MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-5498-TDI/513

DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE BALÕES ESTRATOSFÉRICOS UTILIZANDO FILTROS DE KALMAN

Luiz de Siqueira Martins Filho

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/ Mecânica Orbital,
orientada pelo Dr. Otávio dos Santos Cupertino Durão,
aprovada em dezembro de 1992.

INPE
São José dos Campos
Dezembro de 1992

523.03

MARTINS FILHO, L.S.
Determinação de atitude de balões estratosféricos utilizando filtros de Kalman. / L.S.Martins Filho. -- São José dos Campos: INPE, 1992. 130p. -- (INPE-5498-TDI/513)

1. Balões estratosféricos. 2. Filtros de Kalman. 3. Determinação de atitude. I. Título

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção de Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva _____
Presidente

Dr. Otávio Santos Cupertino Durão _____
Orientador

Dr. Roberto Vieira da Fonseca Lopes _____
Membro da Banca

Dr. José Jaime da Cruz _____
Membro da Banca
- Convidado -

Dr. Pedro Magalhães Guimarães Ferreira _____
Membro da Banca
- Convidado -

Candidato: Luiz de Siqueira Martins Filho

São José dos Campos, 17 de dezembro de 1992

"Não nos deixaríamos queimar por nossas opiniões: não estamos tão seguros delas. Mas, talvez, por podermos ter nossas opiniões e podermos mudá-las".

Friedrich Wilhelm Nietzsche
(1844-1900)

Aos cientistas, pesquisadores e educadores que, apesar de tudo, persistem heroicamente em promover o desenvolvimento do país.

AGRADECIMENTOS

Aos pesquisadores Otávio dos Santos Cupertino Durão e Gilberto Gandelman, pela orientação dedicada e pela oportunidade do trabalho.

Aos professores, pesquisadores, funcionários e colegas da Divisão de Mecânica Espacial e Controle do INPE, pela iniciação na área de Ciência Espacial e pelo ambiente de amizade e solidariedade.

Ao doutor Malcolm D. Shuster (The Johns Hopkins University / Applied Physics Laboratory), pelas sugestões que determinaram o rumo do trabalho.

Aos professores Vera Irma Furlan (PUCCAMP), Itala Maria Loffredo D'Ottaviano (CLE/UNICAMP) e Carlos Lenz Cesar (IFGW/UNICAMP), pela confiança e pelo incentivo nos momentos mais difíceis de minha carreira.

Aos familiares e amigos, pela compreensão e pelo apoio sem limites em toda minha vida.

RESUMO

Este trabalho estuda a aplicação de estimação de estado, via filtro estendido de Kalman, na determinação de atitude de um telescópio embarcado em balão estratosférico. Trata-se de um experimento em Astrofísica - o projeto MASCO - que requer uma precisão de apontamento com erro máximo de 20 minutos de arco na fase de estabilização. Para a determinação de atitude são utilizados três eixos de giroscópios, sensor solar de dois eixos e magnetômetro de três eixos. O modelo cinemático do giroscópio substitue o modelo dinâmico do movimento do telescópio no filtro de Kalman e a atitude é parametrizada em quatérnions. Uma segunda configuração de estimação utiliza ganho de Kalman constante para simplificação dos cálculos e redução do tempo de processamento. Os desempenhos das duas configurações são analisadas e comparadas através de simulações em computador digital.

ATTITUDE DETERMINATION OF STRATOSPHERIC BALLOONS USING KALMAN FILTERS

ABSTRACT

This work studies the application of state estimation, via extended Kalman filter, in attitude determination of a balloon borne telescope. This astrophysical experiment - the MASCO project - requires a pointing accuracy with maximum error of 20 arcmin in the stabilization phase. The attitude determination uses three gyroscope axis, a two axis sun sensor and a three axis magnetometer. The cinematic model of the gyroscope substitutes the telescope motion dynamic model in the Kalman filter and the attitude description is performed using quaternions. A second configuration of estimation uses constant Kalman gain for calculus simplification and processing time reduction. The two configurations are analyzed and compared through digital computer simulations.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS..... xvii
LISTA DE SÍMBOLOS..... xix

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 1

1.1 - O projeto MASCO..... 2
1.2 - Objetivos do trabalho..... 3

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS..... 5

2.1 - Balão estratosférico..... 5
2.1.1 - Dinâmica de vôo do balão..... 6
2.2 - Sistema de controle..... 9
2.3 - Sistema de navegação inercial auxiliado..... 18
2.4 - Sensores..... 20
2.4.1 - Giroscópio..... 20
2.4.1.1 - Modelo de funcionamento..... 22
2.4.1.2 - Modelo de erro..... 24
2.4.2 - Sensor solar..... 26
2.4.2.1 - Modelo de funcionamento..... 27
2.4.2.2 - Modelo de erro..... 29
2.4.3 - Magnetômetro..... 30
2.4.3.1 - Modelo de funcionamento..... 31
2.4.3.2 - Modelo de erro..... 33

CAPÍTULO 3 - PROCEDIMENTOS PARA ESTIMAÇÃO DE ATITUDE 35

3.1 - Estimação ótima..... 35
3.1.1 - Filtro estendido de Kalman..... 36
3.2 - Estimação utilizando o modelo cinemático do giroscópio..... 41
3.2.1 - Cinemática da atitude..... 41

3.2.2 - Equacionamento do filtro..... 44
3.2.3 - Algorítmo de determinação de atitude..... 49
3.3 - Singularidade da matriz de covariâncias..... 51
3.3.1 - Representação reduzida da matriz de covariâncias..... 53
3.4 - Configuração simplificada de estimação..... 61
3.4.1 - Equacionamento do filtro..... 61
3.4.2 - Algorítmo de determinação de atitude..... 62

CAPÍTULO 4 - TESTES E RESULTADOS..... 65

4.1 - Procedimentos de simulação..... 65
4.2 - Descrição dos parâmetros de desempenho..... 67
4.3 - Resultados..... 69

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES..... 87

5.1 - Conclusões..... 87
5.2 - Sugestões..... 88

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 91

APÊNDICE A - QUATÉRNIONS..... 95

APÊNDICE B - PROPRIEDADES DA MATRIZ $Z(\bar{q}(t))$..... 101

APÊNDICE C - A MATRIZ DE OBSERVAÇÃO $H(\bar{q}(t))$..... 105

LISTA DE FIGURAS

Pág.

2.1 - Esquema do balão estratosférico..... 6
2.2 - Sistemas de referências no balão..... 10
2.3 - Sequência de rotações R_{312}..... 12
2.4 - Diagrama do sistema de navegação inercial auxiliado..... 20
2.5 - Giroscópio sintonizado de dois eixos..... 21
2.6 - Componentes do giroscópio..... 22
2.7 - Ótica do sensor solar..... 27
2.8 - Ângulos de referência do sensor solar..... 28
2.9 - Componentes do magnetômetro..... 30
2.10 - Magnetômetro "fluxgate"..... 31
3.1 - Intervalos de propagação e instantes de atualização do estimador..... 50
3.2 - Algorítmo de determinação de atitude (filtro completo)..... 51
3.3 - Algorítmo de determinação de atitude (filtro simplificado). 63
4.1 - Algorítmo das simulações..... 66
4.2 - Erro em quatérnion (filtro completo): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s..... 71
4.3 - Erro em deriva (filtro completo): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s..... 72
4.4 - Erro em quatérnion (filtro simplicado): a)de 0 a 3000 s; b) de 1500 a 1600 s..... 73
4.5 - Erro em deriva (filtro simplificado): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s..... 74
4.6 - Resíduo médio normalizado (filtro completo)..... 75
4.7 - Resíduo médio normalizado (filtro simplificado)..... 76
4.8 - Derivas simuladas e estimadas (filtro completo): a)eixo x; b)eixo y; c)eixo z..... 76
4.9 - Derivas simuladas e estimadas (filtro simplificado): a)eixo x; b)eixo y; c)eixo z..... 78
4.10 - Erros de apontamento (filtro completo): a)erro total; b) erro em θ; c)erro em thy..... 79

4.11 - Erros de apontamento (filtro simplificado): a)erro total; b)erro em θ; c)erro em th_y..... 81
4.12 - Variáveis de controle (filtro completo): a)u_1; b)u_2..... 82
4.13 - Variáveis de controle (filtro simpificado): a)u_1; b)u_2.... 83

