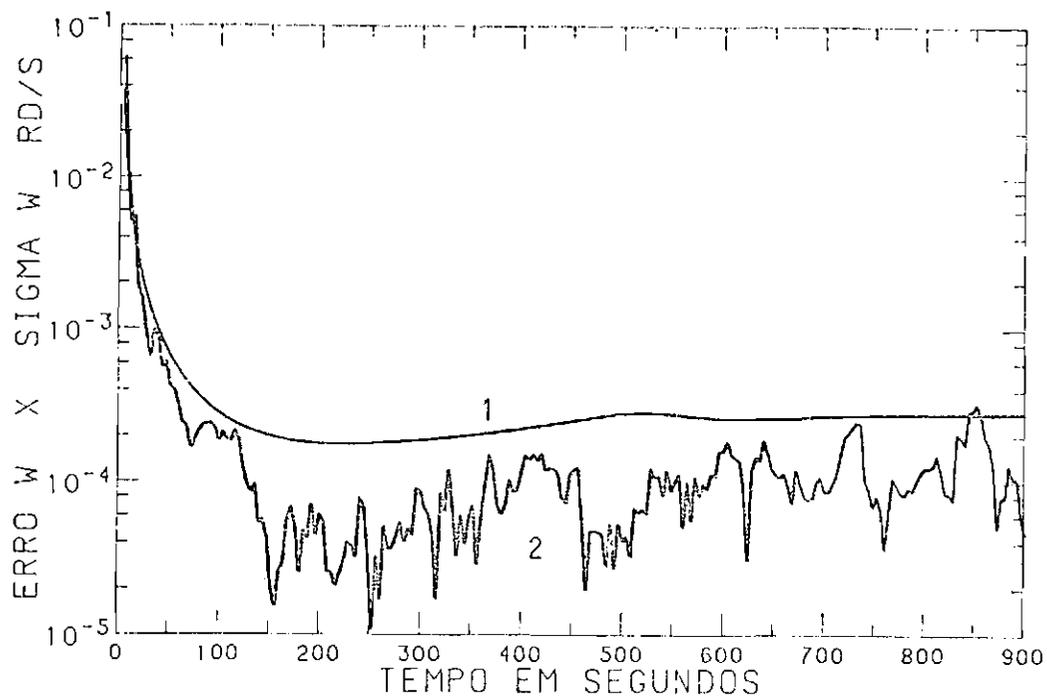


Fig. 4.7 - $\delta\omega(1)$ e $\Delta\omega(2)$: 19 teste.

A Figura 4.8 mostra que a estimativa da aceleração no-modelada acompanhou as tendências dos valores reais: Este resultado constata o êxito da t \hat{e} cnica de compensa \tilde{c} o do modelo din \hat{a} mico utilizada.

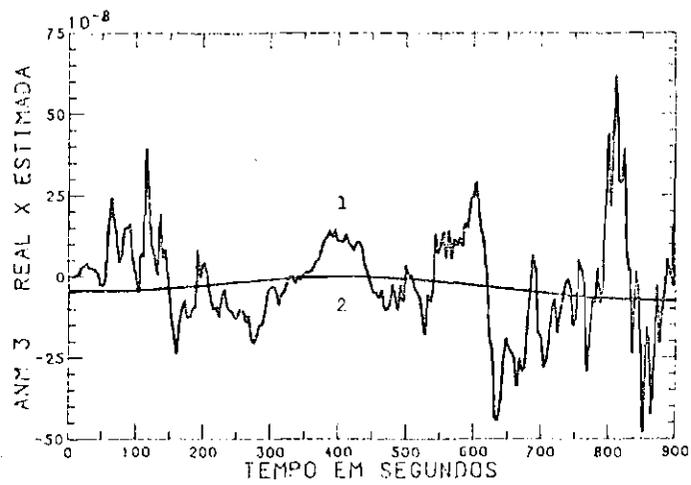
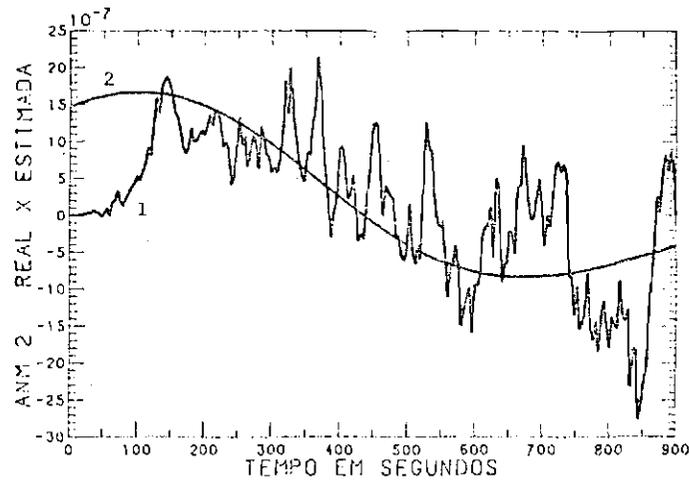
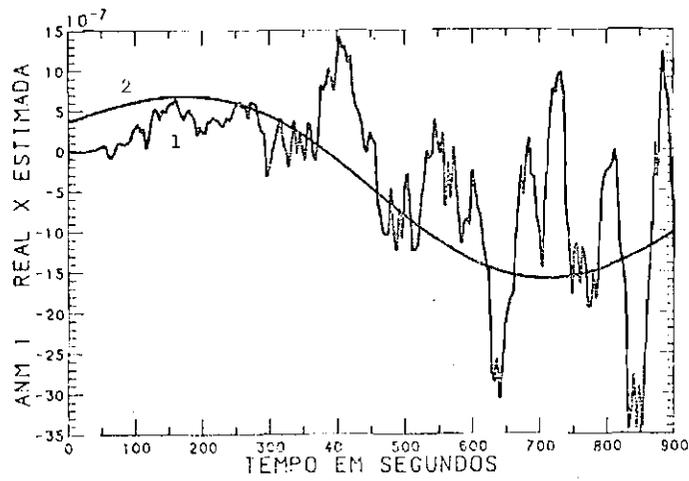


Fig. 4.8 - Aceleração não-modelada: real (2) e estimada (1). 1º teste.

4.2.2 - SEGUNDO TESTE

O segundo teste foi executado no mesmo computador B6800, consumindo cento e dez segundos de CPU para trezentos e sessenta segundos de simulação. Uma avaliação dos resultados é feita a seguir.

Como no primeiro teste, o resíduo normalizado ficou em torno de seu valor esperado, um (ver Figura 4.9). Os erros nas estimativas do quaternion e da velocidade angular também permaneceram nas faixas de precisão previstas pelo estimador, δ_q e $\delta\omega$ respectivamente (ver Figura 4.10 e 4.11). Em comparação com o teste anterior, a precisão tanto na estimativa do quaternion como na da velocidade angular foi melhor, obtendo-se $1.8 \cdot 10^{-3}$ para δ_q e $1.8 \cdot 10^{-4}$ rd/s para $\delta\omega$ no final do teste. Esta melhoria no desempenho do estimador está coerente com o melhor nível de informação nas observações neste teste do que no primeiro, uma vez que as direções do Sol e do Nadir formam sempre um ângulo λ próximo a 90° para o satélite TD-1A, conforme explicado na Seção 4.1. Qualitativamente, este fato já havia sido pré-anunciado na Seção 3.2.1 e ilustrado na Figura 3.1.

As estimativas das componentes da aceleração não-modelada seguiram as tendências dos valores reais, ainda que com certa inércia. Isto comprova a eficiência da técnica de compensação do modelo dinâmico, mesmo numa situação em que a aceleração não-modelada sofre variações relativamente rápidas (Figura 4.12).

