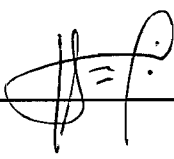
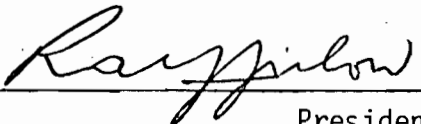


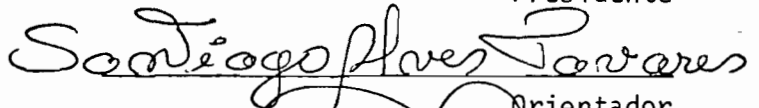
1. Publicação nº <i>INPE-3003-TDL/154</i>	2. Versão	3. Data <i>Fev., 1984</i>	5. Distribuição ☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem <i>DRH-DMC</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DO TIPO PARABÓLICO</i> <i>PROBLEMAS DE DIFUSÃO</i> <i>ELEMENTOS FINITOS</i>			
7. C.D.U.: <i>517.962:519.63</i>			
8. Título <i>ESTUDO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ALGUNS PROBLEMAS DE DIFUSÃO, USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</i>		10. Páginas: <i>156</i>	
		11. Última página: <i>B.3</i>	
		12. Revisada por <i>Saet</i> <i>Santiago Alves Tavares</i>	
9. Autoria <i>Hans-Ulrich Pilchowski</i>		13. Autorizada por <i>Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor Geral</i>	
Assinatura responsável 			
14. Resumo/Notas <i>Desenvolve-se um método numérico para resolver problemas de difusão, em particular da classe dos problemas de campo em regime transi- tório, utilizando a técnica de elementos finitos. O método é desenvolvido considerando o tempo como variável de mesma espécie que as variáveis espa- ciais e utiliza elementos triangulares no plano (x, t), isto é, elementos espaço-tempo. O problema não é tratado por separação de variáveis de espa- ço e de tempo, pois deste modo não há contribuição cruzada ao longo da ma- lha espaço-tempo. O método viabiliza a construção de programas computacio- nais, onde as condições inicial e de contorno são fornecidas como dados, o que torna viável estudos de otimização de projetos, onde outros métodos (diferenças finitas) são inviáveis por ser-se obrigado a construir um no- vo programa para cada caso novo de condição de contorno.</i>			
15. Observações <i>Tese de Doutorado em Ciência Espacial aprovada em 19 de se- tembro de 1983.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Doutor
em Ciência Espacial

Dr.Ralf Gielow


Presidente

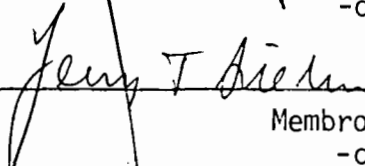
Dr.Santiago Alves Tavares


Orientador

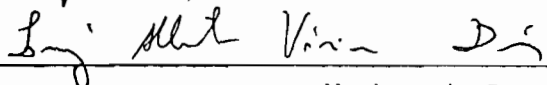
Dr.Euclides Carvalho Fernandes


Membro da Banca
-convidado-

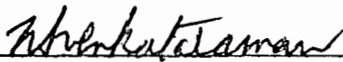
Dr.Jerzy T.Sielawa


Membro da Banca
-convidado-

Dr.Luiz Alberto Vieira Dias


Membro da Banca

Dr.Nellore S.Venkataraman


Membro da Banca

Dr.Wilson C.Canessin da Silva


Membro da Banca

Candidato: Hans-Ulrich Pilchowski

São José dos Campos, 19 de setembro de 1983

A todos que agem para construir um mundo melhor.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pelo suporte fornecido para a realização deste trabalho.

Ao Dr. Santiago Alves Tavares pela orientação, dedicação e incentivo à execução deste trabalho.

À Sra. Glória Cardozo Bertti pela minuciosa correção do texto e à Sra. Maria de Fátima Ito da Silva e Srta. Maria Celeste Soares pela datilografia e montagem final desta tese.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para o desenvolvimento desta pesquisa.

ABSTRACT

A numerical method for solving diffusion problems is developed, particularly for a class of transient process field problems, using a finite element approach. The method is developed considering time as a variable of the same kind as the space variables, and uses triangular elements at (x,t) plane, i.e., space-time elements. The problem is not treated by variable space and time separation, because in this case it does not give crossed contribution in time at the space-time net. The method makes possible to build computer programs where inicial and boundary conditions are done as data , so it becomes possible to study optimization of projects, in cases where other methods (finite differences) have not applicability because, for them, it is necessary to construct a new computer program for any new boundary condition.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>xi</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>xiii</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - PROBLEMAS DE DIFUSÃO E RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS</u>	9
2.1 - Introdução	9
2.2 - Definição do problema geral de difusão em sistemas contínuos	9
2.3 - Classificação de equações diferenciais parciais de 2º grau.	13
2.4 - O método de diferenças finitas	15
2.5 - Exemplo do método das diferenças finitas aplicado à equação da difusão	23
2.5.1 - Formulação explícita	23
2.5.2 - Formulação implícita	29
<u>CAPÍTULO 3 - MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS</u>	33
3.1 - Introdução	33
3.2 - Fundamentos básicos	33
3.3 - Método de elementos finitos	34
3.4 - Maneira usual adotada pela literatura disponível na utilização do método de elementos finitos em problemas de difusão.	36
3.5 - Método de Galerkin	43
<u>CAPÍTULO 4 - MÉTODO PROPOSTO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO POR ELEMENTOS FINITOS</u>	47
4.1 - Introdução	47
4.2 - Descrição do método	47
4.3 - Observações sobre o programa computacional	60
<u>CAPÍTULO 5 - APLICAÇÕES DO MÉTODO</u>	63
5.1 - Introdução	63
5.2 - Solução do problema de transferência de calor em uma barra unidimensional	63

	<u>Pág.</u>
5.3 - Solução do problema de transferência de calor na secção transversal de uma placa	82
5.4 - Exemplo de uma equação parabólica com termo dissipativo ...	87
5.5 - Exemplo de uma equação de difusão não-homogênea	93
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÃO</u>	99
6.1 - Comentários	99
6.2 - Sugestões	101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
APÊNDICE A - ALGEBRISMO PARA A DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE UM ELEMENTO PARA A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA	
APÊNDICE B - TRANSFORMAÇÃO DA MATRIZ DE CORRELAÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA NA MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Domínio em problemas de difusão	10
2.2 - Forma esquemática da fórmula de recorrência para $\partial^2 U / \partial x^2 = \partial U / \partial t$	25
2.3 - Formulação adicional para o problema do resfriamento de uma barra	25
2.4 - Rede de pontos discretos que aproxima o domínio da solução contínua	26
2.5 - Esquema da fórmula de recorrência, com condições iniciais e de contorno aplicadas sobre a rede discreta, que aproxima o domínio da solução contínua ($\partial^2 U / \partial x^2 = \partial U / \partial t$)	27
2.6 - Comparação do método de diferenças finitas com a solução exata em $U(1,t)$ para malhas sucessivamente mais finas	28
2.7 - Crescimento oscilante do erro na solução instável por diferenças finitas	29
2.8 - Curvas características de diferenças finitas associadas com uma fórmula de recorrência explícita	30
3.1 - Discretização do domínio para o Problema 2.30	37
3.2 - Configuração que mostra a dependência em "x" e "t" de U_i nos nós da malha	44
4.1 - Numeração dos elementos na malha e numeração global dos nós	50
4.2 - Numeração local dos nós	52
5.1 - Elemento finito escolhido para a resolução da Equação 5.2 .	65
5.2 - Temperatura do centro da barra (I)	73
5.3 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.2	73
5.4 - Temperatura ao longo da barra para 8 instantes correspondentes as 10 divisões do intervalo de tempo	74
5.5 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.4	75
5.6 - Temperatura do centro da barra (II)	76
5.7 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.6	76
5.8 - Temperatura ao longo da barra para 18 instantes, correspondentes as 20 divisões do intervalo de tempo	77
5.9 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.8	78
5.10 - Temperatura do centro da barra para 250 s.	79
5.11 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.10	79

	<u>Pág.</u>
5.12 - Temperatura ao longo da barra para 13 instantes igualmente espaçados no tempo	80
5.13 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.12	81
5.14 - Temperatura ao longo do tempo para o centro do corte transversal	84
5.15 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.14	84
5.16 - Temperatura ao longo da secção transversal da placa, $T=6, 18, 30, 54, 98, 120, 150$ e 175 segundos	85
5.17 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.16	86
5.18 - Variação de $\hat{U}$ ao longo do tempo	89
5.19 - Erro correspondente à Figura 5.18	90
5.20 - Variação de $\hat{U}$ ao longo de x para 8 instantes diferentes.	91
5.21 - Erro absoluto em relação aos resultados apresentados na Figura 5.20	92
5.22 - Variação da temperatura do centro da barra ao longo do tempo	96
5.23 - Erro correspondente à Figura 5.22	96
5.24 - Variação da temperatura ao longo da barra para 4 instantes diferentes	97
5.25 - Erro absoluto em relação aos resultados apresentados na Figura 5.24	98
6.1 - Esquema para uma malha considerando espaço e tempo como se fossem independentes	99
6.2 - Esquema para uma malha considerando espaço e tempo simultaneamente	100

LISTA DE SÍMBOLOS

- e - Indica elemento.
- D - Indica domínio
- h_i - Incremento no espaço.
- k - Incremento no tempo.
- K - Matriz de correlação.
- L - Comprimento de referência.
- ℓ - Comprimento total.
- M,N - Funções de forma
- R - Resíduo.
- δ - Constante de Landau.
- δ_{ij} - Delta de Kroeniker.
- Ω - Variacional.
- $\cdot$ - Indica derivação em relação ao tempo.
- $\underline{\quad}$ - Indica matriz ou vetor.
- $\bar{\quad}$ - Indica valor médio.
- $\sim$ - Indica função aproximada.
- $\tilde{\quad}$ - Valor nodal.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Problemas de difusão podem ser resolvidos, de forma aproximada, por diversos métodos numéricos. No presente trabalho estuda-se a aplicação do conceito de elementos finitos para a resolução numérica de alguns problemas deste tipo, utilizando espaço e tempo como variáveis nodais do elemento.

A equação representativa desta classe de problemas para o espaço tridimensional é dada por

$$\begin{aligned} a \frac{\partial U}{\partial t} - \left[b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] = \\ = qf \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, U, x, y, z, t \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde os coeficientes podem ser parâmetros ou funções de x, y, z e t .

Newell (1977) analisa teoricamente a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = N_2(U^2) + N_3(U^3), \quad (1.2)$$

quanto à estabilidade em sua parte temporal, após ter solucionado a parte espacial, para esquemas de diferenças finitas de 1ª ordem, explícitos e implícitos, concluindo que, no caso dos sistemas explícitos, dependendo do valor de $\Delta t/(\Delta x)^2$, usando diferenças "forward", o sistema é estável para $\delta < 0$ (δ é a constante de Landau); utilizando diferenças centrais ele é incondicionalmente instável; e usando diferenças "backward" o sistema é estável para $\delta > 0$. Concluindo ainda que, no caso dos esquemas implícitos, usando diferenças "forward" ou centrais, existem apenas centros estáveis, sendo a solução ondulatória; já para diferenças "backward" o sistema sempre é instável.

Ewing e Falk (1979) estudam a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = q(x)U \quad (1.3)$$

resolvendo primeiro a parte espacial, utilizando depois um esquema Crank-Nicholson-Galerkin para analisar a parte temporal; para isto introduzem seis lemas e três corolários a ser satisfeitos para que a solução da Equação 1.3 seja estável; isto tudo apenas teoricamente.

Finalayson (1980) analisa a equação

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = p \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1.4)$$

e conclui que a solução da parte espacial obtida por diferenças finitas usa menos tempo de computador do que a solução por elementos finitos, a qual por sua vez é mais precisa. Já para obter a solução da parte temporal ele apenas comenta haver utilizado um Runge-Kutta para equações diferenciais ordinárias.

Evans e Benson (1980) analisam a equação

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + f(x,t,F) \quad (1.5)$$

concluindo, baseados em seus resultados numéricos, que o conjunto de equações lineares, proveniente da resolução da parte espacial desta equação, por um esquema de diferenças finitas central de 2ª ordem, é inconsistente quando os pontos da malha são ordenados da maneira usual, procurando resolver o sistema utilizando a teoria da sobre-relaxação sucessiva.

Arnold et alii (1981), após analisarem teoricamente a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f \frac{\partial U}{\partial x}, U, x, t, \quad (1.6)$$

afirmam que, utilizando elementos finitos para solucionar equações diferenciais parciais do tipo parabólico, é típico usar um método implícito de diferenças finitas para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias proveniente da discretização, por elementos finitos, da parte espacial da Equação 1.6. Afirmam também que os esquemas explícitos geralmente não fornecem aproximações estáveis se o passo no tempo e o parâmetro da malha não tenderem a zero independentemente.

Cook (1982) analisa teoricamente a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.7)$$

utilizando diferenças finitas centrais de 2ª ordem para resolver a parte espacial, repetindo o procedimento para resolver a parte temporal, concluindo que no intervalo $0 < x < 1$ obtém-se um erro mínimo se

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{N-1}{4} \frac{\pi}{N+1} \right)},$$

onde N é um parâmetro ligado ao número de passos; sem entretanto fornecer dados, ou seja, dar a ordem do erro mínimo.

Keramidas (1980) analisa a equação

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right], \quad (1.8)$$

introduzindo parâmetros que tornam compatível o uso de coordenadas generalizadas para resolver a parte espacial da Equação 1.8, obtendo um sistema de equações diferenciais ordinárias. Afirmar também que a parte

temporal é resolvida por meio de um esquema de diferenças "backward" de 4ª ordem, obtendo uma solução estável, sem entretanto incluir esta solução ou seus resultados numéricos em seu trabalho.

Donae e Evans (1982) analisam o sistema de equações

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

para

$$W = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

utilizando um esquema de diferenças finitas central de 2ª ordem denominado Método de Hopscotch, o qual afirmam ser um método incondicionalmente estável. Os resultados numéricos por eles apresentados variam de 0,1 a 10% em relação à solução analítica correspondente.

Outros autores, como Mingyou e Thomée (1981) e Thomée (1980), estudam diretamente as equações diferenciais ordinárias do tipo parabólico de 1º grau que surgem após a resolução da parte espacial de uma equação diferencial parcial do tipo parabólico de 2º grau.

Uma das tendências atuais para resolver equações diferenciais parciais do tipo parabólico de 2º grau consiste na utilização de métodos desenvolvidos para computadores híbridos, tais como o método CSDT (Continuous Space-Discrete Time) e o método DSCT (Discrete Space-Continuous Time).

Zboril (1979) analisa a equação

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (1.10)$$

aplicando o método CSDT no qual a parte temporal é tratada por um esquema de diferenças finitas "backward" de 1ª ordem. No final do trabalho ele apresenta uma tabela em que o erro entre a solução exata e a solução numérica varia de 1,6% a 46,3%.

Neundorf e Schoenefeld (1980) analisam a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a(x,t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x,t,U) \quad (1.11)$$

por um método CSDT, denominado método das linhas, e concluem que as soluções CSDT em computadores híbridos são promissoras quando erros devidos a atraso (delay) forem compensados iterativamente em períodos curtos e por fórmulas de 1ª ordem para fazer a realimentação (playback). Afirmam, ainda, que no caso de usar fórmulas iterativas de ordem superior, para a realimentação, será necessário um acréscimo considerável de equipamento analógico.

Murthy et alii (1981) concluem, após análise da equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1.12)$$

que a técnica de diferenças finitas "backward" de 1ª ordem, no método CSDT, é estável quando as raízes da equação característica estiverem internas a um círculo de raio unitário, isto é, ela será M-estável; já no caso de diferenças "forward" de 1ª ordem, ela sempre é instável.

Lawson (1981) analisa a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1.13)$$

em duas fases. Primeiramente, utiliza, em sua parte espacial, um método DSCT de diferenças centrais de 2ª ordem e, em sua parte temporal, um

integrador simples (ODE). Depois, utiliza em sua parte espacial, um método de diferenças centrais de 2ª ordem para computadores digitais e na parte temporal, o mesmo integrador simples. Ao comparar tais procedimentos conclui que a precisão dos dois métodos é equivalente.

Webb e Murthy (1981) analisam a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.14)$$

por um método CSDT, concluindo que diferenças finitas "forward" de 1ª ordem são instáveis, enquanto diferenças finitas "backward" de 1ª ordem são M-estáveis se o tempo for restrito em função da ordem desejada; afirmando, ainda, que esquemas de diferenças finitas de 2ª e 3ª ordem são apenas fracamente M-estáveis.

O objetivo deste trabalho é estudar soluções de equações de difusão através de técnicas de elementos finitos, tratando a variável de tempo do mesmo modo que as variáveis de espaço, e comprovar a viabilidade do método proposto através de aplicações.

O Capítulo 2 mostra o modo com que problemas de difusão vêm sendo resolvidos pelo método de diferenças finitas. Analisa-se como exemplo a equação

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (1.15)$$

denominado Problema 2.30. Neste capítulo também é dado o conceito de problemas de difusão, além da especificação de diversas categorias de fórmulas de recorrência usadas pelo método de diferenças finitas.

O Capítulo 3 descreve os fundamentos básicos do método de elementos finitos e a maneira usual adotada pela literatura disponível quando o método de elementos finitos é usado em problemas de difu

são. A descrição é feita uma vez em formulação variacional e outra utilizando resíduos ponderados (método de Galerkin).

No Capítulo 4 é dada a descrição e formulação do método aqui proposto para solucionar problemas de difusão, utilizando a técnica de elementos finitos. Também é dada uma visão geral do funcionamento do programa computacional, o qual é todo desenvolvido em função deste método.

No Capítulo 5 são feitas as aplicações do método e estudada a sua convergência, enquanto no Capítulo 6 são apresentados os comentários e conclusões finais.

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS DE DIFUSÃO E RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo dá-se a conceituação de problemas de difusão.

Introduz-se o método de diferenças finitas aplicado a problemas de difusão para possibilitar uma comparação entre o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos proposto neste trabalho.

2.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE DIFUSÃO EM SISTEMAS CONTÍNUOS

O modelo matemático de um problema de difusão consiste em um sistema de equações diferenciais, do tipo parabólico, o qual governa o fenômeno em estudo. A sua solução fornece o comportamento das variáveis envolvidas a partir de condições iniciais e laterais de contorno.

Considere-se um par de equações diferenciais parciais de 1ª ordem em U e V, como a seguir:

$$A_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial U}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial V}{\partial x} + A_{14} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \quad (2.1)$$

$$A_{21} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial U}{\partial y} + A_{23} \frac{\partial V}{\partial x} + A_{24} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 ,$$

onde os coeficientes A_{ij} , para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$, são funções de U e V, mas não de x e y. Sistemas deste tipo normalmente são não-lineares.

res. Tendo em vista que x e y não aparecem nos coeficientes, o sistema pode ser reduzido a linear, intercambiando as variáveis dependentes e independentes, isto é, x e y devem ser considerados funções desconhecidas de U e V .

Supondo que a solução do Sistema de Equações 2.1 tenha alcançado um estado como mostra a Figura 2.1 conhecem-se a solução até a curva ABC, os valores de U e V no ponto B e todas as derivadas dirigidas para a região abaixo da curva; U e V são continuamente diferenciáveis ao longo da curva ABC.

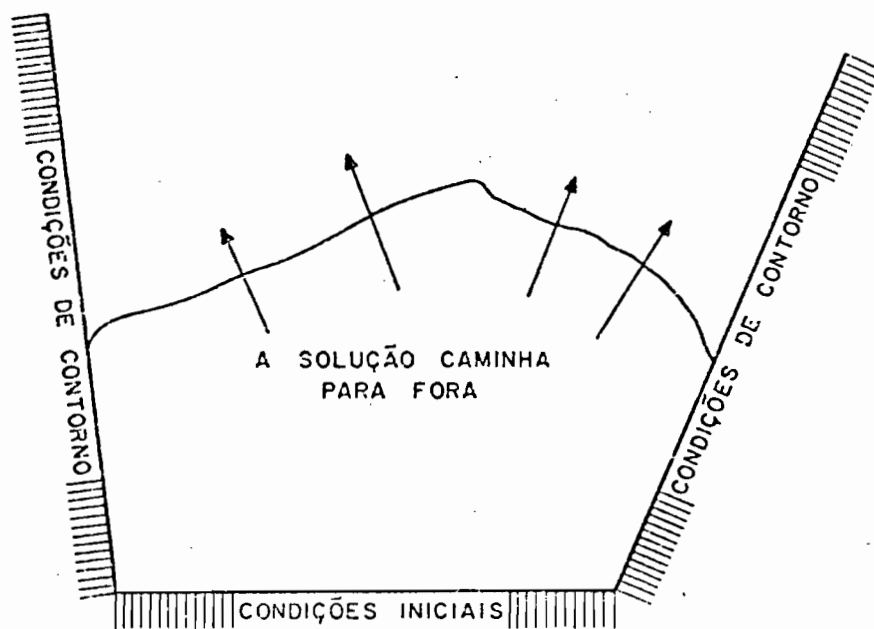


Fig. 2.1 - Domínio em problemas de difusão.

Então, denominando s a distância entre dois pontos quaisquer as derivadas direcionais ao longo desta distância são dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s},$$

(2.2)

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s},$$

e as derivadas direcionais no ponto B ao longo da curva são formuladas como segue

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{dU}{ds}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{dV}{ds},$$

onde

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial s},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial s},$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Colocando os Sistemas 2.1 e 2.3 na forma matricial obtêm

-se

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dU \\ dV \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Por hipótese conhecem-se U e V , em B , e a curva ABC ; portanto é possível determinar os coeficientes A_{ij} e as diferenciais dx e dy . Então, se U e V forem conhecidas ao longo da curva ABC , dU e dV podem ser determinadas.

Se o determinante da matriz quadrada da Equação 2.4 for não-nulo o comportamento da solução logo abaixo de B , na Figura 2.1, é conhecido, isto é, as derivadas $\partial U/\partial s$ e $\partial V/\partial s$ são unicamente determinadas. Se o determinante for nulo e o sistema tiver solução ter-se-ão infinitas soluções. No primeiro caso, para satisfazer às equações governantes do fenômeno em estudo, requer-se que as derivadas direcionais $\partial U/\partial s$ e $\partial V/\partial s$ tenham o mesmo valor logo abaixo e acima da curva ABC , na Figura 2.1. No caso do determinante ser nulo, estas derivadas não são unicamente determinadas, ou seja, $\partial U/\partial s$ e $\partial V/\partial s$ podem apresentar descontinuidades ao cruzarem a linha ABC .

Desenvolvendo o determinante da matriz como segue:

$$(A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13})d\bar{y}^2 - (A_{11}A_{24} - A_{21}A_{14} + A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})dx dy + (A_{12}A_{24} - A_{22}A_{14})d\bar{x}^2 = 0, \quad (2.5)$$

podem-se determinar os casos nos quais o determinante se anula. A Expressão 2.5 é uma equação de 2º grau em dx/dy . Então, se a direção da curva ABC em B for tal que haja uma razão dx/dy que satisfaça à Equação 2.5, as derivadas de U e V não são unicamente determinadas pelos valores de U e V ao longo da curva. Neste caso, dx/dy é denominada *direção característica*. Resolvendo a Equação 2.5 em relação a dx/dy podem-se obter duas raízes reais, uma raiz real ou um par de raízes complexas conjugadas, dependendo do discriminante, mostrado a seguir,

$$(A_{11}A_{24} - A_{21}A_{14} + A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})^2 - 4(A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13})(A_{12}A_{24} - A_{22}A_{14}), \quad (2.6)$$

ser positivo, nulo ou negativo. O sistema de equações é denominado hiperbólico, no caso de haver duas direções características reais (duas raízes reais); parabólico, quando há apenas uma direção característica real (duas raízes reais iguais); e elíptico, se não houver direção característica real (duas raízes complexas conjugadas).

Um problema cujo sistema de equações diferenciais parciais é do tipo hiperbólico é classificado como problema de propagação; do tipo parabólico é denominado problema de difusão; enquanto aquele cujo sistema de equações é do tipo elíptico é tido como problema de equilíbrio (Schlögl, 1956). Nos problemas de difusão a solução caminha a partir de condições iniciais (estado inicial), sendo seu transitório dirigido por condições de contorno laterais. Em problemas de propagação a solução também caminha ao longo de condições de contorno laterais, porém seu ponto de partida pode ser dado por condições iniciais, ou por condições finais de Cauchy, pois o problema é simétrico para t e $-t$. Já nos problemas de equilíbrio requer-se que todas as condições de contorno e requisitos internos sejam satisfeitos simultaneamente para a obtenção da solução do sistema.

2.3 - CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE 2ª GRAU

Na seção anterior fez-se uma classificação geral de sistemas de equações diferenciais parciais, pois é válida para qualquer número de variáveis e equações, sendo sempre possível levar este sistema a equações de ordem superior; o contrário nem sempre é possível ser feito.

Considere-se uma equação diferencial parcial de 2ª ordem em U , do tipo:

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = h, \quad (2.7)$$

denominada quase-linear, onde a , b , c e h podem depender das variáveis independentes x e y , da variável dependente U e de suas primeiras derivadas parciais $\partial U/\partial x$ e $\partial U/\partial y$; ou de uma equação linear geral de 2ª ordem

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + d \frac{\partial U}{\partial x} + e \frac{\partial U}{\partial y} + fU = g, \quad (2.8)$$

onde a , b , c , d , e , f e g podem depender apenas das variáveis independentes x e y . Então, as Equações 2.7 e 2.8 são classificadas convencionalmente com respeito ao sinal do discriminante

$$\underline{\Delta} \equiv b^2 - 4ac \quad (2.9)$$

(Hildebrand, 1968b), o que é demonstrado em diversos livros, como por exemplo, em Garabedian (1964), Weinberger (1965) e Smith (1967). Onde se diz que a equação é do tipo hiperbólico em um ponto do plano x, y , quando $\underline{\Delta} > 0$ naquele ponto; do tipo elíptico para $\underline{\Delta} < 0$; e parabólico se $\underline{\Delta} = 0$.

Por exemplo, se $h \equiv h(x, y, U, \partial U/\partial x, \partial U/\partial y)$ as equações (Schlögl, 1956)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = h$$

$$e \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = h$$

são sempre hiperbólicas;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = h \quad (2.11)$$

é elíptica em todo o plano; e

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = h \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = h \quad (2.12)$$

são parabólicas para todo o plano. Já a equação

$$(1-y) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (1+y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = h \quad (2.13)$$

é elíptica no interior do círculo $x^2 + y^2 = 1$, hiperbólica fora dele e parabólica sobre o círculo.

2.4 - O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método de diferenças finitas é um procedimento numérico utilizado para obter aproximações de equações diferenciais por meio da discretização do sistema contínuo. Assim, uma variável x será incrementada em intervalos $x=h$, onde x pode ser constante ou variável, dependendo do procedimento adotado.

Quando se trata de um problema com mais de uma variável independente a solução numérica da equação diferencial será obtida sobre uma malha, onde um ponto genérico é definido por

$$(x_i, y_i, \dots, t_i) = (x_i + ih_x, y_i + ih_y, \dots, t_i + ik) , \quad (2.14)$$

onde

$$(x_0, y_0, \dots, t_0)$$

é a origem adotada para o sistema;

$$h_x = \Delta x, \quad h_y = \Delta y, \quad \dots, \text{ e } k = \Delta t$$

são os incrementos em $x, y, \dots, \text{ e } t$, respectivamente.

Dividindo o domínio $[0, X]$ de uma função $U(x)$ genérica em h intervalos, para cada um destes intervalos os seguintes operadores podem ser definidos (Hildebrand, 1968a):

$$a) \Delta U(x) = U(x + h_i) - U(x) = U_{s+1} - U_s, \quad (2.15)$$

esquema denominado *operador de diferenças "forward"*;

$$b) \nabla U(x) = U(x) - U(x - h_i) = U_{s-1} - U_s, \quad (2.16)$$

esquema denominado *operador de diferenças "backward"*;

$$c) \delta U(x) = U\left(x + \frac{1}{2} h_i\right) - U\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) = U_{s+1/2} - U_{s-1/2}, \quad (2.17)$$

esquema denominado *operador de diferenças centrais*;

$$d) EU(x) = U(x + h_i) \quad \text{ou} \quad EU_s = U_{s+1}, \quad (2.18)$$

esquema denominado *operador "shifting"*, o qual mantém as seguintes relações com os operadores anteriores

$$\Delta = E - 1, \quad \nabla = 1 - E^{-1} \quad \text{e} \quad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2};$$

$$e) DU(x) = (dU(x)/dx)_{x=x_s} \quad \text{ou} \quad DU = (dU/dx)_s, \quad (2.19)$$

esquema denominado *operador de derivação*.

Todos os operadores, menos o último, satisfazem às leis da comutação, associação e distribuição para qualquer número real ou complexo conjugado. Os primeiros três operadores mantêm entre si as seguintes relações

$$\Delta \nabla = \nabla \Delta = \delta^2 . \quad (2.20)$$

Ao considerar uma função $U(x,y)$, função das variáveis independentes x e y , podem-se calcular, por exemplo, as derivadas primeira e segunda desta função em um ponto genérico (x, y) de uma rede (Castro San Miguel, 1983) como segue:

1) Derivadas primeira e segunda (1ª ordem):

a) Por diferenças "forward" de 1ª ordem:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_i} ,$$
$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_j} ;$$
(2.21)

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i+2,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i,j}}{h_i h_{i+1}} ,$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j+2} - 2U_{i,j+1} + U_{i,j}}{h_j h_{j+1}} .$$

b) Por diferenças "backward" de 1ª ordem:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_{i-1}} ,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_{j-1}} ;$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{h_{i-1} h_{i-2}}, \quad (2.22)$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{h_{j-1} h_{j-2}}.$$

c) Por diferenças centrais de 1ª ordem:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{h_i + h_{i-1}},$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{h_j + h_{j-1}};$$

(2.23)

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_i h_{i-1}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_j h_{j-1}}.$$

2) Derivadas primeira e segunda (2ª ordem):

a) Por diferenças "forward" de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{-h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} U_{i+2,j} + \\ &+ \frac{(h_i h_{i+1})}{h_i h_{i+1}} U_{i+1,j} - \frac{2h_i + h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} U_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{-h_j}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} U_{i,j+2} + \frac{(h_j + h_{j+1})}{h_j + h_{j+1}} U_{i,j+1} - \frac{2h_j + h_{j+1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} U_{i,j} ;$$

(2.24)

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} U_{i+2,j} - \frac{2}{h_i h_{i+1}} U_{i+1,j} + \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} U_{i,j} ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{2}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} U_{i,j+2} - \frac{2}{h_j h_{j+1}} U_{i,j+1} + \frac{2}{h_j(h_j + h_{j+1})} U_{i,j} .$$

b) Por diferenças "backward" de 2ª ordem:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_{i-2})} U_{i-2,j} - \frac{(h_{i-1} + h_{i-2})}{h_{i-1} h_{i-2}} U_{i-1,j} + \frac{2h_{i-1} + h_{i-2}}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_{i-2})} U_{i,j} ,$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{h_{j-1}}{h_{j-2}(h_{j-1} + h_{j-2})} U_{i,j-2} - \frac{(h_{j-1} + h_{j-2})}{h_{j-1} h_{j-2}} U_{i,j-1} + \frac{2h_{j-1} + h_{j-2}}{h_{j-1}(h_{j-1} + h_{j-2})} U_{i,j} ;$$

(2.25)

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{2}{h_{i-2}(h_{i-1} + h_{i-2})} U_{i-2,j} - \frac{2}{h_{i-1} h_{i-2}} U_{i-1,j} + \frac{2}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_{i-2})} U_{i,j} ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{2}{h_{j-2}(h_{j-1} + h_{j-2})} U_{i,j-2} - \frac{2}{h_{j-1} h_{j-2}} U_{i,j-1} + \frac{2}{h_{j-1}(h_{j-1} + h_{j-2})} U_{i,j} .$$

c) Por diferenças centrais de 2ª ordem:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{h_{i-1}}{h_i(h_i + h_{i-1})} U_{i+1,j} + \frac{h_{i+1} + h_i}{h_i h_{i-1}} U_{i,j} - \frac{h_i}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} U_{i-1,j} ,$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{h_{j-1}}{h_j(h_j + h_{j-1})} U_{i,j+1} + \frac{h_{j-1} - h_j}{h_j h_{j-1}} U_{i,j} - \frac{h_j}{h_{j-1}(h_j + h_{j-1})} U_{i,j-1} ;$$

(2.26)

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i-1})} U_{i+1,j} - \frac{2}{h_i h_{i-1}} U_{i,j} + \frac{2}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} U_{i-1,j} ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{2}{h_j(h_j + h_{j-1})} U_{i,j+1} - \frac{2}{h_j h_{j-1}} U_{i,j} + \frac{2}{h_{j-1}(h_j + h_{j-1})} U_{i,j-1} .$$

Fórmulas de ordem superior são obtidas desenvolvendo a função $U(x,y)$, somando ou subtraindo os acréscimos h_i e h_j segundo o esquema adotado em série de Taylor até a ordem desejada.