LISTA DE SÍMBOLOS

$\underline{a}$	- Vetor de estado da dinâmica de azimute
a_s, b_s, d_s, h_s	- Parâmetros do sensor solar
A	- Matriz de atitude
$\underline{b}$	- Vetor de derivas do giroscópio
$\underline{b}_m$	- Vetor de derivas do magnetômetro
B_s	- Intensidade de fluxo magnético
$\underline{c}$	- Vetor genérico
C	- Matriz genérica
$(d\theta_g/dt)_i$ e $(d\phi_g/dt)_i$	- Velocidades angulares iniciais do pêndulo
$D(x)_f$	- Derivas não sensíveis à aceleração
$D(x)_x$, $D(x)_y$, $D(x)_s$	- Derivas sensíveis à aceleração
$D(x)_{xx}$, $D(x)_{yy}$, $D(x)_{ss}$	- Derivas sensíveis ao quadrado da aceleração
$D(x)_{xy}$, $D(x)_{xs}$, $D(x)_{ys}$	- Termos cruzados das derivas
$\underline{e}$	- Vetor de estado da dinâmica de elevação
$\underline{E}$	- Vetor força eletromotriz
$\underline{f}$	- Função vetorial do filtro de Kalman
f_a	- Coeficiente de amortecimento do rotor do giroscópio
F, G	- Matrizes da equação de estado do filtro de Kalman
$\tilde{F}$, $\tilde{G}$	- Matrizes reduzidas de estado
F_a, G_a	- Matrizes da dinâmica de azimute
F_d, G_d	- Matrizes da dinâmica de elevação e azimute
g	- Aceleração gravitacional local
$\underline{g}$	- Função vetorial do ruído de estado no filtro de Kalman
$\underline{h}$	- Função vetoral de observação
H	- Matriz linearização da função de observação
$\tilde{H}$	- Matriz reduzida e linearização
H_C, H_D	- Intensidade magnética
$\underline{H}_m$, $\underline{H}_{mr}$	- Vetores intensidade magnética
I	- Matriz identadade
I_O	- Momento angular da roda de reação

$\underline{I}_g$	- Vetor de momentos angulares do giroscópio
J_a, J_b, J_c	- Momentos de inércia do rotor do giroscópio
J_{an}, J_{bn}, J_{cn}	
J_g	- Momento de inércia da gôndola
J_r	- Momento de inércia da roda de reação
J_t	- Momento de inércia do telescópio
K	- Ganho de Kalman
$\tilde{K}$	- Ganho de Kalman reduzido
K_1, K_2	- Constantes do magnetômetro
$\underline{K}_a$	- Vetor ganho do sist. de controle em azimute
K_b, K_t, R_m	- Especificações do motor de elevação
K_{ba}, K_{ta}, R_{ma}	- Especificações do motor da roda de reação
K_{a1}, K_{a2}	- Constantes do motor da roda de reação
K_{e1}, K_{e2}	- Constantes do motor de elevação
K_p, K_v	- Ganhos do sistema de controle em elevação
K_s	- Constante elástica do giroscópio
K_x	- Fator de escala do giroscópio
K_{xx}, K_{xs}	- Fatores de desalinhamento do giroscópio
l	- Comprimento do pêndulo (do centro do balão ao eixo do telescópio)
$\underline{m}$	- Vetor campo magnético no referencial horizontal local
$\underline{m}_t$	- Vetor campo magnético no referencial do telescópio
m_g	- Massa puntual do giroscópio
$\hat{\underline{n}}$	- Versor do eixo de rotação
n_s	- Índice de refração do sensor solar
N	- Distribuição normal
N_g	- Velocidade angular do eixo do giroscópio
N_0	- Velocidade angular de sintonia do giroscópio
$\underline{p}_d$	- Vetor perturbação na dinâmica de elevação e azimute
$\underline{p}_g$	- Vetor posição puntual do giroscópio
P	- Matriz de covariâncias dos erros no estado
$\tilde{P}$	- Matriz reduzida de covariâncias

P_q	- Matriz de covariâncias dos erros no quatérnion
$\bar{q}$	- Quatérnion de atitude
q_x, q_y	- Coeficientes das componentes senoidais da dinâmica do giroscópio
Q_1, Q_2, Q, R_v	- Covariâncias de ruídos brancos gaussianos
Q_w	- Matriz de covariâncias do ruído na dinâmica de elevação e azimute
r_0	- Velocidade angular nominal da roda de reação
r_m	- Razão eletromagnética
r_s	- Constante do sensor solar
R	- Matriz de rotação
R_1, R_2, R_3	- Matrizes de rotação em relação aos eixos x, y e z
$\underline{s}$	- Vetor sol no referencial horizontal local
$\underline{s}_t$	- Vetor sol no referencial do telescópio
S	- Matriz de redução do estado
$\underline{t}$, t_x, t_y, t_z	- Vetor apontamento nominal do telescópio no ref. fixo no telescópio (e componentes)
$\underline{t}_h$, t_{hx}, t_{hy}, t_{hz}	- Vetor apontamento do telescópio no referencial horizontal local (e componentes)
T_f	- Torque devido ao atrito seco
$\underline{T}_g$	- Vetor de torques no giroscópio
p	- Módulo do torque devido ao atrito seco
$\underline{u}$	- Vetor das variáveis de controle
u_1	- Sinal de entrada para o motor de elevação
u_2	- Sinal de entrada para o motor da roda de reação
$\underline{v}$	- Vetor de ruído de observação
V_a, V_{a0}	- Tensões efetiva e nominal aplicadas no motor da roda de reação
V, V_s	- Tensão elétrica no magnetômetro
$\underline{x}$	- Vetor de estado do filtro de Kalman
$\tilde{\underline{x}}$	- Vetor de estado reduzido
$\underline{x}_0$	- Vetor de condições inicias do estado

$\underline{x}_d$	- Vetor de estado da dinâmica de elevação e azimute
$\underline{y}$	- Vetor observações dos sensores não inerciais
$\underline{w}$	- Vetor de ruído de estado do filtro de Kalman
$\underline{w}_d$	- Vetor de ruído na dinâmica de elevação e azimute
α, α_r, β, β_r	- Ângulos de medida do sensor solar
Γ	- Matriz de transição do ruído de estado
δ, Δ	- Notação para erro ou variação
$\delta(.)$	- Função Delta de Kroenecker
$\delta\underline{q}$	- Vetor incremento do quatérnion
Δt_x, Δt_y, Δt_z	- Erros de apontamento do telescópio
$\Delta\theta$, $\Delta\phi$, $\Delta\psi$	- Ângulos dos erros de apontamento do telescópio
Z	- Matriz definda no Apêndice B
Φ	- Matriz de transição de estado
$\tilde{\Phi}$	- Matriz reduzida de transição de estado
Φ_B	- Fluxo magnético
ζ	- Coeficiente de amortecimento do controle em elevação
$\underline{\eta}_1$, $\underline{\eta}_2$, $\underline{\eta}_3$, η_a, η_b	- Ruídos brancos gaussianos
θ, ϕ, ψ	- Ângulos de atitude do telescópio (ref. horizontal local)
θ_g, ϕ_g, ψ_g	- Ângulos de atitude do telescópio (ref. fixo na gôndola)
θ_{gi} e ϕ_{gi}	- Valores iniciais de θ_g e ϕ_g
θ_{el}	- Ângulo de elevação do telescópio em relação à gôndola
θ_s, ϕ_s	- Ângulos do sensor solar
θ_x, θ_y	- Ângulos de deflexão do rotor do giroscópio
Θ, Λ	- Matrizes de rotação
$\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Psi}$	- Partições da matriz reduzida de transição
λ	- Constante de torque do eixo-rotor do giroscópio

μ_1, μ_2, μ_3	- Cossenos diretores dados pelo magnetômetro
τ_g	- Constante de tempo da deriva do giroscópio
$\underline{\omega}$	- Vetor velocidade angular real do giroscópio
$\underline{\omega}_g$	- Vetor velocidade angular medida pelo giroscópio
$\underline{\omega}_r$	- Velocidade angular do rotor do giroscópio
ω_n	- Frequência natural não amortecida do sistema de controle em elevação
$\bar{\omega}$	- Quatérnion da velociadade angular
Ω	- Matriz definida pela Equação 3.47
$\circ$	- Notação para produto, produto de matrizes e produto escalar de vetores
$\times$	- Notação para produto vetorial
$\otimes$	- Notação para produto de quatérnions
$\hat{\cdot}$	- Notação para valor estimado
$\bar{\cdot}$	- Notação para trajetória nominal de estado ou para quatérnion
$\underline{\cdot}$	- Notação para vetor

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente trabalho estuda a aplicação da técnica de estimação de variáveis de estado para um sistema de controle. Trata-se de um balão estratosférico que tem como missão um experimento em Astrofísica - o projeto MASCO.