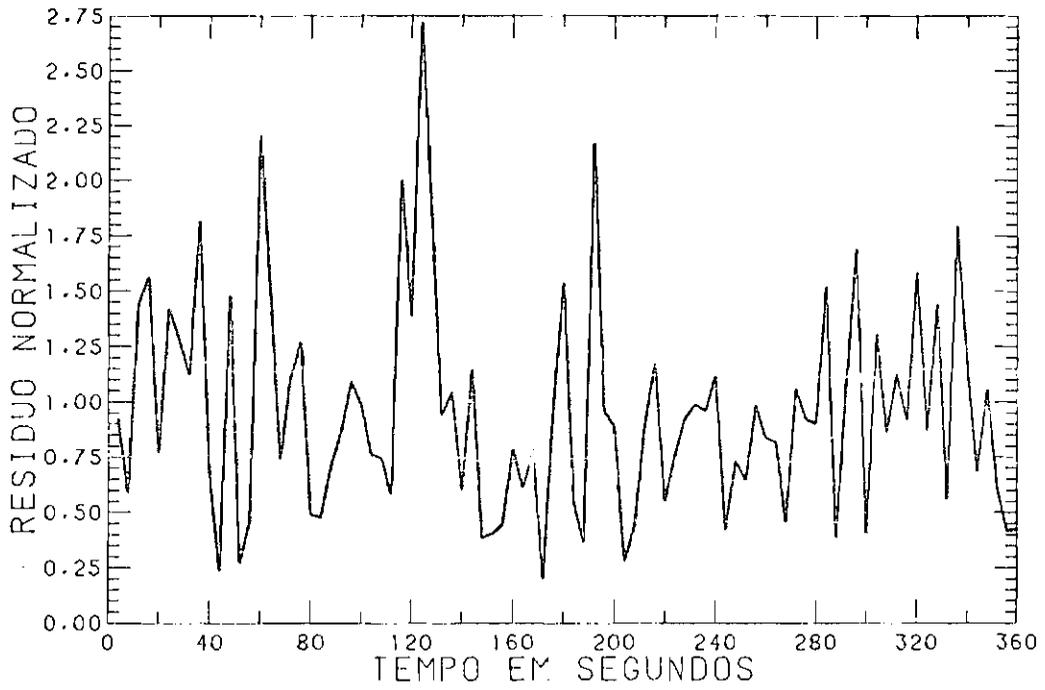


Fig. 4.9 - Resíduo normalizado: 29 teste.

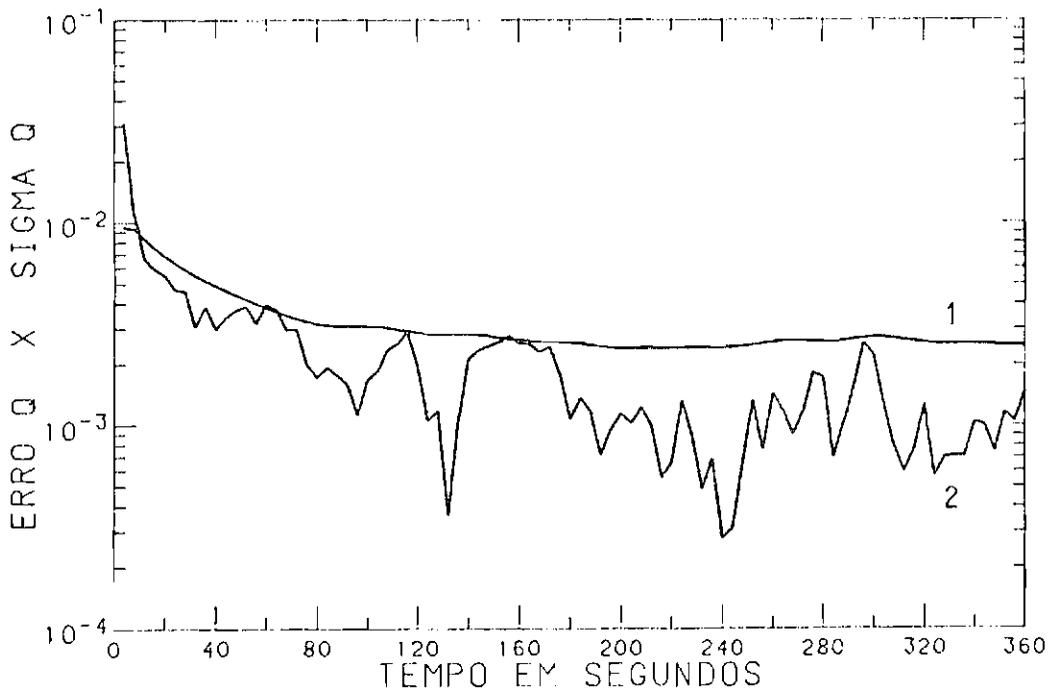


Fig. 4.10 - $\delta q(1)$ e $\Delta q(2)$: 29 teste.

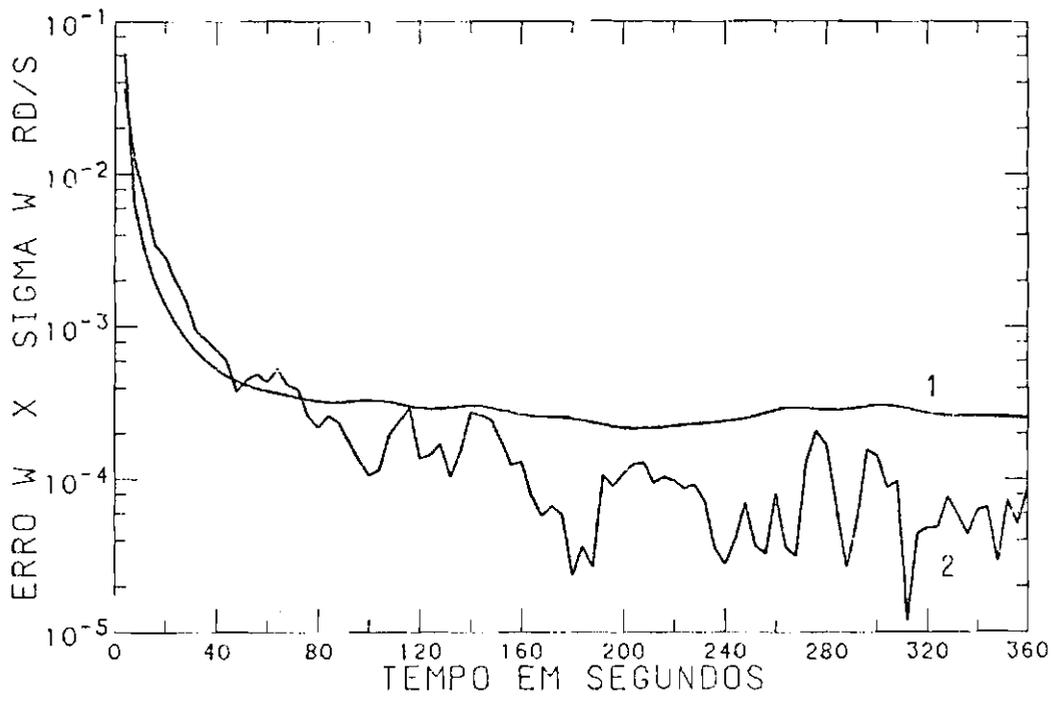


Fig. 4.11 - $\delta\omega(1)$ e $\Delta\omega(2)$: 2ª teste.

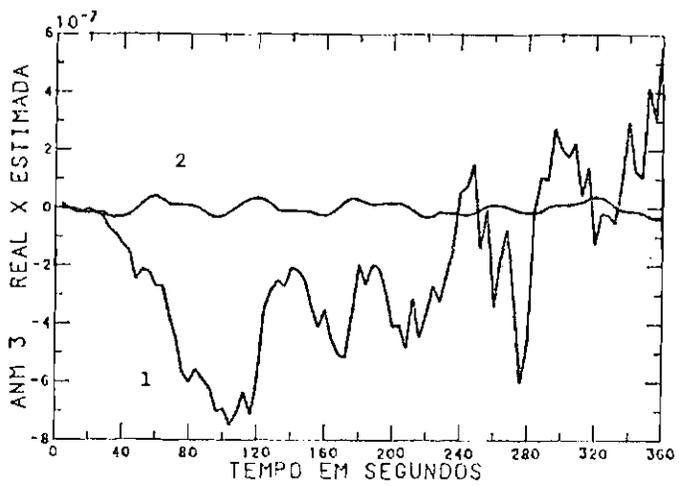
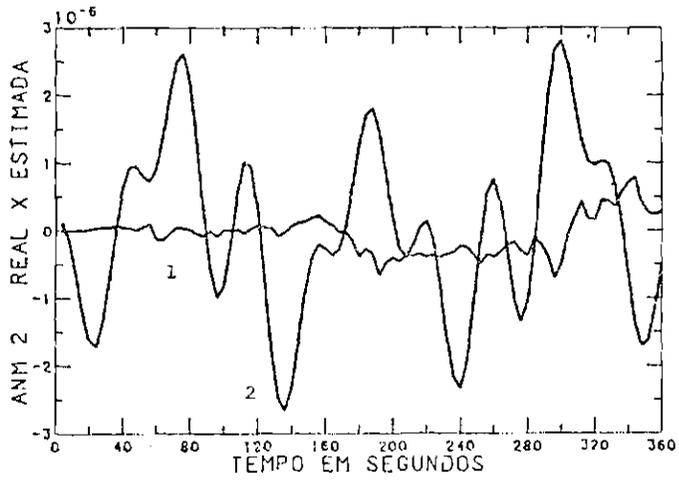
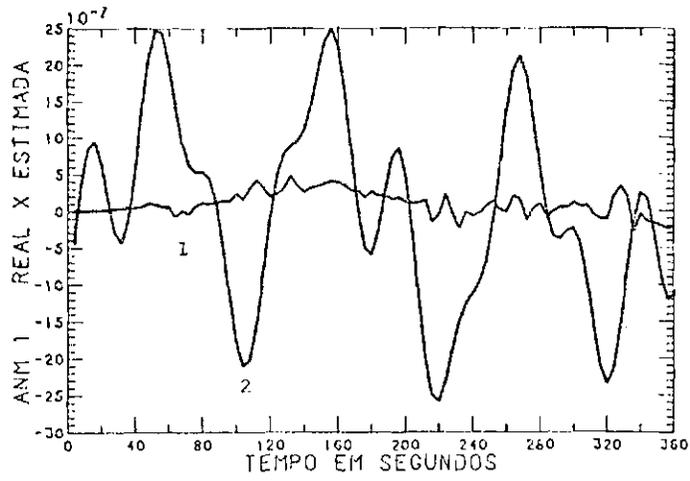


Fig. 4.12 - Aceleração não-modelada: real (2) e estimada (1). 2º teste.