O método de diferenças finitas consta de vários procedimentos particulares devidos a fórmulas de recorrência diversas, obtidas a partir dos esquemas apresentados anteriormente, e dependentes da ordem das diferenças adotadas. São exemplos destes procedimentos as fórmulas de recorrência obtidas a partir da expressão

$$\hat{U}_s = \hat{U}_{s-q} + q h_i Q \quad (2.27)$$

onde q é um inteiro arbitrário, Q representa a média ponderada dos valores de $U(x,t)$ e $\hat{U}_s$ são soluções aproximadas.

A Expressão 2.27 inclui três categorias de fórmulas, as quais diferem entre si pela seleção do conjunto de valores para os quais $U(x,t)$ é avaliado. As categorias a ser consideradas encontram-se na Tabela 2.1.

TABELA 2.1

CATEGORIAS DE FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

CATEGORIA	$U(x,t)$ É AVALIADO EM
1ª	$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{s-3}, t_{s-2}, t_{s-1}$.
2ª	$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{s-3}, t_{s-2}, t_{s-1}, t_s$.
3ª	$t_0, t_1, \dots, t_{s-1}, \dots, t_{s-q}, \dots, t_s$ para $s-1 < s-q < s$.

Nas duas primeiras categorias de fórmulas de recorrência, $U(x,t)$ é avaliado em cada ponto da rede. Uma diferencia-se da outra pela necessidade de $U(x_s, t_s)$ ser utilizado ou não na fórmula de recorrência para x_s . Já na terceira categoria $U(x,t)$ é avaliado inclusive em pontos intermediários de $t_{s-1} < t < t_s$.

As fórmulas de recorrência da primeira categoria, denominadas abertas, são do tipo:

$$\hat{U}_s = \hat{U}_{s-q} + qh_i \sum_{k=n}^{k=s-1} \beta_k U_k, \quad (2.28)$$

onde $n = s - r - 1$, r é definido pela ordem do erro de truncamento, e β são pesos. A dificuldade desta categoria de fórmulas está no fato de não se auto-iniciarem. Para iniciá-las é necessário obter x_s por algum método auxiliar, como os métodos iterativos, de séries, Galerkin, etc. Nesta categoria quando $q = 1$ tem-se a família da Adams, $q = 2$ a família de Nyström, e $q = 4$ a regra de Milus.

As fórmulas de recorrência da segunda categoria, denominadas fechadas, são dadas pela forma geral

$$\bar{U}_s = \bar{U}_{s+q} + qh_i \sum_{k=n}^{k=s} \beta_k U_k, \quad (2.29)$$

onde $n = s - r - 2$, r é definido pela ordem do erro de truncamento. Como x_s não pode ser explicitado na Expressão 2.29, aparecendo também em $U(x_s, t_s)$, utiliza-se uma forma iterativa para o cálculo desta fórmula de recorrência. Nesta categoria tem-se parte da família de Adams para $q = 1$, e $q = 2$ leva à regra de Simpson.

As fórmulas de recorrência da terceira categoria distinguem-se das anteriores pelo fato de $U(x, t)$ ser avaliado em posições intermediárias do intervalo $t_{s-1} < t < t_s$, não com a finalidade de utilizar estes resultados como valores aproximados da solução, e sim somente para auxiliar o cálculo do valor para o próximo ponto da malha, o que torna as fórmulas desta categoria auto-iniciadas. Desta categoria são exemplos as fórmulas de Runge, Heun e Runge-Kutta.

2.5 - EXEMPLO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO À EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

2.5.1 - FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

Seja a Equação 2.30, aqui denominada Problema 2.30 (Crandall, 1956),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (2.30)$$

onde $U = U(x, t)$. Uma aproximação simples para este sistema diferencial é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{U(x+h_1, t) - 2U(x, t) + U(x-h_2, t)}{h_1 h_2} - \\ &- \frac{U(x, t+k) - U(x, t)}{k} = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

e

$$U(x, 0) = U(x).$$

Fazendo $\lambda = k/(h_1 h_2)$ obtêm-se a equação de diferenças

$$U(x, t+k) = \lambda U(x+h_1, t) + (1 - 2\lambda)U(x, t) + \lambda U(x-h_2, t) \quad (2.32)$$

ou na notação anteriormente adotada

$$U_{s, r+1} = \lambda U_{s-1, r} + (1 - 2\lambda)U_{s, r} + \lambda U_{s+1, r}, \quad (2.33)$$

que esquematicamente pode ser colocada na forma de diagrama, como mostra a Figura 2.2.

A Equação 2.30, impondo condições iniciais e de contorno, pode representar o problema de resfriamento de uma barra de material condutor térmico, a qual deve estar isolada ao longo de seu comprimento de forma que toda mudança de temperatura seja causada pela transferência de calor, a partir das extremidades, por condução. Estando a Equação 2.30 em variáveis adimensionais, as condições iniciais e de contorno são

$$U(x,0) = 1 \quad \text{para } 0 < x < 1 ,$$

$$U(0,t) = 0 \quad \text{para } t > 0 , \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial U(1,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{para } t > 0 ,$$

conforme mostra a Figura 2.3.

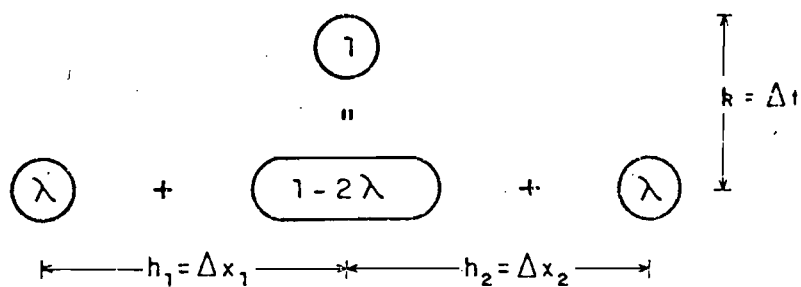


Fig. 2.2 - Forma esquemática da fórmula de recorrência para $\partial^2 U / \partial x^2 = \partial U / \partial t$.

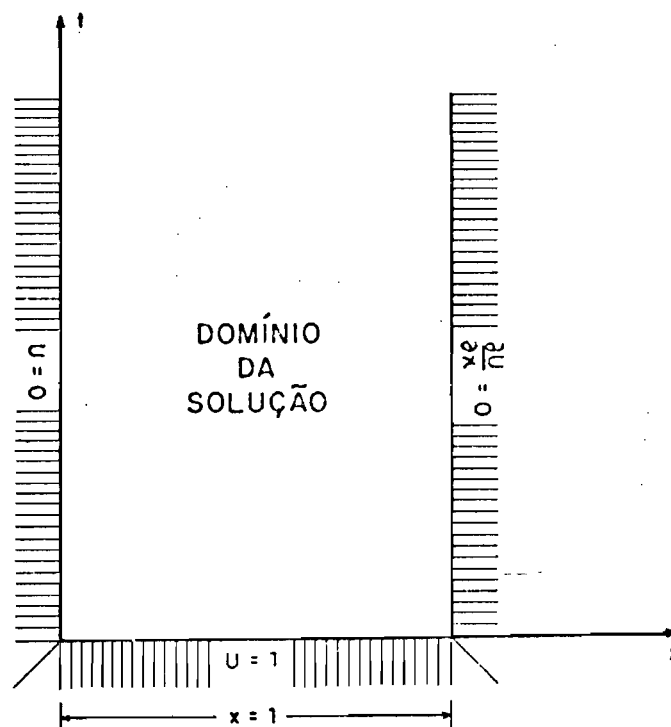


Fig. 2.3 - Formulação adicional para o problema do resfriamento de uma barra.

Seja a malha do Problema 2.8 dada pela Figura 2.4, na qual se sobrepõe o esquema da Figura 2.2.

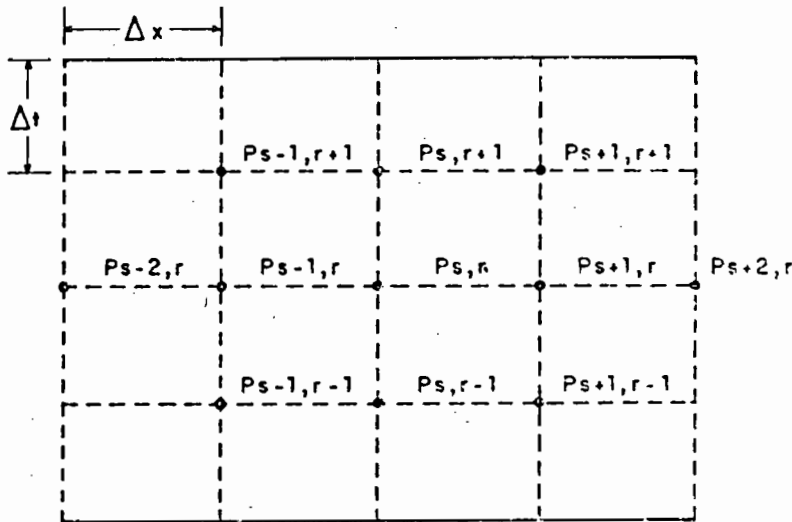


Fig. 2.4 - Rede de pontos discretos que aproxima o domínio da solução contínua.

Para ilustrar o uso da fórmula de recorrência, segundo o esquema da Figura 2.2, e o tratamento das condições iniciais e de contorno, supondo: $\Delta x = 1/2$ e $\Delta t = 1/8$, que resulta em $\lambda = 1/2$; têm-se $U(x,0) = 1$, em $x = 1/2$ e $x = 1$; $U(0,0) = 1/2$, pois em $P_{0,0}$ há uma descontinuidade unitária entre o valor inicial $U(x=0,0) = 1$ e o valor de contorno $U(0,t=0) = 0$; $U(0,t) = 0$; e $\partial U(1,t)/\partial x = 0$ nos pontos $P_{3,k}$, pois este reflete os valores de $U(1,t)$.

Sobrepondo o diagrama da Figura 2.2 à malha da Figura 2.4, obtêm-se a Figura 2.5.

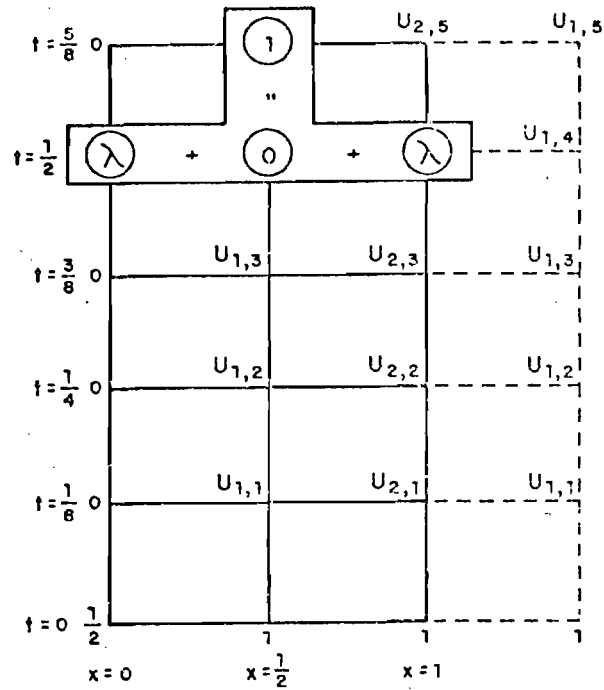


Fig. 2.5 - Esquema da fórmula de recorrência, com condições iniciais e de contorno aplicadas sobre a rede discreta, que aproxima o domínio da solução contínua ($\partial^2 U / \partial x^2 = \partial U / \partial t$).

Então, a solução pode ser obtida aplicando o diagrama da fórmula de recorrência sucessivamente nos pontos da rede, ou aplicando-a em sua forma algébrica, como segue

$$\begin{bmatrix} U_{1,r+1} \\ U_{2,r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1,r} \\ U_{2,r} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

para $r \geq 1$.

Comparando os valores de $U_{2,k+1}$ com os valores da solução contínua exata de $U(1,t)$, para $\Delta x = 1/2$ e $\Delta t = 1/8$; $\Delta x = 1/3$ e $\Delta t = 1/18$; $\Delta x = 1/4$ e $\Delta t = 1/32$; onde $\lambda = 1/2$; podem-se traçar as curvas de erro como mostra a Figura 2.6.

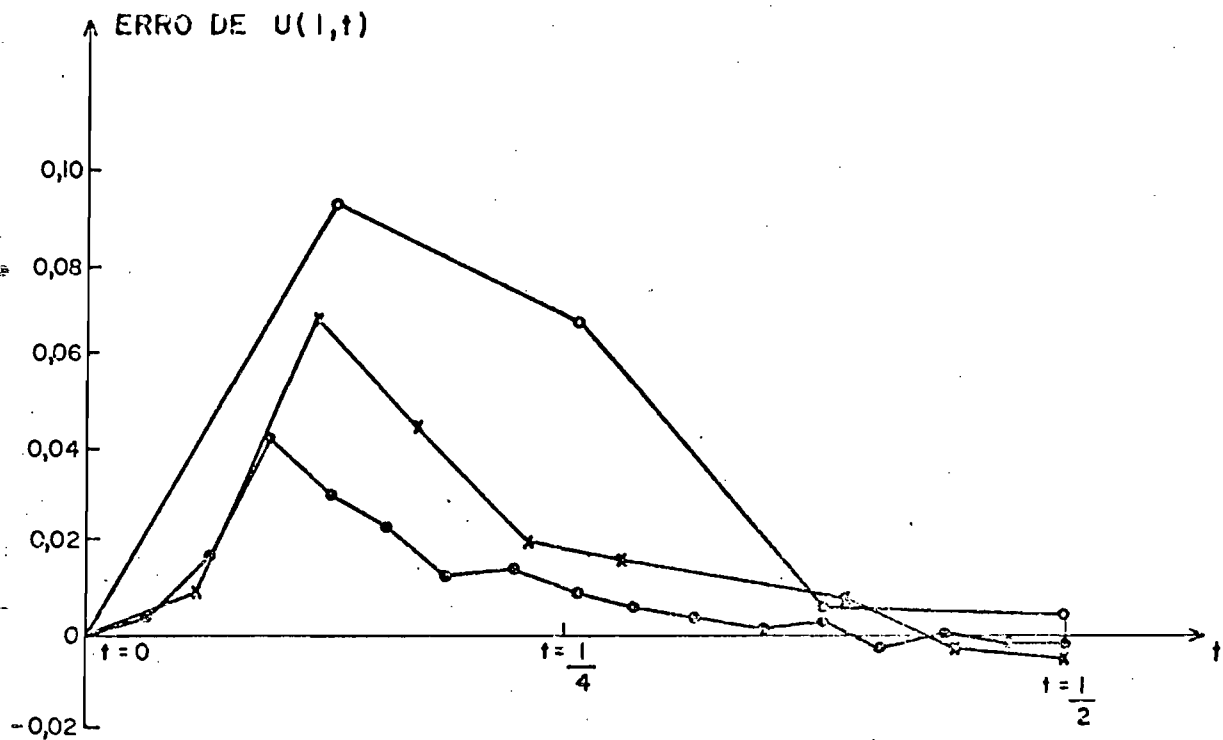


Fig. 2.6 - Comparação do método de diferenças finitas com a solução exata em $U(1,t)$ para malhas sucessivamente mais finas.

A Figura 2.6 indica qualitativamente a convergência da solução aproximada por diferenças finitas; ao examinar detalhadamente esta convergência percebe-se que os erros de truncamento são da ordem Δx e Δt . Se $\Delta x = h$ e λ for fixo o erro total de truncamento será da ordem (h) .

Se ao invés da condição de contorno $U=0$ em $x=0$, tiver-se a condição $U - (\partial U / \partial x) = 0$, para $\Delta x = 1/2$ e $\Delta t = 1/8$, a solução em $U(1,t)$ será divergente, como mostra o gráfico dos erros da Figura 2.7.

O exame qualitativo das Figura 2.6 e 2.7 sugere que o método de diferenças finitas pode-se tornar instável, dependendo das condições de contorno e/ou iniciais impostas ao problema em estudo.

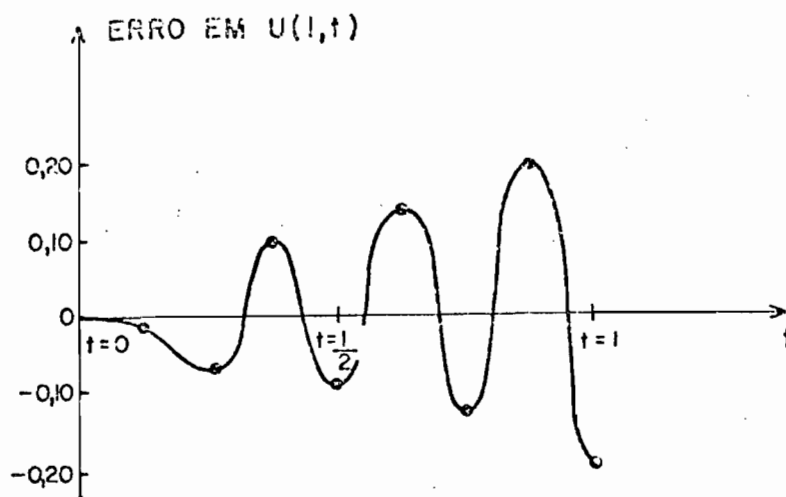


Fig. 2.7 - Crescimento oscilante do erro na solução instável por diferenças finitas.

Diz-se que o procedimento de diferenças finitas é instável quando, para uma rede e condições de contorno homogêneas prefixadas, existirem distribuições iniciais para as quais as soluções $U_{s,r}$ se tornam limitadas para r tendendo a infinito (Crandall, 1956).

O valor da razão $\lambda = \Delta t / (\Delta x)^2$ está intimamente ligado com a estabilidade dos métodos de diferenças finitas para equações parabólicas. Assim, segundo Forsythe e Wasow (1960) um procedimento de diferenças finitas é estável se o erro acumulado tende a zero com δ_e , onde δ_e é o erro absoluto máximo aceitável em cada ponto, e não cresça mais rapidamente que alguma potência de h^{-1} , quando h tende a zero.

2.5.2 - FORMULAÇÃO IMPLÍCITA

Nas situações práticas, a restrição $\lambda = k/h^2 < 1/2$ associada à simulação da Equação Diferencial 2.30 através da Equação de Diferenças 2.33 é altamente indesejável, uma vez que se faz necessário k ser inconvenientemente pequeno em correspondência a uma escolha de h razoável (Hildebrand, 1968).

Foi visto que a fórmula de recorrência explícita da Figura 2.2 pode ser útil para obter aproximações da Equação 2.30, mas que ela também pode ser instável se for muito grande. Um argumento qualitativo que pode conduzir a complicações é mostrado no esquema da Figura 2.8.

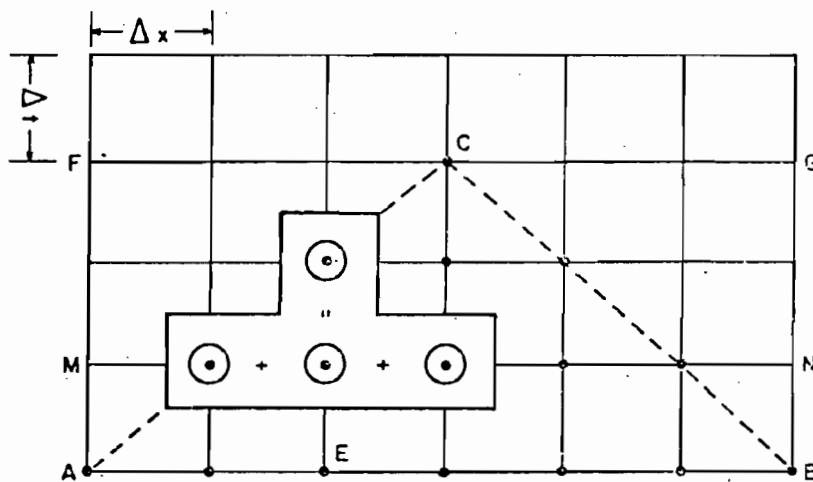


Fig. 2.8 - Curvas características de diferenças finitas associadas com uma fórmula de recorrência explícita.

Se na Figura 2.8 $U_{s,r}$ é conhecido em cada ponto de AB é possível obter a função $U_{s,r}$ em cada ponto da malha no interior do triângulo ABC através de fórmulas de recorrências sucessivas, sem conhecer seus valores sobre AF e BF. Neste caso, o modelo de diferenças finitas comporta-se como em sistemas hiperbólicos, e as retas AC e BC substituem as características de diferenças finitas. Como o sistema contínuo é parabólico as características são AB e FG, sendo possível de terminar a solução em C apenas após conhecer as condições de contorno ao longo de AF e BG. Assim, um modelo de diferenças finitas confiável para sistemas parabólicos não fornece valores ao longo de MN se as condições de contorno em M e N não forem conhecidas; este tipo de comportamento é obtido pelo emprego de fórmulas de recorrência implícitas.

Fórmulas de recorrência implícitas são aquelas nas quais dois ou mais valores desconhecidos da linha $r+1$ são determinados em termos de valores conhecidos da linha r pela aplicação sucessiva de uma fórmula. Se houver q valores desconhecidos na linha $r+1$, é necessário aplicar a fórmula de recorrência q vezes. Então, os valores desconhecidos serão fornecidos implicitamente por um conjunto de q equações simultâneas; por exemplo para o caso da Equação 2.30 tem-se

$$\begin{aligned} -\lambda\gamma U_{m+1,n+1} + (1+2\lambda\gamma)U_{m,n+1} - \lambda\gamma U_{m-1,n+1} = \\ = \lambda(1-\gamma)U_{m+1,n} + \left[1 - 2\lambda(1-\gamma)\right] U_{m,n} + \\ + (1-\gamma)U_{m-1,n} , \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $0 < \gamma < 1$. Note-se que se $\gamma = 0$ a Fórmula 2.24 reduz-se à Fórmula 2.33; se $\gamma = 1/2$, obtém-se uma fórmula implícita livre de quaisquer restrições quanto às dimensões relativas de h e k , denominada *fórmula de Crank-Nicholson*; e se $\gamma = 1$ obtém-se uma fórmula implícita, também livre de restrições quanto à magnitude relativa dos passos em tempo e espaço, porém bem mais complicada, denominada *fórmula de O'Brien, Hyman e Kaplan* (Babuska et alii, 1966). O limite de estabilidade das fórmulas de recorrência cresce juntamente com o valor de γ , e para $\gamma > 1/2$ as fórmulas implícitas são estáveis para qualquer λ (Crandall, 1956). Note-se que a diferença entre os esquemas explícitos ($\gamma = 0$) e os implícitos ($0 < \gamma < 1$) está no fato de haver, para o primeiro esquema, a imposição

$$\lambda < \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{h\pi}{2}\right)} \quad (2.37)$$

para obter estabilidade da solução, enquanto no segundo esquema sempre há estabilidade, independentemente do valor de λ (Godounov et Riabenki, 1977).

CAPÍTULO 3

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo 2 viu-se a maneira pela qual problemas de difusão são tratados por diferenças finitas. Neste capítulo será dada uma visão geral de elementos finitos e a maneira pela qual um problema de difusão é tratado, na literatura disponível, quando o método de elementos finitos é utilizado. Este capítulo tem também como objetivo possibilitar a comparação de métodos propostos pela literatura com o método apresentado no Capítulo 4.

3.2 - FUNDAMENTOS BÁSICOS

O método de elementos finitos, segundo Norrie e De Vries (1975), consiste em uma classe particular de procedimentos de discretização, para a qual as equações originais, com infinitos graus de liberdade, são transformadas em equações aproximadas com um número finito de graus de liberdade. A discretização é efetuada dividindo o domínio (ou região) em subdomínios (elementos finitos), de maneira que os parâmetros de uma representação funcional da solução sobre os elementos sejam as incógnitas do problema.

Segundo Chung (1978) trata-se de um método de aproximação para resolver equações diferenciais em problemas de valor inicial e de contorno. Neste método, um meio contínuo é dividido em pequenos elementos com formas convenientes (triângulos, quadriláteros, etc.). Escolhendo pontos (nós) sobre os elementos, as variáveis da equação diferencial são escritas como combinação de funções interpoladoras, sendo seus valores e os de suas derivadas especificados para estes nós. Desta forma as equações diferenciais são transformadas em equações "de elementos finitos" que governam cada elemento isoladamente. Estas equa

ções são agrupadas na forma de um sistema global de equações algébricas e os valores nodais determinados a partir deste sistema.

O método de elementos finitos pode ser subdividido em três categoriais, ou seja,

- a) Os métodos variacionais, em que é utilizado o princípio dos extremos para obter a aproximação desejada na derivação do conjunto de equações em função dos valores nodais.
- b) Os métodos residuais, nos quais é utilizada a diferença (resíduo) da solução verdadeira com a aproximada, mantendo-a menor que um parâmetro pequeno, prefixado.
- c) Os métodos diretos, para os quais os valores nodais U_i e as funções prescritas para os elementos são substituídos diretamente nas equações governantes do problema.

Convém notar que os parâmetros dos elementos são os valores das variáveis dependentes e de suas derivadas nos nós especificados em cada elemento.

3.3 - MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Na aproximação por elementos finitos, baseada na divisão do domínio em elementos, as variáveis dependentes U_i são representadas sobre o domínio elemento por elemento, em função dos valores nodais $\tilde{U}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Sobre cada elemento finito "e" as variáveis dependentes U_i são substituídas por funções aproximadas $\hat{U}_i$ da forma

$$\hat{U}_i^e = f^e(x, \tilde{U}_{i,k}^e) \begin{cases} j = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (3.1)$$

onde "e" representa o elemento, $\tilde{U}_{i,k}^e$ os valores nodais e suas derivadas, "n" o número de variáveis independentes, "m" o número de variáveis dependentes e "s" o número de nós por elemento. Como a solução U_i é contínua, requer-se que f_i^e seja contínua no domínio quando a dimensão do elemento tender a zero.

A função de aproximação mais simples é linear nos valores nodais $\tilde{U}_{i,k}^e$; assim a Equação 3.1 pode ser escrita como segue

$$\tilde{U}_i^e = \sum_{k=1}^s N_{i,k}^e(x) \tilde{U}_{i,k}^e, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

onde os $N_{i,k}^e$ são, na teoria de elementos finitos, denominados *funções de forma* ou *funções de interpolação*.

As funções de forma $N_{i,k}^e$ são funções das variáveis independentes x_j em cada elemento, isto é,

$$N_{i,k}^e = N_{i,k}^e(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.3)$$

Quando os x_j são os valores x_{jq} de um determinado elemento "q" a função de forma é dada por

$$N_{i,k}^e(x_{jq}) = \delta_{kq}, \quad (3.4)$$

onde δ_{kq} é o Delta de Kroenicker. Estas funções constituem o campo que descreve o comportamento da região, devendo satisfazer às condições de continuidade e de deformação constante. As funções de forma dependem da forma do elemento adotado e esta, por sua vez, depende do espaço e do sistema de referência adotado. Maiores detalhes podem ser obtidos em Norrie e De Vries (1975), Zienkiwicz (1977) e Chung (1978).

A função aproximada pode ser de ordem superior, sendo as mais utilizadas os polinômios de Lagrange de 2º e 3º graus, os polinômios cúbicos de Hermite, as funções "spline" e as funções trigonométricas

cas; estas funções de aproximação podem ser encontradas detalhadamente em Prenter (1975) e Yanenko (1971).

3.4 - MANEIRA USUAL ADOTADA PELA LITERATURA DISPONÍVEL NA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS DE DIFUSÃO

A técnica de elementos finitos está formulada de modo consistente para a solução de problemas de campo, tais como problemas nas áreas estrutural, térmica ou da mecânica dos fluidos, em regime permanente ou estacionário.

A tendência atual da literatura ao aplicar elementos finitos em problemas de difusão tem sido utilizá-los somente na transformação das equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias dependentes do tempo. Estas últimas são, então, resolvidas por diferenças finitas.

Neste trabalho procura-se desenvolver uma formulação consistente para tratar por elementos finitos tanto as variáveis espaciais quanto o tempo.

Na literatura, para o Problema 2.30, quando são utilizados elementos finitos, procura-se obter o funcional da Equação 2.30, como Desai (1979), Mitchell e Wait (1977) ou Fremond (1977), onde as partes espacial e temporal são separadas, resolvendo primeiro a parte espacial para um instante t por elementos finitos e depois integrando-a no tempo por diferenças finitas, como segue.

As condições iniciais e de contorno associadas à Equação 2.30 por Desai (1979) são

$$\begin{aligned}\bar{U}(x,0) &= \bar{U}_0(x) , & 0 < x < h, & \quad t < 0 ; \\ \bar{U}(0,t) &= \bar{U}_0(t) , & t > 0 ; \\ \bar{U}(h,t) &= \bar{U}_h(t) , & t > 0 ;\end{aligned}\tag{3.5}$$

onde h é o comprimento total do domínio.

O primeiro passo é dado escolhendo a configuração do elemento e consequentemente a discretização de domínio. Como no exemplo dado o meio é unidimensional, os subdomínios (elementos) são segmentos de reta. Aqui o domínio todo foi adotado como um só elemento, como mostra a Figura 3.1, de maneira que o domínio tenha um comprimento $2L$, em que $L = Y/\ell$, onde ℓ representa o comprimento total, isto é,

$$\ell = Y_2 - Y_1 .$$

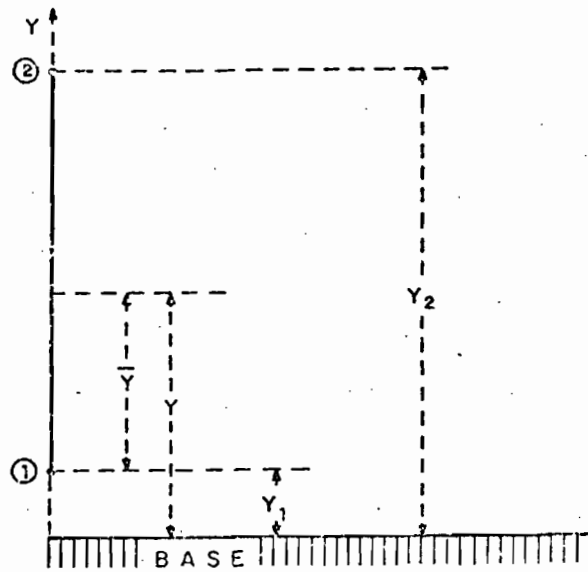


Fig. 3.1 - Discretização do domínio para o Problema 2.30.

