

1. Classificação <i>INPE-COM.1/TDL</i> <i>C.D.U.: 536.7</i>		2. Período	4. Distribuição
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor)  <i>ACÚSTICA</i> <i>COMBUSTÃO</i> <i>TERMODINÂMICA IRREVERSÍVEL</i>			interna <input type="checkbox"/>  externa <input checked="" type="checkbox"/>
5. Relatório nº <i>INPE-1997-TDL/039</i>	6. Data <i>Fevereiro, 1981</i>	7. Revisado por <i>Jose Pantuso Sudano</i> <i>Jose Pantuso Sudano</i>	
8. Título e Sub-Título  <i>ONDAS ACÚSTICAS EM FLUIDOS COM REAÇÃO</i> <i>QUÍMICA E RADIAÇÃO</i>		9. Autorizado por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>	
10. Setor <i>DTE</i>	Código	11. Nº de cópias <i>10</i>	
12. Autoria <i>Iara Regina Cardoso de Almeida</i>		14. Nº de páginas <i>69</i>	
13. Assinatura Responsável <i>Iara Regina Cardoso de Almeida</i>		15. Preço	
16. Sumário/Notas  <i>Estudou-se a propagação de ondas acústicas em um fluido, considerando reação química e radiação. Com este intuito, um desenvolvimento teórico foi realizado, levando-se em consideração a formulação da Termodinâmica de Processos Irreversíveis. Assim procedendo, foi obtida uma expressão para a atenuação do som podendo-se inferir, a partir dela, que a radiação diminui a propagação de ondas acústicas.</i>			
17. Observações <i>Tese de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 14 de março de 1980.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento dos requisitos exigidos  
para a obtenção do Título de Mestre em  
Ciência Espacial

Dr. Ralf Gielow

Ralf Gielow  
Presidente

Dr. José Pantuso Sudano

José Pantuso Sudano  
Orientador

Dr. Ivan de Azevedo Camelier

Ivan de Azevedo Camelier  
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Luiz Alberto Vieira Dias

Luiz Alberto Vieira Dias  
Membro da Banca

Dr. Walter Demétrio Gonzalez Alarcon

Walter Demétrio Gonzalez Alarcon  
Membro da Banca

Iara Regina Cardoso de Almeida

Iara Regina Cardoso de Almeida  
Candidato

São José dos Campos, 14 de março de 1980

O amor ultrapassa os limites do tempo e do espaço.



Aos meus pais,  
e ao meu noivo Osmar.

## INDICE

	<u>Pág.</u>
ABSTRACT .....	<i>iv</i>
LISTA DE SIMBOLOS .....	<i>v</i>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO II - EQUAÇÕES BÁSICAS</u> .....	3
<u>CAPÍTULO III - INFLUÊNCIA DA RADIAÇÃO NA EQUAÇÃO DA ENERGIA</u> ....	9
3.1 - Transferência radiativa em gases .....	9
3.2 - Equilíbrio radiativo .....	12
3.3 - Influência da radiação nas equações de conservação .....	15
3.4 - Particularização da equação da energia para o modelo .....	16
<u>CAPÍTULO IV - ANÁLISE MATEMÁTICA</u> .....	19
4.1 - Linearização .....	19
4.2 - Aplicação da Transformada de Fourier .....	24
<u>CAPÍTULO V - RELAXAÇÃO ACÚSTICA</u> .....	31
<u>CAPÍTULO VI - EQUAÇÃO COMPLEXA DO SOM: INFLUÊNCIA DA RADIAÇÃO NA FÓRMULA DE STOKES E KIRCHHOFF</u> .....	39
<u>CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES</u> .....	45
AGRADECIMENTOS .....	47
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	49
APÊNDICE A - CÁLCULO DA SUSCETIBILIDADE ACÚSTICA VÁLIDA PARA PEQUENOS VALORES DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA	

ABSTRACT

*The propagation of sound waves in a fluid, taking into account chemical reaction, and radiation is studied. A theoretical development was performed, starting from the Thermodynamics of Irreversible Process formulation. An expression for the attenuation of sound was obtained, from which it was possible to infer that radiation diminishes the propagation of sound waves.*

## LISTA DE SÍMBOLOS

- A - afinidade química.  $[ML^2 T^{-2} mol^{-1}]$
- $B_v(T)$  - intensidade específica no equilíbrio.  $[ML^3 T^{-5}]$
- $C_{p,A}$  - calor específico a p e A constantes.  $[L^2 T^{-2}]$
- $C_{v,A}$  - calor específico a v e A constantes.  $[L^2 T^{-2}]$
- $C_{p,\xi}$  - calor específico a p e  $\xi$  constantes.  $[L^2 T^{-2}]$
- $C_{v,\xi}$  - calor específico a v e  $\xi$  constantes.  $[L^2 T^{-2}]$
- c - velocidade da luz.  $[LT^{-1}]$
- $\nabla^2_0$  - laplaciano da velocidade.  $[L^2 T^{-2}]$
- $d\Omega$  - ângulo sólido.
- $\underline{e}$  - vetor unitário.
- h - constante de Planck.  $[ML^2 T^{-3}]$
- $I_v$  - intensidade específica  $[ML^3 T^{-5}]$
- $\underline{J}_q$  - vetor fluxo de calor.  $[MT^{-3}]$
- $J^R$  - taxa volumétrica de perda de energia do gás por radiação.  $[MT^{-3} L^{-1}]$
- $J^R_0$  - fluxo de calor radiante.  $[MT^{-3}]$
- k - constante de Boltzmann.  $[ML^2 T^{-2} \theta^{-1}]$
- $\underline{K}$  - vetor onda.  $[L^{-1}]$
- $\hat{K}$  - suscetibilidade.  $[L^{-4} MT^{-2}]$
- $\hat{K}_A$  - suscetibilidade em relação à afinidade.  $[ML^{-1} T^{-2} mol^{-1}]$
- $\hat{K}_T$  - suscetibilidade em relação à temperatura.  $[\theta L^{-3}]$
- $\hat{K}_\xi$  - suscetibilidade em relação à variável de progresso.  $[L^{-3} mol]$
- m - massa atômica.  $[M]$
- $\underline{P}$  - tensor pressão total.  $[L^{-1} MT^{-2}]$
- p - pressão hidrostática.  $[L^{-1} MT^{-2}]$

- $Q^R$  - fluxo líquido de calor radiante.  $[ MT^{-3} ]$   
 $Q_+^R$  - fluxo de calor radiante no sentido  $K_i$ .  $[ MT^{-3} ]$   
 $Q_-^R$  - fluxo de calor radiante no sentido oposto a  $K_i$ .  $[ MT^{-3} ]$   
 $s$  - entropia específica.  $[ L^2 T^{-2} ]$   
 $T$  - temperatura absoluta.  $[ \theta ]$   
 $t$  - tempo.  $[ T ]$   
 $\underline{U}$  - tensor unitário.  
 $u$  - energia interna específica.  $[ L^2 T^{-2} ]$   
 $v$  - volume específico.  $[ L^3 M^{-1} ]$   
 $\underline{v}$  - velocidade.  $[ LT^{-1} ]$   
 $v_s$  - velocidade do som.  $[ LT^{-1} ]$   
 $\alpha_{\xi, s}$  - coeficiente de expansão adiabática.  $[ L^{-6} M^2 \theta^{-1} ]$   
 $\beta$  - coeficiente fenomenológico.  $[ M^{-1} L^{-2} T mol^2 ]$   
 $\delta$  - espessura da camada de gás.  $[ L ]$   
 $\xi$  - emissividade.  
 $\eta$  - viscosidade de cisalhamento.  $[ ML^{-1} T^{-1} ]$   
 $\eta_r$  - viscosidade rotacional.  $[ ML^{-1} T^{-1} ]$   
 $\eta_v$  - viscosidade volumétrica.  $[ ML^{-1} T^{-1} ]$   
 $\bar{\eta}_v$  - viscosidade volumétrica específica.  $[ L^{-3} M mol^2 ]$   
 $\lambda$  - condutividade térmica.  $[ ML \theta^{-1} T^{-3} ]$   
 $\tau$  - tempo de relaxação.  $[ T ]$   
 $\xi$  - variável de progresso.  $[ mol ]$   
 $\mu_k$  - potencial químico da reação  $k$ .  $[ ML^2 T^{-2} mol^{-1} ]$   
 $\nu$  - frequência.  $[ T^{-1} ]$   
 $\gamma$  - atenuação do som.  $[ L^{-1} ]$   
 $\omega$  - frequência das oscilações.  $[ T^{-1} ]$

- $\chi_{S,A}$  - compressibilidade a s e A constantes. [  $LM^{-1} T^2$  ]  
 $\chi_{T,A}$  - compressibilidade a T e A constantes. [  $LM^{-1} T^2$  ]  
 $\chi_{S,\xi}$  - compressibilidade a s e  $\xi$  constantes. [  $LM^{-1} T^2$  ]  
 $\chi_{T,\xi}$  - compressibilidade a T e  $\xi$  constantes. [  $LM^{-1} T^2$  ]  
 $\underline{\underline{T}}$  - tensor pressão viscosa. [  $L^{-1} MT^{-2}$  ]  
 $\rho$  - massa específica. [  $L^{-3} M$  ]  
 $\sigma$  - produção de entropia. [  $L^2 T^{-2}$  ]  
 $\sigma_{SB}$  - constante de Stefan-Boltzmann. [  $MT^{-3} \theta^{-4}$  ]  
 $\xi$  - velocidade angular média. [  $T^{-1}$  ]

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A propagação de ondas acústicas, em fluidos, é um problema básico em acústica de combustão, envolvendo o estudo de fenômenos de transporte, caracterizados pela condutividade térmica, viscosidades, reações químicas e radiação.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um estudo teórico da propagação de ondas de som em fluidos neutros, considerando, além de fenômenos de transporte, reação química caracterizada pelo fenômenos de relaxação e radiação caracterizada pela emissividade.

Este estudo, embora possa ser desenvolvido, tanto pela Hidrodinâmica (Glushkov e Kareev, 1970), como pela Mecânica Estatística (Clarke, 1977), tem, na Termodinâmica Irreversível (Prigogine, 1950; Haase, 1969), sua melhor formulação, devido ao caráter nitidamente irreversível dos fenômenos associados.

A aplicação da Teoria Termodinâmica de Processos Irreversíveis (Meixner, 1952; Groot e Mazur, 1963) permite a obtenção de resultados gerais, sem necessidade de exemplificar a natureza especial das transformações internas.

Para este objetivo, consideram-se pequenos valores da condutividade térmica e, nas equações de conservação desprezam-se as contribuições devido à pressão radiativa, densidade de energia e espalhamento, as quais são insignificantes. Além disso, limita-se ao caso importantíssimo que considera uma única transformação interna; não obstante, deve-se notar que o caso geral de transformações obedece, fundamentalmente, ao mesmo esquema.

Nos Capítulos II e III, são apresentadas as equações básicas e a influência da radiação na equação da energia.

No Capítulo IV, é feita uma análise matemática das equações pertinentes ao problema. Como a velocidade das partículas no fluido é pequena, quando comparada com a velocidade do som, utiliza-se o método usual da teoria acústica de pequenas perturbações.

No Capítulo V, é apresentada a influência dos processos de relaxação na propagação de ondas acústicas. Para isto, desprezam-se os efeitos da condutividade térmica, viscosidade e radiação, e considera-se, apenas, o fenômeno puro de relaxação.

No Capítulo VI, é estabelecida uma expressão para a atenuação do som, levando em conta o fenômeno de transporte, a reação química e a radiação. Além disso, é feita uma comparação entre o resultado que leva em conta a radiação e o resultado clássico devido a Stokes e Kirchhoff.

## CAPÍTULO II

### EQUAÇÕES BÁSICAS

Este trabalho considera um escoamento isotrópico de um fluido, no qual pode ocorrer uma transformação interna, ao lado de condução de calor e escoamento viscoso.