Nos trabalhos encontrados na literatura que tratam deste tipo de missão, os sistemas de controle não apresentam explicitamente a utilização de técnicas de estimação, mas apenas determinação estática da atitude através de observações de sensores não inerciais (Coyle et al., 1986; Hazen et al., 1975; Nidey, 1968) ou através de sensores inerciais calibrados via sensores não inerciais (Farman e Hardie, 1987).

Esta missão, além dos objetivos específicos do experimento, tem igual importância na oportunidade de desenvolver os diversos segmentos de controle automático que se aplicam em outros veículos aeroespaciais. Outras vantagens são o baixo custo do lançamento e do próprio veículo, a completa recuperação da carga útil e do equipamento de controle ao final do vôo.

A estimação de variáveis de estado via filtro de Kalman usualmente utiliza o modelo dinâmico do movimento a ser controlado na propagação das estimativas. Porém, o modelamento da dinâmica do balão, por ser uma aproximação para um movimento ainda pouco conhecido, não tem a precisão necessária para utilização na filtragem. Foi adotada neste trabalho uma técnica desenvolvida por Lefferts et al. (1982) que substitui o modelo dinâmico do movimento do balão pelo modelo cinemático do giroscópio.

Uma breve introdução sobre o projeto MASCO, a natureza e os objetivos deste trabalho são apresentados neste primeiro capítulo.

O Capítulo 2, além da descrição do equacionamento dinâmico do vôo do balão, aborda o sistema de controle e os sensores inerciais e não inerciais utilizados. Os procedimentos de estimação são tratados no Capítulo 3, através do desenvolvimento do Filtro Estendido de Kalman e da utilização do modelo cinemático do giroscópio. O Capítulo 4 traz os testes realizados através de simulações em computador digital, seus resultados e respectivas análises. As conclusões sobre os vários aspectos desenvolvidos e as sugestões para aprimoramento e continuidade deste trabalho são apresentadas no Capítulo 5.

1.1 - O PROJETO MASCO

Este projeto consiste de um experimento de observação, através de um telescópio imageador de Raios X e Gama, de fontes celestes selecionadas (Souza, 1989). A atmosfera apresenta características que interferem negativamente nos resultados de observação, obrigando que o experimento seja realizado em uma camada superior (40 km neste caso).

O balão estratosférico, veículo utilizado neste projeto, atende ainda às necessidades de se fazer apontamentos para diversos alvos durante a missão, que tem a duração de aproximadamente 12 horas, e manter a estabilização de cada apontamento com precisão de cerca de 20 minutos de arco.

O telescópio é instalado em uma gôndola dotada de equipamentos que permitem obter, além do posicionamento nominal do telescópio, a estabilização desejada. Anular os efeitos das perturbações oscilatórias, típicas de montagens tipo pêndulo como esta, e outras mais difíceis de se modelar é a tarefa principal do sistema de controle automático, aplicado na fase de estabilização do apontamento.

Outra característica muito desejável para este projeto é a manutenção da integridade dos equipamentos, tanto a carga útil como o instrumental de controle, e sua recuperação ao final do vôo, dados

os elevados custos e a grande sensibilidade destes. Para isso dota-se a gôndola de um paraquedas e de amortecedores para absorção do impacto de aterrissagem, além de otimizar o peso do conjunto para reduzir os problemas desta.

1.2 - OBJETIVOS DO TRABALHO

Está colocado como primeiro objetivo, o estudo da aplicação da técnica de estimação em um problema real, que traz desafios e oportunidades que geralmente não são encontrados nos exemplos da literatura. Para tanto, são desenvolvidos dois procedimentos de estimação, que diferem no equacionamento da filtragem e no grau de simplificação.

Objetiva-se também simular a evolução dos movimentos realizados pelo balão estratosférico, a estimação das variáveis de estado e a atuação do sistema de controle. Desta forma pode-se avaliar a performance de cada procedimento.

Por fim, são comparados os procedimentos sob diversos critérios tais como: nível de erros da filtragem, aplicabilidade no problema proposto e custos de processamento (memória, tempo, etc.), obtendo-se, portanto, uma referência a ser utilizada na execução do projeto.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS

Neste Capítulo estão desenvolvidos os equacionamentos do movimento do balão e do sistema de controle proposto para o projeto MASCO pois estes equacionamentos são necessários para as simulações de aplicação da estimação de atitude do telescópio. Além disso estão apresentados resumidamente os sensores utilizados pelo projeto.

2.1 - BALÃO ESTRATOSFÉRICO

O balão estratosférico estudado neste trabalho (Souza, 1989 e 1990) consiste de uma montagem onde a carga útil - o telescópio - está instalada na gôndola como mostra a Figura 2.1. Estão também especificadas nesta figura outras partes que compõem a montagem: o corpo do balão; o paraquedas que é acionado ao final do experimento, quando da liberação da gôndola (via pirotécnica ativada por telecomando); o dispositivo desacoplador que evita a transmissão de torques do corpo do balão para a gôndola; a roda de reação para o sistema de controle em azimute; e amortecedores para evitar danos durante a aterrissagem.

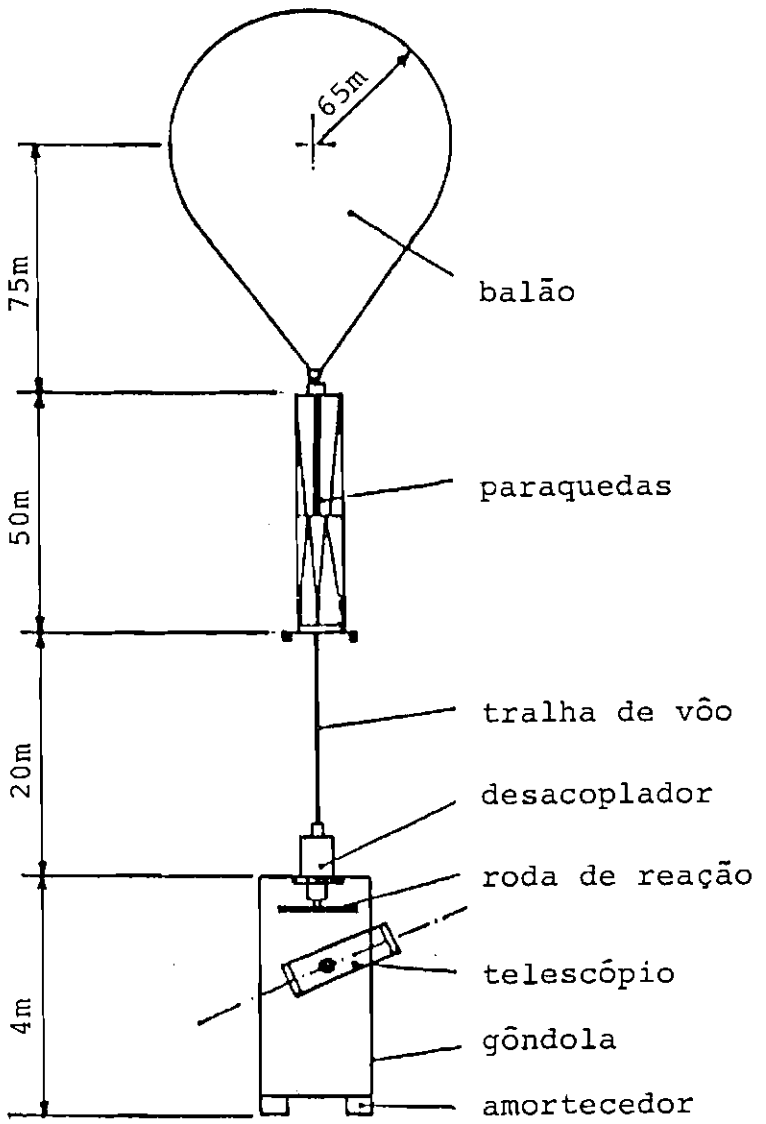


Fig. 2.1 - Esquema do balão estratosférico.