A seguir escolhe-se o modelo aproximado $\hat{U}$, no caso linear, para expressar a função $\underline{U}$ em um elemento, como segue

$$\hat{U} = \frac{1}{2} (1 - L) \tilde{U}_1(t) + \frac{1}{2} (1 + L) \tilde{U}_2(t) , \quad (3.7)$$

ou seja,

$$\underline{\tilde{U}} = \underline{N}(x)\underline{\tilde{U}}(t) = \underline{N} \underline{\tilde{U}} , \quad (3.8)$$

onde a barra representa matriz ou vetor, donde

$$\underline{\tilde{U}}^T = [\tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2]$$

$\tilde{U}$ é o vetor das funções não-conhecidas nos nós 1 e 2, respectivamente; $\tilde{U}_1$ e $\tilde{U}_2$ são dependentes do tempo; e a matriz $\underline{N}$ é dependente apenas da coordenada "x", pois as funções de forma, neste caso, são funções apenas do espaço.

Para a derivação das equações dos elementos é utilizada a formulação variacional para um determinado instante, como segue

$$\Omega = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \tilde{U} \right] dx - \int_{x_1}^{x_2} \bar{q} \tilde{U} dx , \quad (3.9)$$

onde

$$\bar{q} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}$$

$\bar{q}$ é o termo forçante, isto é, o fluxo.

Utilizando a Expressão 3.7 tem-se

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (1-L) \tilde{U}_1 + \frac{1}{2} (1+L) \tilde{U}_2 \right] ,$$

donde

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] [\tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2]^T = \underline{B} \underline{\tilde{U}} , \quad (3.10)$$

onde $\underline{B}$ é a matriz dos coeficientes;

e

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \dot{\tilde{U}} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (1-L) \tilde{U}_1 + \frac{1}{2} (1+L) \tilde{U}_2 \right],$$

isto é,

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \underline{N} [\dot{\tilde{U}}_1 \quad \dot{\tilde{U}}_2] = \underline{N} \dot{\tilde{U}}^T, \quad (3.11)$$

onde $\dot{\tilde{U}}^T = [\dot{\tilde{U}}_1 \quad \dot{\tilde{U}}_2]$ e o ponto que denota a derivada com respeito ao tempo, e a matriz das funções de forma $\underline{N}$ permanece constante em relação à derivada temporal. Substituindo as Equações 3.10 e 3.11 no Funcional 3.9 obtém-se

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{\ell}{4} \int_{-1}^1 \underline{\tilde{U}}^T \underline{B}^T \underline{B} \tilde{U} dL + \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \dot{\tilde{U}}^T \underline{N}^T \underline{N} \tilde{U} dL - \\ & - \bar{q} \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \underline{N} \tilde{U} dL, \end{aligned} \quad (3.12)$$

o qual substituindo as matrizes e efetuando seus produtos toma a forma que segue

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{4\ell} \int_{-1}^1 (\tilde{U}_1^2 - 2\tilde{U}_1\tilde{U}_2 + \tilde{U}_2^2) dL + \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 (N_1^2 \dot{\tilde{U}}_1 \tilde{U}_1 + \\ & + N_1 N_2 \dot{\tilde{U}}_1 \tilde{U}_2 + N_2 N_1 \dot{\tilde{U}}_2 \tilde{U}_1 + N_2^2 \dot{\tilde{U}}_2 \tilde{U}_2) dL - \\ & - q\ell \int_{-1}^1 (N_1 \tilde{U}_1 + N_2 \tilde{U}_2) dL. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Efetuada a derivação do funcional Ω , o qual envolve derivações no tempo com respeito a $\tilde{U}_1$ e $\tilde{U}_2$ supõem-se $\dot{\tilde{U}}_1$ e $\dot{\tilde{U}}_2$ constantes. Esta suposição faz com que a aproximação matemática do funcional seja menos rigorosa. Esta diferenciação leva a um sistema de equações final dependente do tempo, como segue

$$\frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{U}}_1 \\ -1 & \dot{\tilde{U}}_2 \end{bmatrix} - \frac{\bar{q}\ell}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 ,$$

ou então,

$$\underline{K}_x \tilde{U} + \underline{K}_t \dot{\tilde{U}} - \underline{Q} = 0 . \quad (3.14)$$

Quando o domínio espacial $\bar{e}$ é dividido em um maior número de elementos, a alteração sofrida pelo Sistema 3.14 está em colocá-la sob um sinal de somatório em "e" (número de elementos), isto é,

$$\sum_e (\underline{K}_x^e \tilde{U}^e + \underline{K}_t^e \dot{\tilde{U}}^e - \underline{Q}^e) = 0 , \quad (3.15)$$

onde $\underline{Q}^e$ é função do tempo.

Até aqui somente o domínio espacial foi discretizado; agora, faz-se necessário obter soluções no tempo. Para obter a solução no tempo utiliza-se normalmente o método de diferenças finitas para discretizar as derivadas em relação ao tempo. A Equação 3.15 é uma equação diferencial para um vetor $\underline{U}(t)$ desconhecido; Fremond (1977) apresenta alguns esquemas para resolver esta equação, como segue:

- a) Dividindo o domínio $[0, T]$ em intervalos Δt e supondo uma aproximação

$$\dot{\underline{U}}_1 = \left[\frac{\partial \underline{\tilde{U}}}{\partial t} \right]_t \cong \frac{\underline{\tilde{U}}(t + \Delta t) - \underline{\tilde{U}}(t)}{\Delta t} \quad (3.16)$$

para representar a derivação em relação ao tempo obtêm-se uma equação

$$\underline{K}_t \frac{\underline{\tilde{U}}(t + \Delta t) - \underline{\tilde{U}}(t)}{\Delta t} + \underline{K}_x \underline{\tilde{U}}(t) = \underline{Q}(t) , \quad (3.17)$$

a qual resulta no sistema linear

$$\underline{K}_t \underline{\tilde{U}}(t + \Delta t) = \underline{K}_t \underline{\tilde{U}}(t) + \Delta t [\underline{Q}(t) - \underline{K}_x \underline{\tilde{U}}(t)] , \quad (3.18)$$

cuja resolução deve respeitar a condição de estabilidade

$$\Delta t / h^2 \leq a , \quad (3.19)$$

onde h é a dimensão mínima dos diversos elementos possíveis na rede de discretização e " a " é uma constante a ser determinada. Esta condição é desagradável por impor um Δt pequeno, o que obriga que sejam feitas muitas iterações para a obtenção de $\underline{\tilde{U}}$, isto torna este esquema pouco utilizado.

b) Substituindo a derivada $\partial U / \partial t$ por

$$\left[\frac{\partial \underline{\tilde{U}}}{\partial t} \right]_t \cong \frac{\underline{\tilde{U}}(t) - \underline{\tilde{U}}(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.20)$$

obtêm-se o sistema

$$(\underline{K}_x + \Delta t \underline{K}_t) \underline{\tilde{U}}(t) = \underline{K}_x \underline{\tilde{U}}(t - \Delta t) + \Delta t \underline{Q}(t) , \quad (3.21)$$

o qual é perfeitamente utilizável, pois não há imposição de condição de estabilidade a ser obedecida para solucionar o sistema.

c) Substituindo a derivada $\partial U / \partial t$ por

$$\left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right]_t \cong \frac{\tilde{U}(t + \Delta t) - \tilde{U}(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (3.22)$$

obtem-se o sistema

$$\underline{K}_x \tilde{U}(t + \Delta t) - \tilde{U}(t - \Delta t) = 2\Delta t \underline{Q}(t) - \underline{K}_t \tilde{U}(t) ,$$

o qual não é estável e portanto não pode ser utilizado.

d) Substituindo a derivada $\partial U / \partial t$ por

$$\left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right]_t \cong \frac{\tilde{U}(t + \Delta t) - \tilde{U}(t)}{\Delta t} ,$$

$$\underline{K}_t \tilde{U} \cong \frac{1}{2} \underline{K}_t \tilde{U}(t) + \tilde{U}(t + \Delta t) , \quad (3.23)$$

$$\underline{Q}(t) \cong \frac{1}{2} \underline{Q}(t) + \underline{Q}(t + \Delta t) ,$$

obtem-se o seguinte esquema

$$\begin{aligned} (\underline{K}_x + \frac{\Delta t}{2} \underline{K}_t) \tilde{U}(t + \Delta t) &= (\underline{K}_x - \frac{\Delta t}{2} \underline{K}_t) \tilde{U}(t) + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \underline{Q}(t) + \underline{Q}(t + \Delta t) , \end{aligned} \quad (3.24)$$

o qual não tem condições de estabilidade. Este esquema é o esquema de Crank-Nicholson e é muito utilizado em aplicações de diferenças finitas.

Percebe-se então pela literatura que a solução de equações diferenciais parciais que possuem derivadas em espaço e tempo envolvem dois passos: 1) discretização no espaço e depois; 2) variação no tempo em vários níveis (Desai, 1979).

3.5 - MÉTODO DE GALERKIN

Os métodos de resíduos ponderados mais conhecidos são os métodos da colocação, do subdomínio, de Galerkin e dos mínimos quadrados. Até o presente o método de Galerkin tem sido o mais usado com elementos finitos e quase sempre em problemas de equilíbrio.

No método de Galerkin a função aproximada $\hat{U}$ é tal que a integral do resíduo ponderado por W_i da equação governante do problema deve anular-se sobre o domínio. Neste caso, a função $\hat{U}$ é uma solução aproximada da função U , solução exata. As funções-peso são as próprias funções de forma usadas na construção da solução aproximada.

Aproximando o método de Galerkin na Equação 2.17 na forma usual encontrada na literatura segue que o resíduo R é dado por

$$\underline{R}(x) = \left[\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right]. \quad (3.25)$$

Para utilizar o método de Galerkin na análise por elementos finitos usam-se as funções de forma M_i como funções-peso na integral $\int R(x)W_i dn = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, $N_i = W_i(x)$, os quais são definidos sobre todo o domínio.

Considerando um elemento genérico para a formulação de Galerkin e uma aproximação linear $\hat{U}$ para um elemento, tendo em vista a Expressão 3.7, tem-se

$$\hat{U} = \frac{1}{2} (1 - L)\tilde{U}_1(t) + \frac{1}{2} (1 + L)\tilde{U}_2(t)$$

ou

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^2 N_i \tilde{U}_i, \quad (3.26)$$

onde as funções de forma N_i são funções de "x", isto é, $N_i = N_i(x)$, e as funções nodais $\tilde{U}_i$ são funções do tempo, ou seja, $\tilde{U}_i = \tilde{U}_i(t)$. Portanto, para um determinado instante "t", na Equação 3.26, a função $\hat{U}$ varia ao longo de um elemento, isto é, $\tilde{U}_i = \tilde{U}_i(x, t)$, sendo esta dependência do tempo incluída nas funções $\tilde{U}_i$ apenas nos nós $\tilde{U}_1(t)$ e $\tilde{U}_2(t)$, como mostra a Figura 3.2.

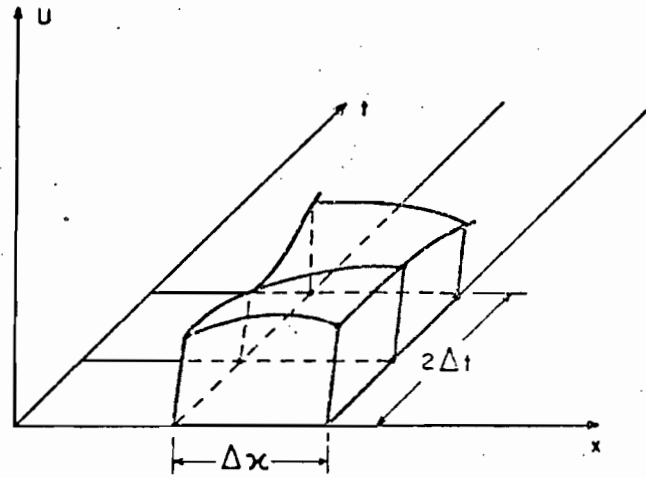


Fig. 3.2 - Configuração que mostra a dependência em "x" e "t" de $\tilde{U}_i$ nos nós da malha.

Então, de acordo com o exposto até aqui pode-se escrever

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right) N_i dx = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.27)$$

a qual é integrada por partes, como segue

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right] N_i dx = \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right] N_i \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (3.28)$$

e substituindo $\hat{U}$ por $\sum N_j \tilde{U}_j$, nesta equação, obtêm-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \tilde{U}_j dx + \int_{x_1}^{x_2} N_j N_i \left[\frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x} \right] dx = \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right] N_i \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (3.29)$$

para $i = 1.$ e $j = 1., 2.$ e $i = 2.$ e $j = 1., 2.$, de forma que em notação matricial se tenha

$$\int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} (\partial N_1 / \partial x)(\partial N_1 / \partial x) & (\partial N_2 / \partial x)(\partial N_1 / \partial x) \\ (\partial N_1 / \partial x)(\partial N_2 / \partial x) & (\partial N_2 / \partial x)(\partial N_2 / \partial x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} dx + \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_2 N_1 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{U}}_1 \\ \dot{\tilde{U}}_2 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} (\partial \hat{U} / \partial x) N_1 \Big|_{x_1}^{x_2} \\ (\partial \hat{U} / \partial x) N_2 \Big|_{x_1}^{x_2} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

e integrando o lado esquerdo da Equação 3.30 obtêm-se a Equação 3.14, uma vez que $N_1 = 0$ em x_2 , $N_2 = 0$ em x_1 , $N_1 = 1$ em x_1 e $N_2 = 1$ em x_2 , isto é,

$$\underline{K_x} \tilde{\underline{U}} + \underline{K_t} \dot{\tilde{\underline{U}}} - \underline{Q} = 0,$$

que após a reunião com os elementos restantes toma a forma da Equação 3.15.

Percebe-se que novamente a parte temporal deve ser encontrada separadamente por algum método, como na seção anterior. A primeira tentativa neste trabalho foi aplicar na Equação 3.15, novamente, um método de elementos finitos, o que não levou a resultados bons.

CAPÍTULO 4

MÉTODO PROPOSTO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO POR ELEMENTOS FINITOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Este método tem como finalidade resolver problemas de difusão sem desdobrá-los, isto é, as partes de interpolação no espaço e de variação no tempo são resolvidas simultaneamente. O método utiliza as técnicas de Galerkin e as funções de interpolação de Lagrange para determinar as funções de forma. A diferença deste método e o do capítulo anterior está essencialmente no fato de o eixo tempo ser considerado de mesma espécie que os eixos de espaço. Define-se, então, um elemento espaço-tempo cuja dimensão mínima é dois, e o elemento neste caso é de área. O presente método sempre trata o problema com uma dimensão a mais que outros métodos, pois no caso de se tratar de um problema no espaço $n-1$ dimensional, acrescenta-se o eixo dos tempos e trabalha-se num espaço de n dimensões.

4.2 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O problema é modelado matematicamente por um conjunto de equações diferenciais parciais no domínio D , dadas por

$$f_D(U; x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t) = 0 \quad (4.1)$$

e com condições de contorno representadas por equações diferenciais da forma

$$f_C(U; x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t) = 0 \quad (4.2)$$

No método aqui proposto, supõe-se que a solução U está desenvolvida num espaço de funções n dimensional, cuja base é gerada pelas funções de forma

$$N_j(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) ,$$

isto é,

$$\hat{U} = \sum_{j=0}^{n-1} N_j \tilde{U}_j , \quad (4.3)$$

onde os valores nodais $\tilde{U}_j$ são valores da solução aproximada $\hat{U}$ em alguns pontos (nós) do domínio. Analisando de outro modo, $\tilde{U}_j$ são as coordenadas de $\hat{U}$ no espaço gerado por N_j , e $\hat{U}$ é a solução aproximada correspondente à função procurada U , por estar sendo desenvolvida em um número finito de termos.

Substituindo as Funções 4.3 na Equação 4.1 a igualdade fica satisfeita a menos de um resíduo R , dado por

$$f_D(\hat{U}; x_1, x_2, \dots, t) = R . \quad (4.4)$$

No desenvolvimento do trabalho esta equação será referida como residual. Note-se que quando R tende para zero a solução aproximada $\hat{U}$ tende para a solução exata U .

O método de Galerkin impõe que a integral do resíduo ponderado, no domínio, seja nula; utilizando as funções de forma como funções-peso, tem-se

$$G_i(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n) = \int_D N_i R dD = 0 , \quad i = 1, \dots, n , \quad (4.5)$$

que é um conjunto de equações. Sendo N_i função de

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t ,$$

ao ser efetuada a integração do Sistema 4.5 elas desaparecem, surgindo uma expressão G_i em função das coordenadas $\tilde{U}_j$

$$G_i(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

O conjunto de expressões G_i forma um sistema de equações algébricas lineares ou não, dependendo do tipo de equação diferencial do problema. Este sistema será homogêneo para equações homogêneas e não-homogêneo para equações não-homogêneas.

As Condições de Contorno 4.2 permitem calcular alguns valores de $\tilde{U}_j$ os quais substituídos no Sistema 4.6 fornecem um novo sistema (não-homogêneo). A sua solução fornece os valores de $\tilde{U}_j$ nos outros pontos. Substituindo os $\tilde{U}_j$ na Expressão 4.3 tem-se a solução aproximada $\hat{U}$ do problema.

Supondo o domínio dividido em ℓ subdomínios, pode-se reescrever o Conjunto de Equações 4.5 na forma

$$\sum_{e=0}^{\ell-1} \int_{D^e} N_i^e R^e dD^e = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

onde n é o número total de pontos no domínio, e N_i^e vale 1 no ponto "i" do elemento e zero em todos os outros pontos, além de ser definida no elemento "e". Isto significa que, em cada ponto "i", só existem integrais correspondentes aos elementos (D^e) que tenham o nó "i" em comum.

Se os nós do elemento "e" pertencerem ao conjunto "r", então estarão participando de "r" das "n" equações com expressões dadas por

$$\int_{D^e} N_i^e R^e dD^e, \quad i \in \{r\}, \quad (4.8)$$

as quais, quando colocadas na forma matricial, fornecem as matrizes do elemento correspondente.

Para esclarecer melhor o que foi dito até aqui considere-se o domínio $D(x,t)$ dividido em oito elementos triangulares, isto é, $\ell = 8$ como mostra a Figura 4.1.

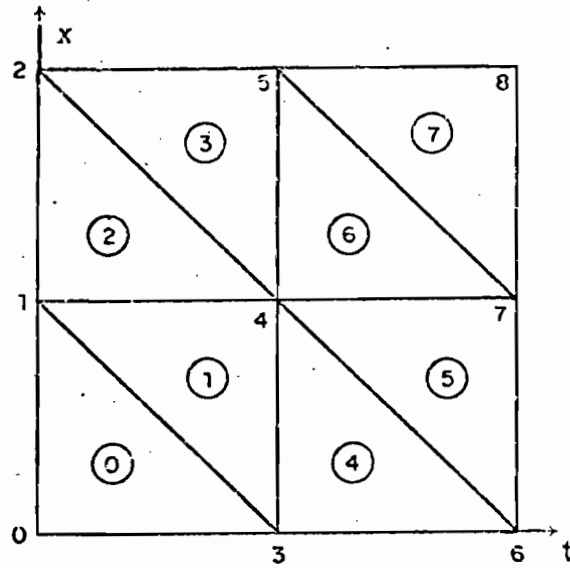


Fig. 4.1 - Numeração dos elementos na malha e numeração global dos nós.

O presente desenvolvimento será feito através de funções lineares de Lagrange e portanto ter-se-ão apenas três nós por elementos donde, no Sistema de Equações 4.7, ter-se-á $n = 9$, isto é,

$$\sum_{e=0}^7 \int_{D^e} N_i^e R^e dD^e = 0 \quad i = 0, 1, \dots, 8. \quad (4.9)$$

Desenvolvendo o somatório para o nó $i = 0$ tem-se

$$\int_{D^0} N_0^0 R^0 dD^0 = 0,$$

onde aparece apenas uma integral devido ao fato de o nó pertencer somente a um elemento. Para o nó $i = 1$,

$$\int_{D^0} N_1^0 R^0 dD^0 + \int_{D^1} N_1^1 R^1 dD^1 + \int_{D^2} N_1^2 R^2 dD^2 = 0 ;$$

para $i = 2$,

$$\int_{D^2} N_2^2 R^2 dD^2 + \int_{D^3} N_2^3 R^3 dD^3 = 0 ;$$

para $i = 3$,

$$\int_{D^0} N_3^0 R^0 dD^0 + \int_{D^1} N_3^1 R^1 dD^1 + \int_{D^4} N_3^4 R^4 dD^4 = 0 ; \quad (4.10)$$

para $i = 4$,

$$\begin{aligned} \int_{D^4} N_4^1 R^1 dD^1 + \int_{D^2} N_4^2 R^2 dD^2 + \int_{D^3} N_4^3 R^3 dD^3 + \int_{D^4} N_4^4 R^4 dD^4 + \\ + \int_{D^5} N_4^5 R^5 dD^5 + \int_{D^6} N_4^6 R^6 dD^6 = 0 ; \end{aligned}$$

para $i = 5$,

$$\int_{D^3} N_5^3 R^3 dD^3 + \int_{D^6} N_5^6 R^6 dD^6 + \int_{D^7} N_5^7 R^7 dD^7 = 0 ;$$

para $i = 6$,

$$\int_{D^4} N_6^4 R^4 dD^4 + \int_{D^5} N_6^5 R^5 dD^5 = 0 ;$$

para $i = 7$,

$$\int_{D^5} N_7^5 R^5 dD^5 + \int_{D^6} N_7^6 R^6 dD^6 + \int_{D^7} N_7^7 R^7 dD^7 = 0 ;$$

para $i = 8$,

$$\int_{D^7} N_8^7 R^7 dD^7 = 0 ,$$

onde novamente se tem apenas uma integral. Agora passa-se este sistema para a referência local, onde a numeração dos nós é feita como mostra a Figura 4.2.

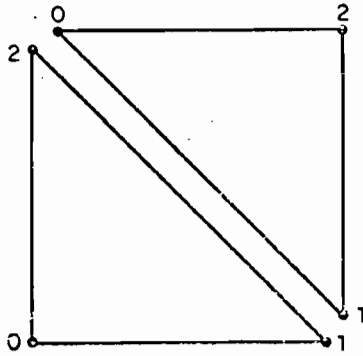


Fig. 4.2 - Numeração local dos nós.

Então, substituindo os índices nas funções de forma do Conjunto de Integrais 4.10 tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_{D^0} N_0^0 R^0 dD^0 &= 0 \\
 \int_{D^0} N_2^0 R^0 dD^0 + \int_{D^1} N_0^1 R^1 dD^1 + \int_{D^2} N_0^2 R^2 dD^2 &= 0 \\
 \int_{D^2} N_2^2 R^2 dD^2 + \int_{D^3} N_0^3 R^3 dD^3 &= 0 \\
 \int_{D^0} N_1^0 R^0 dD^0 + \int_{D^1} N_1^1 R^1 dD^1 + \int_{D^4} N_0^4 R^4 dD^4 &= 0 \\
 \int_{D^1} N_2^1 R^1 dD^1 + \int_{D^2} N_1^2 R^2 dD^2 + \int_{D^3} N_1^3 R^3 dD^3 + \int_{D^4} N_2^4 R^4 dD^4 + \int_{D^5} N_0^5 R^5 dD^5 + \int_{D^6} N_0^6 R^6 dD^6 &= 0 \\
 \int_{D^3} N_3^3 R^3 dD^3 + \int_{D^6} N_6^6 R^6 dD^6 + \int_{D^7} N_7^7 R^7 dD^7 &= 0 \\
 \int_{D^4} N_1^4 R^4 dD^4 + \int_{D^5} N_1^5 R^5 dD^5 &= 0 \\
 \int_{D^5} N_2^5 R^5 dD^5 + \int_{D^6} N_1^6 R^6 dD^6 + \int_{D^7} N_1^7 R^7 dD^7 &= 0 \\
 \int_{D^7} N_2^7 R^7 dD^7 &= 0
 \end{aligned}$$

(4.11)

o qual, para melhor visualização, pode ser colocado na forma como mostra o esquema a seguir

$$\begin{array}{rcl}
 \left| \begin{array}{c} I_0^0 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_2^0 + I_0^1 + I_2^2 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_2^2 + I_0^3 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_1^0 + I_1^1 + I_2^2 + I_0^3 + I_1^4 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_2^1 + I_1^2 + I_1^3 + I_2^4 + I_0^5 + I_0^6 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_2^3 + I_1^4 + I_1^5 + I_2^6 + I_0^7 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_1^4 + I_1^5 + I_2^6 + I_1^7 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_2^5 + I_1^6 + I_1^7 \end{array} \right| & & = 0 \\
 \left| \begin{array}{c} I_2^7 \end{array} \right| & & = 0 ,
 \end{array} \quad (4.12)$$

onde I^e representam as integrais do Sistema 4.11; o índice "i" denota o n^o no sistema local; e o índice "e", o elemento, respectivamente.

Juntando no Sistema 4.11 todas as integrais referentes ao mesmo elemento, o cálculo de um elemento genérico "e" é feito desenvolvendo e efetuando as integrais de mesmo "e".

O resíduo R tem a mesma forma matemática que a solução aproximada $\hat{U}$, portanto pode-se fazer

$$R = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \tilde{U}_j , \quad (4.13)$$

onde M_j são as funções de forma e $n = 3$.

Substituindo a Expressão 4.13 nas integrais do Sistema 4.11 obtêm-se

$$\int_{D^0} N_0^0 \sum_j^2 M_j^0 \bar{U}_j^0 dD^0 = \sum_{j=0}^2 U_j^0 \int_{D^0} N_0^0 M_j^0 dD^0 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^0 \int_{D^0} N_2^0 M_j^0 dD^0 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^1 \int_{D^1} N_0^1 M_j^1 dD^1 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^2 \int_{D^2} N_0^2 M_j^2 dD^2 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^2 \int_{D^2} N_2^2 M_j^2 dD^2 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^3 \int_{D^3} N_0^3 M_j^3 dD^3 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^0 \int_{D^0} N_1^0 M_j^0 dD^0 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^1 \int_{D^1} N_1^1 M_j^1 dD^1 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^4 \int_{D^4} N_0^4 M_j^4 dD^4 = 0$$

(4.14)

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^1 \int_{D^1} N_2^1 M_j^1 dD^1 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^2 \int_{D^2} N_1^2 M_j^2 dD^2 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^3 \int_{D^3} N_1^3 M_j^3 dD^3 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^4 \int_{D^4} N_2^4 M_j^4 dD^4 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^5 \int_{D^5} N_0^5 M_j^5 dD^5 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^6 \int_{D^6} N_0^6 M_j^6 dD^6 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^3 \int_{D^3} N_2^3 M_j^3 dD^3 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^6 \int_{D^6} N_2^6 M_j^6 dD^6 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^7 \int_{D^7} N_0^7 M_j^7 dD^7 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^4 \int_{D^4} N_1^4 M_j^4 dD^4 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^5 \int_{D^5} N_1^5 M_j^5 dD^5 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^5 \int_{D^5} N_2^5 M_j^5 dD^5 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^6 \int_{D^6} N_1^6 M_j^6 dD^6 + \sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^7 \int_{D^7} N_1^7 M_j^7 dD^7 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \bar{U}_j^7 \int_{D^7} N_2^7 M_j^7 dD^7 = 0.$$

Efetutando as integrais

$$\int_D e^N e^M e^d D^e = K_{ij}^e \quad (4.15)$$

e substituindo-as no Sistema 4.14 tem-se

$$\sum_{j=0}^2 \tilde{U}_j^0 K_{0j}^0 = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^0 K_{2j}^0 + \tilde{U}_j^1 K_{0j}^1 + \tilde{U}_j^2 K_{0j}^2) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^2 K_{2j}^2 + \tilde{U}_j^3 K_{0j}^3) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^0 K_{1j}^0 + \tilde{U}_j^1 K_{1j}^1 + \tilde{U}_j^4 K_{0j}^4) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^1 K_{2j}^1 + \tilde{U}_j^2 K_{1j}^2 + \tilde{U}_j^3 K_{1j}^3 + \tilde{U}_j^4 K_{2j}^4 + \tilde{U}_j^5 K_{0j}^5 + \tilde{U}_j^6 K_{0j}^6) = 0 \quad (4.16)$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^3 K_{2j}^3 + \tilde{U}_j^6 K_{2j}^6 + \tilde{U}_j^7 K_{0j}^7) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^4 K_{1j}^4 + \tilde{U}_j^5 K_{1j}^5) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 (\tilde{U}_j^5 K_{2j}^5 + \tilde{U}_j^6 K_{1j}^6 + \tilde{U}_j^7 K_{1j}^7) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \tilde{U}_j^7 K_{2j}^7 = 0$$

Desenvolvendo estes somatórios e juntando os K_{ij}^e e $\tilde{U}_j^e$ por elemento, como proposto no Esquema 4.12, obtêm-se, na forma matricial, para cada elemento "e", uma matriz (A) de coeficientes em K_{ij}^e , denominada *matriz do elemento*, multiplicada por um vetor de incógnitas $\tilde{U}_j^e$, igual a um vetor θ_j^e , denominado *vetor do elemento*, o qual é nulo para equações homogêneas, como segue

$$\begin{bmatrix} K_{00}^e & K_{01}^e & K_{02}^e \\ K_{10}^e & K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{20}^e & K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{U}_0^e \\ \tilde{U}_1^e \\ \tilde{U}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^e \\ \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Reunindo as nove matrizes de elemento em uma só matriz $\underline{K}$, denominada *matriz global do sistema*, e os nove vetores em um só, denominado *vetor global do sistema*, tem-se a seguinte equação matricial

$$(4.18)$$

ou seja, em numeração global após efetuar as somas

$$\begin{bmatrix}
 K_{00} & K_{01} & 0 & K_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{10} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 & 0 \\
 K_{30} & K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} & 0 & 0 \\
 0 & K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & 0 \\
 0 & 0 & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & 0 & K_{57} & K_{58} \\
 0 & 0 & 0 & K_{63} & K_{64} & 0 & K_{66} & K_{67} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{85} & 0 & K_{87} & K_{88}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_0 \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \\ \bar{U}_7 \\ \bar{U}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}.$$

(4.19)

A Equação matricial 4.19 é solucionada corretamente apenas caso se conheçam alguns valores $\bar{U}_i$ (condições iniciais e/ou de contorno). Supondo então conhecer os valores de $\bar{U}_0$, $\bar{U}_1$ e $\bar{U}_2$ a Equação 4.19 tem a seguinte forma

$$\begin{bmatrix}
 K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} & 0 & 0 \\
 K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & 0 \\
 0 & K_{54} & K_{55} & 0 & K_{57} & K_{58} \\
 K_{63} & K_{64} & 0 & K_{66} & K_{67} & 0 \\
 0 & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\
 0 & 0 & K_{85} & 0 & K_{87} & K_{88}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{bmatrix}.$$

(4.20)

onde

$$F_3 = \theta_3 - K_{30}\tilde{U}_0 - K_{31}\tilde{U}_1 ,$$

$$F_4 = \theta_4 - K_{41}\tilde{U}_1 - K_{42}\tilde{U}_2 ,$$

$$F_5 = \theta_5 - K_{52}\tilde{U}_0 ,$$

$$F_6 = \theta_6 ,$$

$$F_7 = \theta_7 , \text{ e}$$

$$F_8 = \theta_8 .$$

O Sistema 4.20 pode ser solucionado por algum método de resolução de sistemas de equações lineares.