4.2.3 - PRECISÃO ANGULAR

O quaternion de atitude não é uma função linear dos ângulos de atitude e, da mesma forma, os desvios nas estimativas dos elementos do quaternion não são funções lineares dos desvios angulares. Por esta razão, a precisão estimada dos elementos do quaternion, $P_{i,i}$, i de 1 a 4, não é uma medida eficaz da precisão na estimativa da atitude. Com o intuito de apresentar uma medida de precisão da atitude em cada eixo, com interpretação imediata, define-se o desvio angular:

$$\Delta\theta^T \triangleq \{\Delta\theta_1 : \Delta\theta_2 : \Delta\theta_3\} \quad (4.6)$$

que é a rotação que leva o satélite da atitude estimada para a real. Assim, $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_3$, admitidos pequenos, são ângulos de rotação ao redor dos eixos x , y e z do satélite, respectivamente, que representam os desvios da atitude em cada eixo.

As propriedades estatísticas de $\Delta\theta$ são dadas por (Shuster, 1981):

$$E\{\Delta\theta\} = 0_{3,1} \quad , \quad (4.7)$$

$$E\{\Delta\theta \Delta\theta^T\} = P_{\theta\theta} \quad , \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} P_{\theta\theta} & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \tilde{q}^T P_{qq} \tilde{q} \quad , \quad (4.9)$$

onde P_{qq} é a matriz de covariância do quaternion de atitude e \tilde{q} é dado por:

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.10)$$

Define-se então a precisão angular:

$$\delta\theta_i \triangleq \sqrt{P_{\theta\theta_{i,i}}} \quad , \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 . \quad (4.11)$$

Os valores de $\delta\theta_i$, i de 1 a 3, foram calculados nos dois testes e estão registrados nas Figuras 4.13 e 4.14.

Para o primeiro satélite, localiza-se de imediato a componente que perdeu a observabilidade no período de colinearidade das observações (ver Figura 4.13). Trata-se justamente da direção que aponta para a Terra (eixo \bar{z}) no referido período da simulação. É interessante observar que a precisão na estimativa dos ângulos de apontamento do satélite para a vertical local, $\delta\theta_1$ e $\delta\theta_2$, praticamente não foi afetada, o que é o mais importante para este tipo de satélite. A precisão final do teste foi da ordem de quinze a trinta minutos de arco nos três eixos.

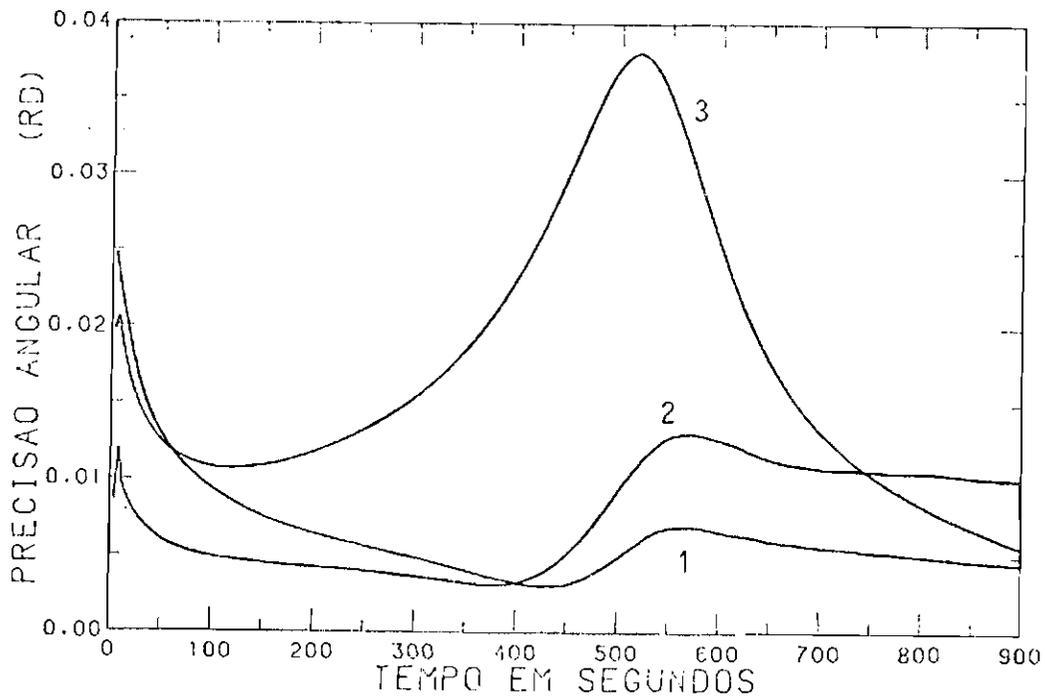


Fig. 4.13 - $\delta\theta_1$ (1), $\delta\theta_2$ (2) e $\delta\theta_3$ (3): 1º teste.

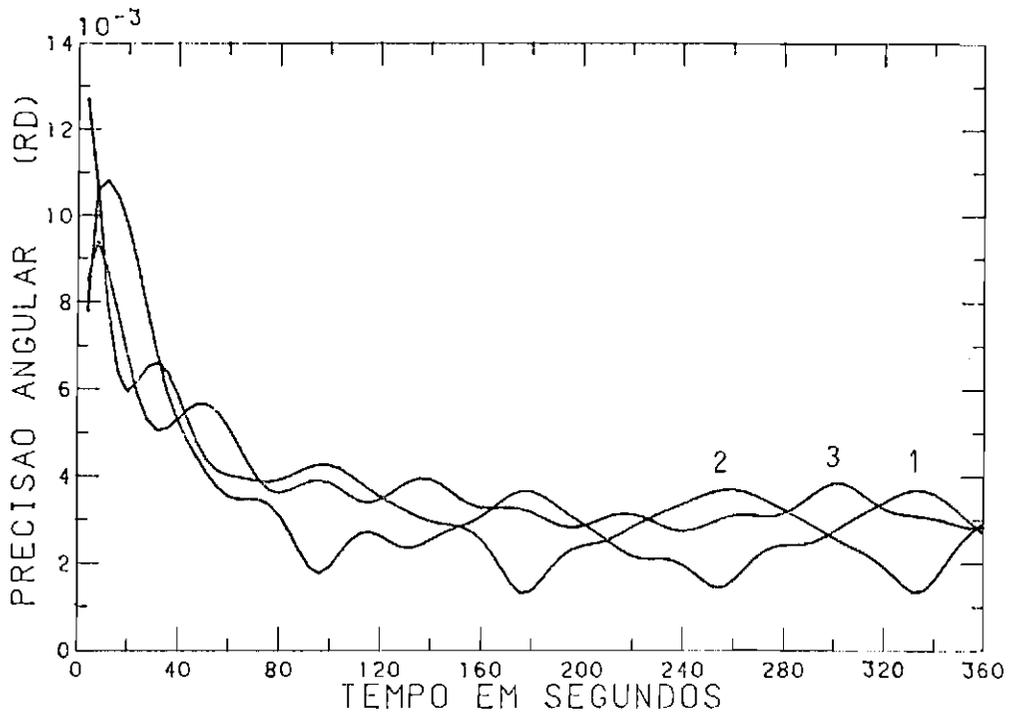


Fig. 4.14 - $\delta\theta_1$ (1), $\delta\theta_2$ (2) e $\delta\theta_3$ (3): 2º teste.

No segundo satélite testado, o TD-1A, a precisão manteve-se em torno de sete a onze minutos de arco nos três eixos (ver Figura 4.14). Novamente verifica-se a melhor precisão alcançada no segundo teste em comparação com o primeiro devido à diferença no nível de informação das observações.