2.1.1 - DINÂMICA DE VÔO DO BALÃO

Os movimentos efetuados pelo balão estratosférico durante o vôo podem ser divididos em duas fases principais:

1) na subida do balão, uma rotação no plano azimutal (plano perpendicular à direção da aceleração da gravidade) que ocorre pela ação de moinho dos gomos do balão (a dimensão desta per-

turbação fica na ordem de 10 graus/minuto) e movimentos pendulares simples e compostos. Mas, apesar de crítica, esta fase não é objeto do sistema de controle, e seus efeitos negativos na fase seguinte são atenuados pelo dispositivo desacoplador;

2) na fase de estabilidade, quando o balão atinge a altitude máxima de 40 km, tem-se um movimento que pode ser descrito como composição de duas formas distintas: um movimento pendular simples no plano vertical e outro de pêndulo composto do sistema balão-gôndola. Nesta fase essas ocorrências são menos críticas e suas dimensões são, para o movimento simples, cerca de 0,5 grau de amplitude, e para o composto, amplitude desprezível perante o primeiro.

A descrição da atitude da gôndola (Souza, 1990; Durão e Gandelman, 1990) é feita através dos ângulos de guinada (ψ_g), arfagem (θ_g) e rolamento (ϕ_g); acrescenta-se ainda o ângulo de elevação (θ_{el}) do telescópio em relação à gôndola para descrever o apontamento deste.

A dinâmica da perturbação fica caracterizada fundamentalmente pelo movimento pendular simples com amplitude de 0,5 grau que pode ser modelada, decompondo-se em duas componentes perpendiculares, pelas seguintes equações diferenciais sem amortecimento e de segunda ordem :

$$d^2\phi_g/dt^2 + (g/l)\circ\phi_g = 0 \ , \tag{2.1}$$

com $\phi_g(0) = \phi_{gi}$ e $d\phi_g(0)/dt = (d\phi_g/dt)_i$;

$$d^2\theta_g/dt^2 + (g/l)\circ\theta_g = 0 \ , \tag{2.2}$$

com $\theta_g(0) = \theta_{gi}$ e $d\theta_g(0)/dt = (d\theta_g/dt)_i$;

onde g = aceleração da gravidade,

l = comprimento do pêndulo (do centro de pressão do balão ao eixo

de elevação do telescópio),

θ_g = ângulo de rotação em torno do eixo de elevação do telescópio,

ϕ_g = ângulo de rotação em torno do eixo perpendicular ao telescópio (no plano da gôndola).

Descreve-se o movimento do telescópio em relação ao referencial horizontal local, ou seja, o referencial definido pelo eixo z na direção da aceleração da gravidade e pelos eixos x e y formando o plano de azimute perpendicular a z. Para o movimento de elevação utilizam-se as seguintes relações:

$$\theta = \theta_g + \theta_{el} \ , \tag{2.3}$$

$$\phi = \phi_g \ , \tag{2.4}$$

$$\psi = \psi_g \ . \tag{2.5}$$

Obtém-se então:

$$d^2\theta/dt^2 = - K_{e1} \circ (d\theta/dt) + K_{e2} \circ u_1 - T_f/J_t \ , \tag{2.6}$$

onde $K_{e1} = (K_t \circ K_b)/(R_m \circ J_t)$,

$K_{e2} = K_{e1}/K_b$,

K_t, K_b, R_m = características do motor de elevação ,

T_f = torque devido ao atrito seco ,

J_t = momento de inércia do telescópio ,

u_1 = sinal de entrada para o motor de elevação .

O movimento azimutal da gôndola dá-se em função dos torques aplicados na roda de reação, alinhada com o eixo de guinada da gôndola. Esta roda tem quantidade de movimento angular estocada dada por

$$I_0 = J_r \circ r_0 \ , \tag{2.7}$$

onde J_r = momento de inércia da roda de reação,

r_0 = velocidade angular nominal da roda de reação.

A tensão nominal aplicada ao motor DC para manter ro é dada por

$$V_{a0} = (I_0 \circ K_b)/J_r \ . \tag{2.8}$$

A equação dinâmica da gôndola fica descrita por

$$d^2\psi/dt^2 = - K_{a1} \circ (d\psi/dt) - K_{a2} \circ u_2 \ , \tag{2.9}$$

onde $K_{a1} = (K_{ba} \circ K_{ta}) \circ (J_g + J_r)/(R_{ma} \circ J_g \circ J_r)$,

$K_{a2} = K_{ta}/(R_{ma} \circ J_g)$,

$U_2 = V_{a0} - V_a$,

J_g = momento de inércia da gôndola em relação ao eixo de azimute,

K_{ta}, K_{ba}, R_{ma} = parâmetros do motor da roda de reação.

Pode-se verificar, através deste equacionamento simplificado da dinâmica de vôo, que os movimentos em elevação e azimute são desacoplados. O modelamento completo induz acoplamento devido a efeitos giroscópicos; porém, como os movimentos apresentam baixa velocidade, ou seja, baixa frequência, é válido desconsiderar-se este acoplamento para simplificação do problema (Souza, 1990).

2.2 - SISTEMA DE CONTROLE

O objetivo do sistema de controle (Coyle, 1986; Farman e Hardie, 1987; Hazen, 1974; Nidey, 1968) é minimizar o erro de apontamento em relação a um vetor fixo no referencial horizontal local (corpo celeste a ser observado) representado por $\underline{t}$.

O referencial horizontal local e o referencial fixo ao telescópio são mostrados na Figura 2.2.

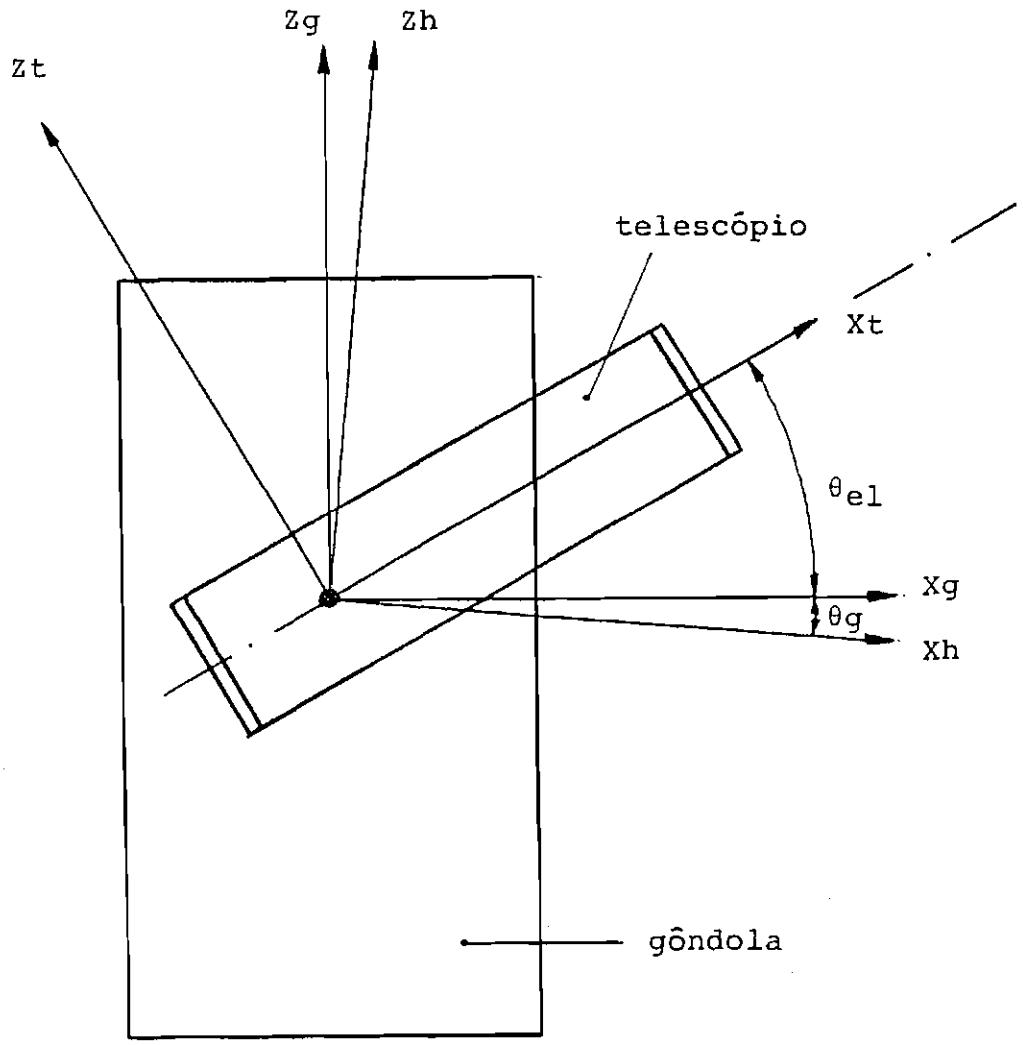


Fig. 2.2 - Sistemas de referência no balão.