4.3 - OBSERVAÇÕES SOBRE O PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa desenvolvido (em ALGOL) para implementar o método, aqui proposto, de resolução de equações diferenciais parciais do tipo parabólico, é constituído de diversas sub-rotinas, todas desenvolvidas pelo autor. O fato de este programa estar na linguagem ALGOL permite alterar o número de passos no tempo e no espaço sem que se faça necessário qualquer alteração no programa, tendo em vista as novas dimensões de matrizes e vetores serem calculadas implicitamente.

No presente caso o programa principal tem como finalidade de apenas fornecer dados às sub-rotinas, chamar estas e imprimir resultados parciais ou finais.

A sub-rotina MATFINAL é responsável pelo desenvolvimento propriamente dito do método proposto, gerando as matrizes dos elementos a partir das coordenadas cartesianas dos nós dos vértices de cada elemento, após o que junta estas matrizes para formar uma só matriz de

correlação, e a partir das condições iniciais e de contorno forma um sistema de equações lineares, o qual é o produto final desta sub-rotina.

As sub-rotinas INDICADOR, COORDENADAS e INCIDENCIA são rotinas auxiliares, onde a primeira relaciona a posição de um nó dentro do elemento com sua localização na malha; a segunda gera as coordenadas dos vértices dos elementos em um sistema cartesiano; e a última fornece os pontos que pertencem à condição inicial e ao contorno.

Para a resolução do sistema final e consequente obtenção da solução da equação diferencial ao longo do tempo foram desenvolvidas as rotinas GAUSSQB e GAUSSJORDAN. A escolha de qual destas sub-rotinas será utilizada para resolver o sistema de equações é feita automaticamente no programa principal, dependendo de qual das duas use menos memória de computador, a partir da largura de banda da matriz de coeficientes, fornecida pela sub-rotina LARGURADEBANDA.

As outras sub-rotinas são utilizadas apenas para gerar os resultados das soluções analíticas e fazer a comparação entre os resultados destas com os resultados do método proposto.

O programa como um todo é totalmente automático, sendo necessário fornecer apenas os valores dos coeficientes das equações; o domínio desejado do espaço e do tempo; o número de intervalos em que estes domínios serão divididos, podendo estes ser de mesma dimensão ou não; e as condições iniciais e de contorno.

Quando o número de elementos aumenta há um crescimento exponencial de memória utilizada no programa computacional, o que dificulta a obtenção do resultado final; entretanto este problema poderá ser resolvido utilizando o método frontal, o que levará a um menor consumo de memória.

Note-se que para fazer modificações no programa computacional, devido ao acréscimo de um termo não-homogêneo ou de uma condição de contorno não-homogênea, não surgem dificuldades, pois sempre se fica restrito a somar uma nova matriz à matriz do elemento ou um novo vetor ao vetor de elemento.

O programa não foi estendido para mais de uma variável espacial devido ao aumento de utilização de memória que isto acarreta, o que poderá ser feito para outra máquina ou utilizando o método frontal.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES DO MÉTODO

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas quatro aplicações do método proposto, que são baseados em formas diferentes da equação

$$\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial U}{\partial x}, U, x, t \right) \quad (5.1)$$

para as quais foram encontradas soluções analíticas para determinadas condições iniciais e de contorno, o que possibilitou a comparação dos resultados destas com os obtidos pelo método numérico proposto.

5.2 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UMA BARRA UNIDIMENSIONAL

Nesta seção procura-se solucionar a equação

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (5.2)$$

com o intuito de testar a matriz do elemento e verificar a ordem do resíduo.

Supõem-se então as seguintes condições

- inicial

$$U(x, 0) = \cos x - \sin x, \quad 0 \leq x \leq L,$$

- de contorno

$$U(0,t) = e^{-t}, \quad t > 0 ;$$

$$U(1,t) = e^{-t}(\cos L - \operatorname{sen} L), \quad t > 0 .$$

Então, para a Equação 5.2 a solução analítica é

$$U(x,t) = e^{-t}(\cos x - \operatorname{sen} x) \quad (5.3)$$

com a qual os resultados do método são comparados.

Substituindo a função U na Equação 5.2 por uma função aproximada $\hat{U}$ obtém-se

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \underline{R}, \quad (5.4)$$

onde $\underline{R}$ é o vetor de resíduos.

Como o eixo principal x e o eixo temporal t são considerados de mesma espécie, foram escolhidos elementos triangulares sobre o plano espaço-tempo (x,t) . A função de interpolação usada é de Lagrange de 3º grau (para que a derivada segunda seja linear). Assim, cada triângulo contém 10 nós, como mostra a Figura 5.1.

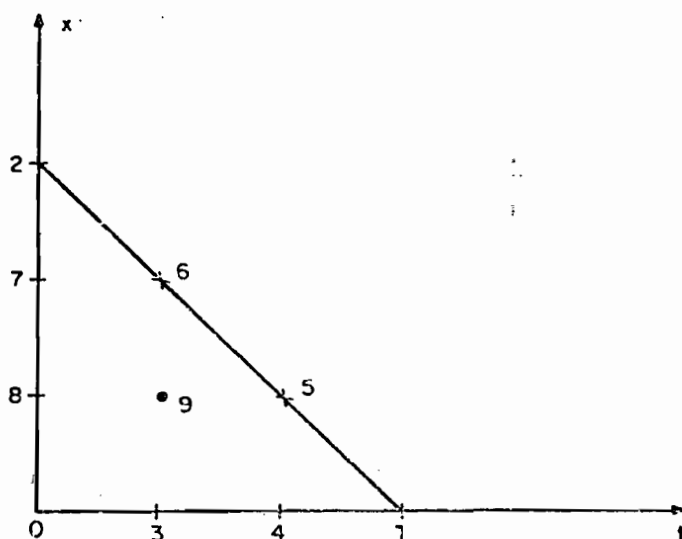


Fig. 5.1 - Elemento finito escolhido para a resolução da Equação 5.2.

A função aproximada $\hat{U}$ é dada por

$$\begin{aligned} \hat{U} = & N_0 \tilde{U}_0 + N_1 \tilde{U}_1 + N_2 \tilde{U}_2 + N_3 \tilde{U}_3 + N_4 \tilde{U}_4 + N_5 \tilde{U}_5 + \\ & + N_6 \tilde{U}_6 + N_7 \tilde{U}_7 + N_8 \tilde{U}_8 + N_9 \tilde{U}_9 , \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde as funções N_i , para $i = 0, 2, \dots, 9$, são dadas em função das coordenadas naturais (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (Zienkiewicz, 1977) como segue

$$N_0 = \frac{1}{2} (3\xi_0 - 1)(3\xi_0 - 2)\xi_0 ,$$

$$N_1 = \frac{1}{2} (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2)\xi_1 ,$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2)\xi_2 ,$$

$$N_3 = \frac{9}{2} \xi_0 \xi_1 (3\xi_0 - 1) ,$$

$$N_4 = \frac{9}{2} \xi_0 \xi_1 (3\xi_1 - 1) ,$$

$$N_5 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1) ,$$

$$N_6 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) ,$$

(5.6),

$$N_7 = \frac{9}{2} \xi_2 \xi_0 (3\xi_0 - 1) ,$$

$$N_8 = \frac{9}{2} \xi_2 \xi_0 (3\xi_2 - 1) ,$$

$$N_9 = 27 \xi_0 \xi_1 \xi_2 ,$$

para as quais são válidas as seguintes relações

$$x = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 ,$$

$$t = \xi_0 t_0 + \xi_1 t_1 + \xi_2 t_2 ,$$

$$1 = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 ,$$

onde (x_i, t_i) são as coordenadas dos v̄rtices do elemento.

Para substituir a função aproximada $\hat{U}$ na Equação 5.4 são obtidas suas derivadas parciais em função de x e t , isto é,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_0^2} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_0 \partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_1 \partial \xi_0} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_1^2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_2 \partial \xi_0} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi_2^2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right)^2, \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi_0} \right) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi_2} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right), \quad (5.8)$$

onde

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{g_{01}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{g_{11}}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{g_{21}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{g_{02}}{\Delta}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{g_{12}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{g_{22}}{\Delta},$$

para $\Delta = g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21}$; sendo

$$g_{01} = -(t_2 - t_1), \quad g_{02} = x_2 - x_1,$$

$$g_{11} = t_2 - t_0, \quad g_{12} = -(x_2 - x_0), \quad (5.10)$$

$$g_{21} = -(t_1 - t_0), \quad g_{22} = -(x_1 - x_0).$$

Substituindo então as Derivadas Parciais 5.7 e 5.8 na Equação 5.4 obtêm-se o resíduo R , o qual é substituído, por sua vez, na Integral 4.8, onde, para o presente problema, o índice i pode ser omitido, pois se tem apenas uma variável dependente. Desta forma obtêm-se o vetor

$$\underline{I}^e = \int_{D^e} N_j^e R^e dD^e = 0, \quad (5.11)$$

onde

$$R^e = \sum_j^n M_j^e \tilde{U}_j^e,$$

obtendo-se então o vetor pela equação

$$\underline{I}^e = \sum_j^n \tilde{U}_j^e \int_{D^e} N_i^e M_j^e dD^e, \quad (5.12)$$

onde os coeficientes M_j^e são dados a seguir

$$M_0^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{1}{\Delta} (6\xi_0 - 2)g_{01}^2 - (3\xi_0^2 - 2\xi_0 + \frac{2}{9})g_{02} \right],$$

$$M_1^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{1}{\Delta} (6\xi_1 - 2)g_{11}^2 - (3\xi_1^2 - 2\xi_1 + \frac{2}{9})g_{12} \right],$$

$$M_2^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{1}{\Delta} (6\xi_2 - 2)g_{21}^2 - (3\xi_2^2 - 2\xi_2 + \frac{2}{9})g_{22} \right],$$

$$M_3^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\left[\frac{6}{\Delta} \right] \xi_1 g_{01}^2 + \frac{2}{\Delta} (6\xi_0 - 1)g_{01}g_{11} - \xi_2 (6\xi_0 - 1)g_{02} - \right. \\ \left. - \xi_0 (3\xi_0 - 1)g_{12} \right],$$

$$M_4^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{2}{\Delta} (6\xi_1 - 1)g_{01}g_{11} + \left(\frac{6}{\Delta} \right) \xi_0 g_{11}^2 - \xi_1 (3\xi_1 - 1)g_{02} - \right. \\ \left. - \xi_0 (6\xi_1 - 1)g_{12} \right] ,$$

$$M_5^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\left(\frac{6}{\Delta} \right) \xi_2 g_{11}^2 + \frac{2}{\Delta} (6\xi_1 - 1)g_{11}g_{21} - \xi_2 (6\xi_1 - 1)g_{12} - \right. \\ \left. - \xi_1 (3\xi_1 - 1)g_{22} \right] ,$$

$$M_6^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{2}{\Delta} (6\xi_1 - 1)g_{11}g_{21} + \left(\frac{6}{\Delta} \right) \xi_1 g_{21}^2 - \xi_2 (3\xi_2 - 1)g_{12} - \right. \\ \left. - \xi_1 (6\xi_2 - 1)g_{22} \right] ,$$

$$M_7^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{2}{\Delta} (6\xi_2 - 1)g_{01}g_{21} + \left(\frac{6}{\Delta} \right) \xi_0 g_{21}^2 - \xi_2 (3\xi_2 - 1)g_{02} - \right. \\ \left. - \xi_0 (6\xi_2 - 1)g_{22} \right] ,$$

$$M_8^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\left(\frac{6}{\Delta} \right) \xi_2 g_{01}^2 + \frac{2}{\Delta} (6\xi_0 - 1)g_{01}g_{21} - \xi_2 (6\xi_0 - 1)g_{02} - \right. \\ \left. - \xi_0 (3\xi_0 - 1)g_{22} \right] ,$$

$$M_9^e = \left(\frac{9}{2\Delta} \right) \left[\frac{6}{\Delta} (\xi_2 g_{01}g_{11} + \xi_1 g_{01}g_{11} + \xi_0 g_{11}g_{21}) - \right. \\ \left. - 6(\xi_1 \xi_2 g_{02} + \xi_0 \xi_2 g_{12} + \xi_0 \xi_1 g_{22}) \right] .$$

A dedução destes coeficientes está no Apêndice A.

A Equação 5.11 pode ser escrita sob a forma matricial

$$\underline{I}^e = \underline{A}^e \cdot \underline{\tilde{U}}^e, \quad (5.13)$$

onde $\underline{A}^e$ é a matriz de coeficientes K_{ij} , de dimensão 10×10 , os quais são fornecidos pela Integral 4.15, isto é,

$$\int_{D^e} N_i^e M_j^e dD^e = K_{i,j}^e, \quad i, j = 0, 1, \dots, 8,$$

que são deduzidos e apresentados no Apêndice A.

O teste inicial feito com a matriz dos coeficientes foi substituir a solução analítica da Equação 5.2 na Equação 5.13, efetuando o produto da matriz de coeficientes $\underline{A}^e$ pelo vetor solução obtido analiticamente para cada elemento. Para todos os elementos testados obteve-se um vetor de resíduos $\underline{I}^e$ aproximadamente nulo $R_{\max} = 0(10^{-10})$, o que comprovou que, para este problema, a matriz de coeficientes $\underline{A}^e$ corresponde à solução exata com boa aproximação; alguns destes vetores se encontram reproduzidos na Tabela 5.1.

Obtidas as matrizes dos elementos, estas são reunidas em uma matriz "K" (global), onde as matrizes dos elementos se superpõem para nós pertencentes a mais de um elemento; desta forma obtém-se um sistema global, como segue

$$\underline{I} = \underline{K} \cdot \underline{\tilde{U}} = 0. \quad (5.14)$$

TABELA 5.1

AMOSTRA DE VALORES DO RESIDUO PARA DIVERSOS ELEMENTOS

ELEMENTO= 0	ELEMENTO= 19	ELEMENTO= 39	ELEMENTO= 59	ELEMENTO= 79
1.81898940E-12 3.63797861E-12 1.09139364E-11 7.119933534E-11 5.82076609E-11 1.45519152E-11 -5.71098724E-11 -3.02016190E-11 4.02088399E-11 0.	7.27595761E-12 1.27329258E-11 3.63797881E-12 1.45519152E-11 -7.01803060E-11 -4.62385685E-11 4.79758455E-11 8.62385718E-11 7.27595761E-11 2.91038305E-11	5.45696821E-12 1.09139364E-11 5.45696821E-12 0. -7.12354620E-11 -4.51798599E-11 4.05577794E-11 7.82023335E-11 5.82076609E-11 -2.91038305E-11	9.09494702E-12 1.09139364E-11 3.63797881E-12 1.45519152E-11 -6.04032380E-11 -4.14601686E-11 4.40252279E-11 8.78692674E-11 7.27595761E-11 0.	7.27595761E-12 1.09139364E-11 3.63797881E-12 1.45519152E-11 -6.98605618E-11 -6.11066753E-11 3.85114163E-11 8.12967471E-11 5.82076609E-11 0.
ELEMENTO=119	ELEMENTO=139	ELEMENTO=159	ELEMENTO=179	ELEMENTO=199
7.27595761E-12 1.09139364E-11 1.81898940E-12 0. -6.81374956E-11 -4.92778262E-11 4.26609859E-11 8.40227328E-11 5.82076609E-11 0.	7.27595761E-12 1.09139364E-11 1.81898940E-12 0. -5.66906522E-11 -5.92746697E-11 3.27133876E-11 8.12945044E-11 7.27595761E-11 0.	7.27595761E-12 9.09494702E-12 3.63797881E-12 0. -6.57928200E-11 -5.13225018E-11 4.79758455E-11 9.55573398E-11 5.82076609E-11 -1.45519152E-11	9.09494702E-12 1.27329258E-11 1.81898940E-12 1.45519152E-11 -4.65973926E-11 -4.07140988E-11 3.20028448E-11 7.74338993E-11 5.82076609E-11 0.	7.27595761E-12 1.09139364E-11 3.63797881E-12 0. -5.22959454E-11 -3.50155460E-11 3.52429197E-11 7.34335437E-11 7.27595761E-11 0.

Impondo sobre este as condições inicial e de contorno (laterais) a partir da solução exata, obtém-se um novo sistema de equações (linear)

$$\underline{K}_k \cdot \underline{\tilde{U}}_k = \underline{F} \quad , \quad (5.15)$$

onde $\underline{K}_k$ é a matriz do sistema, a qual é a matriz $\underline{A}$ reduzida das linhas e colunas correspondentes às componentes de valor conhecido, fornecidas pelas condições inicial e laterais, do vetor de incógnitas, $\underline{\tilde{U}}_k$ é o novo vetor de incógnitas, suprimindo-se as condições inicial e de contorno do vetor $\underline{U}$ da Equação 5.14; e $\underline{F}$ é o vetor independente gerado pelo método de redução do sistema anterior.

Para resolver o Sistema 5.15 utilizam-se dois métodos de resolução de sistemas de equações lineares: o método de Gauss-Jordan para casos em que a banda da matriz de coeficientes é igual ou maior a 50% da dimensão desta, e um método modificado de triangulação de Gauss para resolver sistemas de equações lineares utilizando apenas a banda da matriz de coeficientes.

Os resultados finais obtidos pelo método proposto, para a solução da Equação 5.2, comparados com os da solução analítica, mostram que o maior erro absoluto é da ordem de $0(10^{-4})$ conforme se comprova nas Figuras 5.2 a 5.13, para integrações até 250 segundos. As Figuras 5.2 e 5.6 apresentam a temperatura do centro da barra ao longo do tempo, nos dois casos para 35 segundos de propagação. Na Figura 5.2 este tempo foi dividido em 10 partes iguais, e na Figura 5.6, em 20; as Figuras 5.3 e 5.7 exibem os erros absolutos, isto é, a diferença absoluta entre a solução exata e a do método proposto, correspondentes às Figuras 5.2 e 5.3, respectivamente. As Figuras 5.4 e 5.8 exibem os mesmos casos, tomando agora a temperatura ao longo da barra para 10 e 20 instantes, respectivamente; as Figuras 5.5 e 5.9 representam os erros absolutos correspondentes às Figuras 5.4 e 5.8, respectivamente. Já as Figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 seguem a mesma sequência que as figuras anteriores, só que para 250 segundos de propagação no tempo.

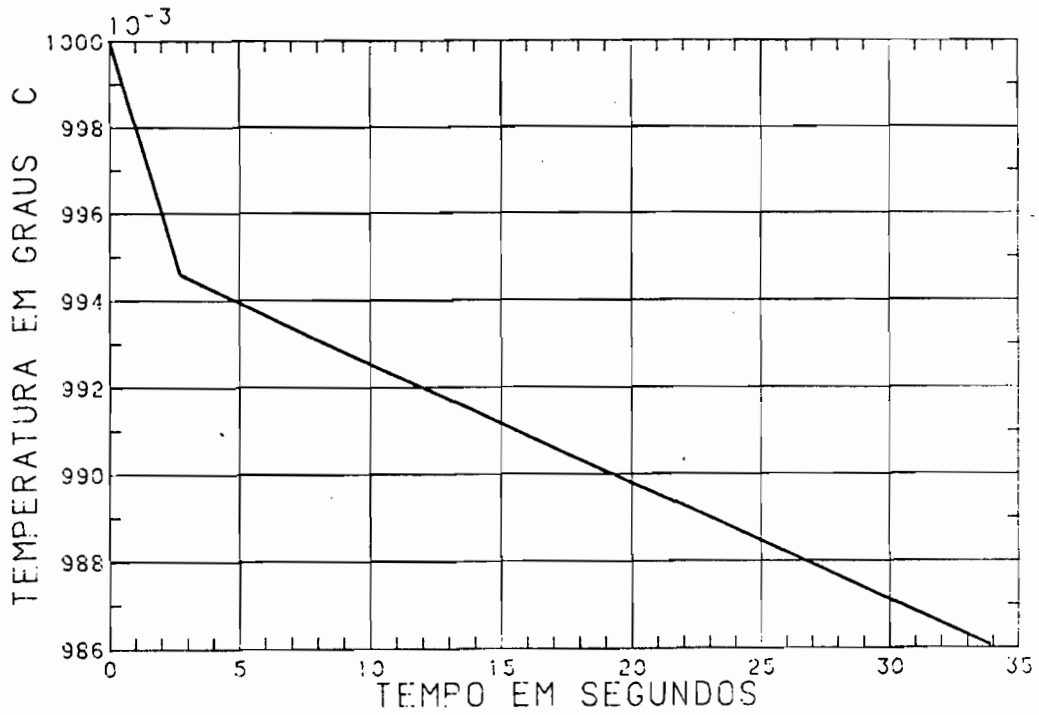


Fig. 5.2 - Temperatura do centro da barra (I).

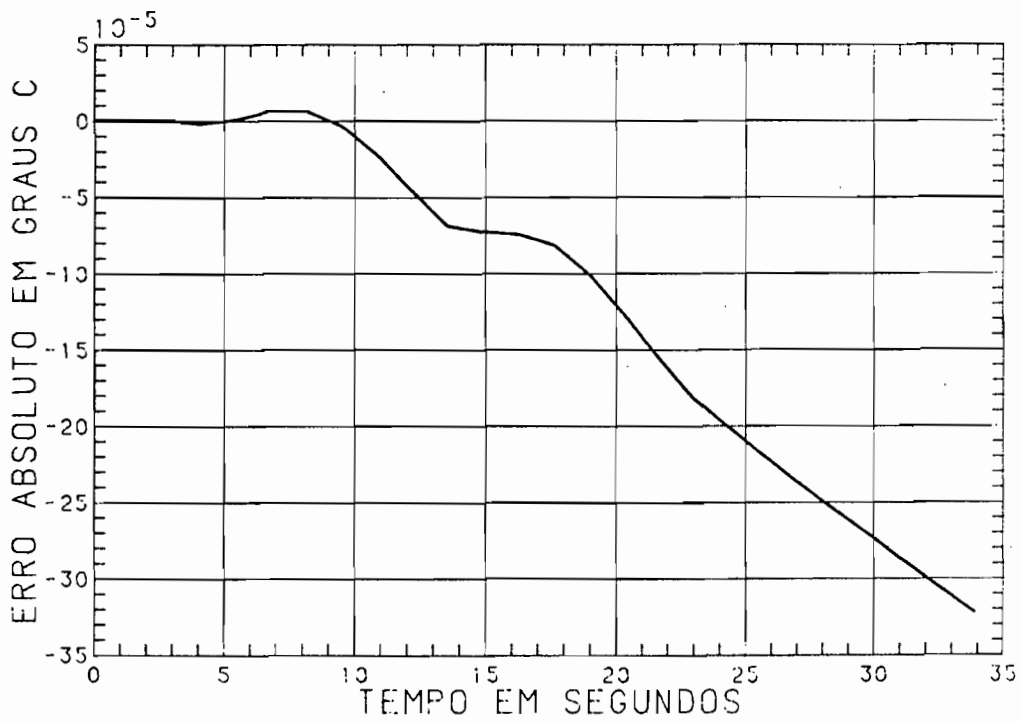


Fig. 5.3 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.2.

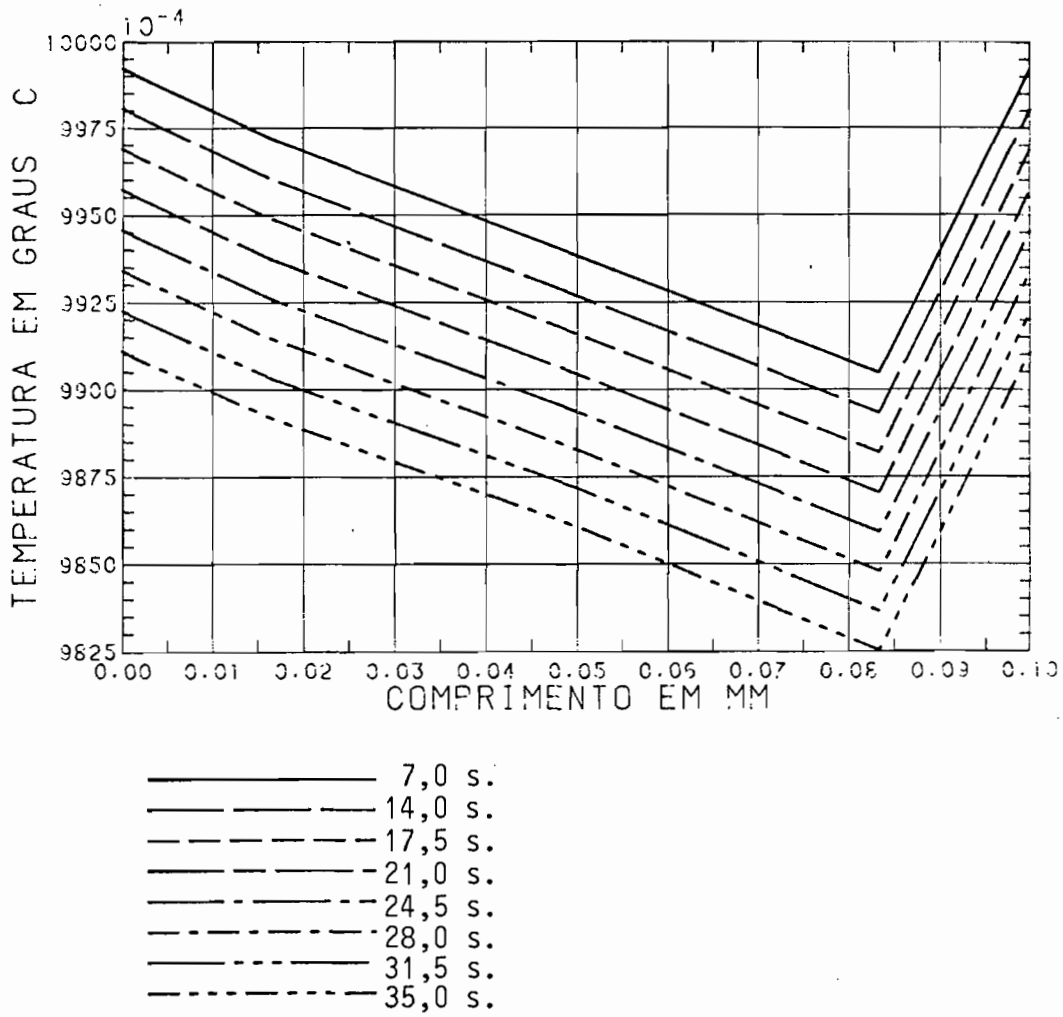


Fig. 5.4 - Temperatura ao longo da barra para 8 instantes, correspondentes as 10 divisões do intervalo de tempo.

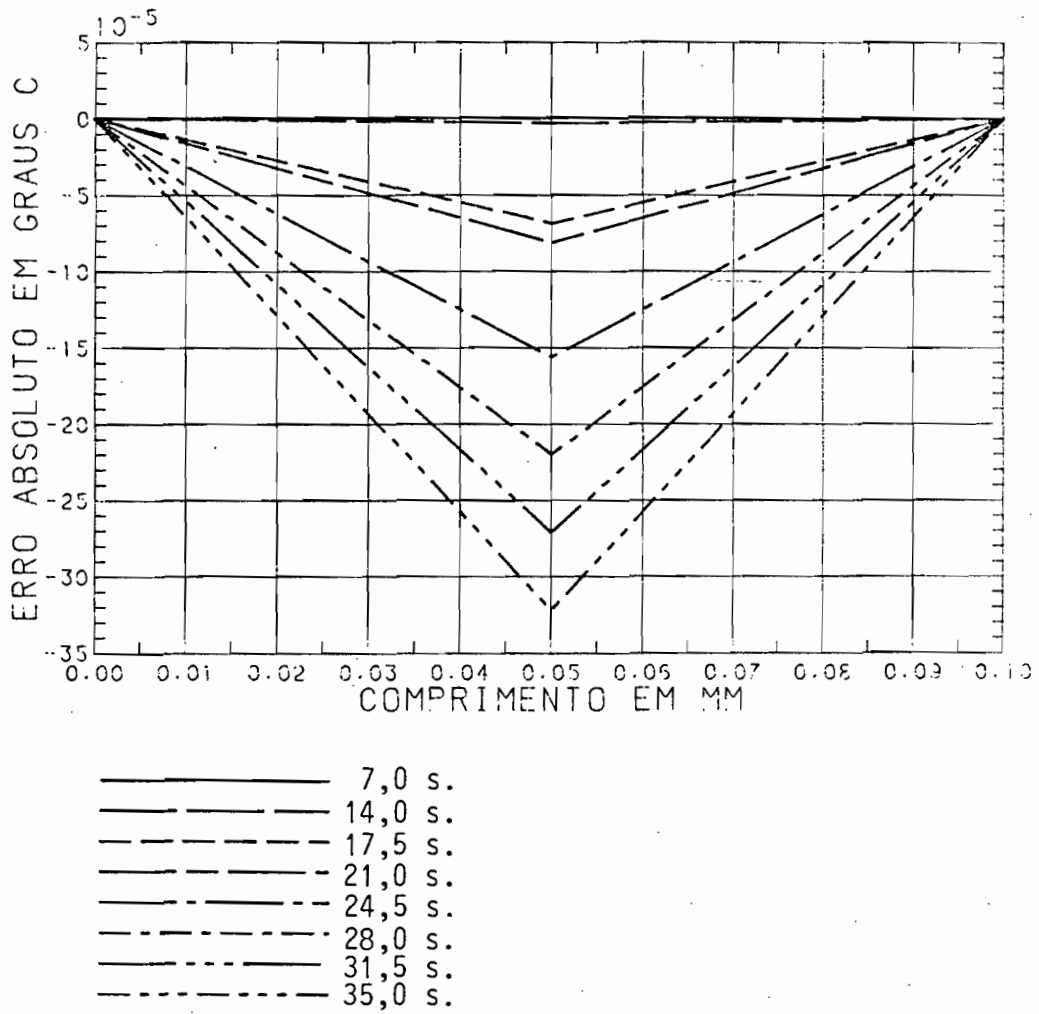


Fig. 5.5 - Erro absoluto correspondente
à Figura 5.4.