Em ambos os casos a precisão do estimador foi boa, considerando-se a precisão dos sensores e as condições de cada teste.

CAPÍTULO 5

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

5.1 - SITUAÇÃO

Os métodos de determinação de atitude, conforme mencionado na introdução, podem ser determinísticos ou estatísticos. Os do primeiro tipo utilizam apenas um número mínimo suficiente de observações para calcular a atitude. O método da intersecção dos cones para determinação em um eixo e o método algébrico (descrito na Seção 3.2.2) para determinação nos três eixos são exemplos de métodos determinísticos. Os métodos do segundo tipo dividem-se entre os que utilizam informações sobre a dinâmica e os que não as utilizam.

Um sistema de determinação de atitude é o que resulta da aplicação de um método às características peculiares de um satélite e de seus objetivos. Neste processo, algumas particularizações tornam-se convenientes em função de vários fatores. Assim, se o satélite é estabilizado por rotação, o interesse se restringe a determinar a orientação do eixo de rotação. Se a precisão requerida for baixa, o modelo dinâmico pode desprezar a precessão e admitir uma orientação constante do eixo de rotação. Se o nível de informação das observações for alto, a dinâmica pode se tornar desnecessária. Já nos casos em que uma dinâmica sofisticada é indispensável, a altitude da órbita estabelece quais dos torques ambientais devem ser considerados na modelagem dinâmica (ver Figura 2.4). Se o objetivo é a análise de dados obtidos pela carga útil, o processamento não sofre restrições de tempo, enquanto no caso em que o objetivo é o controle da atitude, a necessidade é de processamento em tempo real. Se algum sensor exigir calibrações a bordo isto deve ser considerado. O tipo de pré-processamento, validação e alinhamento utilizados devem ser especificados e assim por diante, dando vazão a um sem número de soluções de engenharia. Em resumo, um sistema de determinação de atitude é mais do que um método. É tudo que está li

gado à aplicação deste a um satélite, incluindo fatores de interface com o controle, a predição e o pré-processamento.

Com o intuito de situar este trabalho em relação aos que já existem na área, são relacionados alguns sistemas e métodos de determinação de atitude e suas características principais na Tabela 5.1. Os dois últimos itens da tabela referem-se ao teste de aplicação do procedimento. É evidente que a precisão obtida em cada caso está vinculada à precisão dos sensores utilizados e foi sempre suficiente para os objetivos das referidas aplicações (de acordo com as especificações de cada missão).

5.2 - CRÍTICA

O presente trabalho não visa propor um sistema completo de determinação de atitude, mas apresenta e testa preliminarmente um procedimento básico que antecede o desenvolvimento deste. Dentro desta concepção, a aplicação escolhida foi bastante crítica - manobras (aquisição), tempo real - onde a influência dos torques externos passivos é notável e o procedimento não pode ser excessivamente complexo. Com isto, as demais aplicações, que são mais simples, podem ser facilmente equacionadas.

Dentre os aspectos a serem considerados no desenvolvimento de um sistema completo de determinação de atitude, que não foram abordados neste trabalho, destacam-se os seguintes:

- Estimação de parâmetros do satélite e dos sensores, caso necessário, em especial, os momentos principais de inércia, que podem variar durante a vida útil do satélite, desalinhamentos nos sensores e atrasos em suas medidas.
- Calibração dos sensores a bordo, muito comuns em sensores do tipo magnético.

- Janela de observações com soluções de contingência para períodos de ausência de observações (como no caso do período noturno da órbita para um sensor solar), isto é, um estudo que preveja períodos de interrupção nas observações e formule alguma solução alternativa, caso seja necessário.
- Pré-processamento de dados (validação, compactação, suavização, etc.).
- Simulação, a mais completa possível: do satélite, da transmissão de dados, dos sensores, dos corques, etc.
- Testes de simulação que permitam uma avaliação completa do desempenho do sistema. Incluem-se nestes testes de exploração e de emergência. Nos do primeiro tipo, o sistema é testado exaustivamente com a simulação das mais diversas situações e valores de parâmetros, tais como colinearidade de observações; erros tendenciosos nos sensores; parâmetros do satélite e de sua órbita, diferentes dos nominais, etc., permitindo avaliar os limites de validade do sistema. Nos do segundo, são simulados imprevistos, como a falha de algum sensor ou falha de transmissão de dados, por exemplo.

Este tipo de abordagem, entretanto, só se justifica em uma aplicação específica e requer interação com o planejamento geral da missão.

Os testes feitos no presente trabalho são de caráter ilustrativo, procurando simular realisticamente condições normais do primeiro satélite da missão espacial brasileira e do satélite francês TD-1A que se assemelha ao segundo satélite da referida missão, trazendo, assim, alguma informação para a fase preliminar destes projetos.

TABELA 5.1

CARACTERÍSTICAS DE ALGUNS MÉTODOS E SISTEMAS DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

MÉTODO	ESTATÍSTICO			
Dinâmica	Torques	Torques	Semelhante à ção Dinâmica	Compensa ção Dinâmica
Autor	Oyharcabal (1976)	Pivovarov (1979)	Woerkom (1981)	Lopes (1982)(o pre sente trabalho)
Tipo de Es tabilização	Rotação	Rotação	Rotação	3 Eixos
Tipo de Fil tagem	Correção Diferencial	Mínimos Quadrados	Filtro Estendido de Kal man	Filtro Estendido de Kalman
Particulari dades	Torques: Aerodinâmico, Magnético e Histerese, e Gravitacional. Qua ternions.	Estima o Momento Mag nético do satélite	Estima: Desalinhamentos nas observações, J_x , J_y e J_z e torque residual externo.	Dosagem Adaptativa do ruído
Área de Aplicação	Tempo Posterior (Análise)	Altitudes acima de 700 Km		Manobras (Aquisi ção) Tempo Real
Sensores	Solar e Magnético	Solar e Magnético	de Estrelas	Solar e Horizonte
Satélite de Aplicação	CASTOR D5B - Explora ção Científica $h_n=300$ km; $h_a=1200$ km	ORECL - 2 $h_n=400$ km; $h_a=2000$ km	não especificado	1º satélite da Mis são Espacial Bras leira e TD-1A
Precisão Fornecida	5% em $ \omega $	3%	4%	1º satélite: 15' a 30' TD-1A: 7' a 11'

(continua)

Tabela 5.1 - Continuação.

MÉTODO	ESTATÍSTICO			
Dinâmica	Euler-Poinsot	Constante	Modelo Cinemático	Modelo Dinemático
Autor	Robert (1976)	Moek e Traas (1981)	Ellis e Creswell (1979)	Dougherty et alii (1981)
Tipo de Estabilização	Rotação	Rotação	3 eixos	3 eixos
Tipo de Filtragem	Mínimos quadrados ou Filtro de Kalman	Filtro de Kalman	Mínimos quadrados	Filtro de Kalman ou Suavização
Particularidades	Usa sensor de estrelas na fase de ocultação solar	Dosagem Adaptativa do ruído; Estima parâmetros dos sensores	Calibração a bordo dos interferômetros. Estima correções nos girômetros	Estima correções nos girômetros
Área de Aplicação	Tempo real (controle) Tempo posterior (análise)	Transferência de órbita (manobras)	Tempo real	Tempo Real (manobras) ou Tempo Posterior
Sensores	Solar, Magnético e de Estrelas	Solar e Horizonte	Interferômetros (GPS) Girômetros	de Estrelas e Girômetros
Satélite da Aplicação	D2B	METEOSAT-1 Meteorológico	Não especificado (simulação)	Não especificado (simulação)
Precisão Fornecida	Tempo Real: 20% de $ \omega $ Tempo Posterior: Dia: 4'; Noite: 40'	3' a 10'	1' a 36' 1 a 500/s. 10^{-6} (deriva)	1" a 10"

(continua)

Tabela 5.1 - Conclusão

MÉTODO	ESTATÍSTICO			DETERMINÍSTICO
Dinâmica	Não considerada	Não considerada	Não considerada	Não considerada
Autor	Bhat et alii (1981)	Titov e Shachukin (1978)	Shuster (1981)	Smith (1975)
Tipo de Estabilização	Rotação	3 eixos	3 eixos	Rotação ou 3 eixos
Tipo de Filtragem	Filtro de Kalman	Mínimos quadrados	Mínimos quadrados	Não utiliza
Particularidades		Pré-processa dados: validação e alisamento por filtro passa-baixa	Quaternions; calcula precisão independente da atitude	Métodos algébricos e métodos geométricos. (4 métodos)
Área de Aplicação	Tempo Real (controle) Tempo Posterior (análise)	Tempo Posterior	a bordo, em Terra, ou planejamento	
Sensores	Solar, Horizonte e Magnético	Solar e Magnético	2 ou mais (não especificados)	Solar, Horizonte, Magnético
Satélite da Aplicação	BHASKARA: h = 530 km Sensoriamento Remoto	SALYUT 4 Estação Orbital	MAGSAT Exploração Geomagnética	
Precisão Fornecida	Tempo Real: 20' Tempo Posterior: 30'	20'	Estatístico: Alta Determinístico: Baixa	