O estado do sistema é definido pela temperatura absoluta  $T$ , pelo volume específico  $v$ , pela variável de progresso  $\xi$  e pela energia interna específica  $u$ .

Assume-se que, embora o sistema total não esteja em equilíbrio, existem nele, pequenos elementos de massa, num estado de equilíbrio local, para os quais a entropia específica local,  $s$ , é uma função de estado exatamente igual à do equilíbrio.

Para tal sistema, a lei da entropia de Gibbs (Groot e Mazur, 1963) é:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} - A \frac{d\xi}{dt} \quad (\text{II.1})$$

onde  $A$  representa a afinidade química, que inclui os calores de reação (Donder apud Prigogine, 1950), definida como sendo uma combinação linear dos potenciais químicos que tomam parte na reação:

$$A = \sum_k v_k \mu_k$$

onde  $\mu_k$  é o potencial químico da reação  $k$ , tendo o valor zero no equilíbrio termodinâmico. A variável de progresso,  $\xi$ , é definida como sendo o quociente, num dado instante, da diferença de concentração da espécie  $k$ , nesse instante, e a inicial, com o coeficiente estequiométrico dessa espécie.

Como se sabe, a validade da Lei de Gibbs, Equação (II.1), também para o não equilíbrio é uma antecipação essencial e confirmada do tratamento termodinâmico dos processos irreversíveis.

A equação da continuidade é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \rho \underline{v} \quad (\text{II.2})$$

ou

$$\rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div} \underline{v}$$

onde:

$$\rho = \frac{1}{v} \text{ é a massa específica}$$

e

$\underline{v}$  é a velocidade do fluido.

Aqui foi utilizada a notação " $d(\ )/dt$ ", para representar a derivada substantiva de um elemento de fluido, que é a soma da derivada local com a derivada convectiva, e é dada por:

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} (\ ) \quad (\text{II.3})$$

Na ausência de forças externas, tem-se a lei da conservação da quantidade de movimento:

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \operatorname{div} \underline{P} \quad (\text{II.4})$$

onde  $\underline{P}$  é o tensor pressão total, que é composto de duas partes. Uma é a pressão hidrostática  $p$ , multiplicada pelo tensor unitário  $\underline{U}$  (que tem componentes  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ ) e a segunda parte é o tensor pressão viscosa. (Groot e Mazur, 1963).

Define-se o tensor pressão viscosa,  $\underline{T}$ , como sendo a soma de 3 quantidades:

- . o produto de  $T$ , que é um terço do traço  $\underline{T}$ , pelo tensor unitário  $\underline{U}$ ;
- . a parte simétrica como traço zero,  $\underline{T}^S$ ;
- . a parte antissimétrica,  $\underline{T}^a$ .

Isto é :

$$\underline{P} = p\underline{U} + T\underline{U} + \underline{T}^S + \underline{T}^a \quad (II.5)$$

A parte antissimétrica do tensor pressão viscosa corresponde ao vetor axial  $\underline{T}^a$ .

De modo análogo, divide-se o tensor gradiente de velocidade em:

$$\text{grad } \underline{v} = \frac{1}{3} (\text{div } \underline{v}) \underline{U} + (\text{grad } \underline{v})^S + (\text{grad } \underline{v})^a \quad (II.6)$$

onde a parte antissimétrica corresponde ao vetor axial  $\frac{1}{2} \text{rot } \underline{v}$ .

A produção da entropia contém as contribuições devido à condução de calor, ao escoamento viscoso, e à reação química e é dada por:

$$\sigma = - \frac{J}{-q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T^2} - \frac{T \text{div } \underline{v}}{T} - \frac{\underline{T}^S : (\text{grad } \underline{v})^S}{T} - \frac{\rho}{T} \frac{d\xi}{dT} A \geq 0. \quad (II.7)$$

A contribuição do fenômeno viscoso para a produção de entropia é composta de duas partes. A primeira está relacionada com a viscosidade de cisalhamento, e a segunda,  $-1/T \underline{T} \operatorname{div} \underline{v}$ , está relacionada com a taxa de mudança do volume específico e é devido à viscosidade volumétrica. O sinal de desigualdade na Equação (II.7) é válido para casos verdadeiramente irreversíveis e o de igualdade para casos reversíveis limites.

A equação do balanço da energia interna, na ausência de forças externas, é:

$$\rho \frac{du}{dt} = - (P + T) \operatorname{div} \underline{v} - \underline{T}^S : (\operatorname{grad} \underline{v})^S - T^a \cdot (\operatorname{rot} \underline{v} - 2\underline{\omega}) - \operatorname{div} \underline{J}_q \quad (\text{II.8})$$

Substituindo-se a equação da conservação da massa, Equação (II.2), tem-se:

$$\rho \left( \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = - T \operatorname{div} \underline{v} - \underline{T}^S : (\operatorname{grad} \underline{v})^S - \underline{T}^a \cdot (\operatorname{rot} \underline{v} - 2\underline{\omega}) - \operatorname{div} \underline{J}_q \quad (\text{II.9})$$

As Equações II.2 a II.9, que exprimem leis de conservação, podem, então, ser unidas às equações fenomenológicas, a fim de formarem um sistema fechado. As três primeiras estão relacionadas com o tensor pressão:

$$T = - \eta_v \operatorname{div} \underline{v} \quad (\text{II.10})$$

$$\underline{T}^S = - 2\eta (\operatorname{grad} \underline{v})^S \quad (\text{II.11})$$

$$\underline{T}^a = - \eta_r (\operatorname{rot} \underline{v} - 2\underline{\xi}) \quad (\text{II.12})$$

onde  $\underline{\xi}$  é a velocidade angular média.

O adicional fenomenológico que descreve o fenômeno vetorial da condução de calor (Lei de Fourier) é:

$$\underline{J}_q = - \lambda \text{ grad } T \quad (\text{II.13})$$

Os coeficientes fenomenológicos introduzidos nestas equações são:

- . viscosidade de cisalhamento,  $\eta$
- . viscosidade volumétrica,  $\eta_v$
- . viscosidade rotacional,  $\eta_r$
- . condutividade térmica,  $\lambda$

Na maioria dos casos, a velocidade angular média das partículas para cada ponto do fluido e  $1/2 \text{ rot } \underline{v}$  são praticamente iguais, após um pequeno intervalo de tempo, da ordem do tempo de relaxação da reação química. Pode-se, portanto, desprezar o termo devido à viscosidade rotacional.

Substituindo-se as equações fenomenológicas, Equações II.10 a II.13, nas leis de conservação, têm-se:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = - \text{grad } p + \eta \Delta \underline{v} + \left\{ \frac{1}{3} \eta + \eta_v \right\} \text{grad } \text{div } \underline{v} \quad (\text{II.14})$$

$$\rho \left( \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = \eta_v (\text{div } \underline{v})^2 + 2\eta (\text{grad } \underline{v})^S : (\text{grad } \underline{v})^S + \lambda \Delta T \quad (\text{II.15})$$

onde o símbolo  $\Delta$ , significa o operador laplaciano.

Em condições próximas do equilíbrio, como ondas sonoras de pequenas amplitudes, pode-se considerar a taxa de reação proporcional à afinidade.

Portanto, a equação fenomenológica para o processo de relaxação é:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\beta A \quad (\text{II.16})$$

Os coeficientes fenomenológicos  $\eta_v$ ,  $\eta$ ,  $\eta_r$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  são sempre positivos, pois a produção de entropia não pode ser negativa, conforme a Equação II.17.

Finalmente, consideram-se três equações de estado:

$$p = p(v, \xi, s) \quad (\text{II.17})$$

$$A = A(v, \xi, s) \quad (\text{II.18})$$

$$T = T(v, \xi, s) \quad (\text{II.19})$$

Têm-se, portanto, oito equações, das quais uma é vetorial, e sete quantidades escalares e uma vetorial ( $v$ ,  $s$ ,  $\mu$ ,  $T$ ,  $A$ ,  $p$ ,  $\xi$ ,  $\underline{v}$ ). O sistema é fechado e pode ser resolvido, se condições iniciais e de contorno forem dadas.

A equação de balanço da energia interna, Equação II.9, leva em consideração efeitos devido à viscosidade, à condução de calor e às forças de pressão.

A radiação de energia pelo gás deve ser considerada, pois o processo não adiabático de radiação afeta o movimento do próprio gás.

No próximo Capítulo, ver-se-á como a equação da energia é modificada, para levar em conta também o processo irreversível da radiação.

## CAPÍTULO III

### INFLUÊNCIA DA RADIAÇÃO NA EQUAÇÃO DA ENERGIA

#### 3.1 - TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM GASES

O campo de radiação, no espaço, é descrito pela distribuição da intensidade de radiação em relação à frequência e à direção da transferência de energia radiante.

A radiação é caracterizada pela frequência,  $\nu$ , das oscilações do campo eletromagnético. Ao contrário das moléculas do gás, todos os fótons movem-se com a mesma velocidade, a da luz,  $c$ .

Do ponto de vista da Mecânica Quântica, radiação pode ser considerada como sendo uma coleção de partículas, fótons ou quanta de luz. Sua energia é relacionada com a frequência pela constante de Planck,  $h$ .

O campo de radiação pode ser descrito pela função de distribuição dos fótons,  $f^R$ , que é, geralmente, análoga a qualquer outra distribuição de partículas. Em geral,  $f^R$  é função da posição, do tempo, da direção e da frequência. A intensidade específica,  $I_\nu$ , é definida tal que, a energia radiante num intervalo espectral  $d\nu$ , passando por unidade de tempo, através de uma área unitária, com as direções de propagação de energia contidas no ângulo sólido  $d\Omega$ , é dada por:

$$I_\nu d\nu d\Omega = h \nu c f^R d\nu d\Omega. \quad (\text{III.1})$$

Define-se  $Q^R$  como sendo o fluxo líquido de calor radiante, através da superfície, que é arbitrariamente orientada em relação ao eixo coordenado.

Conforme a Figura III.1, onde os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são medidos em relação à normal à superfície, tem-se:

$$Q^R = \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} I_{\nu}(\phi, \theta) \cos\phi \, d\Omega \, d\nu = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\nu}(\phi, \theta) \cos\phi \, \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\nu \quad (\text{III.2})$$

Aqui foi utilizada a relação:

$$d\Omega = \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

A integração sobre o ângulo sólido leva em conta todas as direções de propagação possíveis, isto é, abrange  $4\pi$  esfero-radianos, e a integração sobre  $\nu$  leva em conta todas as frequências de radiação possíveis.

A direção de propagação pode ser especificada pelo vetor unitário  $e_j$ , na direção  $X_j$ . As componentes  $e_j$  são os cossenos diretores de propagação, com relação aos eixos coordenados positivos.

Em termos do vetor unitário normal à superfície em questão,  $K_j$ , (ver Figura III.1), pode-se escrever  $\cos\phi = e_j K_j$  e a Equação III.2, torna-se:

$$Q^R = \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} I_{\nu} e_j K_j \, d\Omega \, d\nu \quad (\text{III.3})$$

Em certas situações, é conveniente separar  $Q^R$  em duas partes:

- .  $Q_+^R$ , o fluxo de calor no sentido  $K_j$
- .  $Q_-^R$ , o fluxo de calor no sentido oposto a  $K_j$

Primeiramente, calculam-se os fluxos de calor, por unidades de frequência, para a frequência  $\nu$ , para cada sentido,  $Q_{\nu+}^R$  e  $Q_{\nu-}^R$ .