A matriz da rotação entre estes referenciais é expressa (Kaplan, 1976) pela composição de três rotações em torno dos eixos na seguinte ordem:

$$R = R_2(\theta) \circ R_1(\phi) \circ R_3(\psi) \ , \tag{2.10}$$

onde:

$$R_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

A matriz de rotação resultante fica na forma que se segue:

$$R = \begin{bmatrix} c\psi\circ c\theta - s\psi\circ s\theta\circ s\phi & s\psi\circ c\theta + c\psi\circ s\theta\circ s\phi & -c\phi\circ s\theta \\ -s\psi\circ c\phi & c\psi\circ c\phi & s\phi \\ s\theta\circ c\psi + s\psi\circ s\phi\circ c\theta & s\theta\circ s\psi - c\psi\circ s\phi\circ c\theta & c\theta\circ c\phi \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

onde c representa a função cosseno e s a função seno.

A Figura 2.3 ilustra esta sequência de rotações: a primeira rotação se dá em torno do eixo z ($R_3(\psi)$), a segunda em torno do eixo x ($R_1(\psi)$) e a terceira em torno do eixo y ($R_2(\theta)$).

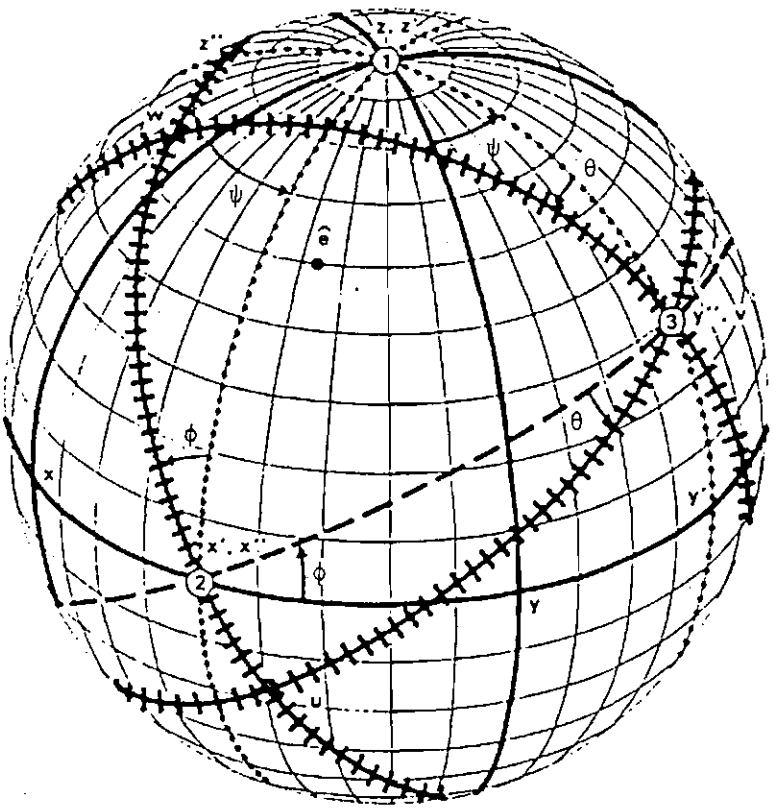


Fig. 2.3 - Sequência de rotações R_{312}.

Para os cálculos dos erros de apontamento convenciona-se adotar os ângulos no sentido contrário, ou seja, $R_2(-\theta)$, $R_1(-\phi)$ e $R_3(-\psi)$. Desta forma pode-se descrever o ângulo de elevação θ como sendo positivo para cima do plano azimutal.

Portanto a rotação escolhida fica na forma

$$R = R_2(-\theta)\circ R_1(-\phi)\circ R_3(-\psi) \tag{2.12}$$

$$= \begin{bmatrix} c\psi\circ c\theta+s\psi\circ s\theta\circ s\phi & -s\psi\circ c\theta+c\psi\circ s\theta\circ s\phi & c\phi\circ s\theta \\ s\psi\circ c\phi & c\psi\circ c\phi & -s\phi \\ -s\theta\circ c\psi+s\psi\circ s\phi\circ c\theta & s\theta\circ s\psi+c\psi\circ s\phi\circ c\theta & c\theta\circ c\phi \end{bmatrix} . \tag{2.13}$$

O vetor apontamento $\underline{t}$ (referencial fixo no telescópio) é expresso no referencial horizontal local por

$$\underline{t}_h = R^T \circ \underline{t} \ . \tag{2.14}$$

Para o apontamento nominal tem-se

$$\underline{t}_{0h} = R_0{}^T \circ \underline{t}_0 \ . \tag{2.15}$$

O erro de apontamento é calculado através de

$$\Delta\underline{t}_h = \underline{t}_h - \underline{t}_{0h} = R^T \circ \underline{t} - R_0{}^T \circ \underline{t}_0 \ . \tag{2.16}$$

No referencial fixo no telescópio, substituindo-se os valores de $\underline{t} = [1;\ 0;\ 0]^T$ e $\underline{t}_h = [1;\ 0;\ 0]^T$, obtém-se

$$\Delta\underline{t} = R \circ \Delta\underline{t}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - R \circ R_0{}^T \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ . \tag{2.17}$$

Considerando-se os valores nominais dos ângulos de apontamento (θ_0, ψ_0, ϕ_0=0) e as aproximações $\cos(\Delta\alpha_i) \simeq 1$ e $\mathrm{sen}(\Delta\alpha_i) \simeq \Delta\alpha_i$ (onde $\alpha_i = \theta,\ \psi,\ \phi$), tem-se

$$\Delta\underline{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_0)\Delta\psi - \mathrm{sen}(\theta_0)\Delta\phi \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \ . \tag{2.18}$$

De onde pode-se concluir que erros pequenos em x e z são desacoplados dos erros em y. O objetivo do sistema de controle é minimizar o erro de apontamento, ou seja, as componentes do erro Δt_x, Δt_y e Δt_z. Dada a Equação 2.18, reduz-se para duas variáveis de erro, Δt_y e $\Delta\theta$, onde

$$\Delta t_y = \cos(\theta_0)\Delta\psi - \mathrm{sen}(\theta_0)\Delta\phi \tag{2.19}$$

A dinâmica de $\Delta\theta$ é descrita por

$$d^2\Delta\theta/dt^2 = -K_{e1} \circ (d\Delta\theta/dt) + K_{e2} \circ u_2 - T_f/J_t \ . \tag{2.20}$$

Existem, portanto, duas perturbações: uma proporcional a $d\Delta\theta/dt$ a outra ao atrito seco, que é a mais crítica.

Definindo-se

$$e_1 = \Delta\theta \ , \tag{2.21}$$

$$e_2 = d\Delta\theta_{in}/dt \ , \tag{2.22}$$

a equação da dinâmica fica na forma

$$de_1/dt = e_2 \ , \tag{2.23}$$

$$de_2/dt = -K_{e1} \circ e_2 + K_{e2} \circ u_1 - T_f/J_t \ . \tag{2.24}$$

O controle é função da leitura de um eixo do giro e de sua integração. É necessário, em malha fechada, que o sistema de controle tenha resposta com faixa de frequência que contenha o distúrbio harmônico (Athans, 1981).