O uso de sensores do tipo solar e de horizonte, ambos com boa precisão, nos testes de simulação não impedem o uso de outros tipos de sensores. O uso de girômetros, que poderia introduzir mudanças qualitativas nos resultados por se tratar de observações de velocidade angular e não de atitude propriamente dita, não foi testado. Embora seja possível sua implementação neste trabalho, o uso de girômetros se aplica, em geral, a outro tipo de procedimento em que um modelo cinemático é utilizado para descrever o movimento de rotação do satélite. Isto é, as equações de Euler ($\dot{\omega} = f(\omega)$) não são utilizadas, e ω não é incluído no vetor de estado, sendo calculado diretamente pelas medidas dos girômetros, enquanto algum tipo de sensor de atitude é utilizado para corrigir os efeitos da deriva do instrumento (Ellis and Creswell, 1979; Dougherty et alii, 1981; Mayo, 1978). A propagação, neste caso, é feita integrando uma equação na forma:

$$\dot{q} = f(q, \omega)$$

onde q é o quaternion de atitude e ω a velocidade angular do satélite. Este tipo de procedimento é vantajoso para controle de bordo dada a simplicidade de cálculo envolvido e o período de tempo relativamente curto para o processamento.

5.3 - CONCLUSÕES

Nesta seção são estabelecidas algumas conclusões sobre o procedimento desenvolvido e sua aplicação a sistemas de determinação de atitude.

A análise do desempenho do estimador nos testes realizados mostra que o procedimento cumpre os objetivos propostos. Por meio de observações de sensores de atitude, a atitude do satélite e sua velocidade angular nos três eixos foram estimadas. O emprego da técnica de ruído adaptativo e a modelagem do torque externo total, resultante da ação das diversas fontes ambientais, pela técnica de compensação do modelo dinâmico, possibilitaram a convergência do estimador, com uma

modelagem dinâmica simplificada, mesmo em condições críticas como as do primeiro teste. O tempo de processamento em computador foi suficientemente pequeno de modo a satisfazer os requisitos para aplicação em tempo real. As características de precisão e rapidez de cálculo do procedimento o tornam particularmente atrativo para a fase inicial de controle (aquisição de atitude), quando ainda não é possível fazer nenhuma simplificação na dinâmica em função da estabilização do satélite, e é necessário um procedimento em tempo real que forneça estimativas precisas. Após a estabilização, um procedimento com dinâmica mais simples visando maior rapidez torna-se preferível. Na análise de dados, em tempo posterior, um procedimento mais sofisticado é mais adequado por possibilitar melhor precisão.

A precisão das estimativas depende da precisão dos sensores e da disposição geométrica das referências por eles observadas. De preferência estas referências devem estar dispostas ortogonalmente em relação ao satélite, pois quanto mais se aproximam da situação colinear pior é a precisão obtida, desperdiçando-se assim o potencial de informação dos sensores.

Com relação aos satélites simulados, conclui-se que, no primeiro caso, o uso de sensores do tipo solar e de horizonte é, em princípio, viável posto que, mesmo em períodos de colinearidades nas observações, os ângulos de apontamento permanecem estimados com uma precisão compatível com os requisitos da missão. Evidentemente existem outros fatores importantes a serem considerados na escolha dos tipos de sensores neste satélite, como por exemplo, o volume, peso, potência consumida e custo, além de outros ligados à política tecnológica do País.

No caso do satélite TD-1A, sua órbita heliossíncrona com passagem pelo equador às seis e às dezoito horas locais minimiza o período noturno da órbita e faz com que o ângulo entre as observações esteja sempre próximo ao ideal (90°). Isto favorece bastante a estimação precisa da atitude nos três eixos, essencial em satélites de sensoramento remoto. Sob o ponto de vista de estimação de atitude, portanto,

este é um ponto a ser considerado no segundo satélite da missão espacial brasileira. Uma órbita heliossíncrona com passagem pelo equador ao meio dia e à meia noite, horas locais, conforme a especificação preliminar deste satélite, teria o inconveniente de meio período orbital ser noturno (ausência de observação solar) e contaria sempre com um trecho de colinearidade de observações no período diurno de cada órbita. Isto exigiria o uso de sensores adicionais do tipo magnetômetro, girômetro ou sensor de estrelas, sob pena de não se conseguir estimar precisamente e, portanto, controlar precisamente a atitude do satélite nos seus três eixos durante os referidos trechos. Novamente deve ser trisado que esta conclusão se refere à estimação de atitude e outros fatores devem ser considerados, num processo iterativo, no projeto do satélite.

5.4 - SUGESTÕES

O próprio objetivo deste trabalho sugere a direção de sua continuidade: o desenvolvimento (anteprojeto) de sistemas completos de determinação de atitude. Isto significa particularizar o procedimento ora proposto para uma determinada aplicação, interagindo com a escolha dos sensores, a configuração destes no satélite, o pré-processamento de dados e demais especificações do satélite, com a devida carga de testes do sistema.

A particularização do procedimento deve considerar o tipo de processamento (tempo real ou posterior), o tipo de estabilização de atitude (rotação; nos três eixos; em dois eixos por gradiente de gravidade; etc.) e a fase da aplicação (manobras, operação ou análise de dados). Em especial, a dinâmica de atitude pode ser incrementada no caso de análise em tempo posterior, ou simplificada no caso de estabilização por rotação, em tempo real ou quase real. Os torques ativos de controle quer por volantes de inércia quer por jatos de gás devem ser incluídos na dinâmica para se testar o funcionamento conjunto determinação-controle de atitude.

Os testes e a simulação visam especificar o desempenho do sistema, conforme referido na Seção 5.2 e devem influir na especificação do tipo e qualidade (precisão) dos sensores e na posição destes no satélite, em sucessivas reiteraões. Outros fatores ligados à transmissão de dados, como frequência de informações e nível de ruído destas, e especificações do satélite (momentos de inércia, forma, etc.) devem ser considerados até se chegar à configuração final.

Outra sugestão para futuras pesquisas seria analisar a influência de inclusão de novas observações. Estas poderiam ser de atitude, fornecidas por sensor de estrelas, por exemplo, ou poderiam ser de velocidade angular, no caso de girômetros. Poderia ser utilizada ainda a informação de que o módulo do quaternion de atitude é teoricamente unitário, como uma nova observação a ser processada, tendo a seguinte forma:

$$y = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + v$$

onde y tem sempre valor unitário e v é um ruído.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELETSKII, V.V. *Motion of an artificial satellite about its center of mass*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1966. (Mechanics of Space Flight).
- BHAT, R.S.; RAJENDRA PRASAD, P.; RAMANI, P.; PADMANABHAN, P.; HARÉNDRA NATH, K. Orbit and attitude determination for Bhaskara. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACECRAFT FLIGHT DYNAMICS, Darmstad, May. 17-23, 1981. *Proceedings*. Darmstad, European Space Agency, 1981, p. 325-332.
- CARRARA, V. *Modelagem das forças e torques atuantes em satélites*. Dissertação de mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982 (INPE-2454-TDL/094).
- DOUGHERTY, H.J.; PELKA, E.J.; RODDEN, J.J. Strapdown Attitude reference systems: preliminary design and performance analysis. *Journal of Guidance and Control*, 4(4):390-397, Jul/Ago. 1981.
- ELLIS, J.F.; CRESWELL, G.A. Interferometric attitude determination with the Global Positioning System. *Journal of Guidance and Control*, 2(6):522-527, Nov./Dec. 1979.
- GELB, A.; KASPER JR., J.F.; NASH JR., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND JR., A.A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MIT, 1974.
- INGRAM, D.S. *Orbit determination in the presence of unmodeled accelerations*. Austin, TX, University of Texas at Austin, 1971. (Applied Mechanics Research Laboratory Report 1022).
- JAZWINSKI, A.H. Adaptive filtering. *Automatica*, (5):475-485, 1969.
- *Stochastic process and filtering theory*. New York, Academic, 1970. (Mathematics in Science and Engineering, 64).