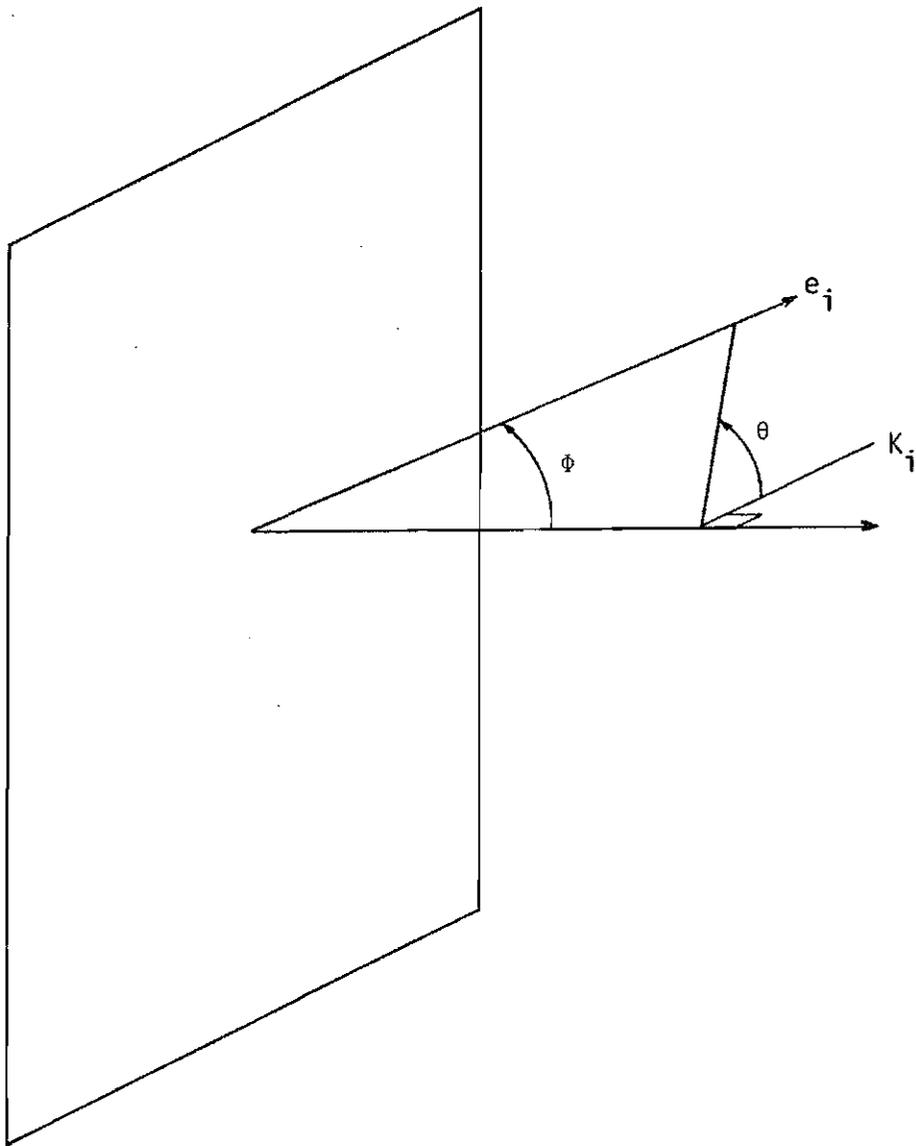


Fig. III.1 - Sistema de coordenadas em uma superfície.

Subdividindo-se a integral em relação a  $\phi$ , na Equação III.3, têm-se:

$$Q_{\nu+}^R = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\nu}(\phi, \theta) \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta \quad (\text{III.4})$$

e

$$Q_{\nu-}^R = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I_{\nu}(\phi, \theta) (-\cos \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\theta \quad (\text{III.5})$$

O sinal negativo, na Equação III.5, vem do fato de que, por definição  $Q_{\nu+}^R$  e  $Q_{\nu-}^R$  são quantidades positivas.

Os correspondentes fluxos integrados em frequência são:

$$Q_+^R = \int_0^{\infty} Q_{\nu+}^R \, d\nu \quad (\text{III.6})$$

e

$$Q_-^R = \int_0^{\infty} Q_{\nu-}^R \, d\nu \quad (\text{III.7})$$

### 3.2 - EQUILÍBRIO RADIATIVO

Para um sistema composto de gás e seu campo de radiação associado, fechado num recipiente e isolado do meio ambiente, a intensidade específica da radiação, passará, eventualmente, a um valor que é uniforme no espaço e constante no tempo.

O campo de radiação, no equilíbrio, depende apenas da temperatura do sistema e não da sua natureza.

Para o equilíbrio, o campo de radiação não tem uma direção de preferência, e portanto, a intensidade específica,  $I_\nu$ , deve ser isotrópica.

A intensidade específica no equilíbrio, a conhecida função de Planck, é dada por:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/KT} - 1} \quad (\text{III.8})$$

onde  $K$  é a constante de Boltzmann.

Examinando-se a forma deste resultado, nota-se que, independente da temperatura, o termo  $-1$  presente no denominador, como resultado da estatística de Bose-Einstein, é importante para frequências, tais que,

$$\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right)$$

é próximo da unidade.

Sob condições de equilíbrio radiativo, os fluxos de calor em cada sentido são independentes da orientação da superfície e são:

$$Q_{\nu+}^R = Q_{\nu-}^R = \pi B_\nu(T) \quad (\text{III.9})$$

Para os fluxos de calor integrado em frequência, têm-se:

$$Q_+^R = Q_-^R = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \quad (\text{III.10})$$

onde

$$\int_0^{\infty} B_{\nu} d_{\nu} = \frac{2 K^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{(h\nu/KT)^3}{e^{h\nu/KT} - 1} d \left( \frac{h\nu}{KT} \right) = \frac{2\pi^4 K^4}{15 h^3 c^2} T^4$$

A integral definida tem o valor  $\frac{\pi^4}{15}$  (Mayer e Mayer, 1966).

O coeficiente de  $T^4$  difere de  $\pi$  da constante de Stefan-Boltzmann,

$$\sigma_{SB} = \frac{2\pi^5 K^4}{15 h^3 c^2},$$

que tem o valor numérico  $\sigma_{SB} = 5,6697 \times 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4 \text{ seg.}$

Assim, obtêm-se a importante fórmula, que relaciona a integral em frequência da intensidade específica no equilíbrio, e a constante de Stefan-Boltzmann:

$$\int_0^{\infty} B_{\nu} d_{\nu} = \frac{\sigma_{SB}}{\pi} T^4 \quad (\text{III.11})$$

Substituindo-se a Equação III.11 em III.10, encontram-se os fluxos de calor, integrados em frequência, para cada sentido:

$$Q_+^R = Q_-^R = \sigma_{SB} T^4. \quad (\text{III.12})$$

Este resultado, conhecido como a Lei de Stefan - Boltzmann, é chamado valor para o corpo negro do fluxo de calor radiante ou potência emissiva total.

As características da radiação emitida de superfícies reais, ou absorvida por superfícies reais diferem em muitas formas das descritas para superfícies negras ideais.

Se o fluxo de calor radiante para uma superfície não negra,  $J_0^R$ , é medido para uma temperatura  $T$ , então a quantidade conhecida como emissividade,  $\epsilon$ , é definida como sendo a razão entre a taxa de energia térmica emitida pelo gás, por unidade de área, e a taxa de energia térmica, por unidade de área, que seria emitida pelo gás se ele fosse um corpo negro:

$$\epsilon = \frac{J_0^R}{Q_+^R} \quad (\text{III.13})$$

onde o fluxo de calor radiante para o corpo negro,  $Q_+^R$ , é calculado para a mesma temperatura usada na determinação do fluxo de calor radiante da superfície.

Portanto, para um corpo não negro o fluxo de calor radiante é:

$$J_0^R = \epsilon \sigma_{SB} T^4 \quad (\text{III.14})$$

A emissividade é uma função de pressão,  $p$ , e da temperatura,  $T$ .

### 3.3 - INFLUÊNCIA DA RADIAÇÃO NAS EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO

Nas equações de conservação, desprezam-se a contribuição da pressão radiativa, a densidade de energia e o espalhamento. Para a maioria das aplicações estas quantidades são, de fato, insignificantes (Lighthill, 1960; Zhigulev et al., 1963).

Portanto, as equações de conservação dadas no Capítulo II, permanecerão inalteradas, salvo a equação da energia.

A equação do balanço da energia interna, levando-se em conta além dos efeitos de viscosidade, de condução de calor e de forças de pressão, também a radiação, toma a forma:

$$\rho \left( \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = \eta_V (\text{div } \underline{v})^2 + 2\eta (\text{grad } \underline{v})^S : (\text{grad } \underline{v})^S + \lambda \Delta T - J_R \quad (\text{III.15})$$

O termo  $-J_R$  representa a taxa volumétrica de adição de energia ao gás por radiação.

A interação entre a radiação e o movimento do gás está relacionada com a taxa na qual a energia é transferida por radiação. Pode-se expressar esta transferência de energia, quantitativamente, por meio do fluxo de calor radiante,  $J_0^R$ . O fluxo de calor radiante é a taxa líquida, por unidade de área, na qual a energia radiante é transferida através de uma superfície real ou imaginária.

#### 3.4 - PARTICULARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA O MODELO

Uma camada plana de gás, infinita na direção X e de espessura  $\delta$ , é considerada. O gás, que está em contato com as duas superfícies emite energia na forma de radiação eletromagnética.

O fluxo de calor radiante emitido pelo gás, em contato com cada superfície, é dado pela Equação III.14 e é:

$$J_0^R = \epsilon \sigma_{SB} T^4 \quad (\text{III.16})$$

O fluxo de calor radiante emitido pelo gás, em contato com as duas superfícies que o contêm, é, então:

$$J_0^R = 2 \epsilon \sigma_{SB} T^4 \quad (\text{III.17})$$

Este fluxo, como já foi dito, é a taxa líquida de energia radiante, emitida pelo gás, por unidade de área.

A taxa volumétrica de adição de energia ao gás por radiação (Glushkov e Kareev, 1970) é:

$$- j^R = \frac{-2 \epsilon \sigma_{SB} T^4}{\delta} \quad (\text{III.18})$$

Aqui a emissividade, além de depender da pressão e da temperatura, depende também da espessura da camada:

$$\epsilon = \epsilon (p, T, \delta) \quad (\text{III.19})$$

Para o modelo considerado, tem-se a equação do balanço de energia interna, que leva em conta a radiação, os efeitos de viscosidade, a condução de calor e as forças de pressão, da forma:

$$\rho \left( \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = \eta_V (\text{div } \underline{v})^2 + 2\eta (\text{grad } \underline{v})^S : (\text{grad } \underline{v})^S + \lambda \Delta T - \frac{2 \epsilon \sigma_{SB} T^4}{\delta} \quad (\text{III.20})$$

Esta equação, juntamente com as Equações II.1, II.2, II.14 e II.16 a II.19 continuam formando um sistema fechado de equações não lineares.

No próximo Capítulo, a fim de se encontrar uma solução analítica para o problema, esse sistema de equações será linearizado.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE MATEMÁTICA

#### 4.1 - LINEARIZAÇÃO

Utilizando-se o método usual da teoria acústica de pequenas perturbações, lineariza-se o conjunto de equações, de tal modo que apenas desvios de primeira ordem em relação ao estado de referência, no qual o sistema está em equilíbrio termodinâmico e em repouso, são levados em conta.

A condição para que as equações linearizadas do movimento possam ser aplicadas à propagação das ondas de som é que a velocidade das partículas do fluido, na onda, deve ser pequena quando comparada com a velocidade do som.

O fluido uniforme está inicialmente em repouso para as condições  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $h_0$ ,  $v_0$ ,  $\mu_0$ ,  $A_0$ ,  $\underline{v}_0$ ,  $\xi_0$ .

Assume-se que o fluido não perturbado está em equilíbrio.

Desde que as oscilações são pequenas, a velocidade  $\underline{v}$  também é pequena. Pela mesma razão, as mudanças relativas à densidade e à pressão do fluido também são pequenas.