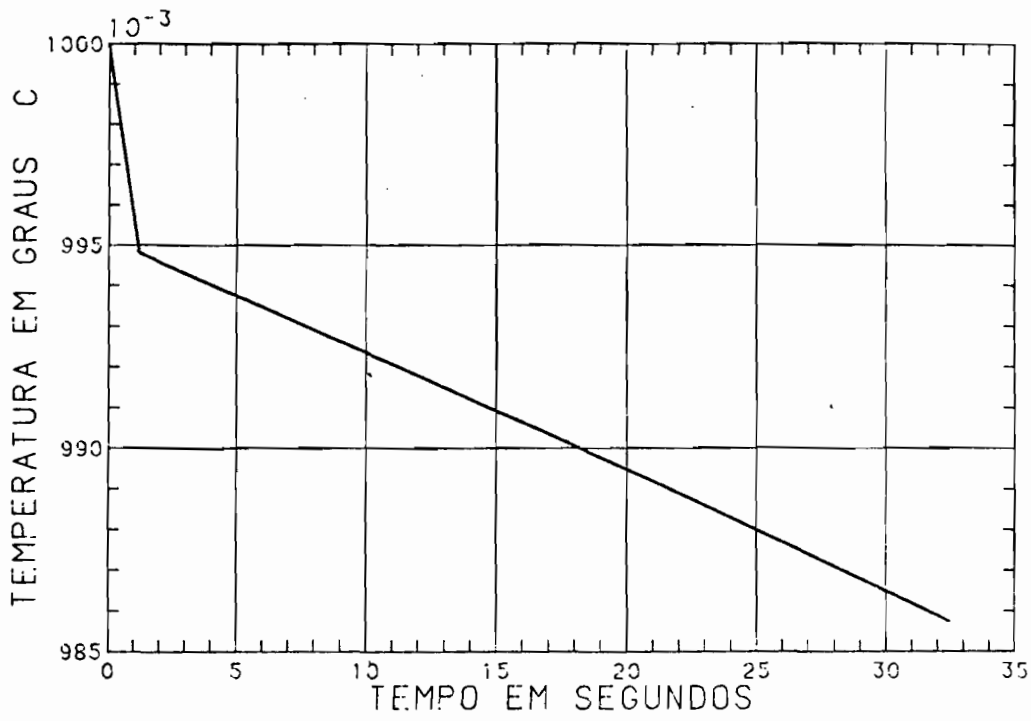


Fig. 5.6 - Temperatura do centro da barra (II).

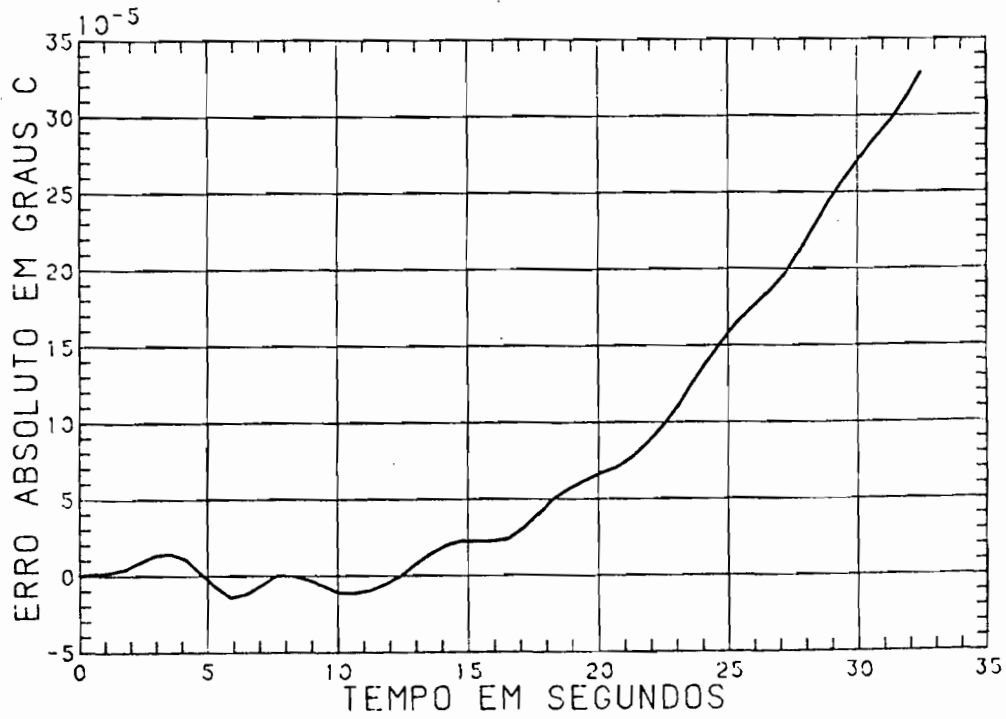


Fig. 5.7 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.6.

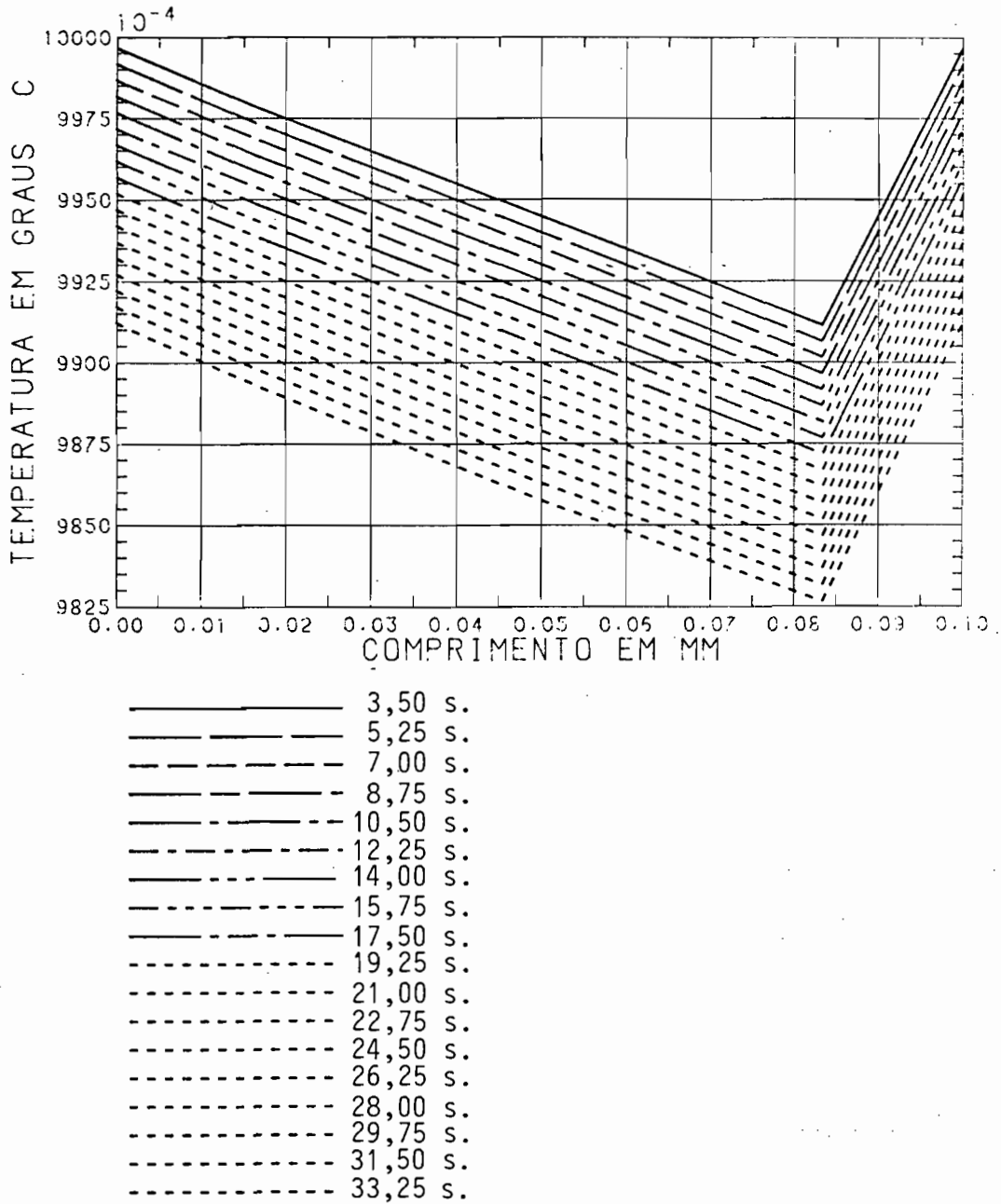


Fig. 5.8 - Temperatura ao longo da barra para 18 instantes, correspondentes as 20 divisões do intervalo de tempo.

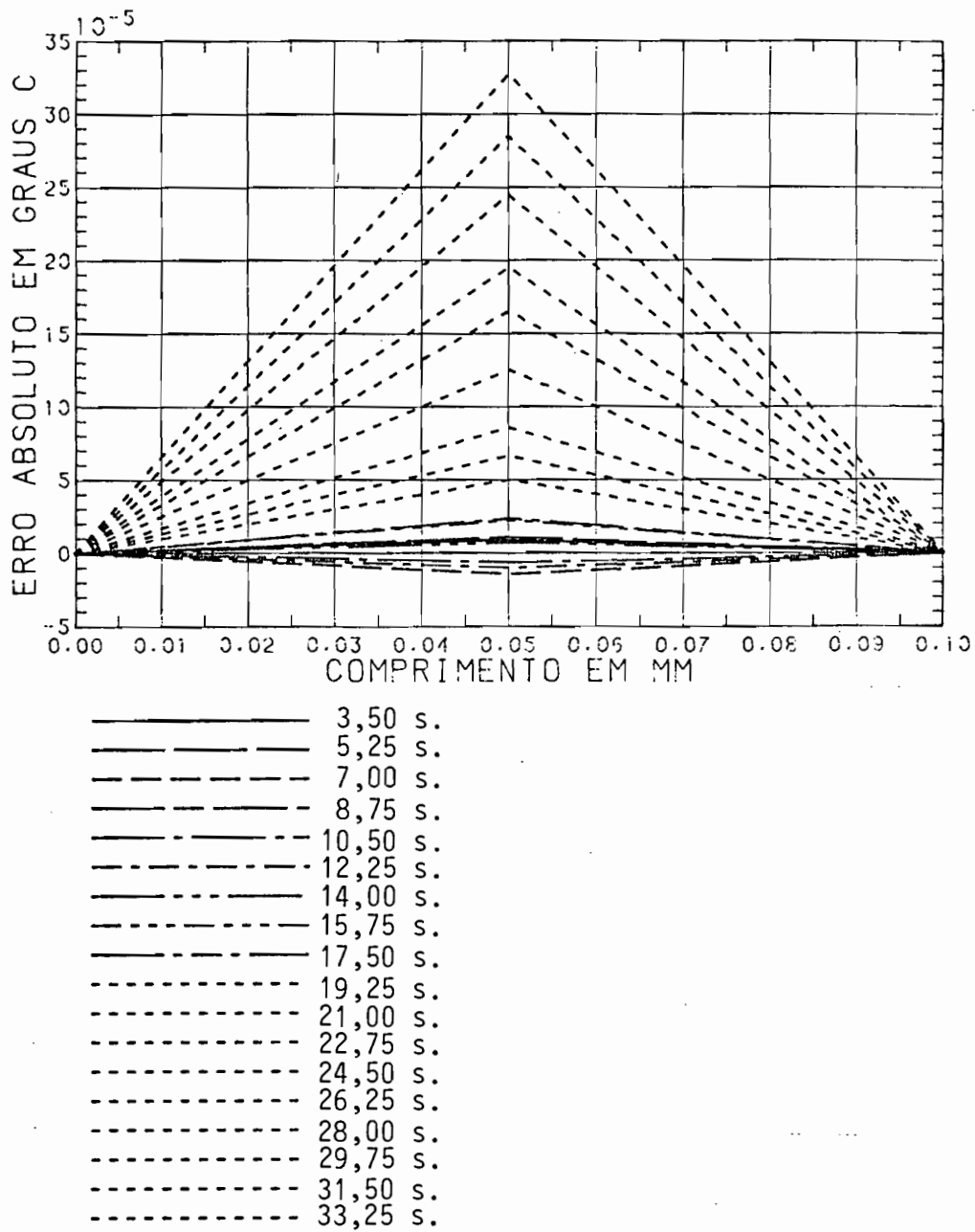


Fig. 5.9 - Erro absoluto correspondente
à Figura 5.8.

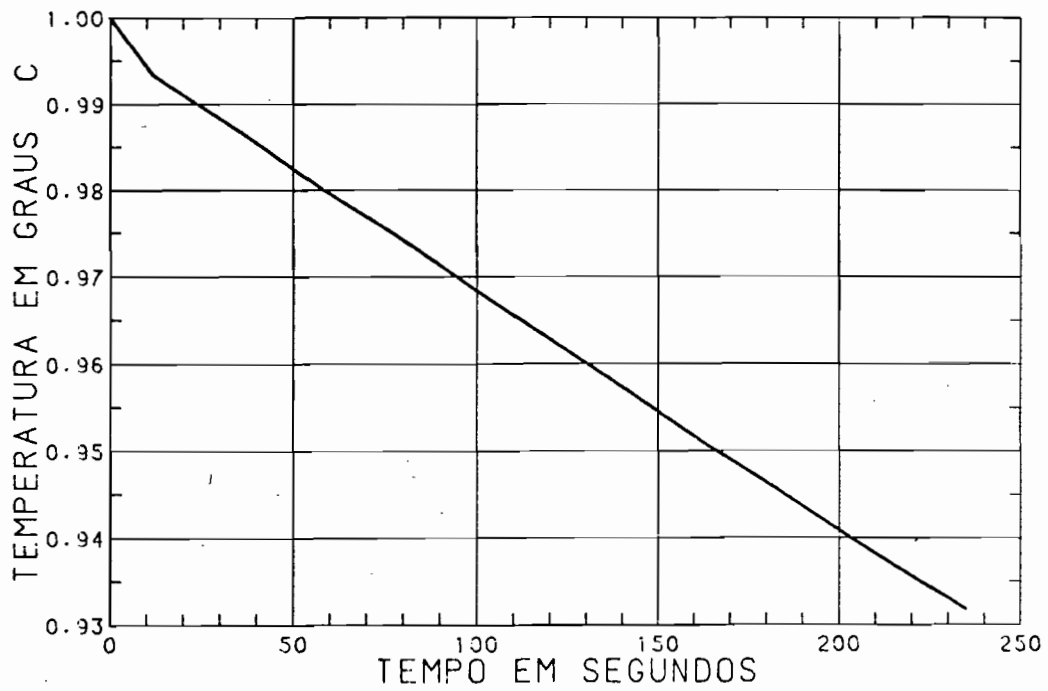


Fig. 5.10 - Temperatura do centro da barra para 250 s.

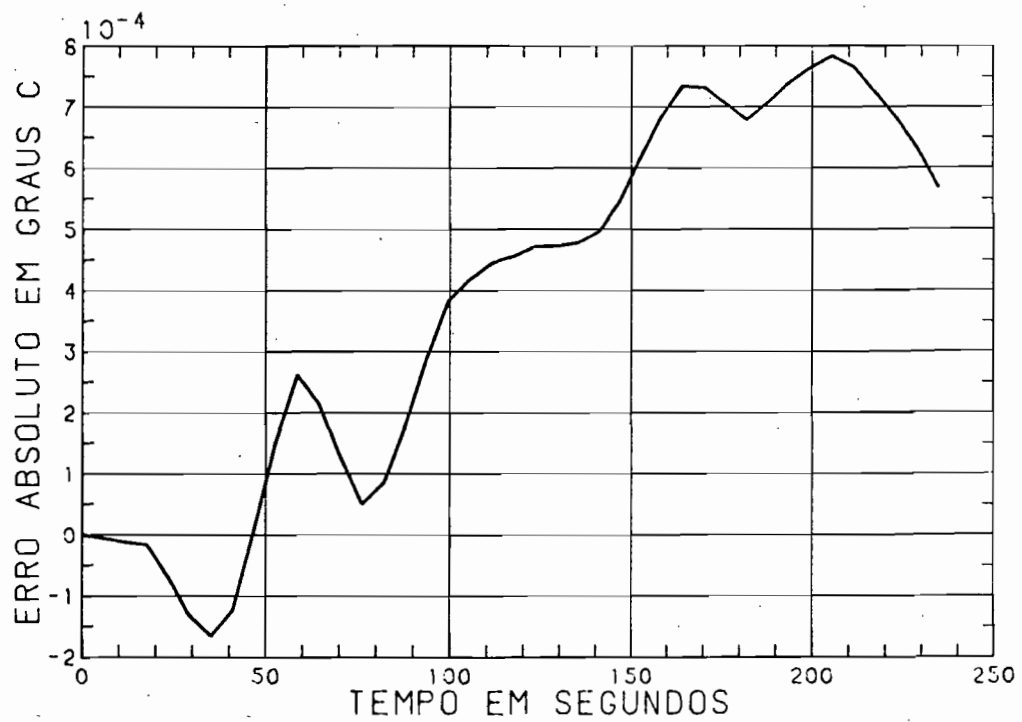


Fig. 5.11 - Erro absoluto correspondente
à Figura 5.10.

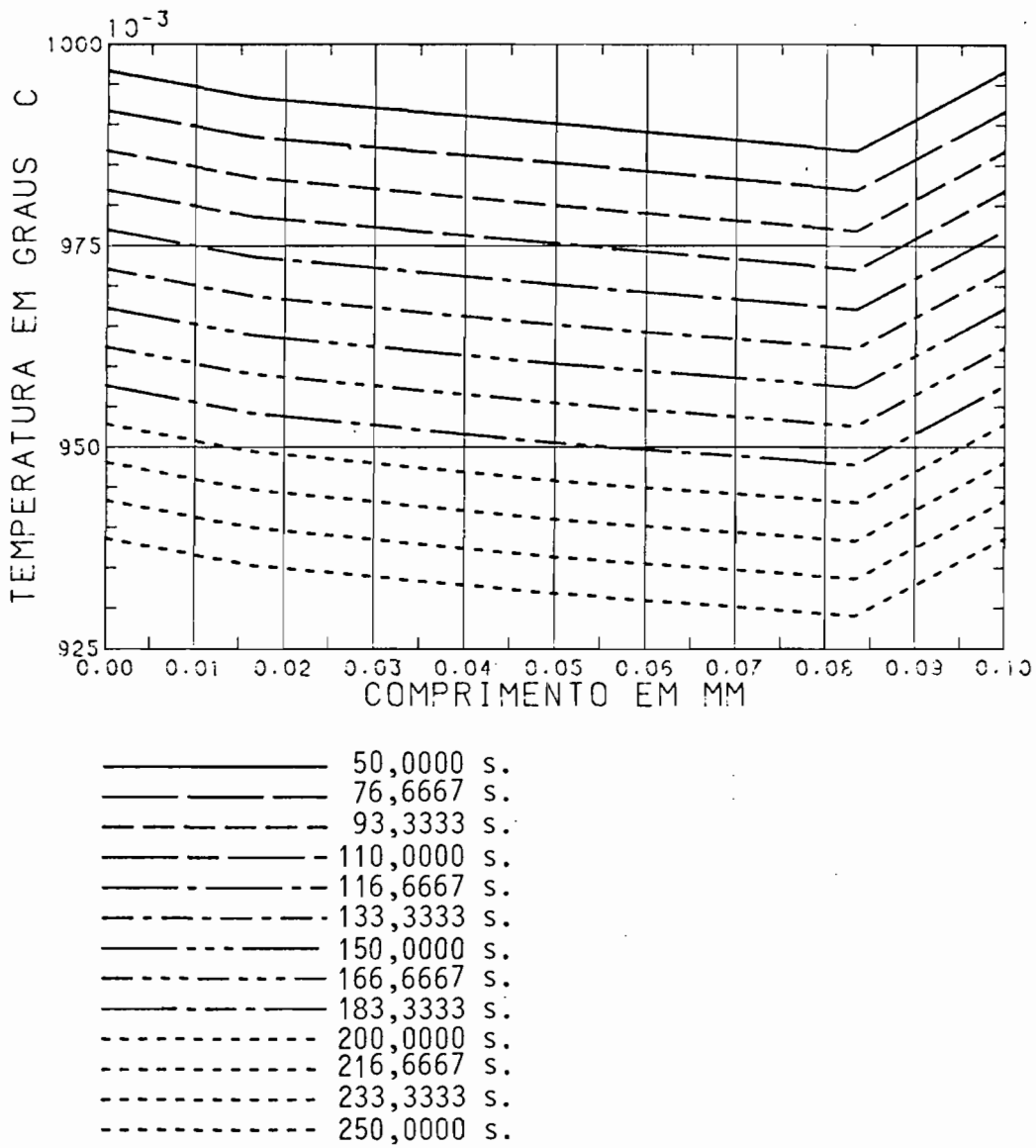


Fig. 5.12 - Temperatura ao longo da barra para 13 instantes igualmente espaçados no tempo.

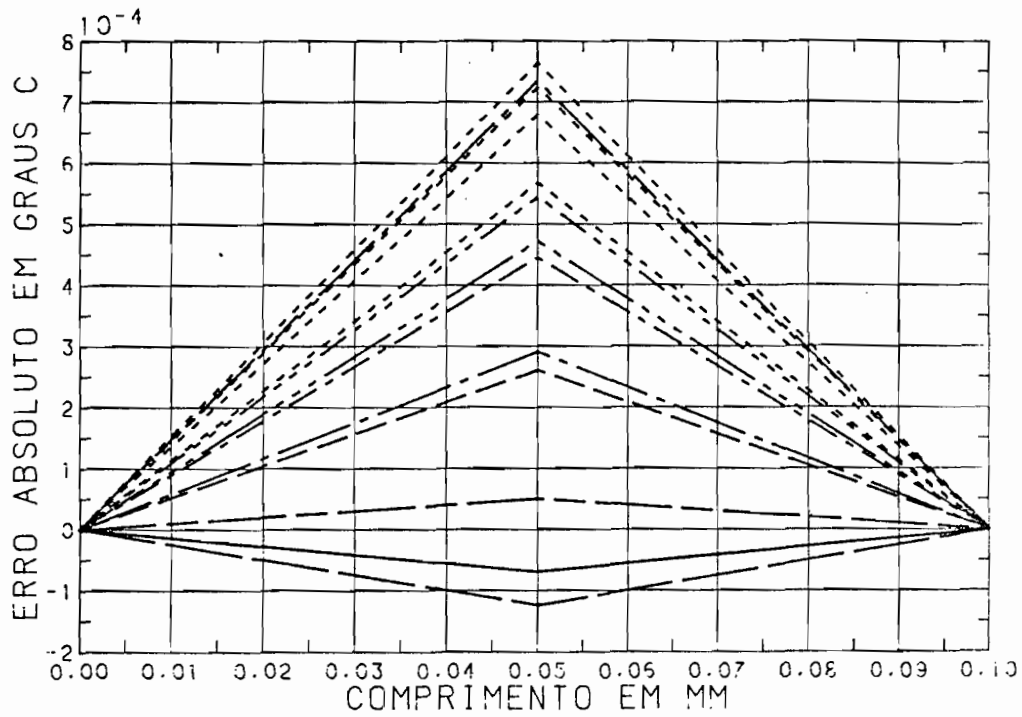


Fig. 5.13 - Erro absoluto correspondente
à Figura 5.12.

Note-se que os gráficos de temperatura deste exemplo mostram-se como segmentos de reta devido à escala.

5.3 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA PLACA

Supondo uma placa de espessura $2L$, com temperatura inicial uniforme T_0 , a qual é submersa repentinamente em um banho a temperatura constante T_∞ , deseja-se conhecer a variação de temperatura ao longo da secção transversal no tempo.

Em termos de $U = T - T_\infty$ a formulação do problema é dado pela equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (5.16)$$

sujeita às condições inicial

$$U(x,0) = U_0 = T_0 - T_\infty, \quad -L \leq x \leq L; \quad (5.17)$$

e de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} &= 0, \\ U(L,t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A solução analítica para este problema (Arpaci, 1966) é dada por

$$T(x,t) = T_\infty + 2(T_0 - T_\infty) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n L} e^{-a\lambda_n^2 t} (\cos(\lambda_n x)), \quad (5.19)$$

para

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad (5.20)$$

Neste caso foram considerados os seguintes valores para as constantes: $a = 23,81176180$, valor da constante da Equação 5.16, fazendo a placa corresponder a uma placa de concreto; como valor inicial tomou-se a temperatura constante $T_0 = 20^\circ\text{C}$ e a temperatura do meio $T_\infty = 100^\circ\text{C}$. Para comparar a solução analítica com a numérica, aqui proposta, tomou-se $n = 30$ nas Expressões 5.19 e 5.20, pois para $n > 30$ o computador (B6800) não comporta a dimensão do exponencial.

Para resolver este problema não houve necessidade de fazer alterações no roteiro seguido na seção anterior, a não ser na maneira de impor as condições inicial e de contorno, no programa computacional.

Os gráficos apresentados nas Figuras 5.14 a 5.17 seguem a mesma sequência que os gráficos da seção anterior, e mostram que também neste caso o método proposto obtém bons resultados (erro máximo da ordem de $0(10^{-3})$).

A Figura 5.14 mostra o comportamento da temperatura ao longo do tempo, para o ponto central do corte da placa considerado. Vê-se que o tempo para aproximar a temperatura da barra ($CI = 20^\circ\text{C}$) da temperatura final ($CC = 100^\circ\text{C}$), imposta pela condição de contorno, foi de 175 segundos, o que corresponde a dividir o tempo em 300 partes (passos).

A Figura 5.15 mostra o erro absoluto correspondente às temperaturas da Figura 5.14; já as Figuras 5.16 e 5.17 apresentam a temperatura ao longo da seção transversal da placa, para os instantes t igual a 6, 18, 30, 54, 98, 120, 150 e 175 segundos, e os erros correspondentes.

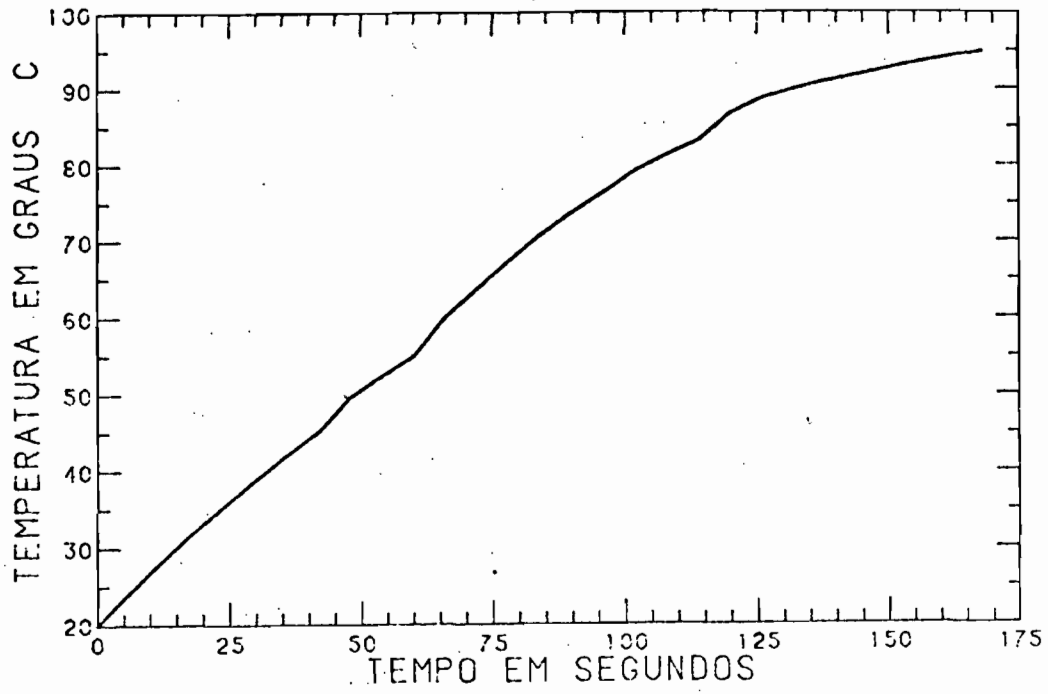


Fig. 5.14 - Temperatura ao longo do tempo para o centro do corte transversal.

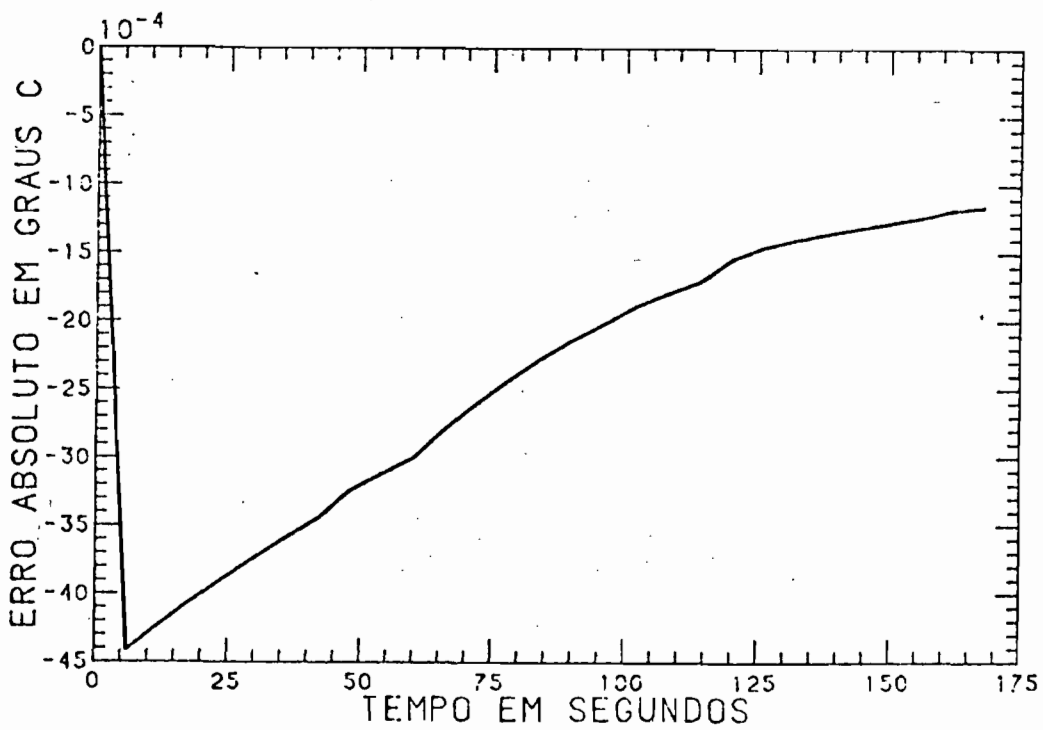


Fig. 5.15 - Erro absoluto correspondente à Figura 5.14.

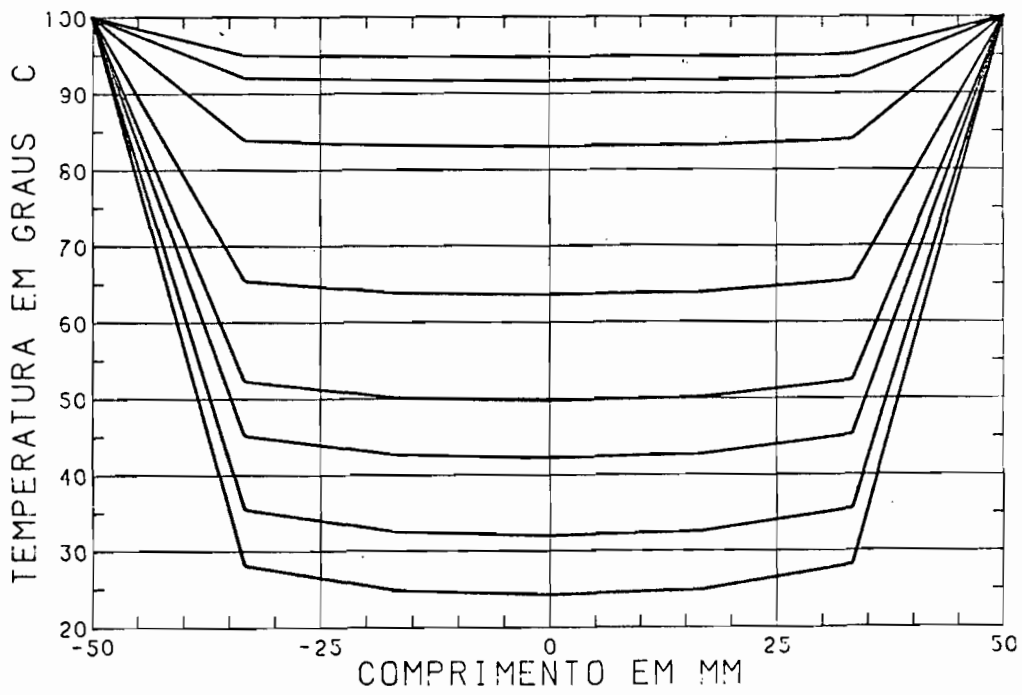


Fig. 5.16 - Temperatura ao longo da secção transversal da placa, $T = 6, 18, 30, 54, 98, 120, 150$ e 175 segundos.