- KUGA, H.K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicadas a satélites a baixa altitude*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, Fev. 1982. (INPE-2316-TDL/079).
- MAYO, R.A. Relatif quaternion state transition relation. *Journal of Guidance and Control*, 2(1):44-48, 1978.
- MEDEIROS, V.M.; KUGA, H.K: *Algoritmo de baixa precisão para determinação da posição dos dez corpos mais importantes do sistema solar*. São José dos Campos, INPE, 1980. (INPE-1954-RPE/168).
- MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. New York, Mc. Graw-Hill, 1970. (Advanced Engineering).
- MOEK, G.; TRAAS, C.R. Estimates of spacecraft attitude and sensor parameters using adaptive filtering: Meteosat-I transfer orbit application. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACECRAFT FLIGHT DYNAMICS. *Proceedings*. Darmstad, European Space Agency, 1981, p. 117-131.
- MORO, J. *Simulação de atitude e de observações de um satélite artificial*. São José dos Campos, INPE. (No prelo).
- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Determinação de órbitas de satélites artificiais através de um estimador, na presença de acelerações não-modeladas, usando a transformação KS*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1980a. (INPE - 1998 - TDL/040).
- *Simulação da órbita e de observações de um satélite artificial ao redor da Terra*. São José dos Campos, INPE, Dez. 1980b. (INPE -1955-RPE/269).
- OYHARCABAL, G. *Les traitements de restitution d'attitude de Castor (D5B)*. Toulouse, France, Centre Spatial de Toulouse, 1976. (CNES -1976-nº44).

- PIVOVAROV, M.L. Determination of artificial Earth satellite attitude under the influence of gravitational and magnetic torques. *Cosmic Research*, 17(1):133-135, July 1979.
- PLOTNIKOV, P.K.; CHELNOKOV, YU.N. Comparative error analysis of algorithms for determining vehicle attitude in Rodriguez-Hamilton parameters and direction cosines. *Cosmic Research*, 17(3):308-313, Nov. 1979.
- RIOS NETO, A. *The estimation of the state and the unmodeled atmospheric drag for near Earth satellites*. Ph.D. Dissertation. Austin, TX, The University of Texas at Austin, 1973.
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Estimação adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais*. São José dos Campos, INPE, Abr. 1982. (INPE.2385-RPI/069).
- ROBERT, J.M. *Les traitements de restitution d'attitude du satellite D2B*. Toulouse, France, Centre Spatial de Toulouse, Jan. 1976. (Nº 76/287 DEXO/MT/ML).
- SHUSTER, M.D.; OH, S.D. Three axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control*, 4(1):70-77, Jan./Fev. 1981.
- SMITH, G.A. *Four methods of attitude determination*. NASA, Washington, D.C. Aug. 1975. (NASA TR R-445).
- SORENSEN, H.W. *Kalman filtering techniques*. In: ADVANCES IN CONTROL SYSTEMS; theory and applications. New York, Academic, 1966. V. 3, p. 219-292.
- SOUZA, M.L.O. *Estudo e desenvolvimento de um sistema de controle de atitude em três eixos para satélites artificiais usando atuadores pneumáticos a gás frio e volantes à reação*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, Fev. 1981. (INPE-2000-TDL/042).

- STUCK, B.W. *Space satellite dynamics with applications to sunlight pressure attitude control*. Ph.D. Dissertation Massachusetts, MA, MIT, Jun. 1972.
- TITOV, A.M.; SHCHUKIN, V.P. Determination the orientation of an artificial satellite in a two-vector system of measurements. *Cosmic Research*, 16(1):1-6, July 1978.
- WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. London, D. Reidel, 1978. (Astrophysics and Space Science Library).
- WHITTAKER, E. *Analytical dynamics of particles and rigid bodies*. London, Cambridge University, 1965.
- WOERKOM, P.Th.L.M.; SONNENSCHNEIN, F.J.; MOEK, G. The use of ESA starmapper measurements for spacecraft attitude estimation: estimator design rationale and results. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACECRAFT FLIGHT DYNAMICS. *Proceedings*. Darmstad, European Space Agency, 1981, p. 361-372.

APÊNDICE A

QUATERNIONS

O teorema de Euler afirma a existência e unicidade de um eixo (eixo de Euler) associado a cada par de referencias quaisquer, tal que uma rotação em torno do referido eixo leve um dos referenciais a ter a orientação do outro. Os co-senos diretores deste eixo ($\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$) e o ângulo de rotação mencionado (θ) definem os parâmetros simétricos de Euler, que assim medem a atitude de um referencial (e portanto de um sólido com o qual este referencial seja solidário) em relação a outro referencial. Os parâmetros simétricos de Euler são dados por:

$$q_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha , \quad (\text{A.1})$$

$$q_2 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \beta , \quad (\text{A.2})$$

$$q_3 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma , \quad (\text{A.3})$$

$$q_4 = \cos \frac{\theta}{2} .$$

Utilizando a álgebra de quaternions, verifica-se que:

$$\underline{U}_S = \underline{q}^* \otimes \underline{U}_I \otimes \underline{q} , \quad (\text{A.5})$$

onde \underline{U}_S é o quaternion com parte escalar nula e parte vetorial com as componentes de um vetor genérico U no sistema S do sólido e da mesma forma \underline{U}_I , no sistema I , por exemplo, inercial. O desenvolvimento da Equação A.5 foi feito no Apêndice C e seu resultado pode ser posto na forma matricial:

$$U_S = A(q) U_I \quad (\text{A.6})$$

onde

$$A(q) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}. \quad (A.7)$$

Substituindo A.1, A.2, A.3 e A.4 em A.7, obtêm-se:

$$A(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta + \cos^2\alpha(1 - \cos\theta) & \cos\alpha \cos\gamma(1 - \cos\theta) - \cos\beta \operatorname{sen}\theta & \\ \cos\alpha \cos\gamma(1 - \cos\theta) - \cos\beta \operatorname{sen}\theta & & \\ \cos\alpha \cos\beta(1 - \cos\theta) - \cos\gamma \operatorname{sen}\theta & \cos\theta + \cos^2\beta(1 - \cos\theta) & \\ \cos\beta \cos\gamma(1 - \cos\theta) + \cos\alpha \operatorname{sen}\theta & & \\ \cos\alpha \cos\gamma(1 - \cos\theta) + \cos\beta \operatorname{sen}\theta & \cos\beta \cos\gamma(1 - \cos\theta) - \cos\alpha \operatorname{sen}\theta & \\ \cos\theta + \cos^2\gamma(1 - \cos\theta) & & \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

que é a forma conhecida da matriz de rotação em função dos co-senos diretores do eixo de Euler e do ângulo de rotação, verificando-se assim a validade da Equação A.5 (Wertz, 1978).

Para descrever o movimento de um sólido segundo uma certa dinâmica, é preciso ter as variações temporais dos elementos que medem a atitude do sólido, no caso, q_1 , q_2 , q_3 , e q_4 . Novamente tais valores podem ser obtidos por meio da álgebra de quaternions. Para tanto define-se:

$$\begin{aligned} \underline{\delta q} &\triangleq \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} (\cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k}) + \cos \frac{d\theta}{2} = \\ &= \frac{d\theta}{2} (\cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k}) + 1, \end{aligned} \quad (A.9)$$

que mede a atitude do referido sólido no instante $t + dt$ em relação a si próprio no instante t . Ou seja, $\underline{\delta}_q$ é tal que:

$$\underline{U}_I(t) = \underline{\delta}_q^T \otimes \underline{U}_I(t + dt) \otimes \underline{\delta}_q, \quad (\text{A.10})$$

para o caso de U ser fixo ao sólido. Como

$$\begin{aligned} \underline{U}_S &= \underline{q}^T(t + dt) \otimes \underline{U}_I(t + dt) \otimes \underline{q}(t + dt) = \\ &= \underline{q}^T(t) \otimes \underline{U}_I(t) \otimes \underline{q}(t), \end{aligned}$$

utilizando a Equação A.10 obtêm-se:

$$\begin{aligned} \underline{U}_S &= \underline{q}^T(t + dt) \otimes \underline{U}_I(t + dt) \otimes \underline{q}(t + dt) = \\ &= \underline{q}^T(t) \otimes \underline{\delta}_q^T \otimes \underline{U}_I(t + dt) \otimes \underline{\delta}_q \otimes \underline{q}(t). \end{aligned}$$

Como $\underline{U}_I(t + dt)$ é arbitrário, conclui-se que:

$$\underline{q}(t + dt) = \underline{\delta}_q \otimes \underline{q}(t). \quad (\text{A.11})$$