Com as perturbações das quantidades denotadas por linhas, as quantidades de estado, na perturbação, são:

$$p = p_0 + p' \quad (\text{IV.1})$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (\text{IV.2})$$

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{v}' \quad (\text{IV.3})$$

$$v = v_0 + v' \quad (\text{IV.4})$$

$$\mu = \mu_0 + u' \quad (\text{IV.5})$$

$$A = A_0 + A' \quad (\text{IV.6})$$

$$\xi = \xi_0 + \xi' \quad (\text{IV.7})$$

$$T = T_0 + T' \quad (\text{IV.8})$$

Desde que o fluido, inicialmente, está em repouso, as componentes da velocidade são dadas diretamente pelas quantidades perturbadas, isto é:

$$\underline{v} = \underline{v}' \quad (\text{IV.9})$$

Como a afinidade no equilíbrio é zero, tem-se:

$$A = A' \quad (\text{IV.10})$$

Além disso, para que o gás não perturbado seja uniforme, ele tem que estar em equilíbrio radiativo. Isto significa que o fluxo de calor não perturbado deve ser igual a zero. Tem-se, portanto:

$$J^R = J'^R \quad (\text{IV.11})$$

A perturbação é bem menor que seu valor no equilíbrio, para todas as outras grandezas, isto é:

$$\rho' \ll \rho_0 \quad , \quad p' \ll p_0$$

e assim por diante.

A derivada substantiva para um elemento de fluido, introduzida no Capítulo II, foi definida como sendo:

$$\frac{d()} {dt} = \frac{\partial()} {\partial t} + v_1 \frac{\partial()} {\partial X_1} + v_2 \frac{\partial()} {\partial X_2} + v_3 \frac{\partial()} {\partial X_3} = \frac{\partial()} {\partial t} + v_j \frac{\partial()} {\partial X_j} \quad (\text{IV.12})$$

O termo convectivo, torna-se:

$$v_j \frac{\partial()} {\partial X_j} = v'_j \frac{\partial()} {\partial X'_j} \quad (\text{IV.13})$$

Este termo  $\bar{e}$  de segunda ordem em relação às quantidades perturbadas e, portanto, a derivada substantiva passa a ser, simplesmente, igual à derivada local.

Tem-se, assim, o seguinte conjunto de equações linearizadas:

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}'} {\partial t} = \text{div } \underline{v}' \quad (\text{IV.14})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}'} {\partial t} = - \text{grad } p' + \eta \Delta \underline{v}' + \left( \frac{1}{3} \eta + \eta_v \right) \text{grad } \text{div } \underline{v}' \quad (\text{IV.15})$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'} {\partial t} = - p_0 \rho_0 \frac{\partial v'} {\partial t} + \lambda \Delta T - \frac{2 \epsilon \sigma_{SB}}{\delta} (T_0^4 + 4T_0^3 T') \quad (\text{IV.16})$$

$$T_0 \frac{\partial s'} {\partial t} = \frac{\partial u'} {\partial t} + p_0 \frac{\partial v'} {\partial t} \quad (\text{IV.17})$$

$$\frac{\partial \xi'} {\partial t} = -\beta A' \quad (\text{IV.18})$$

Das Equações de estado II.17 a II.19, têm-se:

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} dv + \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} d\xi + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{v, \xi} ds \quad (\text{IV.19})$$

$$dA = \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi, s} dv + \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{v, s} d\xi + \left( \frac{\partial A}{\partial s} \right)_{v, \xi} ds \quad (\text{IV.20})$$

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} dv + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} d\xi + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} ds \quad (\text{IV.21})$$

E as equações de estado linearizadas são:

$$p - p_0 = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} (v - v_0) + \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} (\xi - \xi_0) + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{v, \xi} (s - s_0) \quad (\text{IV.22})$$

$$A = \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi, s} (v - v_0) + \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{v, s} (\xi - \xi_0) + \left( \frac{\partial A}{\partial s} \right)_{v, \xi} (s - s_0) \quad (\text{IV.23})$$

$$T - T_0 = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} (v - v_0) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} (\xi - \xi_0) + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} (s - s_0) \quad (\text{IV.24})$$

As nove derivadas das três últimas equações são propriedades relevantes do equilíbrio. O primeiro termo da diagonal,  $\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s}$  esta relacionado com a compressibilidade isentrópica,  $\chi_{\xi, s}$ , para  $\xi$  constante, por:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} = - (v_0 \chi_{\xi, s})^{-1} \quad (\text{IV.25})$$

A estabilidade termodinâmica requer que a compressibilidade seja uma quantidade positiva. O segundo termo,  $(\partial A/\partial \xi)_{v,s}$ , é a derivada da afinidade, A, em relação a  $\xi$ , para v e s constantes, ou para v e u constantes, conforme a Equação II.1.

Este termo aparece relacionado com a afinidade  $\beta$ , na definição de tempo de relaxação.

O tempo de relaxação,  $\tau$ , é definido como sendo o tempo característico no qual  $\xi$  decai da fração  $e^{-1}$  do seu valor inicial para v e u constantes.

Da Equação IV.18 segue-se que:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = -\beta \left( \frac{\partial A'}{\partial \xi} \right)_{v,u} (\xi - \xi_0) \quad (\text{IV.26})$$

e, conseqüentemente:

$$\tau = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \xi'}{\partial A'} \right)_{v,u} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v,s} \geq 0. \quad (\text{IV.27})$$

A desigualdade vem do fato da produção de entropia ser sempre maior ou igual a zero. Segue-se daí que  $\beta$  e  $(\partial \xi/\partial A)_{v,s}$  nunca são negativos. A restrição feita ao termo  $(\partial \xi/\partial A)_{v,s}$  constitui a chamada condição de estabilidade termodinâmica.

O terceiro elemento da diagonal,  $(\partial T/\partial s)_{v,\xi}$  é dado por:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v,\xi} = \frac{T}{C_{v,\xi}} \quad (\text{IV.28})$$

onde  $C_{v,\xi}$  é o calor específico para v e  $\xi$  constantes. Ele é positivo devido, novamente, à estabilidade termodinâmica.

A partir daqui, para simplificar a notação, não será mais utilizada a linha para indicar quantidades perturbadas.

#### 4.2 - APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER

A fim de investigar, em detalhes o tipo de movimento descrito pelo sistema linearizado, usa-se os métodos ordinários de Fourier.

Para isso, assume-se que as oito quantidades físicas,  $q(\underline{r}, t)$ , são funções periódicas das coordenadas espaciais, como um dado vetor de onda  $\underline{K}$ .

Essas quantidades perturbadas são escritas como uma integral quádrupla de Fourier da seguinte forma:

$$q(\underline{r}, t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \right]^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\underline{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{k} d\omega \quad (\text{IV.29})$$

que é suposta existir.

A transformada de Fourier é dada por:

$$\tilde{q}(\underline{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\underline{r}, t) e^{i\omega t - i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r} dt \quad (\text{IV.30})$$

Pode-se estender a definição de transformada de Fourier para os valores complexos:

$$\underline{K} = \underline{k} + i\underline{\gamma} \quad (\text{IV.31})$$

e escrever:

$$\hat{q}(\underline{K}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\underline{r}, t) e^{i\omega t - i\underline{K} \cdot \underline{r}} d\underline{r} dt \quad (\text{IV.32})$$

onde  $\underline{\gamma}$  deve estar dentro de certos limites, para garantir a convergência da Equação IV.32, se a Equação IV.29 com  $\underline{k}$  substituído por  $\underline{K}$ , for convergente para esses valores de  $\underline{\gamma}$ .

Pode-se escrever para a Equação IV.29:

$$q(\underline{r}, t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(\underline{K}, \omega) e^{-i\omega t + i\underline{K} \cdot \underline{r}} d\underline{k} d\omega \quad (\text{IV.33})$$

ou com a Equação IV.31

$$q(\underline{r}, t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(\underline{K}, \omega) e^{-i\omega t + i\underline{k} \cdot \underline{r} - \underline{\gamma} \cdot \underline{r}} d\underline{k} d\omega \quad (\text{IV.34})$$

Com a Equação IV.32, segue-se que:

$$i\underline{K} \hat{q}(\underline{K}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{grad } q(\underline{r}, t) e^{i\omega t - i\underline{K} \cdot \underline{r}} d\underline{r} dt \quad (\text{IV.35})$$

A equação mostra, caso se tome  $q$  como sendo um escalar, que  $\underline{k}$  e  $\underline{\gamma}$  da Equação IV.31 são vetores paralelos.

Pode-se, portanto, escrevê-los como:

$$\underline{k} = k\underline{e}, \quad \underline{\gamma} = \gamma \underline{e} \quad (\text{IV.36})$$

onde  $\underline{e}$  é um vetor unitário.

Das Equações IV.34 e IV.36 nota-se que  $q(\underline{r}, t)$  pode ser representado pela superposição de ondas amortecidas, com amplitude  $\bar{q}(\underline{K}, \omega) e^{-\underline{\gamma} \cdot \underline{r}}$ , com direções de propagação  $\underline{e}$  e com velocidades de fase:

$$v_s = \frac{\omega}{k} \quad (IV.37)$$

A atenuação da amplitude, por unidade de comprimento,  $\bar{e}$  determinada pelo fator  $\gamma$ .

O fator de atenuação da amplitude, sobre um comprimento de onda  $2\pi/k$   $\bar{e}$ , entretanto, igual à quantidade adimensional:

$$\mu = \frac{2\pi\gamma}{k} \quad (IV.38)$$

Este tratamento  $\bar{e}$  similar a assumir que todas as quantidades perturbadas sejam proporcionais a  $e^{-(\underline{K} \cdot \underline{r} - \omega t)}$ . Isto  $\bar{e}$ , procura-se uma solução da onda plana, caracterizada pela frequência  $\omega$  e o vetor de onda  $\underline{K}$ .

Uma perturbação arbitrária pode ser expandida em série de Fourier e representada como uma superposição dessas ondas componentes.

Escrevendo-se  $\partial()/\partial t \rightarrow -i\omega$  e  $\partial()/\partial X_i \rightarrow iK_i$ , isto  $\bar{e}$ , aplicando-se a transformada de Fourier, dada pela Equação IV.32, obtêm-se

$$\omega \rho_0 \hat{v} = -\underline{K} \cdot \hat{v} \quad (IV.39)$$

$$i\omega \rho_0 \hat{v} = i\underline{K} \hat{p} - \eta (\underline{K} \cdot \underline{K}) \hat{v} - \left[ \frac{1}{3} \eta + \eta_v \right] \underline{K} (\underline{K} \cdot \hat{v}) \quad (IV.40)$$

$$\omega \rho_0 \hat{u} = -\omega \rho_0 \rho_0 \hat{v} - i\lambda (\underline{K} \cdot \underline{K}) \hat{T} - \frac{8 \epsilon \sigma_{SB}}{\delta} i T_0^3 \hat{T} \quad (IV.41)$$

$$T_0 \hat{s} = \hat{u} + \rho_0 \hat{v} \quad (IV.42)$$

$$i\omega \tilde{\xi} = \beta \tilde{A} \quad (\text{IV.43})$$

$$p = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} \tilde{v} + \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \tilde{\xi} + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{v, \xi} \tilde{s} \quad (\text{IV.44})$$

$$\tilde{A} = \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi, s} \tilde{v} + \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{v, s} \tilde{\xi} + \left( \frac{\partial A}{\partial s} \right)_{v, \xi} \tilde{s} \quad (\text{IV.45})$$

$$\tilde{T} = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} \tilde{v} + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \tilde{\xi} + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} \tilde{s} \quad (\text{IV.46})$$

Eliminando-se  $\tilde{v}$  das Equações IV.39 e IV.40, obtêm-se:

$$\tilde{p} = - \left\{ \frac{\omega^2}{(\underline{K} \cdot \underline{K})} \rho_0^2 + i\omega\rho_0 \left[ \frac{4}{3}\eta + \eta_v \right] \right\} \tilde{v} \quad (\text{IV.47})$$

O conjunto de Equações algébricas IV.41 - IV.47, nas transformadas de Fourier  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{v}$  etc., de  $p - p_0$ ,  $v - v_0$ , etc., que são todas funções de  $\underline{K}$  e  $\omega$ , somente apresentam soluções diferentes da trivial, se o determinante dos coeficientes for igual a zero.