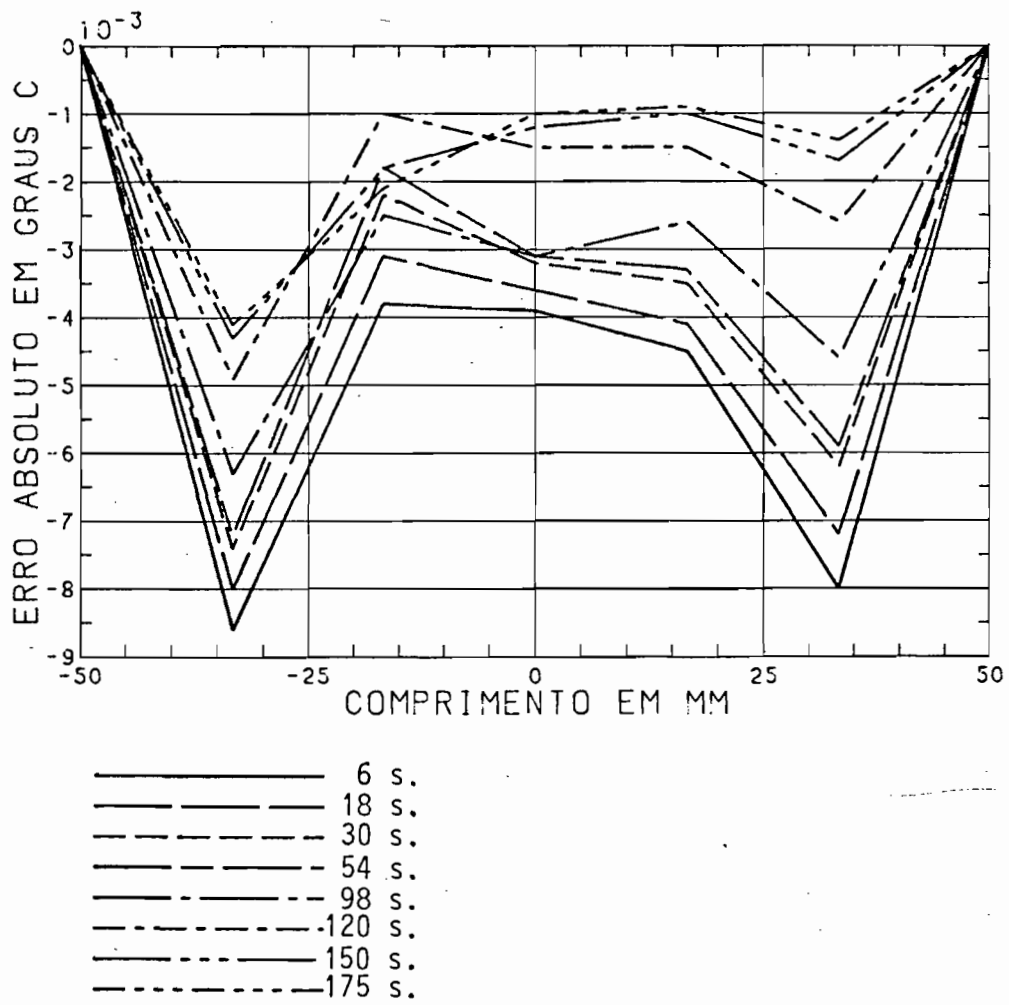


Fig. 5.17 - Erro absoluto correspondente
à Figura 5.16.

Note-se nos gráficos de temperatura que o comportamento ao longo do tempo é exatamente o esperado, mas devido à escala não é possível ver as oscilações decorrentes do método utilizado. Já o gráfico de erro na secção transversal mostra as curvas por segmentos de reta devido ao pequeno número de pontos utilizados.

5.4 - EXEMPLO DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA COM TERMO DISSIPATIVO

Para ilustrar o tratamento de uma equação parabólica com termo dissipativo (Hildebrand, 1968) considere-se a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial U}{\partial x} + cU, \quad (5.21)$$

onde a , b e c são constantes arbitrárias, com a restrição de b e c terem de manter a relação

$$c^2 \leq b^2 + \frac{\pi^2}{L}, \quad (5.22)$$

para que a solução analítica seja válida. A solução analítica é dada por

$$U(x,t) = e^{-ax - c^2(a^2-b)t} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} A e^{-r^2\pi^2c^2/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right), \quad (5.23)$$

para

$$A = \left(\frac{2}{L}\right) \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx, \quad (5.24)$$

quando a Equação 5.1 está sujeita às condições

$$U(x,0) = T_0 = f(x) \quad 0 < x < L ,$$

$$U(0,t) = 0 \quad t > 0 , \quad (5.25)$$

$$U(L,t) = 0 \quad t > 0 .$$

Neste problema os valores adotados para as constantes das Equações 5.21 forma: $a = 238,1176180$; $b = 0,6$; $c = 0,5$; $L = 20$ cm; $n = 30$ para a Expressão 5.23; e a condição inicial $T_0 = 20$ unidades.

Neste caso foi necessário introduzir uma modificação no algoritmo, a qual possibilitasse o cálculo das matrizes de elemento, incluindo a parte dissipativa nestas, apresentada no Apêndice B.

Também para este problema, como nos anteriores, fica de monstrado que o método aproxima a solução, com boa precisão, da solução analítica, com erro absoluto da ordem de $0(10^{-4})$ unidades, o que corresponde a um erro de 0,01%, como se pode ver nas Figuras 5.18 a 5.21. A Figura 5.18 mostra a variação da variável U , que pode ser interpretada como temperatura, ao longo do tempo para quatro pontos de x , ou seja, x igual a 0; 20; 46,6667; e 73,3333 milímetros, desde a condições inicial $U = 20^{\circ}\text{C}$ até próximo da condição de contorno $U = 0^{\circ}\text{C}$; o tempo de propagação necessário foi de 200 segundos.

A Figura 5.19 mostra o erro absoluto dos resultados mostrados na Figura 5.18.

A Figura 5.20 exibe a variação da variável $\hat{U}$ ao longo de x de 0 a $L/2$, isto é, da origem até a borda, para os instantes t igual a 5; 10; 15; 20; 30; 35 e 40 segundos de propagação da variável $\hat{U}$.

A Figura 5.21 apresenta o erro absoluto correspondente à Figura 5.20, onde se percebe que o maior erro está nos pontos iniciais, isto devido à discrepância que existe entre o contorno e a condição inicial nos nós que delimitam estas condições.

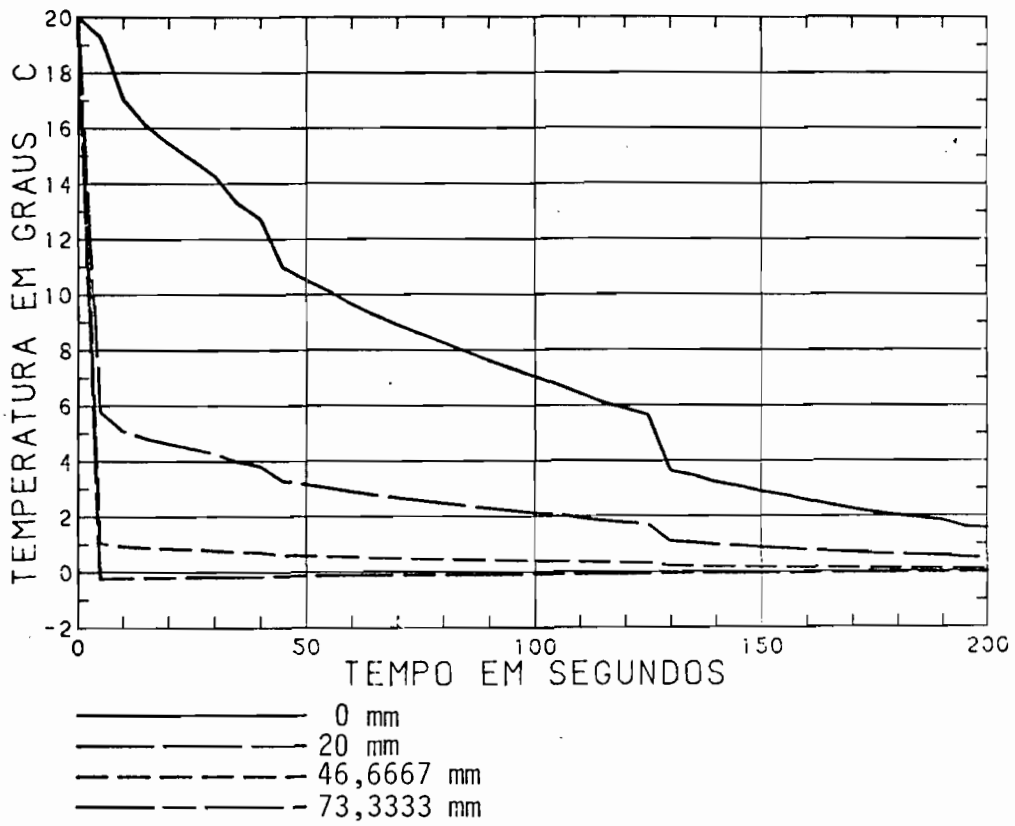


Fig. 5.18 - Variação de $\hat{U}$ ao longo do tempo.

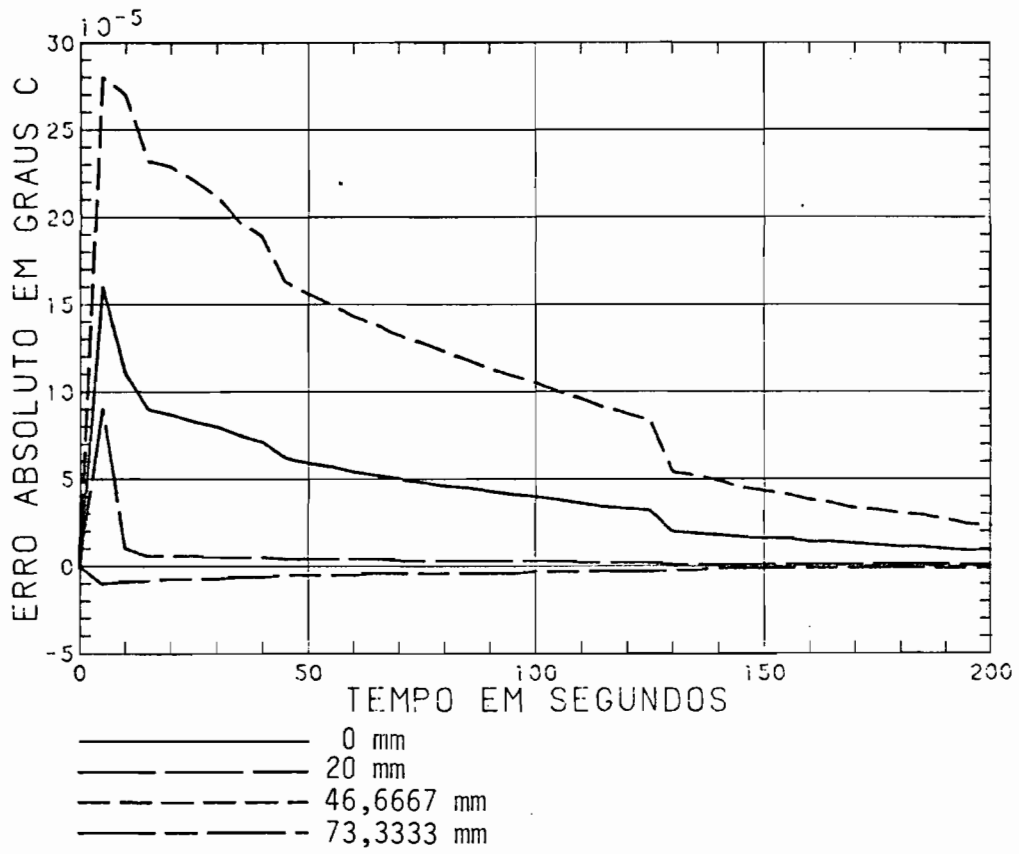


Fig. 5.19 - Erro correspondente à Figura 5.18.

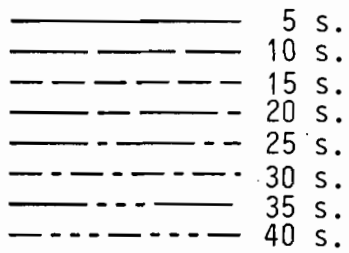
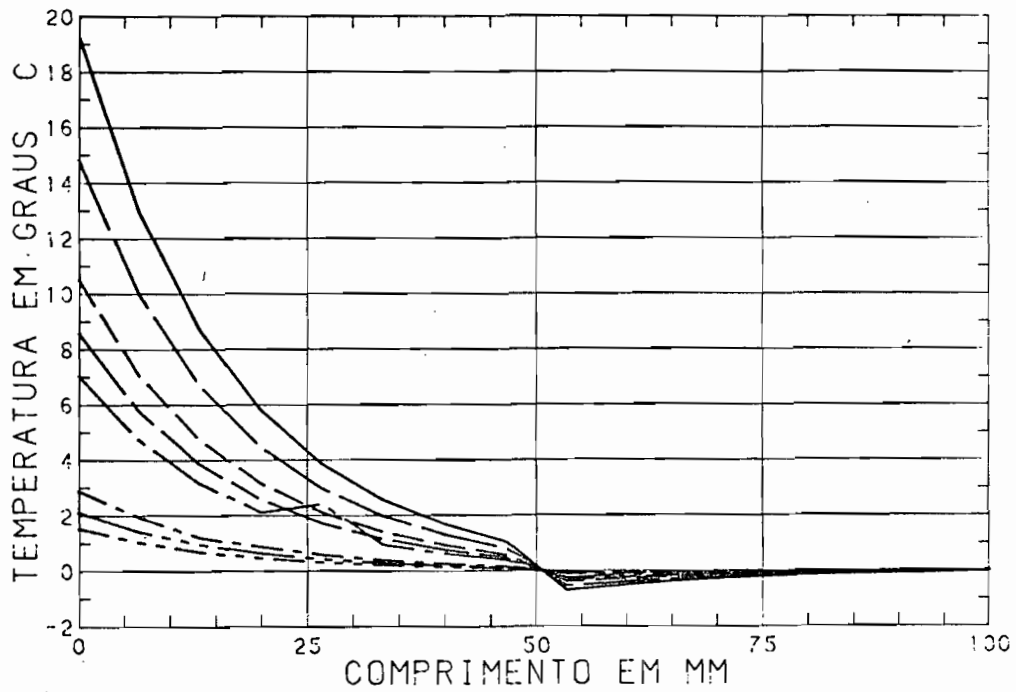


Fig. 5.20 - Variação de $\hat{U}$ ao longo de x para 8 instantes diferentes.

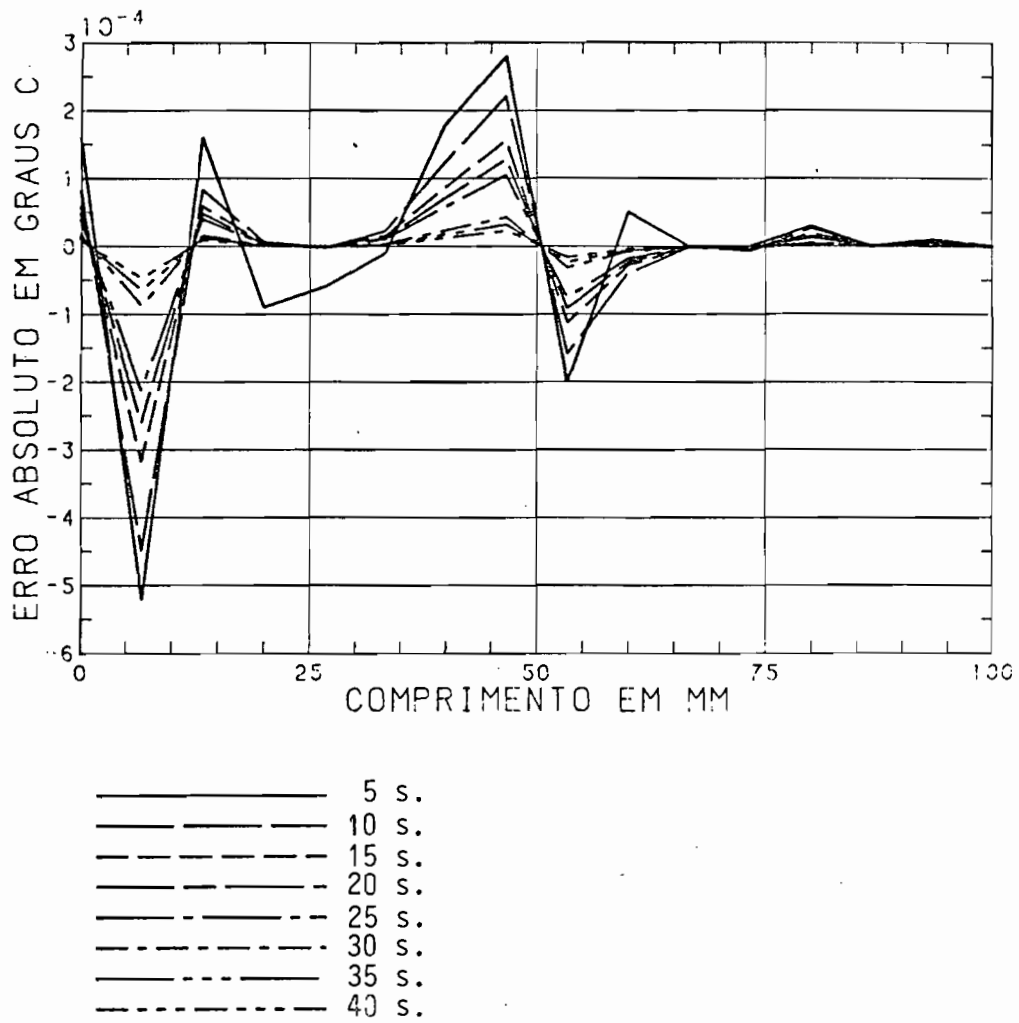


Fig. 5.21 - Erro absoluto em relação aos resultados apresentados na Figura 5.20.

5.5 - EXEMPLO DE UMA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NÃO-HOMOGÊNEA

Neste problema supõe-se uma barra isolada que tenha uma distribuição inicial de temperatura dependente da posição (x). Supõe-se também que a distribuição contenha um termo de geração de calor Q . O comprimento da barra é L ($L = 10$ mm), portanto o domínio de x é $x[0,L]$.

Observação: Nas Figuras 5.24 e 5.25 foi feita uma translação da origem para o centro da barra, com a finalidade de melhor apresentação; porém o problema foi resolvido para x variando de 0 a L .

O problema é equacionado por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{Q}{k} \quad (5.26)$$

onde

$$\frac{1}{K} = \frac{\rho c}{k},$$

onde Q é uma constante de geração de calor por unidade de volume e unidade de tempo, ρ a densidade, c o calor específico e k a condutibilidade térmica. No presente caso escolheram-se $Q/k = 1$ e $K = 2,3$, com as condições inicial

$$T(0,t) = T(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.27)$$

e de contorno

$$T(x,0) = \frac{Q}{k} x(L-x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.27b)$$

A solução analítica será

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x) , \quad (5.28)$$

onde

$$T_2 = \frac{Qx}{2k} (L - x) \quad (5.29)$$

e

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(Kn^2\pi^2 t)/L^2} , \quad (5.30)$$

onde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[T_0(x) - \frac{Qx}{2k} (L - x) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx , \quad (5.31)$$

donde finalmente

$$T(x,t) = \frac{Qx}{2k} (L - x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^3}{n\pi} \left(-\frac{Q}{2k} \right) \left(1 - \frac{2}{(n\pi)^2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(Kn^2\pi^2 t)/L^2} . \quad (5.32)$$

O fato da Equação 5.26 ser não-homogênea faz com que, no Sistema 4.18, apareça um vetor independente dado pela superposição de vetores independentes que aparecem para cada elemento, devido à soma do termo não-homogêneo ao resíduo R , o qual é dado por

$$\begin{bmatrix} 0_0 \\ 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ 0_4 \\ 0_5 \\ 0_6 \\ 0_7 \\ 0_8 \\ 0_9 \end{bmatrix} = \Delta \cdot \begin{bmatrix} 7/10 \\ 7/10 \\ 7/10 \\ 3/40 \\ 3/40 \\ 3/40 \\ 3/40 \\ 3/40 \\ 3/40 \\ 2/20 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Note-se que também neste caso o método funcionou bem, uma vez que o erro máximo é de ordem de $0(10^{-3})$ para levar a temperatura inicial próximo de 0°C , como imposto pelo contorno, o que corresponde a um erro relativo máximo de 0,01% em relação à solução analítica, como é mostrado nas Figuras 5.23 e 5.25. A Figura 5.22 mostra a variação da temperatura ao longo do tempo no centro da barra, enquanto a Figura 5.23 mostra o erro correspondente em relação à solução analítica. Já a Figura 5.24 mostra a temperatura ao longo da barra para os seguintes instantes: 0,9; 36,2; 98,4 e 170,4 segundos; e a Figura 5.25 dá os erros absolutos correspondentes aos gráficos da Figura 5.24.

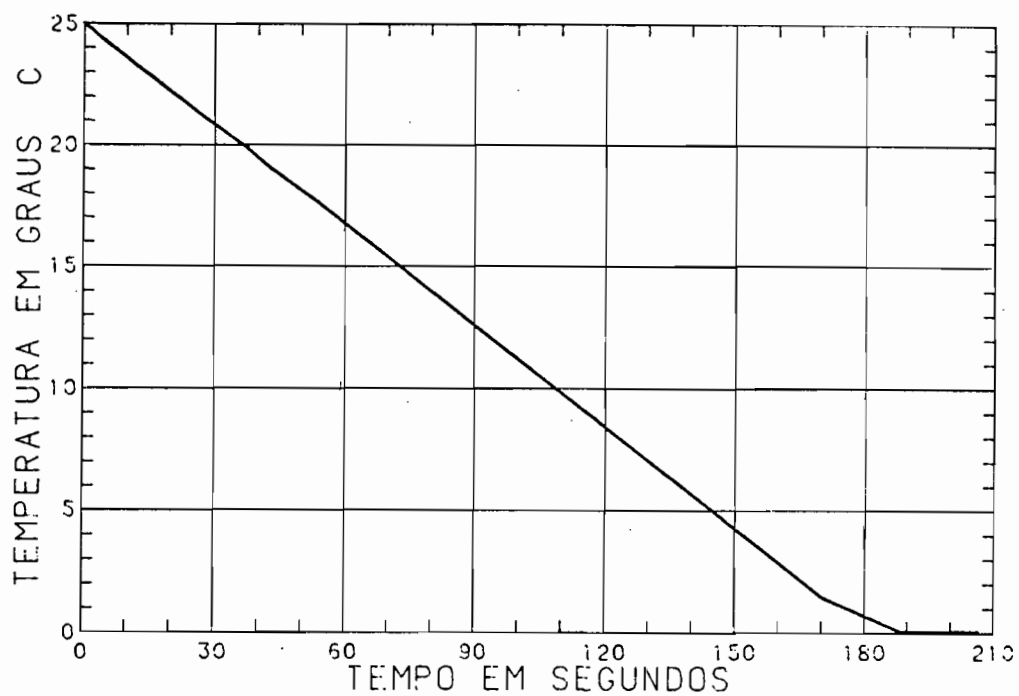


Fig. 5.22 - Variação da temperatura do centro da barra ao longo do tempo.

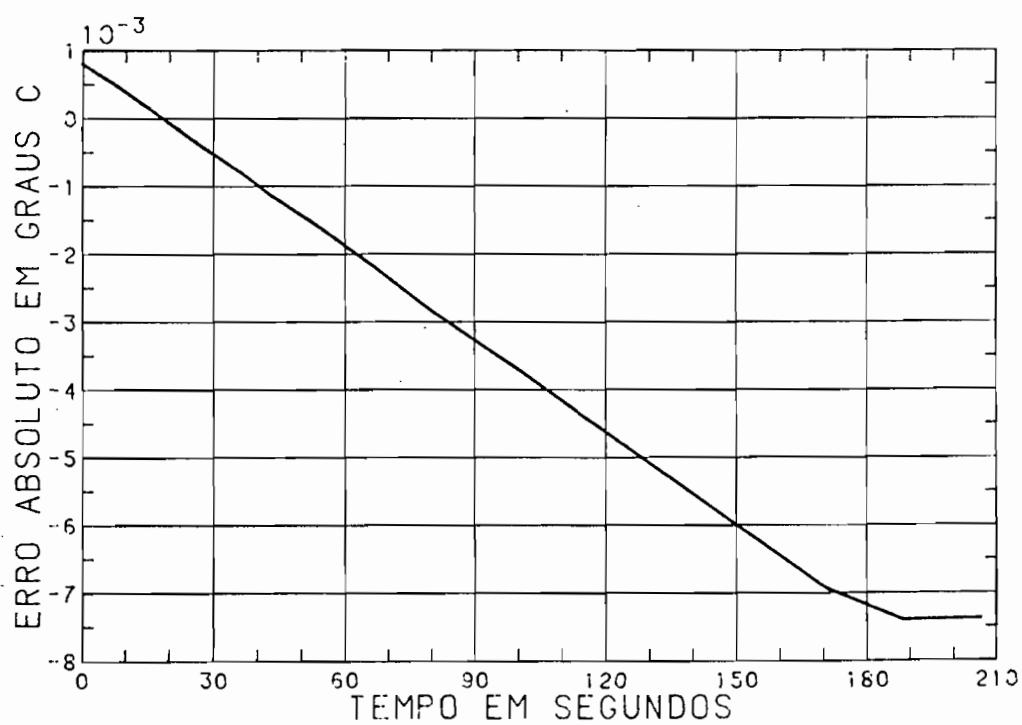


Fig. 5.23 - Erro correspondente à Figura 5.22.

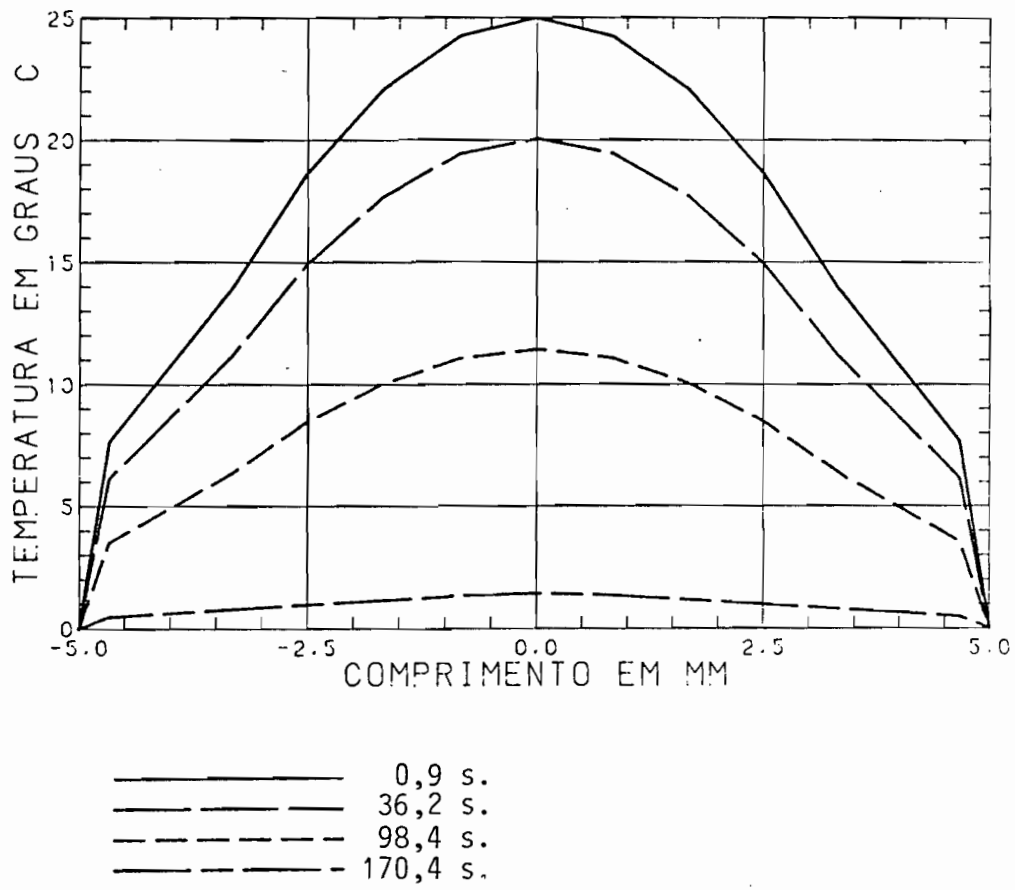


Fig. 5.24 - Variação da temperatura ao longo da barra para 4 instantes diferentes.

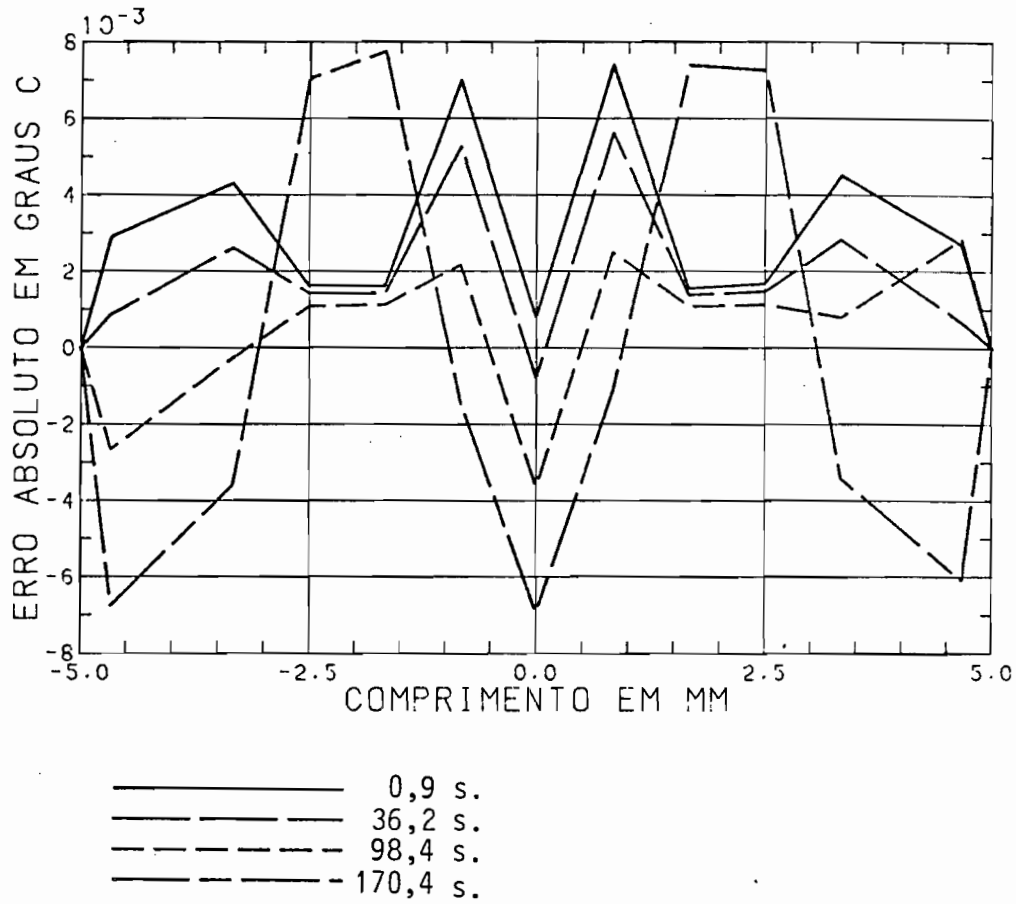


Fig. 5.25 - Erro absoluto em relação aos resultados apresentados na Figura 5.24.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

6.1 - COMENTÁRIOS

Os métodos numéricos utilizados atualmente para resolver problemas de difusão separam as variáveis espaciais da variável temporal, o que foi comprovado não ser adequado para a solução deste tipo de problemas.