Por outro lado, a rotação que leva o sólido de sua atitude no instante t para sua atitude em $t + dt$ se dá em torno do vetor velocidade angular instantânea do sólido, ω ; e o ângulo de rotação é dado por:

$$d\theta = |\omega| \cdot dt.$$

Por tanto, a Equação A.9 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{\delta}_q = |\omega| \cdot \frac{dt}{2} \frac{\omega_I}{|\omega|} + 1 = \omega_I \cdot \frac{dt}{2} + 1. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando as Equações A.11 e A.12 calcula-se:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{q(t + dt) - q(t)}{dt} = \frac{\delta q \otimes q(t) - q(t)}{dt} = \frac{(\delta q - 1) \otimes q(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\omega_I} \otimes Q(t) \quad , \quad (A.13)\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2} \underline{q}(t) \otimes \underline{\omega_S}(t) \quad , \quad (A.14)$$

lembrando que

$$\underline{\omega_S} = q^T \otimes \underline{\omega_I} \otimes q \quad ,$$

e que

$$\underline{q}^T \otimes \underline{q} = \underline{q} \otimes \underline{q}^T = 1 \quad .$$

APÊNDICE B

TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO: DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO DAS EQUAÇÕES DE PSEUDO-OBSERVAÇÕES

A hipótese fundamental da técnica de ruído adaptativo desenvolvida por Kuga (1981) é semelhante à feita por Jazwinski (1969), a de maximizar a probabilidade de ocorrência do resíduo verdadeiro, r_v , definido por:

$$r_v \triangleq h(x) - h(\bar{x}) \quad . \quad (B.1)$$

Admitindo-se que este tenha distribuição gaussiana, esta hipótese leva a:

$$E\{r_v^2\} = r_v^2 \quad . \quad (B.2)$$

Da Equação B.1 segue que:

$$\begin{aligned} r_{v_{K+1}} &\equiv H_{K+1} \cdot (x_{K+1} - \bar{x}_{K+1}) = \\ &= H_{K+1} [\phi_K(x_K - \bar{x}_K) + \Gamma_K \cdot W_K] \quad , \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\begin{aligned} E\{r_{v_{K+1}}^2\} &= H_{K+1j} \cdot \phi_K \cdot P_K \cdot \phi_K^T \cdot H_{K+1j}^T + \\ &+ H_{K+1j} \cdot \Gamma_K \cdot Q_K \cdot \Gamma_K^T \cdot H_{K+1j}^T \quad . \end{aligned} \quad (B.4)$$

Por outro lado, dado que

$$r_{K+1} \equiv y_{K+1} - h(\bar{x}_{K+1}) \quad , \quad (B.5)$$

segue que:

$$r_{v_{K+1}} = r_{K+1} + v_{K+1} \quad , \quad (B.6)$$

$$r_{v_{K+1}^2} = r_{K+1}^2 + 2r_{K+1} \cdot v_{K+1} + v_{K+1}^2 \quad . \quad (B.7)$$

Definindo-se

$$\eta_{Kj} \triangleq -v_{K+1}^2 - 2r_{K+1} \cdot v_{K+1} + R_{K+1,j} \quad , \quad (B.8)$$

para efeito de simplicidade admitido gaussiano, com

$$E\{\eta_{Kj}\} = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} E\{\eta_{Kj}^2\} &= E\{v_{K+1}^4\} + 4r_{K+1}^2 E\{v_{K+1}^2\} - 2R_{K+1,j} E\{v_{K+1}^2\} + \\ &+ R_{K+1,j}^2 = 4r_{K+1}^2 R_{K+1,j} + 2R_{K+1,j}^2 \quad , \end{aligned}$$

e substituindo-se na Equação B.7 segue que:

$$r_{v_{K+1}^2} = r_{K+1}^2 - \eta_{Kj} + R_{K+1,j} \quad . \quad (B.9)$$

Finalmente, substituindo-se as Equações B.4 e B.9 em B.2 segue:

$$\begin{aligned} r_{K+1}^2 - \eta_{Kj} + R_{K+1,j} &= H_{K+1} \phi_K P_K \phi_K^T H_{K+1}^T + \\ &+ H_{K+1} \Gamma_K Q_K \Gamma_K^T H_{K+1}^T \quad , \\ Y_{PKj} \triangleq r_{K+1}^2 + R_{K+1,j} - H_{K+1} \phi_K P_K \phi_K^T H_{K+1}^T &= \\ &= H_{K+1} \Gamma_K Q_K \Gamma_K^T H_{K+1}^T + \eta_{Kj} = H_{PKj} \sigma_K + \eta_{Kj} \quad , \end{aligned} \quad (B.10)$$

onde σ é o vetor formado pelas componentes da diagonal de Q e H_{PKj} é o vetor cujo elemento típico é:

$$H_{PK_{i,k}} = \left\{ \sum_{\ell=1}^n H_{K+1i,\ell} r_{K_{\ell,j}} \right\}^2 .$$

A Equação B.10 é chamada equação da pseudo-observação Y_p (Rios Neto e Luga, 1982).

APÊNDICE C

CÁLCULO DA FUNÇÃO $h(Z)$ E DE SEU GRADIENTE

O vetor de observações Y está relacionado com o estado Z apenas através de seus quatro primeiros elementos, identificados como as componentes do quaternion q , como se segue:

$$Y = h(q) + v \quad , \quad (C.1)$$

onde v representa o erro na observação. Particionando Y , v e o vetor de referência para as observações, A , conforme indicado:

$$Y^T = \{Y_1^T : Y_2^T\} \quad , \quad (C.2)$$

$$v^T = \{v_1^T : v_2^T\} \quad , \quad (C.3)$$

$$A^T = \{\bar{A}_1^T : \bar{A}_2^T\} \quad , \quad (C.4)$$

onde Y_1 e \bar{A}_1 são as coordenadas do vetor observado pelo primeiro sensor respectivamente nos referenciais do satélite e inercial, o mesmo acontecendo com Y_2 e \bar{A}_2 , com respeito ao segundo sensor, pode-se escrever, aplicando a Relação 2.2:

$$\underline{Y_1} - \underline{v_1} = \underline{q^T} \otimes \underline{\bar{A}_1} \otimes \underline{q} \quad , \quad (C.5)$$

$$\underline{Y_2} - \underline{v_2} = \underline{q^T} \otimes \underline{\bar{A}_2} \otimes \underline{q} \quad . \quad (C.6)$$

O desenvolvimento da Expressão C.5 é dado a seguir.

$$\begin{aligned}
 \underline{Y_1} - \underline{v_1} &= (q_4 - iq_1 - jq_2 - kq_3) \cdot (i\bar{A}_{1_1} + j\bar{A}_{1_2} + k\bar{A}_{1_3}) \cdot \underline{q} = \\
 &= \{(\bar{A}_{1_1} \cdot q_1 + \bar{A}_{1_2} \cdot q_2 + \bar{A}_{1_3} \cdot q_3) + j(\bar{A}_{1_1} \cdot q_4 - \bar{A}_{1_3} \cdot q_2 + \\
 &+ \bar{A}_{1_2} \cdot q_3) + j(\bar{A}_{1_2} \cdot q_4 + \bar{A}_{1_1} \cdot q_1 - \bar{A}_{1_1} \cdot q_3) + \\
 &+ k(\bar{A}_{1_3} \cdot q_4 + \bar{A}_{1_2} \cdot q_1 + \bar{A}_{1_1} \cdot q_2)\} \cdot (q_4 + iq_1 + \\
 &+ jq_2 + kq_3) = i\{(\bar{A}_{1_1} \cdot q_1 + \bar{A}_{1_2} \cdot q_2 + \bar{A}_{1_3} \cdot q_3) \cdot q_1 - \\
 &+ (\bar{A}_{1_3} \cdot q_4 - \bar{A}_{1_2} \cdot q_1 + \bar{A}_{1_1} \cdot q_2) \cdot q_2 + (\bar{A}_{1_2} \cdot q_4 + \\
 &+ \bar{A}_{1_3} \cdot q_1 - \bar{A}_{1_1} \cdot q_3) \cdot q_3 + (\bar{A}_{1_1} \cdot q_4 - \bar{A}_{1_3} \cdot q_2 + \\
 &+ \bar{A}_{1_2} \cdot q_3) \cdot q_4 + j\{(\bar{A}_{1_3} \cdot q_4 - \bar{A}_{1_2} \cdot q_1 + \bar{A}_{1_1} \cdot q_2) \cdot q_1 + \\
 &+ (\bar{A}_{1_1} \cdot q_1 + \bar{A}_{1_2} \cdot q_2 + \bar{A}_{1_3} \cdot q_3) \cdot q_2 - (\bar{A}_{1_1} \cdot q_4 - \\
 &+ \bar{A}_{1_3} \cdot q_2 + \bar{A}_{1_2} \cdot q_3) \cdot q_3 + (\bar{A}_{1_2} \cdot q_4 + \bar{A}_{1_3} \cdot q_1 - \\
 &+ \bar{A}_{1_1} \cdot q_3) \cdot q_4 + k\{(\bar{A}_{1_1} \cdot q_4 + \bar{A}_{1_3} \cdot q_1 - \bar{A}_{1_1} \cdot q_3) \cdot q_1 + \\
 &+ (\bar{A}_{1_1} \cdot q_4 - \bar{A}_{1_3} \cdot q_2 + \bar{A}_{1_2} \cdot q_3) \cdot q_2 + (\bar{A}_{1_1} \cdot q_1 + \\
 &+ \bar{A}_{1_2} \cdot q_2 + \bar{A}_{1_3} \cdot q_3) \cdot q_3 + (\bar{A}_{1_3} \cdot q_4 - \bar{A}_{1_2} \cdot q_1 + \\
 &+ \bar{A}_{1_1} \cdot q_2) \cdot q_4\} .
 \end{aligned}$$