Isto dá a relação complexa entre  $\omega$  e  $\underline{K}$  da forma:

$$f(\omega, \underline{K} \cdot \underline{K}) = 0 \quad (\text{IV:48})$$

que é equivalente a duas relações reais.

Conseqüentemente, a solução do conjunto de equações deve ser uma superposição de ondas parciais (ondas de som), com  $\underline{K}$  e  $\omega$  relacionadós dessa maneira.

A velocidade  $v_s$  e atenuação da amplitude  $\gamma$  das ondas de som  $\tilde{e}$ , agora, unicamente determinada pela frequência  $\omega$ .

Para uma dada direção de propagação  $\underline{e}$ , pode-se obter as duas quantidades reais  $k$  e  $\gamma$  das Equações IV.48, IV.31 e IV.36.

No caso presente, como o sistema é isotrópico,  $\underline{K}$  aparece apenas como  $\underline{K} \cdot \underline{K}$  na Equação IV.47. A última quantidade, de acordo com as Equações IV.31 e IV.36, pode ser escrita como:

$$\underline{K} \cdot \underline{K} = k^2 - \gamma^2 + 2ik\gamma \quad (\text{IV.49})$$

$\underline{e}$  é independente de  $\underline{e}$ . Isto significa que  $k$ , ou a velocidade do som  $v_s = \omega/k$ , e  $\gamma$ , encontradas a partir da Equação IV.48, serão apenas funções de  $\omega$ , independentes da direção de propagação  $\underline{e}$ .

Estuda-se, agora, a polarização das ondas de som, isto é, a direção da vibração, dada pelo vetor  $\underline{y}$ , para o deslocamento dos elementos materiais, em relação à direção de propagação  $\underline{e}$ , que é a mesma da direção de  $\underline{K}$ , como foi visto.

Da Equação IV.40 nota-se que o vetor  $\underline{y}$ , que de acordo com a Equação IV.32 é paralelo a  $\underline{\hat{v}}$ , é paralelo a  $\underline{K}$ . Então, a polarização das ondas de som, no sistema estudado aqui, é longitudinal, isto é, a vibração tem a mesma direção da propagação.

O conjunto de Equações IV.41 - IV.47 mostra as quantidades  $\hat{p}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{u}$  e  $\hat{s}$  como lineares de  $\hat{v}$ :

$$\hat{p} = R \hat{v} \quad (\text{IV.50})$$

$$\hat{T} = R_T \hat{v} \quad (\text{IV.51})$$

$$\hat{\xi} = R_\xi \hat{v} \quad (\text{IV.52})$$

$$\hat{A} = R_A \hat{v} \quad (\text{IV.53})$$

Os coeficientes encontrados deste modo são chamados de suscetibilidades. Estas suscetibilidades serão calculadas no próximo Capítulo.

## CAPÍTULO V

### RELAXAÇÃO ACÚSTICA

Os processos de relaxação são observados como efeitos após o equilíbrio estatístico, que dizem respeito a um número ilimitado de graus de liberdade.

Do ponto de vista da termodinâmica de processos irreversíveis, o tratamento teórico do fenômeno de relaxação está intimamente ligado ao das reações químicas com mecanismos desconhecidos e às correspondentes extensões destas reações, vistas como parâmetros internos, que são pertinentes às transformações internas em questão.

Desprezando-se os efeitos de condutividade térmica, de viscosidade e de radiação, mas considerando-se o fenômeno de relaxação, isto é, desprezando-se todas as irreversibilidades, menos a relaxação, tem-se a partir das Equações IV.41 - IV.47, o seguinte conjunto de equações:

$$\bar{p} = - \frac{\omega^2}{(\underline{K} \cdot \underline{K})} \rho_0^2 \hat{v} \quad (V.1)$$

$$\hat{s} = 0 \quad (V.2)$$

$$i_{\omega \xi} \hat{\xi} = \beta \hat{A} \quad (V.3)$$

$$\bar{p} = \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \right]_{v, s} \hat{\xi} \quad (V.4)$$

$$\hat{A} = \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial A}{\partial \xi} \right]_{v, s} \hat{\xi} \quad (V.5)$$

$$\bar{T} = \left[ \frac{\partial T}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_{v, s} \hat{\xi} \quad (V.6)$$

Este sistema mostra o caráter isentrópico e não isotérmico da propagação do som. Para calcular as suscetibilidades acústicas, serão utilizadas as relações de Maxwell. Estas relações são tiradas da Equação II.1, e são:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{v,s} = - \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{\xi,s} \quad (V.7)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{v,\xi} = - \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \quad (V.8)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{v,\xi} = \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \quad (V.9)$$

O significado físico dessas quantidades está explícito na notação. A primeira relação dá a mudança de pressão, por unidade de  $\xi$ , durante o processo de relaxação a volume e entropia constantes. A segunda é relacionada com o coeficiente de expansão para  $\xi$  e  $s$  constantes. E a última dá a variação da temperatura, por unidade de  $\xi$ , durante o processo de relaxação a volume e entropia constantes.

Nota-se que todas as quantidades do equilíbrio para  $\xi$  constante, devem ser tomadas para o valor do equilíbrio  $\xi = \xi_0$ .

Das Equações V.3 - V.5 e utilizando-se as relações de Maxwell, encontra-se a relação IV.50, com a suscetibilidade acústica:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\omega) &= \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\xi,s} - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial A}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{\xi,s} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\xi,s} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \end{aligned} \quad (V.10)$$

A última igualdade vem da seguinte propriedade matemática:

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \quad (\text{V.11})$$

se existe relação funcional entre  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

A diferenciação para  $A$  constante  $\bar{e}$  tomada para  $A = 0$ , porque o estado de referência em relação ao qual desenvolvem-se as quantidades termodinâmicas, está num estado de equilíbrio, para o qual a afinidade,  $A$ , desaparece.

Para os dois valores limites da frequência, zero e infinito, a fórmula V.10 transforma-se em:

$$R(0) = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} + \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s} = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{A, s} = - \frac{1}{v \chi_{A, s}} \leq 0 \quad (\text{V.12})$$

$$R(\infty) = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} = - \frac{1}{v \chi_{\xi, s}} \leq 0 \quad (\text{V.13})$$

As Equações V.12 e V.13 envolvem duas compressibilidades isentrópicas:  $\chi_{A, s}$  e  $\chi_{\xi, s}$ .

A primeira delas  $\bar{e}$  tomada para afinidade constante e no equilíbrio, isto  $\bar{e}$ , para  $A = 0$ . A outra compressibilidade isentrópica  $\bar{e}$  tomada para a variável de progresso constante, isto  $\bar{e}$ , para um estado no qual o processo de relaxação  $\bar{e}$  congelado para o valor  $\xi_0$  da variável de progresso.

As desigualdades V.12 e V.13 representam condições de estabilidade termodinâmica.

Calcula-se, agora, as suscetibilidades definidas pelas Equações IV.51 a IV.53.

Utilizando-se as Equações V.3 a V.6, as relações de Maxwell e a Equação IV.27 calculam-se as suscetibilidades definidas pelas Equações IV.51 a IV.53.

Para a suscetibilidade relacionada com a temperatura, encontra-se:

$$\tilde{K}_T(\omega) = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (V.14)$$

e conseqüentemente:

$$\tilde{K}_T(0) = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A, s} = \frac{\rho_0}{\alpha_{A, s}} \quad (V.15)$$

$$\tilde{K}_T(\infty) = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} = \frac{\rho_0}{\alpha_{\xi, s}} \quad (V.16)$$

As suscetibilidades para os dois casos limites da frequência envolvem os coeficientes de expansão adiabática  $\alpha_{A, s}$  e  $\alpha_{\xi, s}$  para A e  $\xi$  constantes, respectivamente. Isso corresponde à visível realidade de que em lentas modificações de estado, o equilíbrio se firma em A igual a zero, enquanto que em frequências muito altas, a concentração,  $\xi$ , não pode acompanhar as alterações de pressão e temperatura na onda de som.

Encontram-se, também, as suscetibilidades:

$$\tilde{K}_{\xi}(\omega) = \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,S} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (V.17)$$

$$\tilde{K}_A(\omega) = - \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S} \frac{1}{1 - i\omega\tau} = \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v,S} \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \quad (V.18)$$

Mostrar-se-á, finalmente, que em regiões de baixas frequências ( $\omega\tau \ll 1$ ), o fenômeno de relaxação tem, formalmente, o mesmo efeito da viscosidade volumétrica e derivar-se-á uma expressão para a viscosidade volumétrica específica,  $\bar{\eta}_v$ , em termos de quantidades de relaxação.

Na aproximação  $\omega\tau \ll 1$ , a suscetibilidade, conforme a Equação V.18, toma a forma:

$$\tilde{K}_A(\omega) = - \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S} i\omega\tau \quad (V.19)$$

Por outro lado, pode-se escrever uma expressão para a diferença entre  $\tilde{K}(0)$  e  $\tilde{K}(\infty)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(0) - \tilde{K}(\infty) &= - \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v,S} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v,S} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v,S} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S}^2 = \\ &= \beta\tau \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (V.20)$$

Por outro lado, das Equações IV.27, V.12, V.13 e as relações de Maxwell, têm-se:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(0) - \tilde{K}(\infty) &= \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{A,S} - \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi,S} = - \left( \frac{\partial p}{\partial A} \right)_{v,S} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S} = - \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,S} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,S} = \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{v,S} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,S}^2 = \frac{1}{\beta\tau} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,S}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (V.21)$$

Pode-se, portanto, escrever a Equação V.10 como:

$$\bar{K}(\omega) = \bar{K}(\infty) + \left\{ \bar{K}(0) - \bar{K}(\infty) \right\} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (V.22)$$

Para  $\omega\tau \ll 1$ , torna-se:

$$\bar{K}(\omega) = \bar{K}(0) + \left\{ \bar{K}(0) - \bar{K}(\infty) \right\} i\omega\tau \quad (V.23)$$

Substituindo-se na Equação V.23 as Equações V.12 e V.21, obtêm-se

$$\bar{K}(\omega) = \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_{A,s} + \frac{i\omega}{\beta} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial v} \right]_{A,s}^2 \quad (V.24)$$

Substituindo-se as Equações V.24 e V.19 nas Equações IV.50 e IV.53, e aplicando-se a transformada inversa de Fourier, obtêm-se:

$$p - p_0 = \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_{A,s} (v - v_0) - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial v} \right]_{A,s}^2 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (V.25)$$

$$A = \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]_{\xi,s} \tau \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]_{\xi,s} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial A} \right]_{v,s} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial v} \right]_{A,s} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (V.26)$$

Com o auxílio da Equação IV.14, as duas últimas equações podem ser escritas, alternativamente, como:

$$p - p_0 = \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_{A,s} (v - v_0) - \frac{1}{\beta \rho_0} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial v} \right]_{A,s}^2 \operatorname{div} \underline{v} \quad (V.27)$$

$$A = - \frac{1}{\beta \rho_0} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial v} \right]_{A,s} \operatorname{div} \underline{v} \quad (V.28)$$

Utiliza-se, agora, ao invés da Equação II.17, a equação de estado para pressão como sendo:

$$p = p(v, A, s) \quad (V.29)$$

que dá, na aproximação linear:

$$p - p_0 = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{A,s} (v - v_0) + \left( \frac{\partial p}{\partial A} \right)_{v,s} A + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{A,s} (s - s_0) \quad (V.30)$$