Propondo-se a lei de controle dada por

$$u_1 = -K_p \circ e_1 - K_v \circ e_2 \ , \tag{2.25}$$

obtém-se

$$de_1/dt = e_2 \ , \tag{2.26}$$

$$de_2/dt = K_{e1} \circ e_2 - K_{e2} \circ K_p \circ e_1 - K_{e2} \circ K_v \circ e_2 - T_f/J_t \ . \tag{2.27}$$

Impondo-se a condição de equilíbrio nas Equações 2.26 e 2.27 ($de_1/dt = 0$; $de_2/dt = 0$), obtém-se

$$e_2 = 0 \ , \tag{2.28}$$

$$e_1 = - T_f/(K_{e2} \circ K_p \circ J_t) \tag{2.29}$$

Dado que o módulo do atrito seco está limitado pelo valor máximo T_1, ou seja,

$$-T_1 \leq T_f \leq T_1 \ , \tag{2.30}$$

a zona de equilíbrio fica descrita por

$$-T_1/(K_{e2} \circ K_p \circ J_t) \leq e_1 \leq T_1/(K_{e2} \circ K_p \circ J_t) \tag{2.31}$$

Sendo o erro de posição inversamente proporcional a K_p, propõe-se, para o ganho de posição, a forma

$$K_p = T_1/(K_{e2} \circ J_t \circ e_{1d}) \ , \tag{2.32}$$

onde e_{1d} = erro máximo de posição desejado.

O ganho de velocidade K_v é calculado utilizando-se o polinômio característico do sistema em malha fechada no domínio da frequência (Equações 2.26 e 2.27), com amortecimento $\zeta = 1$, que é dado por

$$p(s) = s^2 + (K_{e1} + K_{e2} \circ K_v) \circ s + K_{e2} \circ K_p \ . \tag{2.33}$$

De onde se obtém a frequência natural não amortecida do sistema e o ganho de velocidade por

$$\omega_n = (K_{e2} \circ K_p)^{1/2} \ , \tag{2.34}$$

$$K_v = (2 \circ \zeta \circ \omega_n - K_{e1})/K_{e2} \ . \tag{2.35}$$

A dinâmica do erro em y (Δt_y) vem da relação com $\Delta\psi$ e $\Delta\phi$ descrita pela equação 2.19 e pode ser definida como se segue:

$$\Delta\psi = (\mathrm{sen}(\theta_0)/\cos(\theta_0))\circ\Delta\phi + \Delta t_y/\cos(\theta_0) \tag{2.36}$$

Derivando-se a Equação 2.36 duas vezes em relação ao tempo, substituindo-se na Equação 2.9, e utilizando-se a Equação 2.1, obém-se

$$d^2\Delta t_y/dt^2 = - K_{a1}\circ\mathrm{sen}(\theta_0)\circ(d\Delta\phi/dt) + (g/l)\circ\mathrm{sen}(\theta_0)\circ\Delta\phi$$

$$- K_{a1}\circ(d\Delta t_y/dt) - K_{a2}\circ\cos(\theta_0)\circ u_2 \ . \tag{2.37}$$

Definindo-se as seguintes variáveis de estado:

$$\underline{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4)^T$$

$$= (\Delta\phi;\ d\Delta\phi/dt;\ \Delta t_y;\ d\Delta t_y/dt)^T \ , \tag{2.38}$$

obtém-se

$$d\underline{a}(t)/dt = F_a\circ\underline{a}(t) + G_a\circ\underline{u}(t) \ , \tag{2.39}$$

onde $$F_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (g/l)\circ\mathrm{sen}\theta_0 & -K_{a1}\circ\mathrm{sen}\theta_0 & 0 & -K_{a1} \end{bmatrix} ,$$

$$G_a = (0;\ 0;\ 0;\ -K_{a2}\circ\cos(\theta_0)\ )^T \ .$$

O sistema descrito pela Equação 2.39 mostra que o movimento pendular não é controlável mas é estável (Kwakernaak e Sivan, 1972). Utilizando-se a teoria do regulador linear quadrático define-se a lei de controle na seguinte forma:

$$u_2 = \underline{K}_a\circ\underline{a} \ , \tag{2.40}$$

onde $\underline{K}_a = (K_{ap1};\ K_{av1};\ K_{ap2};\ K_{av2})$.

O ganho $\underline{K}_a$ pode ser obtido através de iterações variando-se a matriz de pesos, a partir de simulações em função da condição nominal de apontamento θ_0, e, uma vez escolhido um valor que obtenha bons resultados, este poderá ser adotado como constante.

Reescrevendo as Equações 2.26, 2.27 e 2.39, na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} d\Delta\phi/dt \\ d^2\Delta\phi/dt^2 \\ d\Delta t_y/dt \\ d^2\Delta t_y/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (g/l)\mathrm{sen}\theta_0 & -K_{a1}\circ\mathrm{sen}\theta_0 & 0 & -K_{a1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ d\Delta\phi/dt \\ \Delta t_y \\ d\Delta t_y/dt \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -K_{a2}\circ\cos\theta_0 \end{bmatrix} \circ u_2 \ , \qquad (2.41)$$

$$\begin{bmatrix} d\Delta\theta/dt \\ d^2\Delta\theta/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -K_{e1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ d\Delta\theta/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{e2} \end{bmatrix} \circ u_1$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{sign}(e_2)T_1/J_t \end{bmatrix} \ . \qquad (2.42)$$

Pode-se definir um vetor, cujas componentes sejam as variáveis de estado, e outro, das variáveis de controle, para obter uma única equação de estado. Considerando-se ainda um ruído dinâmico, ou incerteza do modelo, dado po $\underline{w}_d$, o equacionamento fica como se segue:

$$\underline{x}_d = [\ \Delta\theta;\ d\Delta\theta/dt;\ \Delta\phi;\ d\Delta\phi/dt;\ \Delta t_y;\ d\Delta t_y/dt]^T \ , \qquad (2.43)$$

$$\underline{u} = [\ u_1;\ u_2]^T \ , \qquad (2.44)$$

$$d\underline{x}_d(t)/dt = F_d\circ\underline{x}_d(t) + G_d\circ\underline{u}(t) + \underline{p}_d + \underline{w}_d \ , \qquad (2.45)$$

onde $$F_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (g/l)\text{sen}\theta_0 & -K_{a1}\text{sen}\theta_0 & 0 & -K_{a1} \end{bmatrix},$$

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{e2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -K_{a2}\cos\theta_0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{p}_d = [\ 0;\ -\text{sign}(e_2)T_1/J_t;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]^T\ ,$$

$$\underline{w}_d = [\ w_{d1};\ w_{d2};\ w_{d3};\ w_{d4};\ w_{d5};\ w_{d6}]^T\ .$$

A perturbação $\underline{p}_d$ só atinge $d\Delta\theta_0/dt$ e é considerada constante durante pequenos intervalos de tempo. O vetor $\underline{w}_d$ é suposto um processo gaussiano com estatística $N(0,\ Q_w(t))$, ou seja,

$$E\{\ \underline{w}_d(t)\ \} = 0\ , \tag{2.46}$$

$$E\{\ \underline{w}_d(t)\circ\underline{w}_d(t')^T\} = Q_w(t)\circ\ \delta(t - t')\ , \tag{2.47}$$

onde $E\{.\}$ = expectância ,

$Q_w(t)$ = matriz diagonal 6x6 semi-definida positiva ,

$\delta(t - t')$ = função Delta de Dirac.

2.3 - SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL AUXILIADO

Para se obter o posicionamento da carga útil do balão estratosférico (o telescópio imageador de raios X e Gama) utiliza-se um sistema de navegação. Neste caso, sendo as medidas de movimento obtidas através de sensores inerciais, este sistema é chamado inercial. A aceleração inercial do telescópio, medida pelos giroscópios,

permite obter-se velocidade e posição por integração numérica a partir de condições iniciais.

Outra característica deste sistema de navegação é o fato de seus componentes encontrarem-se fixos no corpo que se pretende fazer a navegação, por isso as medidas são tomadas no referencial solidário ao telescópio. Este tipo de sistema é chamado "strapdowm".