O método aqui proposto elimina o erro devido à separação do problema em uma parte espacial e outra temporal, isto porque são consideradas as contribuições cruzadas ao longo da malha. As Figuras 6.1 e 6.2 mostram a diferença entre a maneira de efetuar o cálculo ao longo da malha para, por exemplo, o método de diferenças finitas e para o método proposto. Na Figura 6.1 as setas indicam que em cada instante a solução caminha ao longo do espaço como se espaço e tempo fossem independentes, o que equivale a afirmar a existência de um tempo discreto. Já a Figura 6.2 mostra que espaço e tempo são considerados simultaneamente.

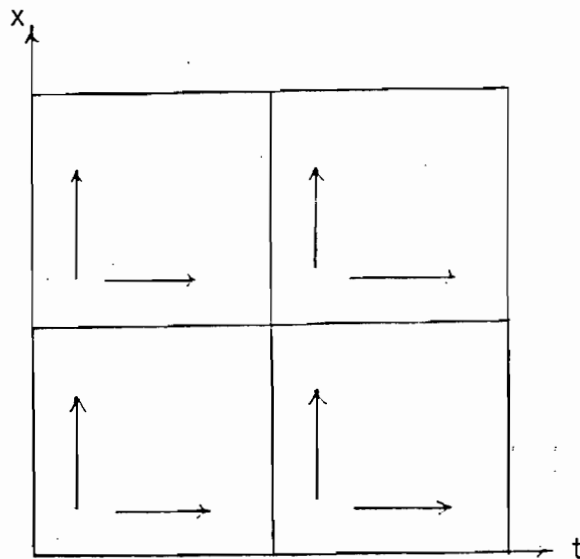


Fig. 6.1 - Esquema para uma malha considerando espaço e tempo como se fossem independentes.

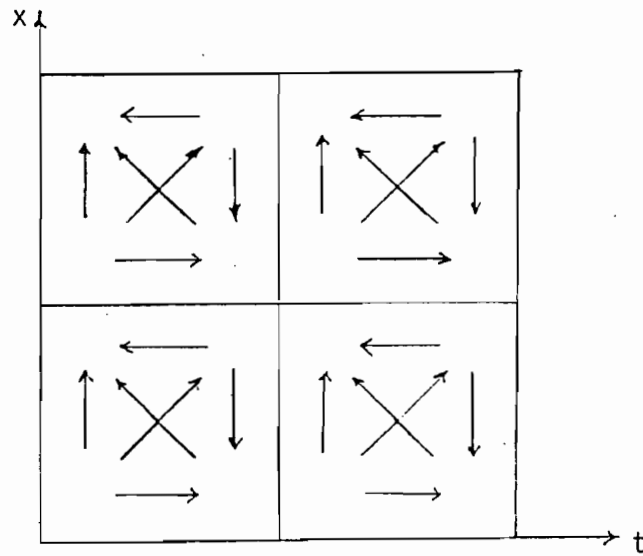


Fig. 6.2 - Esquema para uma malha considerando espaço e tempo simultaneamente.

Note-se que na bibliografia citada os melhores resultados foram obtidos por Donae e Evans (1982). Comparando os resultados da analítica com os por eles obtidos, os erros variaram de 0,1 a 10%.

O método aqui desenvolvido considerou a variável tempo sendo de mesma espécie que as variáveis espaciais e utilizou elementos triangulares nas variáveis (x,t) ; tais elementos são aqui denominados elemento triangular espaço-tempo.

O método se mostra bastante promissor, tendo em vista que o máximo erro nos testes feitos foi da mesma ordem do menor erro obtido por Donae e Evans, isto é 0,1% de erro.

O método permite modificar as condições inicial e de contorno de uma mesma equação sem alterar o programa de computação, pois estes parâmetros são colocados como dados de entrada.

Ao analisar os gráficos das Figuras 5.2 a 5.9 nota-se que, na primeira aplicação feita, o erro absoluto continua da mesma ordem para um número diferente de elementos para o mesmo intervalo de tempo.

por (35s) e que variando este intervalo (250s) (Figuras 5.10 a 5.13) o erro permaneceu de mesma ordem (máximo erro absoluto 0,01%).

Na segunda aplicação foram necessários 175 segundos correspondentes a 300 passos de integração ao longo do tempo, para levar a temperatura de 20 a 95 graus centígrados. As Figuras 5.14 a 5.17 mostram que o erro inicialmente da ordem de 0,1% decresce com o tempo.

Na terceira aplicação (equação com termo dissipativo) as Figuras 5.18 a 5.21 mostram que o máximo erro é da ordem de 0,01% e o mínimo erro da ordem de 0,0001%, para levar a temperatura de 20°C a 1°C em 200 segundos, correspondentes a 80 passos de integração no tempo.

Na quarta aplicação (equação não-homogênea), foram necessários 209,7 segundos correspondentes a 1258 passos de integração ao longo do tempo, para levar a temperatura de 25°C a 0,615°C no centro da barra, com um erro máximo de 0,01%, como mostram as Figuras 5.24 e 5.25.

Note-se que conforme a Tabela 5.1 o resíduo (erro) do método de elementos finitos propriamente dito é de $O(10^{-10})$, aumentando o erro final devido à resolução do sistema de equações.

Pode-se concluir então que o método é bastante promissor para a análise de equações diferenciais parciais do tipo parabólico (aqui denominados problemas de difusão).

6.2 - SUGESTÕES

No futuro poderão ser realizados trabalhos tais como:

- a) Analisar a valia do método para outros casos.
- b) Implementar o método para duas ou mais variáveis espaciais.

- c) Fazer a análise puramente matemática da convergência do método.
- d) Desenvolver o método utilizando mínimos quadrados ao invés de Galerkin

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARNOLD, D.N.; DOUGLAS Jr., J.; THOMÉE, V. Superconvergence of a finite element approximation to the solution of Sobolev equation in a single space variable. *Mathematics of Computation*, 36(153):53-63, Jan., 1981.
- ARPACI, V.S. *Conduction heat transfer*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1966.
- BABUSKA, I.; PRÁGER, M.; VITÁSEK, E. *Numerical processes in differential equation*. Prague, SNTL, 1966.
- CARRIER, G.F.; PEARSON, C.E. *Partial differential equations; theory and technics*. London, Academic, 1976.
- CASTRO SAN MIGUEL, E.R. *Métodos numéricos aplicados a escoamento rotativo de gases*. Dissertação de Mestrado, Campinas, UNICAMP, abril, 1983.
- CHUNG, T.J. *The finite element analysis in fluid dynamics*. New York, McGraw-Hill, 1978.
- COOK, C.H. On acceleration parameters for the odd-even Hopscotch method. *Mathematics and Computers in Simulation*, 24(4):338-40, Jul., 1982.
- CRANDALL, S.H. *Engineering analysis a survey of numerical procedures*. New York, McGraw-Hill, 1956.
- DONAE, A.; EVANS, D. Hopscotch procedures for a fourth-order parabolic partial differential equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 24(4):326-9, Jul., 1982.
- DESAI, C.S. *Elementary finite element method*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1979.
- EVANS, D.J.; BENSON, A. Iterative solution of the parabolic periodic boundary value problem. *Mathematics and Computers in Simulation*, 22(2):113-7, Jul., 1980.

- EWING, R.E.; FALKS, R.S. Numerical approximation of Cauchy problem for parabolic partial differential equation. *Mathematics of Computation*, 33(148):1125-44, Oct., 1979.
- FINALAYSON, B.A. Orthogonal collocation on finite elements-progress and potential. *Mathematics and Computers in Simulation*, 20(1):11-7, Mar., 1980.
- FORSYTHE, G.E.; WASOW, W.R. *Finite-difference methods for partial differential equations*. New York, John Wiley, 1960.
- FREMOND, M. La methode de éléments finis-application aux équations de la diffusion lineaires et non lineaires. *Mathematics and Computers in Simulation*, 19(1):29-37, Mar., 1977.
- GARABEDIAN, P.R. *Partial differential equations*. New York, John Wiley, 1964.
- GODOUNOV, S.; RIABENKI, V. *Schémas aux différences; introduction à la théorie*. Traduit par PÉTROVA, I., Moscou, Mar, 1977.
- HILDEBRAND, F.B. *Finite-difference equations and simulations*. Englewood Cliffs, NJ, 1968a.
- *Finite-difference methods for partial differential equations*. Englewood Cliffs, NJ, 1968b.
- KERAMIDAS, G.A. Finite element of the heat conduction equation with temperature dependent coefficients. *Mathematics and Computers in Simulation*, 22(3):248-55, Sep., 1980.
- LAWSON, P.A. Contraction mappin technics applied to hybrid computer solution of parabolic PDES. *Mathematics and Computers in Simulation*, 23(3):299-303, Sep., 1981.
- MINGYOU, A.; THOMÉE, V. Some convergence estimation for semi-discrete type schems for time-dependent non self-adjoint parabolic equations. *Mathematics of Computations*, 37(156):327-46, Sep., 1981.

- MITCHEL, A.R.; WAIT, R. *The finite element method in partial differential equations*. New York, John Wiley, 1977.
- MURTHY, D.N.P.; DAY, J.D.; WEBB, I.R. A note on the stability of DSDT methods for solving parabolic equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 23(2):107-10, Jul., 1981.
- NEUNDORF, W.; SCHOENEFELD, R. Stable iterative hybrid method for the solution of weak non linear parabolic differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 22(1):1-6, Mar., 1980.
- NEWELL, A.C. Finite amplitude instabilities of partial difference equations. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 33(1):133-60, Jul, 1977.
- NORRIE, D.H.; De VRIES, G. *The finite method; fundamentals and applications*. New York, John Wiley, 1975.
- PRENTER, P.M. *Splines and variational methods*. New York, John Wiley, 1975.
- SCHLÖGL, F. Randwertprobleme. In: FLÜGGE, S., ed. *Handbuch der physik; mathematische methoden I*. Berlin, Springer-Verlag, 1956, p. 218-352.
- SMITH, M.G. *Introduction to the theory of partial differential equations*. London, Van Nostrand, 1967.
- THOMÉE, V. Negative norm estimates and superconvergence in Galerkin methods for parabolic problems. *Mathematics of Computations*, 34(149):93-125, Jan., 1980.
- WEBB, I.R.; MURTHY, D.N.P. Higher Runge-Kutta type CSDT method for solving parabolic equations. *Mathematics and Computers in Simulations*, 23(3):235-44, Sep., 1981.
- WEINBERGER, H.F. *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*. New York, Blaisdell, 1965.

ZBOŘIL, F. Solving parabolic PDE's by a decomposition method.

Mathematics and Computers in Simulations, 21(3):263-9, Nov., 1979.

ZIENKIEWICZ, D.C. *The finite element method*. London, McGraw-Hill, 1977.

YANENKO, N.N. *The method of fractional steps*. Translated into English Northrop Corporate Laboratories. New York, Springer-Verlag, 1971.

APÊNDICE A

ALGEBRISMO PARA A DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE UM ELEMENTO PARA A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

Para resolver a Equação 5.1 da primeira aplicação desen_uvolve-se esta como segue

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 .$$

Para $U \approx \hat{U}$ implica que

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = R . \quad (A.1)$$

Como elemento foi escolhido o triangular com interpolação de Lagrange de 3ª ordem. Então, a função aproximada é dada por

$$\begin{aligned} \hat{U} = & N_0 \hat{U}_0 + N_1 \hat{U}_1 + N_2 \hat{U}_2 + N_3 \hat{U}_3 + N_4 \hat{U}_4 + N_5 \hat{U}_5 + N_6 \hat{U}_6 + \\ & + N_7 \hat{U}_7 + N_8 \hat{U}_8 + N_9 \hat{U}_9 , \end{aligned} \quad (A.2)$$

onde

$$N_0 = \frac{9}{2} \xi_0^3 - \frac{9}{2} \xi_0^2 + \xi_0 ,$$

$$N_1 = \frac{9}{2} \xi_1^3 - \frac{9}{2} \xi_1^2 + \xi_1 ,$$

$$N_2 = \frac{9}{2} \xi_2^3 - \frac{9}{2} \xi_2^2 + \xi_2 ,$$

$$N_3 = \frac{27}{2} \xi_0^2 \xi_1 - \frac{9}{2} \xi_0 \xi_1 ,$$

$$N_4 = \frac{27}{2} \xi_0 \xi_1^2 - \frac{9}{2} \xi_0 \xi_1 ,$$

$$N_5 = \frac{27}{2} \xi_1^2 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 ,$$

$$N_6 = \frac{27}{2} \xi_1 \xi_2^2 - \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 ,$$

(A.3)

$$N_7 = \frac{27}{2} \xi_2^2 \xi_0 - \frac{9}{2} \xi_2 \xi_0 ,$$

$$N_8 = \frac{27}{2} \xi_2 \xi_0^2 - \frac{9}{2} \xi_2 \xi_0 ,$$

$$N_9 = 27 \xi_0 \xi_1 \xi_2 .$$

Para substituir a função aproximada $\hat{U}$ na Equação A.1 é necessário obter suas derivadas parciais em função de x e t , isto é

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{U}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_0^2} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_0 \partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_1 \partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_1^2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_2 \partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \xi_2^2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right)^2 ,$$

(A.4)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} .$$

Agora, definindo

$$g_{01} = -(t_2 - t_1) ;$$

$$g_{02} = x_2 - x_1 ;$$

$$g_{11} = t_2 - t_0 ;$$

(A.5)

$$g_{12} = -(x_2 - x_0) ;$$

$$g_{21} = -(t_1 - t_0) ;$$

$$g_{22} = x_1 - x_0 ;$$

e $\Delta = g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21}$, podem-se escrever as derivadas auxiliares como segue

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x} = \frac{g_{01}}{\Delta} ,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{g_{11}}{\Delta} ,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{g_{21}}{\Delta} ,$$

(A.6)

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = \frac{g_{02}}{\Delta} ,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{g_{12}}{\Delta} ,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \frac{g_{22}}{\Delta} ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_0} = & \left(\frac{27}{2} \xi_0^2 - \frac{18}{2} \xi_0 + 1 \right) \tilde{U}_0 + \left(\frac{54}{2} \xi_0 \xi_1 - \frac{9}{2} \xi_1 \right) \tilde{U}_3 + \\ & + \left(\frac{27}{2} \xi_1^2 - \frac{9}{2} \xi_1 \right) \tilde{U}_4 + \left(\frac{27}{2} \xi_2^2 - \frac{9}{2} \xi_2 \right) \tilde{U}_7 + \\ & + \left(\frac{54}{2} \xi_2 \xi_0 - \frac{9}{2} \xi_2 \right) \tilde{U}_8 + 27 \xi_1 \xi_2 \tilde{U}_9 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} = & \left(\frac{27}{2} \xi_1^2 - \frac{18}{2} \xi_1 + 1 \right) \tilde{U}_1 + \left(\frac{27}{2} \xi_0^2 - \frac{9}{2} \xi_0 \right) \tilde{U}_3 + \\ & + \left(\frac{54}{2} \xi_0 \xi_1 - \frac{9}{2} \xi_0 \right) \tilde{U}_4 + \left(\frac{54}{2} \xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_2 \right) \tilde{U}_5 + \\ & + \left(\frac{27}{2} \xi_2^2 - \frac{9}{2} \xi_2 \right) \tilde{U}_6 + 27 \xi_0 \xi_2 \tilde{U}_9 , \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} = & \left(\frac{27}{2} \xi_2^2 - \frac{18}{2} \xi_2 + 1 \right) \tilde{U}_2 + \left(\frac{27}{2} \xi_1^2 - \frac{9}{2} \xi_1 \right) \tilde{U}_5 + \\ & + \left(\frac{54}{2} \xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 \right) \tilde{U}_6 + \left(\frac{54}{2} \xi_2 \xi_0 - \frac{9}{2} \xi_0 \right) \tilde{U}_7 + \\ & + \left(\frac{27}{2} \xi_0^2 - \frac{9}{2} \xi_0 \right) \tilde{U}_8 + 27 \xi_0 \xi_1 \tilde{U}_9 ; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi_0^2} = \left(\frac{54}{2} \xi_0 - \frac{18}{2} \right) \tilde{U}_0 + \frac{54}{2} \xi_1 \tilde{U}_1 + \frac{54}{2} \xi_2 \tilde{U}_8 ,$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_1 \partial \xi_0} = \left(\frac{54}{2} \xi_0 - \frac{9}{2} \right) \widetilde{U}_3 + \left(\frac{54}{2} \xi_1 - \frac{9}{2} \right) \widetilde{U}_4 + 27 \xi_2 \widetilde{U}_9 ,$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_0 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_2 \partial \xi_0} = \left(\frac{54}{2} \xi_2 - \frac{9}{2} \right) \widetilde{U}_7 + \left(\frac{54}{2} \xi_0 - \frac{9}{2} \right) \widetilde{U}_8 + 27 \xi_1 \widetilde{U}_9 ,$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_1^2} = \left(\frac{54}{2} \xi_1 - \frac{18}{2} \right) \widetilde{U}_1 + \frac{54}{2} \xi_0 \widetilde{U}_4 + \frac{54}{2} \xi_2 \widetilde{U}_5 , \quad (A.8)$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = \left(\frac{54}{2} \xi_1 - \frac{9}{2} \right) \widetilde{U}_5 + \left(\frac{54}{2} \xi_2 - \frac{9}{2} \right) \widetilde{U}_6 + 27 \xi_1 \widetilde{U}_9 ,$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi_2^2} = \left(\frac{54}{2} \xi_2 - \frac{18}{2} \right) \widetilde{U}_2 + \frac{54}{2} \xi_1 \widetilde{U}_6 + \frac{54}{2} \xi_0 \widetilde{U}_7 ;$$

$$\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{g_{01}}{\Delta} \right)^2 ,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{g_{01} g_{11}}{\Delta^2} ,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{g_{01} g_{21}}{\Delta^2} ,$$

(A.9)

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{g_{11}}{\Delta} \right)^2 ,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{g_{11} g_{21}}{\Delta^2} ,$$

$$\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{g_{21}}{\Delta} \right)^2 .$$

Então, substituindo as Expressões A.6, A.7, A.8 e A.9 nas Expressões A.4, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = \frac{9}{2} \frac{1}{\Delta^2} \left\{ & [(6\xi_0 - 2)\tilde{U}_0 + 6\xi_1\tilde{U}_3 + 6\xi_2\tilde{U}_8]g_{01}^2 + \right. \\ & + 2[(6\xi_0 - 1)\tilde{U}_3 + (6\xi_1 - 1)\tilde{U}_4 + 6\xi_2\tilde{U}_9]g_{01}g_{11} + \\ & + 2[(6\xi_2 - 1)\tilde{U}_7 + (6\xi_0 - 1)\tilde{U}_8 + 6\xi_1\tilde{U}_9]g_{01}g_{21} + \\ & + [(6\xi_1 - 2)\tilde{U}_1 + 6\xi_0\tilde{U}_4 + 6\xi_2\tilde{U}_5]g_{11}^2 + 2[(6\xi_1 - 1)\tilde{U}_5 + \\ & + (6\xi_2 - 1)\tilde{U}_6 + 6\xi_0\tilde{U}_9]g_{11}g_{21} + [(6\xi_2 - 2)\tilde{U}_2 + \\ & \left. + 6\xi_1\tilde{U}_6 + 6\xi_0\tilde{U}_7]g_{11}^2 \right\} \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \frac{9}{2} \frac{1}{\Delta} \left\{ & \left[\left(3\xi_0^2 - 2\xi_0 + \frac{2}{9} \right) \tilde{U}_0 + \xi_1(6\xi_0 - 1)\tilde{U}_3 + \xi_1(3\xi_1 - 1)\tilde{U}_4 + \right. \right. \\ & + \xi_2(3\xi_2 - 1)\tilde{U}_7 + \xi_2(6\xi_0 - 1)\tilde{U}_8 + 6\xi_1\xi_2\tilde{U}_9 \Big] g_{02} + \left[\left(3\xi_1^2 - 2\xi_1 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{2}{9} \right) \tilde{U}_1 + \xi_0(3\xi_0 - 1)\tilde{U}_3 + \xi_0(6\xi_1 - 1)\tilde{U}_4 + \xi_2(6\xi_1 - 1)\tilde{U}_5 + \\ & + \xi_3(3\xi_3 - 1)\tilde{U}_6 + 6\xi_0\xi_2\tilde{U}_9 \Big] g_{12} + \left[\left(3\xi_2^2 - 2\xi_2 + \frac{2}{9} \right) \tilde{U}_2 + \right. \\ & + \xi_1(3\xi_1 - 1)\tilde{U}_5 + \xi_1(6\xi_2 - 1)\tilde{U}_6 + \xi_0(6\xi_2 - 1)\tilde{U}_7 + \\ & \left. \left. + \xi_0(3\xi_0 - 1)\tilde{U}_9 + 6\xi_0\xi_1\tilde{U}_9 \right] g_{22} \right\} . \end{aligned}$$

Substituindo as Expressões A.9 na Equação A.1, colocando as incógnitas $\tilde{U}_i$ em evidência, obtêm-se a expressão do resíduo R, como segue

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{9}{2} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} (6\xi_0 - 2)g_{01}^2 - \left(3\xi_0^2 - 2\xi_0 + \frac{2}{9} \right) g_{02} \right] \tilde{U}_0 + \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (6\xi_1 - 2)g_{11}^2 - \left(3\xi_1^2 - 2\xi_1 + \frac{2}{9} \right) g_{12} \right] \tilde{U}_1 + \left[\frac{1}{\Delta} (6\xi_2 - \right. \\
 & - 2)g_{21}^2 - \left(3\xi_2^2 - 2\xi_2 + \frac{2}{9} \right) g_{22} \right] \tilde{U}_2 + \left[\frac{6}{\Delta} \xi_1 g_{01}^2 + \frac{2}{\Delta} (6\xi_0 - \right. \\
 & - 1)g_{01}g_{11} - \xi_2(6\xi_0 - 1)g_{02} - \xi_0(3\xi_0 - 1)g_{12} \left. \right] \tilde{U}_3 + \left[\frac{2}{\Delta} (6\xi_1 - \right. \\
 & - 1)g_{01}g_{11} + \frac{6}{\Delta} \xi_0 g_{11}^2 - \xi_1(3\xi_1 - 1)g_{02} - \xi_0(6\xi_1 - 1)g_{12} \left. \right] \tilde{U}_4 + \\
 & + \left[\frac{6}{\Delta} \xi_2 g_{11}^2 + \frac{2}{\Delta} (6\xi_1 - 1)g_{11}g_{21} - \xi_2(6\xi_1 - 1)g_{12} - \right. \\
 & - \xi_1(3\xi_1 - 1)g_{22} \left. \right] \tilde{U}_5 + \left[\frac{2}{\Delta} (6\xi_1 - 1)g_{11}g_{21} + \frac{6}{\Delta} \xi_1 g_{21}^2 - \right. \\
 & - \xi_2(3\xi_2 - 1)g_{12} - \xi_1(6\xi_2 - 1)g_{22} \left. \right] \tilde{U}_6 + \left[\frac{2}{\Delta} (6\xi_2 - 1)g_{01}g_{21} + \right. \\
 & + \frac{6}{\Delta} \xi_0 g_{21}^2 - \xi_2(3\xi_2 - 1)g_{02} - \xi_0(6\xi_2 - 1)g_{22} \left. \right] \tilde{U}_7 + \left[\frac{6}{\Delta} \xi_2 g_{01}^2 + \right. \\
 & + \frac{2}{\Delta} (6\xi_0 - 1)g_{01}g_{21} - \xi_2(6\xi_0 - 1)g_{02} - \xi_0(3\xi_0 - 1)g_{22} \left. \right] \tilde{U}_8 + \\
 & + \left[\frac{6}{\Delta} (\xi_2 g_{01}g_{11} + \xi_1 g_{01}g_{21} + \xi_0 g_{11}g_{21}) - 6(\xi_1 \xi_2 g_{02} + \right. \\
 & + \xi_0 \xi_2 g_{12} + \xi_0 \xi_1 g_{22}) \left. \right] \tilde{U}_9 \left. \right\} , \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

onde as expressões multiplicadas pelas incôgnitas $\tilde{U}_i$, quando multiplicadas por $(9/2)(1/\Delta)$, são os coeficientes M_i quando o resíduo é posto na forma

$$R = \sum_{i=0}^n M_i \tilde{U}_i .$$

Agora, substituindo o resíduo R na Expressão 4.8, isto é,

$$\int_{D^e} N_j^e R^e dD^e ,$$

têm-se

$$\begin{aligned} \int_{D^e} N_0^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{60} g_{01}^2 - \frac{32}{3780} g_{02} \right] \right\} \tilde{U}_0 \\ &+ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{1}{120} g_{11}^2 - \frac{19}{7560} g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\ &+ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{1}{120} g_{21}^2 - \frac{19}{7560} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{40} g_{01}^2 + 2 \cdot \frac{1}{30} g_{01} g_{11} \right) - \left(-\frac{1}{1680} g_{02} + \frac{11}{840} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \cdot \frac{1}{120} g_{01} g_{11} + \frac{1}{20} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{02} - \frac{1}{210} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \cdot \frac{1}{120} g_{11} g_{21} + \frac{1}{40} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{12} + \frac{1}{336} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \cdot \frac{1}{120} g_{11} g_{21} + \frac{1}{40} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{12} + \frac{1}{336} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \cdot \frac{1}{120} g_{01} g_{21} + \frac{1}{20} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{02} - \frac{1}{210} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{40} g_{01}^2 + 2 \cdot \frac{1}{30} g_{01} g_{21} \right) - \left(-\frac{1}{1680} g_{02} + \frac{11}{840} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \cdot \frac{1}{40} g_{01} g_{11} + 2 \cdot \frac{1}{40} g_{01} g_{21} + 2 \cdot \frac{1}{20} g_{11} g_{21} \right) - \left(\frac{1}{140} g_{02} + \frac{1}{280} g_{12} + \frac{1}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \} ,$$

$$\begin{aligned} \int_{D^e} N_1^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[- \frac{1}{\Delta} \frac{1}{120} g_{01}^2 - \frac{19}{7560} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{60} g_{11}^2 - \frac{32}{3780} g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\ &+ \left[- \frac{1}{\Delta} \frac{1}{120} g_{21}^2 - \frac{19}{7650} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{20} g_{01}^2 + 2 \frac{1}{120} g_{01} g_{11} \right) - \left(- \frac{1}{210} g_{02} + \frac{1}{336} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{30} g_{01} g_{11} + \frac{1}{40} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{11}{840} g_{02} - \frac{1}{1680} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{30} g_{11} g_{21} + \frac{1}{40} g_{11}^2 \right) - \left(- \frac{1}{1680} g_{12} + \frac{11}{840} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{120} g_{11} g_{21} + \frac{1}{20} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{12} + \frac{1}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{120} g_{01} g_{21} + \frac{1}{40} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{02} + \frac{1}{336} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{40} g_{01}^2 + 2 \frac{1}{120} g_{01} g_{21} \right) - \left(\frac{1}{336} g_{02} + \frac{1}{336} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{40} g_{01} g_{11} + 2 \frac{1}{20} g_{01} g_{21} + 2 \frac{1}{40} g_{11} g_{21} \right) \right. \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{1}{280} g_{02} + \frac{1}{140} g_{12} + \frac{1}{280} g_{22} \right) \left] \tilde{U}_9 \right\} ,$$

$$\begin{aligned} \int_{D^e} N_2^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{1}{120} g_{01}^2 - \frac{19}{7560} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\ &+ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{1}{120} g_{11}^2 - \frac{19}{7560} g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{60} g_{21}^2 - \frac{32}{3780} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{40} g_{01}^2 + 2 \frac{1}{120} g_{01} g_{11} \right) - \left(\frac{1}{336} g_{02} + \frac{1}{336} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{120} g_{01} g_{21} + \frac{1}{40} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{1}{336} g_{02} + \frac{1}{336} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{120} g_{11} g_{21} + \frac{1}{20} g_{11}^2 \right) - \left(-\frac{1}{210} g_{12} + \frac{1}{336} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{30} g_{11} g_{21} + \frac{1}{40} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{11}{840} g_{12} - \frac{1}{1680} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{30} g_{01} g_{21} + \frac{1}{40} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{11}{840} g_{02} - \frac{1}{1680} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{20} g_{01}^2 + 2 \frac{1}{120} g_{01} g_{21} \right) - \left(-\frac{1}{210} g_{02} + \frac{1}{336} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{1}{20} g_{01} g_{11} + 2 \frac{1}{40} g_{01} g_{21} + 2 \frac{1}{40} g_{11} g_{21} \right) \right. \\ &\left. - \left(\frac{1}{280} g_{02} + \frac{1}{280} g_{12} + \frac{1}{140} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \left. \right\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_3^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{20} g_{01}^2 - \frac{23}{1680} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 &+ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{11}^2 - \left(-\frac{13}{1680}\right) g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 &+ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{21}^2 - \frac{1}{336} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{11} - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{70} g_{12}\right) \right] \tilde{U}_3 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(-2 \frac{3}{80} g_{01} g_{11} + \frac{9}{40} g_{11}^2\right) - \left(-\frac{9}{560} g_{02} + \frac{3}{560} g_{12}\right) \right] \tilde{U}_4 \\
 &+ \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{11} g_{21} - \left(-\frac{3}{280} g_{12} - \frac{9}{560} g_{22}\right) \right] \tilde{U}_5 \\
 &+ \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{11} g_{21} - \left(-\frac{3}{560} g_{12} - \frac{3}{280} g_{22}\right) \right] \tilde{U}_6 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(-2 \frac{3}{80} g_{01} g_{21} + \frac{9}{40} g_{21}^2\right) - \left(-\frac{3}{560} g_{02} - \frac{9}{560} g_{22}\right) \right] \tilde{U}_7 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{21} - \left(\frac{3}{140} g_{02} + \frac{3}{70} g_{22}\right) \right] \tilde{U}_8 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{9}{40} g_{11} g_{21} - \left(-\frac{3}{280} g_{02} + \frac{3}{140} g_{12} + \frac{3}{70} g_{22}\right) \right] \tilde{U}_9 \left. \right\} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_4^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{01}^2 - \left(-\frac{13}{1860}\right) g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{20} g_{11}^2 - \frac{26}{1860} g_{12} \right] \tilde{U}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{21}^2 - \frac{1}{336} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{40} g_{01}^2 + 2 \frac{1}{30} g_{01} g_{11} \right) - \left(\frac{3}{560} g_{02} - \frac{9}{560} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{11} - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{70} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{11} g_{21} - \left(\frac{3}{140} g_{12} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(-2 \frac{3}{80} g_{11} g_{21} + \frac{9}{40} g_{21}^2 \right) - \left(-\frac{3}{560} g_{12} - \frac{9}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{21} - \left(-\frac{3}{560} g_{02} - \frac{3}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{21} - \left(-\frac{3}{280} g_{02} - \frac{9}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{9}{40} g_{01} g_{21} - \left(\frac{3}{140} g_{02} - \frac{3}{280} g_{12} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_D e \, N_5^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{40} g_{01}^2 - \frac{1}{336} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{20} g_{11}^2 - \frac{23}{1680} g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{21}^2 - \frac{1}{336} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{40} g_{01}^2 - 2 \frac{3}{80} g_{01} g_{11} \right) - \left(-\frac{9}{560} g_{02} - \frac{3}{560} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{16} g_{11}^2 - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{140} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{11} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{12} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(-2 \frac{3}{80} g_{11} g_{21} + \frac{9}{40} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{3}{70} g_{12} + \frac{3}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[- \frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{21} - \left(- \frac{9}{560} g_{02} - \frac{3}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[- \frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{21} - \left(- \frac{9}{560} g_{02} - \frac{3}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{9}{40} g_{01} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{02} - \frac{3}{280} g_{12} + \frac{3}{140} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_6^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[- \frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{01}^2 - \frac{1}{336} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[- \frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{11}^2 - \left(- \frac{13}{1680} \right) g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{20} g_{21}^2 - \frac{23}{1680} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[- \frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{11} - \left(- \frac{3}{280} g_{02} - \frac{3}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[- \frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{11} - \left(- \frac{9}{560} g_{02} + \frac{3}{140} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(-2 \frac{3}{80} g_{11} g_{21} + \frac{9}{40} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{3}{560} g_{12} - \frac{9}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{11} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{12} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{140} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{40} g_{01}^2 - 2 \frac{3}{80} g_{01} g_{21} \right) - \left(-\frac{9}{560} g_{02} - \frac{3}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{9}{40} g_{01} g_{11} - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{140} g_{12} - \frac{3}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_D e \, N_7^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{01}^2 - \left(-\frac{13}{1680} \right) g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[-\frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{11}^2 - \frac{1}{336} g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{20} g_{21}^2 - \frac{23}{1680} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{11} - \left(-\frac{3}{280} g_{02} - \frac{9}{560} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[-\frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{01} g_{11} - \left(-\frac{3}{280} g_{02} - \frac{3}{280} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \left(-2 \frac{3}{80} g_{11} g_{21} + \frac{9}{40} g_{11}^2 \right) - \left(-\frac{9}{560} g_{12} - \frac{3}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{16} g_{11} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{12} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7
 \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{40} g_{01}^2 - 2 \frac{3}{80} g_{01} g_{21} \right) - \left(\frac{3}{70} g_{02} - \frac{9}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8$$