A relação V.30 dá, para uma transformação isentrópica reversível, isto é, para  $A = 0$  e  $s = s_0$ :

$$p^{eq} - p_0 = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{A,s} (v - v_0) \quad (V.31)$$

A pressão de equilíbrio,  $p^{eq}$ , dada por esta relação, é reconhecida também na Equação V.25 e pode ser transformada em:

$$p = p^{eq} - \frac{1}{\beta \rho_0} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \operatorname{div} \underline{v} \quad (V.32)$$

Entretanto, a produção de entropia dada pela Equação II.7, para o presente caso, isto é, sem condução de calor e termos do escoamento viscoso, dá, juntamente com a Equação II.16:

$$\sigma = - \frac{\rho_0}{T} \frac{d\xi}{dt} A = \frac{\rho_0}{T} \beta A^2 \quad (V.33)$$

Inserindo-se a Equação V.28, a última Equação toma a forma:

$$\sigma = \frac{1}{T\beta\rho_0} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,s}^2 (\text{div } \underline{v})^2 \quad (\text{V.34})$$

Pode-se escrever, formalmente, as relações V.32 e V.34 como:

$$p - p^{\text{eq}} = T = - \bar{\eta}_v \text{div } \underline{v} \quad (\text{V.35})$$

$$\sigma = - \frac{T \text{div } \underline{v}}{T} = \frac{\bar{\eta}_v}{T} (\text{div } \underline{v})^2 \quad (\text{V.36})$$

que são idênticas às Equações II.10 e II.7 e para um fluido com uma viscosidade volumétrica efetiva:

$$\bar{\eta}_v = \frac{1}{\beta \rho_0} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \geq 0 \quad (\text{V.37})$$

Então, para frequências baixas, isto é, para frequências bem menores que o valor  $\tau^{-1}$ , o fenômeno de relaxação pode ser considerado como tendo o mesmo efeito da viscosidade volumétrica.

No caso em que mais do que um processo de relaxação ocorre no interior do sistema, pode-se sempre considerar esses processos que têm tempos de relaxação,  $\tau$ , muito menores que as frequências recíprocas  $\omega^{-1}$ , como que estejam contribuindo para uma viscosidade volumétrica efetiva total, enquanto que os outros fenômenos de relaxação devem ser tomados da mesma maneira.

Das Equações IV.50 e V.1, segue-se que a Equação IV.48 tem a forma:

$$- \frac{\omega^2 \rho_0^2}{(\underline{K} \cdot \underline{K})} = \hat{K}(\omega) \quad (\text{V.38})$$

## CAPÍTULO VI

### EQUAÇÃO COMPLEXA DO SOM:

#### INFLUÊNCIA DA RADIAÇÃO NA FÓRMULA DE STOKES E KIRCHHOFF

Leva-se, agora, em conta os efeitos das viscosidades  $\eta$  e  $\eta_v$ , os efeitos da condutividade térmica e os da radiação na propagação do som.

A fim de encontrar-se a fórmula da velocidade complexa do som e sua atenuação, deve-se, primeiramente, resolver o sistema completo dado pelas Equações IV.41 a IV.47.

Desprezam-se potências maiores que a primeira, para o parâmetro  $\lambda$ .

Para encontrar-se a suscetibilidade acústica, válida para pequenos valores da condutividade térmica,  $\lambda$ , procede-se da seguinte maneira. Primeiramente, elimina-se  $\hat{u}$  das Equações IV.41 e IV.42. Isto dá  $\hat{s}$  em termos de  $\hat{T}$ . Com o auxílio desta relação, elimina-se  $\hat{s}$  das Equações IV.44 a IV.46. Além disso, elimina-se  $\hat{\xi}$  das Equações IV.43 a IV.46. Os lados direitos das Equações IV.44 a IV.46 têm, agora, expressões lineares em  $\hat{v}$ ,  $\hat{A}$  e  $\hat{T}$ .

Insere-se, primeiramente, a Equação IV.45 e subsequentemente a Equação IV.46 na Equação IV.44, negligenciando-se termos quadráticos em  $\lambda$ . Então, obtém-se uma equação para a suscetibilidade acústica, válida para pequenos valores da condutividade térmica, se as equações de Maxwell forem usadas, da forma:

$$\hat{K}(\underline{K}, \omega) = \hat{K}(\omega) + \frac{i\lambda(\underline{K} \cdot \underline{K})}{\omega \rho_0 T_0} \left| \hat{K}_T(\omega) \right|^2 + \frac{8 \frac{\epsilon \sigma_{SB}}{\delta} T_0^2 i}{\omega \rho_0} \left| \hat{K}_T(\omega) \right|^2 \quad (\text{VI.1})$$

onde  $\tilde{K}(\omega)$  e  $\tilde{K}_T(\omega)$  são dados pelas Equações V.10 e V.14, válidas para o caso de relaxação pura.

A demonstração da Equação VI.1, encontra-se no Apêndice A.

Com o auxílio da Equação IV.47, encontra-se da equação anterior, a expressão que relaciona  $\underline{K}$  e  $\omega$ :

$$\frac{\omega^2}{(\underline{K} \cdot \underline{K})} = -\frac{\tilde{K}(\omega)}{\rho_0^2} - \frac{i\omega}{\rho_0} \left\{ \frac{4}{3} \eta + \eta_V + \frac{(\underline{K} \cdot \underline{K})\lambda}{\rho_0^2 \omega^2 T_0} |\tilde{K}_T(\omega)|^2 + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0^2} |\tilde{K}_T(\omega)|^2 \right\} \quad (VI.2)$$

Considerando-se apenas efeitos lineares em  $\lambda$ ,  $\eta$  e  $\eta_V$ , pode-se substituir  $(\underline{K} \cdot \underline{K})$  do lado direito da Equação VI.2, por seu valor dado pela Equação V.38. Obtêm-se, então:

$$\frac{\omega^2}{(\underline{K} \cdot \underline{K})} = -\frac{\tilde{K}(\omega)}{\rho_0^2} - \frac{i\omega}{\rho_0} \left\{ \frac{4}{3} \eta + \eta_V - \frac{\lambda}{T_0} \frac{|\tilde{K}_T(\omega)|^2}{\tilde{K}(\omega)} + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0^2} |\tilde{K}_T(\omega)|^2 \right\} \quad (VI.3)$$

Para o interessante caso no qual  $\omega\tau \ll 1$ , isto é, para frequências bem menores do que o valor  $\tau^{-1}$ , têm-se, conforme as Equações V.24 e V.15:

$$\tilde{K}(\omega) = \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_{A,s} + \frac{i\omega}{\beta} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial v} \right]_{A,s}^2 \quad (VI.4)$$

$$\tilde{K}_T(\omega) = \left[ \frac{\partial T}{\partial v} \right]_{A,s} \quad (VI.5)$$

Substituindo-se as Equações VI.4 e VI.5 na Equação VI.3, obtêm-se:

$$\frac{\omega^2}{(\underline{K} \cdot \underline{K})} = - \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{A,s} - \frac{i\omega}{\rho_0} \left\{ \frac{4}{3} \eta + \eta_v + \frac{1}{\beta \rho_0} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A,s} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{T_0} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{A,s} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 + \frac{8\epsilon\alpha_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \right\} \quad (VI.6)$$

Define-se, agora, quatro compressibilidades e quatro calores específicos:

$$\chi_{S,A} = - \frac{1}{v_0} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{S,A} \quad (VI.7)$$

$$\chi_{T,A} = - \frac{1}{v_0} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{T,A} \quad (VI.8)$$

$$\chi_{S,\xi} = - \frac{1}{v_0} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{S,\xi} \quad (VI.9)$$

$$\chi_{T,\xi} = - \frac{1}{v_0} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{T,\xi} \quad (VI.10)$$

$$C_{p,A} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p,A} \quad (VI.11)$$

$$C_{v,A} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v,A} \quad (VI.12)$$

$$C_{p,\xi} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p,\xi} \quad (VI.13)$$

$$C_{v,\xi} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v,\xi} \quad (VI.14)$$

O laplaciano da velocidade,  $C_0^2$ , é dado por:

$$C_0^2 = - \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{A,s} \quad (\text{VI.15})$$

Das Equações VI.15 e V.37, a Equação VI.16, torna-se:

$$\frac{\omega^2}{(K \cdot K)} = C_0^2 - \frac{i\omega}{\rho_0} \left[ \frac{4}{3} \eta + \eta_V + \bar{\eta}_V - \frac{\lambda}{T_0} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{A,s} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \right] \quad (\text{VI.16})$$

Utilizando-se a seguinte relação básica da termodinâmica irreversível (Groot e Mazur, 1963):

$$\frac{C_{p,A} - C_{v,A}}{C_{p,A} C_{v,A}} = - \frac{1}{T} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{A,s} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \quad (\text{VI.17})$$

tem-se:

$$\frac{\omega^2}{(K \cdot K)} = C_0^2 - \frac{i\omega}{\rho_0} \left[ \frac{4}{3} \eta + \eta_V + \bar{\eta}_V + \lambda \frac{C_{p,A} - C_{v,A}}{C_{p,A} C_{v,A}} + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \right] \quad (\text{VI.18})$$

Na atual aproximação, a última equação, juntamente com a Equação IV.37, dá a velocidade do som:

$$v_s = \frac{\omega}{K} \quad (\text{VI.19})$$

e a atenuação do som:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2C_0^3 \rho_0} \left[ \frac{4}{3} \eta + \eta_V + \bar{\eta}_V + \lambda \frac{C_{p,A} - C_{v,A}}{C_{p,A} C_{v,A}} + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s}^2 \right] \quad (\text{VI.20})$$

Da relação V.16 tem-se:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{A,s} = \frac{\rho_0}{\alpha_{\xi,s}} \quad (\text{VI.21})$$

onde  $\alpha_{\xi,s}$  é o coeficiente de expansão adiabática.

Substituindo-se a relação VI.21 na Equação VI.20, obtêm-se:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2C_0^3 \rho_0} \left[ \frac{4}{3} \eta + \eta_V + \bar{\eta}_V + \lambda \frac{C_{p,A} - C_{v,A}}{C_{p,A} C_{v,A}} + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0} \frac{1}{\alpha_{\xi,s}} \right] \quad (\text{VI.22})$$

Da Equação VI.22 vê-se que a atenuação é proporcional ao quadrado da frequência. Além disso, a equação mostra o caráter aditivo dos 5 efeitos irreversíveis, da viscosidade de cisalhamento, da viscosidade volumétrica, da viscosidade devido à relaxação, da condutividade térmica e da radiação.

Para gases perfeitos monoatômicos têm-se:

$$\eta_V = 0 \quad (\text{VI.23})$$

$$\bar{\eta}_V = 0 \quad (\text{VI.24})$$

$$C_{p,A} = \frac{5K}{2m} \quad (\text{VI.25})$$

$$C_{v,A} = \frac{3K}{2m} \quad (\text{VI.26})$$

onde  $m$  é a massa atômica e  $K$  a constante de Boltzmann.

Tem-se, então, a atenuação para gases perfeitos monoatômicos:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{C_0^3 \rho_0} \left[ \frac{2}{3} \eta + \frac{2}{15} \lambda \frac{m}{K} + \frac{8\epsilon\sigma_{SB} T_0^2}{\delta\omega^2 \rho_0} \frac{1}{\alpha_{\xi, S}} \right] \quad (\text{VI.27})$$

Desprezando-se a radiação, tem-se:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{C_0^3 \rho_0} \left[ \frac{2}{3} \eta + \frac{2}{15} \lambda \frac{m}{K} \right] \quad (\text{VI.28})$$

A Equação VI.28 é o conhecido resultado clássico de Stokes e Kirchhoff. (Groot e Mazur, 1963).