Porém, devido às propriedades inerentes aos giroscópios, as medidas são contaminadas com erros (ruídos, derivas) de origens diversas na mecânica e eletrônica do instrumento. Embora estes erros sejam modelados a partir de testes de laboratório, e com isso permitem a utilização de formas de compensação, seus efeitos residuais são acumulados e comprometem a precisão da navegação para períodos mais longos.

Portanto, de maneira a garantir a qualidade da determinação de atitude, coloca-se a necessidade de medidas feitas a partir de referências externas, corrigindo periodicamente os erros acumulados. Os sensores não-inerciais, como o sensor solar e o magnetômetro utilizados neste trabalho, fornecem as medidas auxiliares para a navegação, caracterizando este sistema como Sistema de Navegação Inercial Auxiliado.

No esquema da determinação de atitude apresentado na Seção 3.2.3, pode-se destacar a função dos sensores inerciais e não-inerciais. Os giroscópios são utilizados na fase de propagação da atitude, onde as medidas de velocidades angulares aparecem como parâmetros na integração das equações cinemáticas. As medidas do sensor solar e do magnetômetro compõem o vetor observação utilizado na fase de atualização das estimativas das variáveis que caracterizam a atitude do telescópio.

A Figura 2.4 ilustra a utilização das medidas no sistema de navegação.

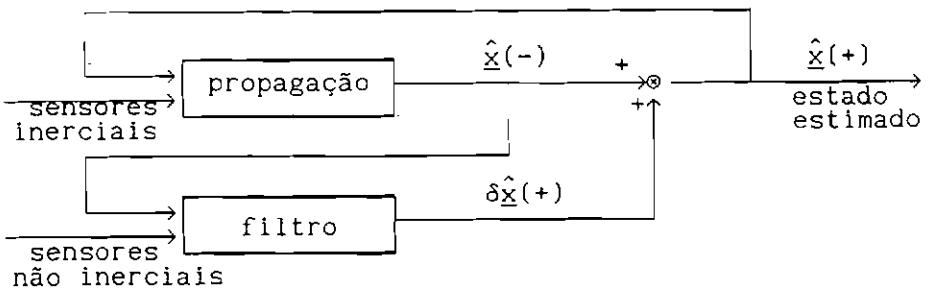


Fig. 2.4 - Diagrama do sistema de navegação inercial auxiliado.

2.4 - SENSORES

Na fase de apontamento, também denominada aquisição, quando o telescópio efetua manobras buscando a atitude nominal para realização das observações de corpos celestes, utiliza-se um magnetômetro, para o plano azimutal, e um potenciômetro para o ângulo de inclinação em relação à gôndola.

Os sensores utilizados nas configurações de determinação de atitude estudadas neste trabalho, na fase de estabilização, são: magnetômetro de três eixos, giroscópios sintonizados de dois eixos combinados de forma a obter velocidades angulares dos três eixos, e sensor solar digital de dois eixos.

2.4.1 - GIROSCÓPIO

O giroscópio utilizado é do tipo sintonizado a seco (Sinkiewitz, 1974; Howe, 1964; Craig, 1972), com dois graus de liberdade e está esquematizado na Figura 2.5.

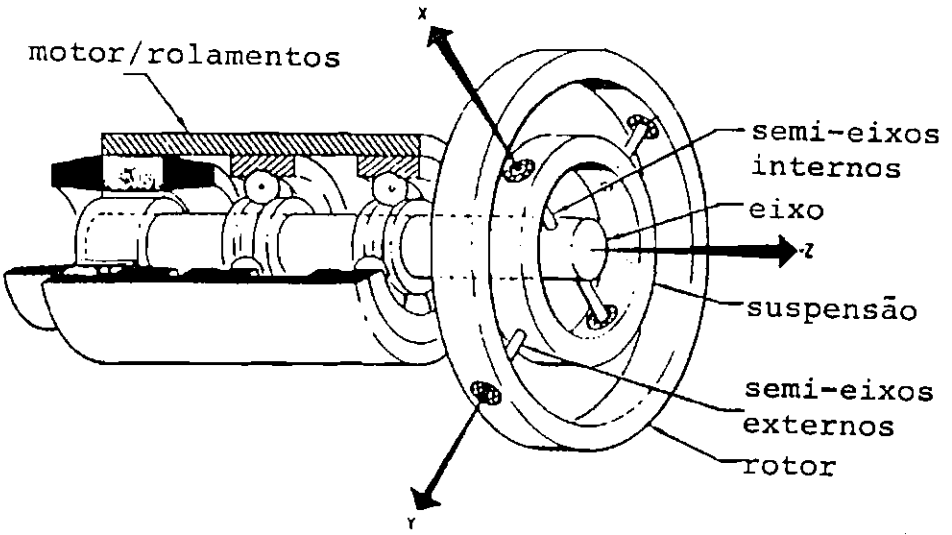


Fig. 2.5 - Giroscópio sintonizado de dois eixos.

O rotor é eletromagneticamente torqueado em relação ao corpo do instrumento por magnetos permanentes. Os transdutores indutivos de posição são usados para obter uma saída proporcional em magnitude e fase às alterações de atitude do corpo em relação ao rotor (Figura 2.6).

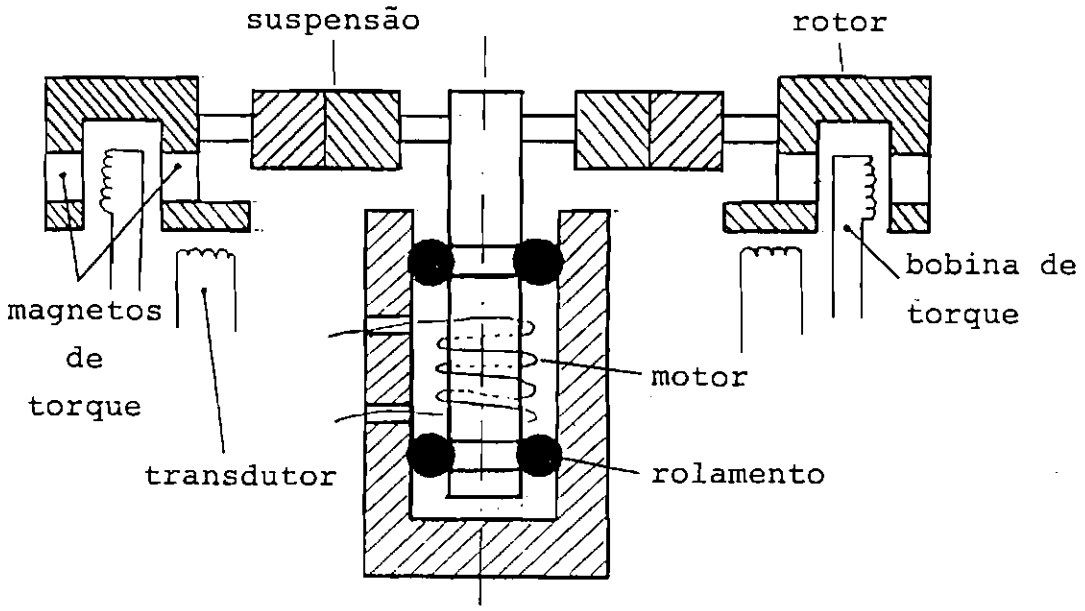


Fig. 2.6 - Componentes do giroscópio.

2.4.1.1 - MODELO DE FUNCIONAMENTO

Pode-se equacionar a dinâmica do giroscópio através da relação que se segue:

$$\underline{T}_g = d\underline{I}_g/dt + \underline{\omega}_r \times \underline{I}_g \ , \qquad (2.48)$$

onde $\underline{T}_g$ = torques no referencial inercial ,

$d\underline{I}_g/dt$ = derivada do momento angular no referencial solidário ao rotor ,

$\underline{\omega}_r$ = velocidade angular do rotor em relação ao referencial inercial ,

$\underline{I}_g$ = momento angular (rotor + suspensão), descrito por

$$\underline{I}_g = \sum \underline{p}_g \times m_g \circ \underline{\omega}_r \times \underline{p}_g \ , \qquad (2.49)$$

onde $\underline{p}_g$ = vetor posição de cada ponto material ,

m_g = massa puntual .