Daí conclui-se que:

$$\begin{aligned}
 h_1 \equiv Y_{1_1} - v_{1_1} &= \bar{A}_{1_1}(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) + 2\bar{A}_{1_2}(q_1 \cdot q_2 + q_3 \cdot q_4) + \\
 &+ 2\bar{A}_{1_3}(q_1 \cdot q_3 - q_2 \cdot q_4) ,
 \end{aligned}$$

$$h_2 \equiv Y_{1_2} - v_{1_2} = \bar{A}_{1_2}(-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) + 2\bar{A}_{1_1}(q_1 \cdot q_2 - q_3 \cdot q_4) + \\ + 2A_{1_3}(q_1 \cdot q_4 + q_2 \cdot q_3) \quad ,$$

$$h_3 \equiv Y_{1_3} - v_{1_3} = \bar{A}_{1_3}(-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) + 2\bar{A}_{1_1}(q_1 \cdot q_3 + q_2 \cdot q_4) + \\ + 2\bar{A}_{1_2}(-q_1 \cdot q_4 + q_2 \cdot q_3) \quad ,$$

A função $h_K(Z_K)$ pode finalmente ser obtida:

$$h_1(Z) = A_1(Z_4^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2) + 2A_2(Z_1 \cdot Z_2 + Z_3 \cdot Z_4) + \\ + 2A_3(Z_1 \cdot Z_3 - Z_2 \cdot Z_4) \quad ,$$

$$h_2(Z) = A_2(Z_4^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2) + 2A_1(Z_1 \cdot Z_2 - Z_3 \cdot Z_4) + \\ + 2A_3(Z_4 \cdot Z_1 + Z_2 \cdot Z_3) \quad ,$$

$$h_3(Z) = A_3(Z_4^2 - Z_1^2 - Z_2^2 + Z_3^2) + 2A_1(Z_1 \cdot Z_3 + Z_2 \cdot Z_4) + \\ + 2A_2(-Z_4 \cdot Z_1 + Z_2 \cdot Z_3) \quad .$$

Semelhantemente, o desenvolvimento da Equação C.6 conduz a:

$$h_4(Z) = A_4(Z_4^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2) + 2A_5(Z_1 \cdot Z_2 + Z_4 \cdot Z_3) + \\ + 2A_6(Z_1 \cdot Z_3 - Z_4 \cdot Z_2) \quad ,$$

$$h_5(Z) = A_5(Z_4^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2) + 2A_4(Z_1 \cdot Z_2 - Z_3 \cdot Z_4) + \\ + 2A_6(Z_4 \cdot Z_1 + Z_2 \cdot Z_3) \quad ,$$

$$h_6(Z) = A_6(Z_4^2 - Z_1^2 - Z_2^2 + Z_3^2) + 2A_4(Z_1.Z_3 + Z_2.Z_4) + \\ + 2A_5(-Z_4.Z_1 + Z_2.Z_3) \quad ,$$

tudo referente ao instante t_K . Os elementos do gradiente de $h_K(Z_K)$, de finidos por:

$$H_{m,n}(Z) \triangleq \frac{\partial h_m(Z)}{\partial Z_m} \quad ,$$

no instante t_K , são dados por:

$$H_{1,1} = 2(A_1.Z_1 + A_2.Z_2 + A_3.Z_3) \quad ,$$

$$H_{1,2} = 2(-A_1.Z_2 + A_2.Z_1 - A_3.Z_4) \quad ,$$

$$H_{1,3} = 2(-A_1.Z_3 + A_2.Z_4 + A_3.Z_1) \quad ,$$

$$H_{1,4} = 2(A_1.Z_4 + A_2.Z_3 - A_3.Z_2) \quad ,$$

$$H_{2,1} = 2(-A_2.Z_1 + A_1.Z_2 + A_3.Z_4) \quad ,$$

$$H_{2,2} = 2(A_2.Z_2 + A_1.Z_1 + A_3.Z_3) \quad ,$$

$$H_{2,3} = 2(-A_2.Z_3 - A_1.Z_4 + A_3.Z_2) \quad ,$$

$$H_{2,4} = 2(A_2.Z_4 - A_1.Z_3 + A_3.Z_1) \quad ,$$

$$H_{3,1} = 2(-A_3.Z_1 + A_1.Z_3 - A_2.Z_4) \quad ,$$

$$H_{3,2} = 2(-A_3.Z_2 + A_1.Z_4 + A_2.Z_3) \quad ,$$

$$H_{3,3} = 2(A_3.Z_3 + A_1.Z_1 + A_2.Z_2) \quad ,$$

$$H_{3,4} = 2(A_3.Z_4 + A_1.Z_2 - A_2.Z_1) \quad ,$$

$$H_{4,1} = 2(A_4 \cdot Z_1 + A_5 \cdot Z_2 + A_6 \cdot Z_3) \quad ,$$

$$H_{4,2} = 2(-A_4 \cdot Z_2 + A_5 \cdot Z_1 - A_6 \cdot Z_4) \quad ,$$

$$H_{4,3} = 2(-A_4 \cdot Z_3 + A_5 \cdot Z_4 + A_6 \cdot Z_1) \quad ,$$

$$H_{4,4} = 2(A_4 \cdot Z_4 + A_5 \cdot Z_3 - A_6 \cdot Z_2) \quad ,$$

$$H_{5,1} = 2(-A_5 \cdot Z_1 + A_4 \cdot Z_2 + A_6 \cdot Z_4) \quad ,$$

$$H_{5,2} = 2(A_5 \cdot Z_2 + A_4 \cdot Z_1 + A_6 \cdot Z_3) \quad ,$$

$$H_{5,3} = 2(-A_5 \cdot Z_3 - A_4 \cdot Z_4 + A_6 \cdot Z_2) \quad ,$$

$$H_{5,4} = 2(A_5 \cdot Z_4 - A_4 \cdot Z_3 + A_6 \cdot Z_1) \quad ,$$

$$H_{6,1} = 2(-A_6 \cdot Z_1 + A_4 \cdot Z_3 - A_5 \cdot Z_4) \quad ,$$

$$H_{6,2} = 2(-A_6 \cdot Z_2 + A_4 \cdot Z_4 + A_5 \cdot Z_3) \quad ,$$

$$H_{6,3} = 2(A_6 \cdot Z_3 + A_4 \cdot Z_1 + A_5 \cdot Z_2) \quad ,$$

$$H_{6,4} = 2(A_6 \cdot Z_4 + A_4 \cdot Z_2 - A_5 \cdot Z_1) \quad .$$

(C.7)

Os demais elementos são nulos.

APÊNDICE D

CÁLCULO DO GRADIENTE DE $f(Z)$

Seja a função matricial:

$$F(Z) \triangleq \frac{\partial f(Z)}{\partial Z},$$

onde $f(Z)$ é dada pelas Equação 3.50. Segue que:

$$F(Z) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & 0_{4,3} \\ 0_{3,4} & F_3 & I_3 \\ 0_{3,4} & 0_{3,3} & -b \end{bmatrix},$$

onde $0_{m,n}$ é a matriz nula ($m \times n$); I_3 é a matriz identidade (3×3); e as matrizes F_n são dadas por:

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & Z_7 & -Z_6 & Z_5 \\ -Z_7 & 0 & Z_5 & Z_6 \\ Z_6 & -Z_5 & 0 & Z_7 \\ -Z_5 & -Z_6 & -Z_7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_4 & -Z_3 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 & -Z_1 \\ -Z_2 & Z_1 & Z_4 \\ -Z_1 & -Z_2 & -Z_3 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 Z_7 & \lambda_1 Z_6 \\ \lambda_2 Z_7 & 0 & \lambda_2 Z_5 \\ \lambda_3 Z_6 & \lambda_3 Z_5 & 0 \end{bmatrix} .$$