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo apresentar um estudo teórico da propagação do som, em um fluido, considerando a influência da radiação.

Com este intuito, estabeleceu-se uma expressão para a atenuação do som, Equação VI.22. Esta equação mostra o caráter aditivo dos efeitos irreversíveis da viscosidade de cisalhamento, da viscosidade volumétrica, da viscosidade devido à reação química, da condutividade térmica e da radiação. Dela conclui-se que, a menos do termo devido à radiação, que é independente da frequência, a atenuação é proporcional ao quadrado da frequência da onda de som.

Por outro lado, o termo

$$\frac{8\epsilon\sigma_{SB}T_0^2}{\delta\omega^2\rho_0^2} \frac{1}{\alpha_{\xi,s}},$$

da Equação VI.22, é uma quantidade positiva. Logo, a atenuação do som, que leva em conta os efeitos de radiação, é maior que a atenuação dada pela fórmula de Stokes e Kirchhoff. Isto é, a radiação, representada pela emissividade, aumenta a atenuação do som e, conseqüentemente, diminui a propagação da onda, tanto num gás qualquer, como num gás perfeito monoatômico.

Nota-se, também, que quanto maior for a espessura da camada de gás, menor a contribuição da radiação na alteração da propagação da onda de som. Quanto mais a camada de gás se aproximar de um corpo negro, maior será a contribuição da radiação na atenuação.

Apesar da radiação ser importante apenas para gases a altas temperaturas, a maioria das situações que envolve combustão requer essa condição. Portanto, em combustores, é extremamente importante considerar a influência da radiação na propagação de ondas acústicas. Deve-se notar que as temperaturas devem estar numa faixa tal que seja possível a radiação, mas sem haver ionização.

A atenuação do som foi calculada para pequenos valores da condutividade térmica e para frequências tais que  $\omega\tau \ll 1$ . Além disso considerou-se o caso laminar e levou-se em conta apenas uma reação química.

Além disso, não foi possível obter um valor numérico para a atenuação do som, pois não se têm dados experimentais a respeito dos parâmetros envolvidos. Quando a experiência tiver dados precisos a respeito dos coeficientes de expansão adiabática, dos calores específicos e das viscosidades, poderão se precisar, numericamente, a influência da radiação na propagação do som em vários gases.

Num trabalho posterior poder-se-ia levar em conta várias reações químicas, considerar altas frequências e condutividades térmicas elevadas. O caso turbulento deve também ser investigado, pois como se sabe, os processos de combustão são turbulentos.

## AGRADECIMENTOS

- A Jesus.
- Ao Dr. José Pantuso Sudano, cuja paciência e perseverança possibilitaram a realização do presente trabalho.
- Aos doutores Luiz Alberto Vieira Dias e Ralf Gielow, o apoio dado durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Aos colegas Heraldo da Silva Couto e Jerônimo dos Santos Travelho, suas valiosas contribuições.
- À Luiza Maria Assumpção e à Regina Lúcia de Souza Bruno a precisão e capricho na datilografia.
- A todos deste e de outros planos, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRAGINSKII, S.J. Transport processes in a plasma. In: LEONTOVICH, M.A., ed. *Reviews of plasma physics*. New York, Consultants Bureau, 1965. v.1, p.205-311.
- CHAMBADAL, P. *Évolution et applications du concept d'entropie*. Paris, Dunod, 1963.
- CHAPMAN, A.J. Heat transfer by radiation. In: ———. *Heat transfer*. 2 ed. New York, Macmillan, 1967. cap. 11, p. 392-469.
- CLARKE, J.F. Behaviour at acoustic wave fronts in a laminar diffusion flame. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 27 (2):161-173, 1974.
- . Chemical amplification at the wave head of a finite amplitude gasdynamic disturbance. *Journal of Fluid Mechanics*, 81 (2):257-264, June, 1977.
- DENBIGH, K.F.R.S. First and second laws. In: ———. *The principles of chemical equilibrium*. 3 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1971, cap.1, p. 3-60.
- . Auxiliary functions and conditions of equilibrium. In: ———. *The principles of chemical equilibrium*. 3 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1971. cap. 2, p. 63-106.
- . Thermodynamic of gases. In: ———. *The principles of chemical equilibrium*. 3 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1971. cap. 3, p. 111-128.
- DZHAUGASHTIN, K.E.; YARIN, A.L. Combustion process in laminar homogeneous gas jets. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 14 (3):321-327, May/June, 1978.

- EDELHAN, R.B.; HARSHA, P.T. Laminar and turbulent gas dynamics in combustors - current status. *Progress in Energy and Combustion Science*, 4 (1): 1-62, 1978.
- ENINGER, J.E.; VINCENTI, W.G. Nonlinear resonant wave motion of a radiating gas, *Journal of Fluid Mechanics*, 60 (1):161-186, Aug., 1973.
- FITTS, D.D. *Nonequilibrium thermodynamics*. New York, McGraw-Hill, 1962.
- GLUSHKOV, I.S.; KAREEN, YU.A. Acoustic instability in a nonadiabatic gas. *High Temperature*, 8 (5):901-905, Sept./Oct., 1970.
- DE GROOT, S.R.; MAZUR, P. *Non-equilibrium thermodynamics*. Amsterdam, North-Holland, 1963.
- HAASE, R. *Thermodynamics of irreversible processes*. Reading, Addison-Wesley, 1969.
- HERZFELD, K.F.; LITOVITZ, T.A. The Stokes-Navier equations of hydrodynamics. In: ———. *Absorption and dispersion of ultrasonic waves*. New York, Academic, 1959. cap.1, p.25-47.
- HIRSCHFELDER, J.O.; CURTISS, C.F.; BIRD, R.B. Hydrodynamic applications of the equations of change. In: ———. *Molecular theory of gases and liquids*. 2 ed. New York, John Wiley, 1964. cap.11, p.694-834.
- LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. Sound. In: ———. *Fluid mechanics*. 3 ed. New York, Pergamon, 1966. cap.8, p.245-309.
- LIGHTHILL, M.J. Dynamics of a dissociating gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 8 (2):161-182, June, 1960.

- LOYALKA, S.K.; CHENG, T.C. Sound-wave propagation in a rarefied gas. *Physics of Fluids*, 22 (5):830-836, May, 1979.
- MAYER, J.E., MAYER, M.G. Degenerate gases. In: ———. *Statistical mechanics*. 11 ed. New York, John Wiley, 1966. cap.16, p. 363-426.
- MEIXNER, J. Allgemeine Theorie der Schallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Transporterscheinungen. *Acústica*, 2 (3):101-109, 1952.
- MONIN, A.S.; YAGLOM, A.M. Laminar and turbulent flows. In: ———. *Statistical Fluid Mechanics*. 3 ed. Cambridge, Mit, 1977. cap.1, p, 27-71.
- MORSE, P.M.; INGARD, K.U. Acoustic wave motion. In: ———. *Theoretical Acoustics*. New York, McGraw-Hill, 1968. cap.6, p. 227-305.
- NOBRE, D.N. *Instabilidade de combustão em gases fracamente ionizados não adiabáticos na presença de um campo magnético*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1976. (INPE-838-TPT-023).
- PRIGOGINE, I.; DEFAY, R. L'affinité. In: ———. *Thermodynamique Chimique*. 2 ed. Liège, Desoer, 1950. cap.5, p. 45-58.
- . Les potentiels chimiques de Gibbs. In: ———. *Thermodynamique Chimique*. 2 ed. Liège, Desoer, 1950. cap.6, p. 66-77.
- . Principe de la conservation de l'énergie. In: ———. *Thermodynamique Chimique*. 2 ed. Liège, Desoer, 1950. cap.2, p. 19-31.

PRIGOGINE, I.; DEFAY, R. Principe de la création d'entropie.

In: ———. *Thermodynamique chimique*. 2 ed. Liège, Desoer, 1950. cap. 3, p. 32-58.

———. Valeurs moyennes de l'affinité, création d'entropie et perte de travail. In: ———. *Thermodynamique Chimique*. 2 ed. Liège, Desoer, 1950. cap. 5, p. 59-65.

———. Variables thermodynamiques. In: ———. *Thermodynamique Chimique*. 2 ed. Liège, Desoer, 1950. cap. 1, p. 1-18.

SIEGEL, R.; HOWELL, J.R. Definitions of properties for non-black surfaces. In: ———. *Thermal radiation heat transfer*. Washington, D.C.; NASA, 1968. v.1, cap. 3, p. 47-88. (NASA SP-164).

———. Introduction. In: ———. *Thermal radiation heat transfer*. Washington, D.C., NASA, 1968. v.1, cap. 1, p. 1-8. (NASA SP-164).

———. Radiation From a blackbody. In: ———. *Thermal radiation heat transfer*. Washington, D.C., NASA, 1968. v.1, cap. 2, p. 9-45. (NASA SP-164).

VINCENTI, W.G.; KRUGER Jr., C.H. Flow with radiative nonequilibrium. In: ———. *Introduction to physical gas dynamics*. 2 ed. New York, John Wiley, 1967. cap. 12, p. 473-522.

———. Flow with vibrational or chemical nonequilibrium. In: ———. *Introduction to physical gas dynamics*. 2 ed. New York, John Wiley, 1967. cap. 8, p. 245-315

———. Radiative transfer in gases. In: ———. *Introduction to physical gas dynamics*. 2 ed. New York, John Wiley, 1967. cap.11, p. 436-472.

WELTY, J.R.; WICKS, C.E.; WILSON, R.E. Radiation heat transfer.

In: ———. *Fundamentals of momentum, heat and mass transfer*.  
New York, John Wiley, 1969. cap. 23, p. 406-441.

ZEL'DOVICH, Ya. B.; RAIZER, Yu. P. Thermal radiation and radiant

heat exchange in a medium. In: ———. *Physics of shock waves and  
high-temperature hydrodynamic phenomena*. 2 ed. New York,  
Academic, 1968. v.1, cap. 2, p. 107-172.

ZHIGULEV, V.N.; ROMISHEVSKII, Ye. A.; VERTUSHIKIN, V.K. Role of

radiation in modern gasdynamics. *AIAA Journal*, 1 (6):1473-1483,  
June, 1963.