$$+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{9}{40} g_{01} g_{11} - \left(\frac{3}{140} g_{02} + \frac{3}{70} g_{12} - \frac{3}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \} ,$$

$$\int_D^e N_8^e R^e dD^e = \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} \frac{3}{20} g_{01}^2 - \frac{23}{1680} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right.$$

$$+ \left[- \frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{11}^2 - \frac{1}{336} g_{22} \right] \tilde{U}_1$$

$$+ \left[- \frac{1}{\Delta} \frac{3}{40} g_{11}^2 - \left(- \frac{13}{1680} \right) g_{22} \right] \tilde{U}_2$$

$$+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{11} - \left(\frac{3}{140} g_{02} + \frac{3}{70} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3$$

$$+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(- \frac{3}{80} g_{01} g_{11} + \frac{9}{40} g_{11}^2 \right) - \left(- \frac{3}{560} g_{02} - \frac{9}{560} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4$$

$$+ \left[- \frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{11} g_{21} - \left(- \frac{3}{280} g_{12} - \frac{3}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5$$

$$+ \left[- \frac{2}{\Delta} \frac{3}{80} g_{11} g_{21} - \left(- \frac{9}{560} g_{12} - \frac{3}{280} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6$$

$$+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(- 2 \frac{3}{80} g_{01} g_{21} + \frac{9}{40} g_{21}^2 \right) - \left(- \frac{9}{560} g_{02} + \frac{3}{560} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7$$

$$+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{3}{16} g_{01} g_{21} - \left(\frac{3}{70} g_{02} + \frac{3}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8$$

$$+ \left[\frac{2}{\Delta} \frac{9}{40} g_{11} g_{21} - \left(- \frac{3}{280} g_{02} + \frac{3}{70} g_{12} + \frac{3}{140} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \} ,$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_9^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[- \left(-\frac{1}{280} \right) g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 &+ \left[- \left(-\frac{1}{280} \right) g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 &+ \left[- \left(-\frac{1}{280} \right) g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{20} g_{01}^2 + 2 \frac{9}{40} g_{01} g_{11} \right) - \left(\frac{3}{56} g_{02} + \frac{3}{140} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_3 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{9}{40} g_{01} g_{11} + \frac{9}{20} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{3}{140} g_{02} + \frac{3}{56} g_{12} \right) \right] \tilde{U}_4 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{9}{40} g_{11} g_{21} + \frac{9}{20} g_{11}^2 \right) - \left(\frac{3}{56} g_{12} + \frac{3}{140} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_5 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{9}{40} g_{11} g_{21} + \frac{9}{20} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{3}{140} g_{12} + \frac{3}{56} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_6 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{9}{40} g_{01} g_{21} + \frac{9}{20} g_{21}^2 \right) - \left(\frac{3}{140} g_{02} + \frac{3}{56} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_7 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{20} g_{01}^2 + 2 \frac{9}{40} g_{01} g_{21} \right) - \left(\frac{3}{56} g_{02} + \frac{3}{140} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_8 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{9}{20} g_{01} g_{11} + 2 \frac{9}{20} g_{01} g_{21} + 2 \frac{9}{20} g_{11} g_{21} \right) \right. \\
 &\left. - \left(\frac{9}{70} g_{02} + \frac{9}{70} g_{12} + \frac{9}{70} g_{22} \right) \right] \tilde{U}_9 \left. \right\} . \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

Desta forma foi determinado o vetor $\underline{I}^e$ das Equações 4.30 e 4.31 em função das incógnitas $\tilde{U}_i$, podendo-se então escrever a matriz de correlação do elemento e, onde os coeficientes K_{ij}^e são dados pelas expressões que multiplicam os valores nodais U_i nas Integrais A.12. De nominando os coeficientes numéricos como segue

$$C_1 = 1/60; \quad C_4 = -1/120; \quad C_7 = 3/20; \quad C_{10} = -3/40;$$

$$C_2 = 1/120; \quad C_5 = 1/30; \quad C_8 = 3/16; \quad C_{11} = 9/40;$$

$$C_3 = 1/20; \quad C_6 = 1/40; \quad C_9 = -3/80; \quad C_{12} = 9/20;$$

$$D_1 = 32/3780; \quad D_6 = 11/840; \quad D_{11} = -9/560; \quad D_{16} = 3/560;$$

$$D_2 = -1/1680; \quad D_7 = -1/210; \quad D_{12} = -3/560; \quad D_{17} = -1/280;$$

$$D_3 = 1/336; \quad D_8 = 1/280; \quad D_{13} = 3/140; \quad D_{18} = 3/56;$$

$$D_4 = 1/140; \quad D_9 = 23/1680; \quad D_{14} = -3/280; \quad D_{19} = 9/70;$$

$$D_5 = 19/7560; \quad D_{10} = 3/70; \quad D_{15} = -13/1680;$$

as Integrais A.12 são reescritas na forma a seguir

$$\begin{aligned} \int_D e \, N_0^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_1 g_{01}^2 - D_{10} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} C_4 g_{11}^2 - D_{50} g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} C_4 g_{21}^2 - D_{50} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} (C_6 g_{01}^2 + 2C_5 g_{01} g_{11}) - (D_2 g_{02} + D_6 g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2 g_{01} g_{11} + C_3 g_{11}^2) - (D_3 g_{02} + D_7 g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{11}g_{21} + C_6g_{11}^2) - (D_3g_{12} + D_3g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{11}g_{21} + C_6g_{21}^2) - (D_3g_{12} + D_3g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{01}g_{21} + C_3g_{21}^2) - (D_3g_{02} - D_7g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_6g_{01}^2 + 2C_5g_{01}g_{21}) - (D_2g_{02} + D_6g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_6g_{01}g_{11} + 2C_6g_{01}g_{21} + 2C_3g_{11}g_{21}) \right. \\
 & \left. - (D_4g_{02} + D_8g_{12} + D_8g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_D e^{N_1^e R^e} dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_4g_{01}^2 - D_5g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_4g_{11}^2 + D_1g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_4g_{11}^2 - D_5g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_3g_{01}^2 + 2C_2g_{01}g_{11}) - (D_7g_{02} + D_3g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_5g_{01}g_{11} + C_6g_{11}^2) - (D_6g_{02} - D_2g_{22}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_5g_{11}g_{21} + C_6g_{11}^2) - (D_2g_{12} + D_6g_{22}) \right] \tilde{U}_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{11}g_{21} + C_3g_{21}^2) - (D_3g_{12} + D_8g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{01}g_{21} + C_6g_{21}^2) - (D_3g_{02} + D_3g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_6g_{01}^2 + 2C_2g_{01}g_{21}) - (D_3g_{02} + D_3g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_6g_{01}g_{11} + 2C_3g_{01}g_{21} + 2C_6g_{11}g_{21}) \right. \\
 & \left. + (D_8g_{02} + D_4g_{12} + D_8g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_2 R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_4g_{01}^2 - D_5g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_4g_{11}^2 - D_5g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_1g_{21}^2 - D_1g_{12} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_6g_{01}^2 + 2C_2g_{01}g_{11}) - (D_3g_{02} + D_3g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{01}g_{11} + C_6g_{11}^2) - (D_3g_{02} + D_3g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_2g_{11}g_{21} + C_3g_{11}^2) - (D_7g_{12} + D_3g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_5g_{11}g_{21} + C_6g_{21}^2) - (D_6g_{12} - D_2g_{22}) \right] \tilde{U}_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_5g_{01}g_{21} + C_6g_{21}) - (D_6g_{02} - D_2g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_3g_{01}^2 + 2C_2g_{01}g_{21}) - (D_7g_{02} + D_3g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_3g_{01}g_{11} + 2C_6g_{01}g_{21} + 2C_6g_{11}g_{21}) \right. \\
 & \left. - (D_8g_{02} + D_8g_{12} + D_4g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_3^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_7g_{01} + D_9g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_{10}g_{11}^2 + D_{15}g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_{10}g_{21}^2 + D_3g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_8g_{01}g_{11} - (D_{10}g_{02} + D_{10}g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_9g_{01}g_{11} + C_{11}g_{02}) + (D_{11}g_{02} + D_{16}g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_9g_{11}g_{21} - (D_{14}g_{12} + D_{11}g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_9g_{11}g_{21} - (D_{12}g_{12} + D_{14}g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_9g_{01}g_{21} + C_{11}g_{21}^2) - (D_{12}g_{02} + D_{11}g_{22}) \right] \tilde{U}_7
 \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{01} g_{21} - (D_{12} g_{02} + D_{11} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\ + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{11} g_{21} - (D_{14} g_{02} + D_{13} g_{12} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,$$

$$\int_D e^{N_4 R^e} dD^e = \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{01}^2 - D_{15} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\ + \left[\frac{1}{\Delta} C_7 g_{11}^2 - D_9 g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\ + \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{21}^2 - D_3 g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\ + \left[\frac{1}{\Delta} (C_{11} g_{01}^2 + 2C_9 g_{01} g_{11}) - (D_{16} g_{02} + D_{11} g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\ + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{01} g_{11} - (D_{10} g_{02} + D_{10} g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\ + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{11} g_{21} - (D_{13} g_{12} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\ + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_9 g_{11} g_{21} + C_{11} g_{21}^2) - (D_{12} g_{12} + D_{11} g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\ + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{21} - (D_{12} g_{02} + D_{14} g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\ + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{21} - (D_{14} g_{02} + D_{11} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\ + \left[\frac{2}{\Delta} C_{11} g_{01} g_{21} - (D_{13} g_{02} + D_{14} g_{12} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_5^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{2}{\Delta} C_{10} g_{01}^2 - D_3 g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} C_7 g_{11}^2 - D_9 g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{11}^2 - D_3 g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} (C_{11} g_{01}^2 + 2C_9 g_{01} g_{11}) - (D_{11} g_{02} D_{12} g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} C_8 g_{11}^2 - (D_{10} g_{02} + D_{13} g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{11} g_{21} - (D_{10} g_{12} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} (2C_9 g_{11} g_{21} + C_{11} g_{21}^2) - (D g_{12} + D g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{21} - (D_{11} g_{02} + D_{14} g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{21} - (D_{11} g_{02} + D_{12} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 &+ \left[\frac{2}{\Delta} C_{11} g_{01} g_{21} - (D_{10} g_{02} + D_{14} g_{12} + D_{13} g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \left. \right\} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_6^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{01}^2 - D_3 g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 &+ \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{11}^2 - D_{15} g_{12} \right] \tilde{U}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_7 g_{21}^2 - D_9 g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{11} - (D_{14} g_{02} + D_{12} g_{22}) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{11} - (D_{11} g_{02} + D_{13} g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_9 g_{11} g_{21} + C_{11} g_{11}^2) - (D_{16} g_{12} - D_{11} g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{11} g_{21} - (D_{10} g_{12} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{01} g_{21} - (D_{10} g_{02} + D_{13} g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_{11} g_{01}^2 + 2C_9 g_{01} g_{21}) - (D_{11} g_{02} + D_{12} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_{11} g_{01} g_{11} - (D_{10} g_{02} + D_{13} g_{12} + D_{14} g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\int_{D^e} N_7^e R^e dD^e = \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{01}^2 - D_{15} g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right.$$

$$+ \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{11}^2 - D_3 g_{12} \right] \tilde{U}_1$$

$$+ \left[\frac{1}{\Delta} C_7 g_{21}^2 - D_9 g_{22} \right] \tilde{U}_2$$

$$+ \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{11} - (D_{14} g_{02} + D_{11} g_{12}) \right] \tilde{U}_3$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{01} g_{11} - (D_{14} g_{02} - D_{14} g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_9 g_{11} g_{21} + C_{11} g_{11}^2) - (D_{11} g_{12} + D_{14} g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_8 g_{11} g_{21} - (D_{10} g_{12} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{01} g_{21} - (D_{10} g_{02} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_{11} g_{01}^2 + 2C_9 g_{01} g_{21}) - (D_{10} g_{02} - D_{11} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_{11} g_{01} g_{11} - (D_{13} g_{02} + D_{10} g_{12} + D_{14} g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_D e N_8^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta} C_7 g_{01}^2 - D_9 g_{02} \right] \tilde{U}_0 \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{11}^2 - D_3 g_{12} \right] \tilde{U}_1 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_{10} g_{21}^2 - D_{15} g_{22} \right] \tilde{U}_2 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{01} g_{11} - (D_{13} g_{02} + D_{10} g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_9 g_{01} g_{11} + C_{11} g_{11}^2) - (D_{12} g_{02} + D_{11} g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & \left. + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{11} g_{21} - (D_{14} g_{12} + D_{12} g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_9 g_{11} g_{21} - (D_{11} g_{12} - D_{14} g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_9 g_{01} g_{21} + C_{11} g_{21}^2) - (D_{11} g_{02} + D_{16} g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_8 g_{01} g_{21} - (D_{10} g_{02} + D_{10} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{2}{\Delta} C_{11} g_{11} g_{21} - (D_{14} g_{02} + D_{10} g_{12} + D_{13} g_{22}) \right] \tilde{U}_9 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{D^e} N_9^e R^e dD^e &= \frac{9}{2} \left\{ -D_{17} g_{02} \tilde{U}_0 - D_{17} g_{12} \tilde{U}_1 - D_{17} g_{22} \tilde{U}_2 \right. \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} C_{12} g_{01}^2 + 2C_{11} g_{01} g_{11} - (D_{18} g_{02} + D_{13} g_{12}) \right] \tilde{U}_3 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_{11} g_{01} g_{11} + C_{12} g_{11}^2) - (D_{13} g_{02} + D_{18} g_{12}) \right] \tilde{U}_4 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_{11} g_{11} g_{21} + C_{12} g_{11}^2) - (D_{18} g_{12} + D_{13} g_{22}) \right] \tilde{U}_5 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_{11} g_{11} g_{21} + C_{12} g_{21}^2) - (D_{13} g_{12} + D_{18} g_{22}) \right] \tilde{U}_6 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_{11} g_{01} g_{21} + C_{12} g_{21}^2) - (D_{13} g_{02} + D_{18} g_{22}) \right] \tilde{U}_7 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (C_{12} g_{01}^2 + 2C_{11} g_{01} g_{11}) - (D_{18} g_{02} + D_{13} g_{22}) \right] \tilde{U}_8 \\
 & + \left[\frac{1}{\Delta} (2C_{12} g_{01} g_{11} + 2C_{12} g_{01} g_{21} + 2C_{12} g_{11} g_{21}) \right.
 \end{aligned}$$

$$- (D_{19}g_{02} + D_{19}g_{22} + D_{19}g_{22}) \Big] \tilde{U}_9 \Big\} .$$

Definem-se agora parâmetros H_i para $i = 1, 2, \dots, 11$, os quais são dependentes apenas das coordenadas (x,t) , isto é, dos g_{ij} , como segue:

$$H_1 = 9/2; \quad H_5 = H_2 g_{11}^2; \quad H_9 = 2H_2 g_{01} g_{11};$$

$$H_2 = H_1/\Delta; \quad H_6 = H_1 g_{23}; \quad H_{10} = 2H_2 g_{11} g_{21};$$

$$H_3 = H_2 g_{01}^2; \quad H_7 = H_2 g_{21}^2; \quad H_{11} = 2H_2 g_{01} g_{21}.$$

$$H_4 = H_1 g_{02}; \quad H_8 = H_1 g_{22};$$

Finalmente, escreve-se a matriz $\underline{A}^e$ de correlação para um elemento "e" genérico, onde os coeficientes K_{ij}^e são definidos como segue

$$K_{00}^e = C_1 H_3 - D_1 H_4 ,$$

$$K_{01}^e = C_4 H_5 - D_5 H_6 ,$$

$$K_{02}^e = C_4 H_7 - D_5 H_8 ,$$

$$K_{03}^e = C_6 H_3 + C_5 H_9 - D_2 H_4 - D_6 H_6 ,$$

$$K_{04}^e = C_2 H_9 + C_3 H_5 - D_3 H_4 - D_7 H_6 ,$$

$$K_{05}^e = C_6 H_5 + C_2 H_{10} - D_3 H_6 - D_3 H_8 ,$$

$$K_{06}^e = C_2 H_{10} + D_6 H_7 - D_3 H_6 - D_3 H_{11} ,$$

$$K_{07}^e = C_2 H_{11} + C_3 H_7 - D_3 H_4 - D_7 H_8 ,$$

$$K_{08}^e = C_6 H_3 + C_5 H_{11} - D_2 H_4 - D_6 H_8 ,$$

$$K_{09}^e = C_6 H_9 + C_6 H_{11} + C_3 H_{10} - D_4 H_4 - D_8 H_6 - D_8 H_8 ,$$

$$K_{10}^e = C_4H_3 - D_5H_4 ,$$

$$K_{11}^e = C_1H_5 - D_1H_6 ,$$

$$K_{12}^e = K_{02}^e ,$$

$$K_{13}^e = C_3H_3 + C_2H_9 - D_7H_4 - D_3H_6 ,$$

$$K_{14}^e = C_5H_9 + C_6H_5 - D_6H_4 - D_2H_6 ,$$

$$K_{15}^e = C_6H_5 + C_5H_{10} - D_2H_6 - D_6H_8 ,$$

$$K_{16}^e = C_2H_{10} + C_3H_7 - D_3H_6 - D_7H_8 ,$$

$$K_{17}^e = C_2H_{11} + C_6H_7 - D_3H_4 - D_3H_8 ,$$

$$K_{18}^e = C_6H_3 + C_2H_{11} - D_3H_4 - D_3H_8 ,$$

$$K_{19}^e = C_2H_9 + C_3H_{11} + C_6H_{10} - D_8H_4 - D_4H_6 - D_8H_8 ,$$

$$K_{20}^e = K_{10}^e ,$$

$$K_{21}^e = K_{01}^e ,$$

$$K_{22}^e = C_1H_7 - D_1H_8 ,$$

$$K_{23}^e = C_6H_3 + C_2H_9 - D_3H_4 - D_3H_6 ,$$

$$K_{24}^e = C_2H_9 + C_6H_5 - D_3H_4 - D_3H_6 ,$$

$$K_{25}^e = C_3H_5 + C_2H_{10} - D_7H_6 - D_3H_8 ,$$

$$K_{26}^e = C_5H_{10} + C_6H_7 - D_6H_6 - D_2H_8 ,$$

$$K_{27}^e = C_5H_{11} + C_6H_7 - D_6H_4 - D_2H_8 ,$$

$$K_{28}^e = C_3H_3 + C_2H_{11} - D_7H_4 - D_3H_8 ,$$

$$K_{29}^e = C_3H_9 + C_6H_{11} - C_6H_{10} - D_8H_4 - D_8H_6 - D_4H_8 ,$$

$$K_{30}^e = C_7H_3 - D_9H_4 ,$$

$$K_{31}^e = C_{10}H_5 - D_{15}H_6 ,$$

$$K_{32}^e = C_7H_5 - D_9H_6 ,$$

$$K_{33}^e = C_{10}H_5 - D_3H_6 ,$$

$$K_{34}^e = C_9H_9 + C_{11}H_5 - D_{11}H_4 - D_{16}H_6 ,$$

$$K_{35}^e = C_9H_{10} - D_{14}H_6 - D_{11}H_8 ,$$

$$K_{36}^e = C_9H_{10} - D_{12}H_6 - D_{14}H_8 ,$$

$$K_{37}^e = C_9H_{11} + C_{11}H_8 - D_{12}H_4 - D_{11}H_8 ,$$

$$K_{38}^e = C_8H_{11} - D_{13}H_4 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{39}^e = C_{11}H_{10} - D_{14}H_4 - D_{13}H_6 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{40}^e = C_{10}H_3 - D_{15}H_4 ,$$

$$K_{41}^e = C_7H_5 - D_9H_6 ,$$

$$K_{42}^e = K_{32}^e ,$$

$$K_{43}^e = C_{11}H_3 + C_9H_9 - D_{16}H_4 - D_{11}H_6 ,$$

$$K_{44}^e = C_8H_9 - D_{10}H_4 - D_{10}H_6 ,$$

$$K_{45}^e = C_8H_{10} - D_{13}H_6 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{46}^e = C_9H_{10} + C_{11}H_7 - D_{12}H_6 - D_{11}H_8 ,$$

$$K_{47}^e = C_9H_{11} - D_{12}H_4 - D_{14}H_8 ,$$

$$K_{48}^e = C_9H_{11} - D_{14}H_4 - D_{11}H_8 ,$$

$$K_{49}^e = C_{11}H_{11} - D_{13}H_4 - D_{14}H_6 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{50}^e = C_{10}H_3 - D_3H_4 ,$$

$$K_{51}^e = K_{41}^e ,$$

$$K_{52}^e = C_{10}H_7 - D_{15}H_8 ,$$

$$K_{53}^e = C_{11}H_3 + C_9H_9 - D_{11}H_4 - D_{12}H_6 ,$$

$$K_{54}^e = C_8H_9 - D_{10}H_4 - D_{13}H_6 ,$$

$$K_{55}^e = C_8H_{10} - D_{10}H_6 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{56}^e = C_9H_{10} + C_{11}H_7 - D_{11}H_6 - D_{16}H_8 ,$$

$$K_{57}^e = C_9H_{11} - D_{11}H_4 - D_{14}H_8 ,$$

$$K_{58}^e = C_9H_{11} - D_{14}H_4 - D_{12}H_8 ,$$

$$K_{59}^e = C_{11}H_{11} - D_{10}H_4 - D_{14}H_6 - D_{13}H_8 ,$$

$$K_{60}^e = K_{50}^e ,$$

$$K_{61}^e = K_{31}^e ,$$

$$K_{62}^e = C_7H_7 - D_9H_8 ,$$

$$K_{63}^e = C_9H_9 - D_{14}H_4 - D_{12}H_6 ,$$

$$K_{64}^e = C_9H_9 - D_{11}H_4 - D_{14}H_6 ,$$

$$K_{65}^e = C_{11}H_5 + C_9H_{10} - D_{16}H_6 - D_{11}H_8 ,$$

$$K_{66}^e = C_8H_{10} - D_{10}H_6 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{67}^e = C_8H_{11} - D_{10}H_4 - D_{13}H_8 ,$$

$$K_{68}^e = C_{11}H_3 + C_9H_{11} - D_{11}H_4 - D_{12}H_8 ,$$

$$K_{69}^e = C_{11}H_9 - D_{10}H_4 - D_{13}H_6 - D_{14}H_8 ,$$

$$K_{70}^e = K_{40}^e ,$$

$$K_{71}^e = C_{10}H_5 - D_3H_6 ,$$

$$K_{72}^e = K_{62}^e ,$$

$$K_{73}^e = C_9H_9 - D_{14}H_4 - D_{11}H_6 ,$$

$$K_{74}^e = C_9H_9 - D_{12}H_4 - D_{14}H_6 ,$$

$$K_{75}^e = C_{11}H_5 + C_9H_{10} - D_{11}H_6 - D_{12}H_8 ,$$

$$K_{76}^e = C_8H_{10} - D_{10}H_6 - D_{13}H_8 ,$$

$$K_{77}^e = C_8H_{11} - D_{10}H_4 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{78}^e = C_{11}H_3 + C_9H_{11} - D_{16}H_4 - D_{11}H_8 ,$$

$$K_{79}^e = C_{11}H_9 - D_{13}H_4 - D_{10}H_6 - D_{14}H_8 ,$$

$$K_{80}^e = K_{30}^e ,$$

$$K_{81}^e = K_{71}^e ,$$

$$K_{82}^e = K_{52}^e ,$$

$$K_{83}^e = C_8H_9 - D_{13}H_4 - D_{10}H_6 ,$$

$$K_{84}^e = C_9H_9 + C_{11}H_5 - D_{12}H_4 - D_{11}H_6 ,$$

$$K_{85}^e = C_9H_{10} - D_{14}H_6 - D_{16}H_8 ,$$

$$K_{86}^e = C_9H_{10} - D_{11}H_6 - D_{14}H_8 ,$$

$$K_{87}^e = C_9H_{11} + C_{11}H_7 - D_{16}H_4 - D_{16}H_8 ,$$

$$K_{88}^e = C_8H_{11} - D_{10}H_4 - D_{10}H_8 ,$$

$$K_{89}^e = C_{11}H_{10} - D_{14}H_4 - D_{10}H_6 - D_{13}H_8 ,$$

$$K_{90}^e = D_{14}H_4 ,$$

$$K_{91}^e = D_{17}H_6 ,$$

$$K_{92}^e = D_{17}H_8 ,$$

$$K_{93}^e = C_{12}H_3 + C_{11}H_9 - D_{18}H_4 - D_{13}H_6 ,$$

$$K_{94}^e = C_{11}H_9 + C_{12}H_5 - D_{13}H_4 - D_{18}H_6 ,$$

$$K_{95}^e = C_{12}H_5 + C_{11}H_{10} - D_{18}H_6 - D_{13}H_8 ,$$

$$K_{96}^e = C_{11}H_{10} + C_{12}H_7 - D_{13}H_6 - D_{18}H_8 ,$$

$$K_{97}^e = C_{11}H_{11} + C_{12}H_7 - D_{13}H_4 - D_{18}H_8 ,$$

$$K_{98}^e = C_{12}H_3 + C_{11}H_{11} - D_{18}H_4 - D_{13}H_8 ,$$

$$K_{99}^e = C_{12}H_9 + C_{12}H_{11} + C_{12}H_{10} - D_{19}H_4 - D_{16}H_6 - D_{19}H_8 .$$

APÊNDICE B

TRANSFORMAÇÃO DA MATRIZ DE CORRELAÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA NA MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA

Para transformar a matriz de correlação de um elemento da equação homogênea em uma matriz de correlação de um elemento de uma equação não-homogênea basta incluir a parte não-homogênea no resíduo apresentado na Equação A.13. Para incluir uma derivada primeira em x é suficiente substituir nesta equação os parâmetros g_{01} por $g_{01} + b \cdot g_{02}$, g_{11} por $g_{11} + b \cdot g_{12}$ e g_{21} por $g_{21} + b \cdot g_{22}$, onde b é a constante ou parâmetro que multiplica a derivada $\partial U(x,t)/\partial x$.

Para incluir um termo em $c \cdot U(x,t)$ basta somar $c \cdot U(x,t)$, com sinal contrário, ao resíduo na forma da Expressão A.4. Qualquer outra constante ou variável que não envolva $\partial U(x,t)/\partial x$ ou $U(x,t)$ também será apenas somada, com sinal contrário, ao resíduo.

Desta forma nota-se que ao incluir estes termos no resíduo, eles passam a estar inclusos automaticamente na sequência do algebrismo do Apêndice A.

Note-se que todas as modificações no resíduo foram do tipo soma, o que significa que a matriz final será também resultado da soma da matriz de correlação da equação homogênea com uma matriz devida aos novos termos somados ao resíduo.

Para a Equação 5.21 esta matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} H_6 & H_1 & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_4 & H_3 & H_2 & H_5 \\ H_1 & H_6 & H_1 & H_3 & H_2 & H_2 & H_3 & H_4 & H_4 & H_5 \\ H_1 & H_1 & H_6 & H_4 & H_4 & H_3 & H_2 & H_2 & H_3 & H_5 \\ H_2 & H_3 & H_4 & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_9 & H_{11} & H_{12} \\ H_3 & H_2 & H_4 & H_8 & H_7 & H_{11} & H_9 & H_{10} & H_9 & H_{12} \\ H_4 & H_2 & H_3 & H_9 & H_{11} & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_{12} \\ H_4 & H_3 & H_2 & H_{10} & H_9 & H_8 & H_7 & H_{11} & H_9 & H_{12} \\ H_3 & H_4 & H_2 & H_9 & H_{10} & H_9 & H_{11} & H_7 & H_8 & H_{12} \\ H_2 & H_4 & H_3 & H_{11} & H_9 & H_{10} & H_9 & H_8 & H_7 & H_{12} \\ H_5 & H_5 & H_5 & H_{12} & H_{12} & H_{12} & H_{12} & H_{12} & H_{12} & H_{12} \end{bmatrix}$$

onde

$$H_1 = B_1 \times 11/6720 ;$$

$$H_2 = B_1 \times 3/1120 ;$$

$$H_3 = B_1 \times 9/2240 ;$$

$$H_4 = B_1 \times 9/2240 ;$$

$$H_5 = B_1 \times 3/560 ;$$

$$H_6 = B_1 \times 19/1680 ;$$

$$H_7 = B_1 \times 9/112 ;$$

$$H_8 = -B_1 \times 9/320 ;$$

$$H_9 = -B_1 \times 9/448 ;$$

$$H_{10} = -B_1 \times 9/1120 ;$$

$$H_{11} = B_1 \times 9/224 ;$$

$$H_{12} = B_1 \times 27/1120 ;$$

$$H_{13} = B_1 \times 27/280 ;$$

e $B_1 = b \times \Delta$, onde b é a constante b da Equação 5.21.