APÊNDICE A

CÁLCULO DA SUSCETIBILIDADE ACÚSTICA VÁLIDA PARA  
PEQUENOS VALORES DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Eliminando-se  $\hat{u}$  da Equação IV.42, tem-se:

$$\hat{u} = T_0 \hat{s} - p_0 \hat{v} \quad (\text{A.1})$$

Substituindo-se a Equação A.1, na Equação IV.41, tem-se:

$$\omega \rho_0 T_0 \hat{s} = -i\lambda(\underline{K} \cdot \underline{K}) \hat{T} - \frac{8\epsilon\dot{\sigma} T_0^3 i}{\delta} \hat{T}; \text{ onde } \dot{\sigma} = \sigma_{SB}$$

Tem-se, portanto:

$$\hat{s} = - \frac{i\lambda(\underline{K} \cdot \underline{K}) - \frac{8\epsilon\dot{\sigma}}{\delta} T_0^3 i}{\omega \rho_0 T_0} \hat{T} \quad (\text{A.2})$$

Eliminando-se  $\hat{\xi}$  da Equação IV.43 tem-se:

$$\hat{\xi} = \frac{\beta \hat{A}}{i\omega} = + \frac{1}{\tau i\omega} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v,s} \hat{A} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo-se as Equações A.3 e A.4 nas Equações IV.44 a IV.46, obtêm-se:

$$\hat{p} = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi,s} \hat{v} + \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v,s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v,s} \frac{1}{\tau i\omega} \hat{A} - \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{v,\xi} \frac{i\lambda(\underline{K} \cdot \underline{K}) + \frac{8\epsilon\dot{\sigma}}{\delta} T_0^3 i}{\omega \rho_0 T_0} \hat{T} \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{A} = \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi,s} \hat{v} + \frac{1}{\tau i\omega} \hat{A} - \left( \frac{\partial A}{\partial s} \right)_{v,\xi} \frac{i\lambda(\underline{K} \cdot \underline{K}) + \frac{8\epsilon\dot{\sigma}}{\delta} T_0^3 i}{\omega \rho_0 T_0} \hat{T} \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{T} = \left[ \frac{\partial T}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_{v, s} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial A} \right]_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \hat{A} - \left[ \frac{\partial T}{\partial s} \right]_{v, \xi} \frac{i \lambda (\underline{K} \cdot \underline{K}) + \frac{8 \epsilon \dot{\sigma}}{\delta} T_0^3 i}{\omega \rho_0 T_0} \hat{T} \quad (A.6)$$

Utilizando-se as relações de Maxwell e substituindo - se a expressão:

$$\frac{i \lambda (\underline{K} \cdot \underline{K}) + \frac{8 \epsilon \dot{\sigma}}{\delta} T_0^3 i}{\rho_0 \omega T_0}$$

pela letra G, as três últimas Equações tornam-se:

$$\hat{p} = \left[ \frac{\partial p}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \right]_{v, s} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial A} \right]_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \hat{A} + \left[ \frac{\partial T}{\partial v} \right]_{\xi, s} G \hat{T} \quad (A.7)$$

$$\hat{A} = \left[ \frac{\partial A}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial A}{\partial \xi} \right]_{v, s} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial A} \right]_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \hat{A} - \left[ \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_{v, s} G \hat{T} \quad (A.8)$$

$$\hat{T} = \left[ \frac{\partial T}{\partial v} \right]_{\xi, s} \hat{v} + \left[ \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_{v, s} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial A} \right]_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \hat{A} - \left[ \frac{\partial T}{\partial s} \right]_{v, \xi} G \hat{T} \quad (A.9)$$

Os lados direitos das Equações A.7 a A.9 têm expressões lineares em  $\hat{v}$ ,  $\hat{A}$  e  $\hat{T}$ .

Substituindo-se os nove membros dos lados direitos das Equações A.7 a A.9 sucessivamente pelas letras a, b, c, d, e, f, g, h e i, obtêm-se o seguinte sistema:

$$\hat{p} = a \hat{v} + b \hat{A} + c \hat{T} \quad (A.10)$$

$$\hat{A} = d\hat{v} + e\hat{A} - f\hat{T} \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{T} = g\hat{v} + h\hat{A} - i\hat{T} \quad (\text{A.12})$$

Tirando-se o valor de  $\hat{A}$ , na Equação A.11, tem-se:

$$\hat{A} = \frac{d\hat{v} - f\hat{T}}{1 - e} \quad (\text{A.13})$$

Similarmente, tirando-se o valor de  $\hat{T}$ , na Equação A.12, obtêm-se:

$$\hat{T} = \frac{g\hat{v} + h\hat{A}}{1 + i} \quad (\text{A.14})$$

Calcula-se, agora, o valor do quadrado de G.

$$G = \frac{i\lambda(\underline{K} \cdot \underline{K}) + \frac{8\varepsilon\dot{\sigma}}{\delta} T_0^3 i}{\rho_0 \omega T_0}$$

Portanto,

$$G^2 = \frac{-\lambda^2(\underline{K} \cdot \underline{K})^2 - \frac{64\varepsilon^2\dot{\sigma}^2}{\delta} T_0^6 - \frac{16\varepsilon\dot{\sigma}}{\delta} \lambda T_0^3 (\underline{K} \cdot \underline{K})}{\rho_0^2 \omega^2 T_0^2}$$

Como desprezam-se as potências maiores que a primeira do parâmetro  $\lambda$ , tem-se:

$$G^2 = \frac{-64\varepsilon^2\dot{\sigma}^2 T_0^6 - 16\varepsilon\dot{\sigma}\lambda T_0^3 \delta (\underline{K} \cdot \underline{K})}{\rho_0^2 \omega^2 T_0^2 \delta^2}$$

Nota-se que o numerador de  $G^2$  é muito pequeno e, portanto, pode-se considerar  $G^2$  como sendo igual a zero.

Substituindo-se o valor de  $\hat{A}$ , dado pela Equação A.13, a Equação A.14 torna-se:

$$\hat{T} = \frac{g\hat{v}}{1+i} + \frac{hd\hat{v}}{(1+i)(1-e)} - \frac{fh\hat{T}}{(1-e)(1+i)} \quad (\text{A.15})$$

Tem-se, então, o valor de  $\hat{T}$  em termos de  $\hat{v}$ :

$$\hat{T} = \frac{g\hat{v} - ge\hat{v} + hd\hat{v}}{(1-e)(1+i) + fh} \quad (\text{A.16})$$

Substituindo-se, primeiramente, a Equação A.13 na Equação A.10, tem-se:

$$\hat{p} = a\hat{v} + \frac{bd\hat{v}}{1-e} - \frac{bf\hat{T}}{1-e} + c\hat{T} \quad (\text{A.17})$$

Inserindo-se, agora, a Equação A.16, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \hat{p} = a\hat{v} + \frac{bd\hat{v}}{1-e} - \frac{dfg\hat{v}}{(1-e)[(1-e)(1+i) + fh]} + \frac{bfge\hat{v}}{(1-e)[(1-e)(1+i) + fh]} - \\ - \frac{bfhd\hat{v}}{(1-e)[(1-e)(1+i) + fh]} + \frac{cg\hat{v}}{(1-e)(1+i) + fh} - \frac{cge\hat{v}}{(1-e)(1+i) + fh} + \\ + \frac{chd\hat{v}}{(1-e)(1+i) + fh} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo-se as letras a, b, c, d, e, f, g, h e i por seus antigos valores, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \bar{p} &= \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} \bar{v} + \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{\xi, s} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi, s} \frac{1}{\tau i \omega} \bar{v}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right)} - \\
 &- \frac{\bar{v} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} G \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left[ \left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} G \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2 G \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \right]} \\
 &+ \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} G \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} \frac{1}{\tau i \omega} \bar{v}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left[ \left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} G \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2 G \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \right]} \\
 &- \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s}^2 \frac{1}{\tau i \omega} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} G \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi, s}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left[ \left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} G \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} G \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \right]} \\
 &+ \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s}^2 G \bar{v}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left[ \left( 1 + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} G \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2 G \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \right]} \\
 &- \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s}^2 G \frac{1}{\tau i \omega} \bar{v}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left[ \left( 1 + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} G \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2 G \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \right]} \\
 &+ \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} G \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \left( \frac{\partial A}{\partial v} \right)_{\xi, s} \bar{v}}{\left( 1 - \frac{1}{\tau i \omega} \right) \left[ \left( 1 + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{v, \xi} G \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2 G \left( \frac{\partial \xi}{\partial A} \right)_{v, s} \frac{1}{\tau i \omega} \right]} \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

Analisa-se, agora, cada termo do lado direito da Equação A.19.

O segundo termo fica:

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{V,S} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,S} \hat{v}}{1 - i\omega\tau} \quad (A.20)$$

Multiplicando-se e dividindo-se o sexto termo por  $a$ , e lembrando-se que  $a^2 \bar{\epsilon}$  é igual a zero, tem-se:

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,S}^2 G^{\tau i\omega}}{\tau i\omega - 1} \quad (A.21)$$

De maneira similar, tem-se para o sétimo termo:

$$\frac{- \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,S}^2 G}{\tau i\omega - 1} \quad (A.22)$$

Somando-se as relações A.21 e A.22, tem-se:

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,S}^2 G(-1 + \tau i\omega)}{(\tau i\omega - 1)} = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,S}^2 G \quad (A.23)$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador do terceiro termo por  $G$ , tem-se:

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{V,S} \left(\frac{\partial \xi}{\partial A}\right)_{V,S} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{V,S} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,S} G^{\tau i\omega}}{(1 - i\omega\tau)^2} \quad (A.24)$$

Utilizando-se as relações de Maxwell, a relação A.24 torna-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial A}\right)_{v,s} G \tau i \omega}{(1 - i\omega\tau)^2} = \\ & = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G \tau i \omega}{(1 - i\omega\tau)^2} \end{aligned} \quad (A.25)$$

Fazendo-se de modo análogo para o quarto termo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial A}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} G}{(1 - \tau i \omega)^2} = \\ & = \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} G}{(1 - \tau i \omega)} \end{aligned} \quad (A.26)$$

Combinando-se as relações A.25 e A.26, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \tau i \omega) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G}{(1 - \tau i \omega)} = \\ & = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G}{1 - \tau i \omega} \end{aligned} \quad (A.27)$$

Do mesmo modo, o último termo torna-se:

$$-\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G}{\tau i \omega - 1} = + \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G}{1 - \tau i \omega} \quad (\text{A.28})$$

Somando-se as relações A.27 e A.28, tem-se:

$$\frac{2 \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G}{1 - \tau i \omega} \quad (\text{A.29})$$

O quinto termo fica:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial A}\right)_{v,s}^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{\xi,s} G}{(1 - \tau i \omega)^2} = \\ & = + \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{\xi,s}^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial A}\right)_{v,s}^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s}^2}{(1 - \tau i \omega)^2} = \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s}^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s}^2}{(1 - \tau i \omega)^2} \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

Substituindo-se as relações A.20, A.23, A.29 e A.30 na Equação A.19, têm-se:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\xi,s} \bar{v} + \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s}}{1 - i \omega \tau} \bar{v} + \frac{2 \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s} G}{1 - i \omega \tau} \\ &+ \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{A,s}^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{v,s}^2}{(1 - \tau i \omega)^2} + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{\xi,s}^2 G \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p} = & \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} \bar{v} + \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}}{1 - i\omega\tau} \bar{v} + G \left[ \frac{2 \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}}{1 - i\omega\tau} + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2}{(1 - \tau i\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (A.32)$$

Substituindo G pelo seu valor, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{p} = & \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\xi, s} \bar{v} + \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}}{1 - i\omega\tau} \bar{v} + \frac{i \lambda \cdot (\underline{K} \cdot \underline{K})}{\omega \rho_0 T_0} \\ & \left[ \frac{2 \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}}{1 - i\omega\tau} + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s}^2 + \frac{\left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2}{(1 - \tau i\omega)^2} \right] + \\ & + \frac{8\varepsilon\dot{\sigma}}{\delta} \frac{T_0^3 i}{\omega \rho_0 T_0} \left[ \frac{2 \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s} \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}}{1 - i\omega\tau} + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_{\xi, s}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)_{A, s}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{v, s}^2}{(1 - \tau i\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (A.33)$$

A Equação A.33 pode tomar a forma:

$$\bar{p} = \bar{K}(\omega) + \frac{i \lambda (\underline{K} \cdot \underline{K})}{\omega \rho_0 T_0} \left[ \bar{K}_T(\omega) \right]^2 + \frac{8\varepsilon\dot{\sigma}}{\delta} \frac{T_0^3 i}{\omega \rho_0 T_0} \left[ \bar{K}_T(\omega) \right]^2 \quad (A.34)$$

Onde  $\tilde{K}(\omega)$  e  $\tilde{K}_T(\omega)$  são dados pelas Equações V.10 e V.14.

Comparando-se a Equação A.34 com a equação da suscetibilidade, IV.50, tem-se:

$$\tilde{K}(\underline{K}, \omega) = \tilde{K}(\omega) + \frac{i \lambda (\underline{K} \cdot \underline{K})}{\omega \rho_0 T_0} \left[ \tilde{K}_T(\omega) \right]^2 + \frac{8 \epsilon \dot{\sigma} T_0^3 i}{\delta \omega \rho_0} \left[ \tilde{K}_T(\omega) \right]^2 \quad (\text{A.35})$$