Considerando-se a dinâmica sem torques aplicados, obtém-se duas equações diferenciais homogêneas de segunda ordem para os ângulos de deflexão do rotor θ_x e θ_y.

$$(J_a + J_{an}/2)\circ(d^2\theta_x/dt^2) + (J_c + J_{an})\circ N_g\circ(d\theta_y/dt)$$

$$+ (K_s-(J_{an} - J_{cn}/2)\circ N_g^2)\circ\theta_x + q_x\circ\cos(2N_g t) + q_y\circ\mathrm{sen}(2N_g t)$$

$$+ f_a\circ(d\theta_x/dt) + \lambda\circ\theta_y = 0 \ , \qquad (2.50)$$

$$(J_a + J_{an}/2)\circ(d^2\theta_y/dt^2) - (J_c + J_{an})\circ N_g\circ(d\theta_x/dt)$$

$$+ (K_s-(J_{an} - J_{cn}/2)\circ N_g^2)\circ\theta_y + q_x\circ\mathrm{sen}(2N_g t) + q_y\circ\cos(2N_g t)$$

$$+ f_a\circ(d\theta_y/dt) - \lambda\circ\theta_x = 0 \ , \qquad (2.51)$$

onde J_a, J_b, J_c = momentos de inércia do rotor (ref. fixo no rotor),
J_{an}, J_{bn}, J_{cn} = momentos de inércia da suspensão (ref. fixo na suspensão),
$J_a = J_b$,
$J_{an} = J_{bn}$,
N_g = velocidade angular do eixo ,
K_s = constante elástica da suspensão ,
θ_x, θ_y = deflexões do rotor em relação ao eixo ,
f_a = coeficiente de amortecimento do rotor ,
λ = constante de torque axial do eixo-rotor ,

$$q_x = (J_{an}/2)\circ d^2\theta_x/dt^2 + J_{an}\circ N_g\circ d\theta_y/dt - (J_{an} - J_{cn}/2)\circ N_g^2\circ\theta_x \ ,$$

$$q_y = (J_{an}/2)\circ d^2\theta_y/dt^2 + J_{an}\circ N_g\circ d\theta_x/dt - (J_{an} - J_{cn}/2)\circ N_g^2\circ\theta_y \ .$$

Os efeitos do amortecimento e do torque axial eixo-rotor são supostos negligenciáveis. Além disso, os termos envolvendo $\cos(2N_g t)$ e $\mathrm{sen}(2N_g t)$ podem ser eliminados, uma vez que estas expres-

sões senoidais têm frequência $2N_g$ Hz e podem provocar erros de retificação somente para sinal de entrada de $2N_g$ Hz. Desta forma, simplifica-se o equacionamento como se segue:

$$(J_a+J_{an}/2)\circ d^2\theta_x/dt^2 + (J_c+J_{an})\circ N_g\circ d\theta_y/dt$$

$$+ (K_s-(J_{an}-J_{cn}/2)\circ N_g^2)\circ\theta_x = 0 \ , \qquad (2.52)$$

$$(J_a+J_{an}/2)\circ d^2\theta_y/dt^2 - (J_c+J_{an})\circ N_g\circ d\theta_x/dt$$

$$+ (K_s-(J_{an}-J_{cn}/2)\circ N_g^2)\circ\theta_y = 0 \ . \qquad (2.53)$$

Para obter a condição de sintonia e anular a limitação elástica faz-se o coeficiente de θ_x e θ_y igual a zero pelo balanceamento da constante elástica K_s, ou seja,

$$K_s = (J_{an} - J_{cn}/2)\circ N_g^2 \ . \qquad (2.54)$$

A velocidade de sintonia do giroscópio fica então determinada por

$$N_0 = (K_s/(J_{an} - J_{cn}/2))^{1/2} \ . \qquad (2.55)$$

E as equações do movimento ficam reduzidas a:

$$(J_a + J_{an}/2)\circ d^2\theta_x/dt^2 + (J_c + J_{an})\circ N_0\circ d\theta_y/dt = 0 \ , \qquad (2.56)$$

$$(J_a + J_{an}/2)\circ d^2\theta_y/dt^2 - (J_c + J_{an})\circ N_0\circ d\theta_x/dt = 0 \ . \qquad (2.57)$$

2.4.1.2 - <u>MODELO DE ERRO</u>

O erro de um canal do giroscópio, por exemplo o eixo x, pode ser modelado (Gandelman e Durão, 1990) incluindo-se os termos de deriva constante, que dependem de g e g^2, através da relação

$$K_x \circ \omega_{gx} = \omega_x + K_{xy} \circ W_y + K_{xs} \circ W_s + D(x)_f + D(x)_x \circ a_x + D(x)_y \circ a_y$$

$$+ D(x)_s \circ a_s + D(x)_{xx} \circ a_x^2 + D(x)_{yy} \circ a_y^2 + D(x)_{ss} \circ a_s^2$$

$$+ D(x)_{xy} \circ a_x \circ a_y + D(x)_{xs} \circ a_x \circ a_s + D(x)_{ys} \circ a_y \circ a_s \ , \qquad (2.58)$$

onde ω_x = velocidade angular real da entrada ,

K_x = fator de escala ,

ω_{gx} = leitura do giroscópio ,

K_{xy}, K_{xs} = desalinhamentos ,

$D(x)_f$ = deriva não sensível à aceleração ,

$D(x)_i$ $(i=x,y,s)$ = deriva sensível à aceleração nos eixos x, y e de spin ,

$D(x)_j$ $(j=xx,yy,ss)$ = deriva sensível ao quadrado da aceleração nos eixos x, y e s ,

$D(x)_{ij}$ $(ij=xy,xs,ys)$ = termos cruzados .

Uma vez que estes termos são constantes e podem ser removidos a priori, o modelo para estimação considera apenas os termos não compensáveis (Farrenkopf, 1978). O modelo pode ser equacionado estabelecendo-se a seguinte relação entre a velocidade angular do veículo $\underline{\omega}$ e a leitura do giroscópio $\underline{\omega}_g$:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_g - \underline{b} - \underline{\eta}_1 \ , \qquad (2.59)$$

onde $\underline{b}$ = deriva ,

$\underline{\eta}_1$ = ruído no giroscópio .

Supondo-se que $\underline{\eta}_1$ é um ruído branco gaussiano tem-se

$$E \{ \underline{\eta}_1(t) \} = 0 \ , \qquad (2.60)$$

$$E \{ \underline{\eta}_1(t) \circ \underline{\eta}_1^T(t') \} = Q_1(t)\delta(t-t') \ . \qquad (2.61)$$

onde $\delta(.)$ = função Delta de Dirac

A deriva é regida pela equação

$$d\underline{b}/dt = -\underline{b}/\tau_g + \underline{\eta}_2 \ , \tag{2.62}$$

onde τ_g = constante de tempo .

Admite-se que $\underline{\eta}_2$ também é um ruído branco gaussiano, ou seja,

$$E \{ \underline{\eta}_2(t) \} = 0 \ , \tag{2.63}$$

$$E \{ \underline{\eta}_2(t) \circ \underline{\eta}_2^T(t') \} = Q_2(t)\delta(t-t') \ . \tag{2.64}$$

Os ruídos $\underline{\eta}_1$ e $\underline{\eta}_2$ são considerados não correlacionados, isto é,

$$E \{ \underline{\eta}_1(t) \circ \underline{\eta}_2^T(t') \} = 0 \ , \tag{2.65}$$

para t e t' quaisquer.

A deriva pode ser descrita também através de uma combinação linear de diversos termos com diferentes constantes de tempo. Destes termos resultam componentes de ruídos exponencialmente correlacionados. Fazendo-se $\tau_g \to \infty$ na Equação 2.62 (Farrenkopf, 1978) o modelamento da deriva reduz-se a

$$d\underline{b}/dt = \underline{\eta}_2 \ . \tag{2.66}$$

2.4.2 - SENSOR SOLAR

O princípio de funcionamento do sensor solar digital é a sensibilização de fotocélulas pela luz proveniente do Sol que entra por uma fenda do instrumento e a consequente determinação do ângulo de incidência, considerando-se para tanto a refração sofrida no meio (Wertz, 1978).

2.4.2.1 - MODELO DE FUNCIONAMENTO

A geometria do problema do equacionamento da medida do vetor Sol é mostrada na Figura 2.7.

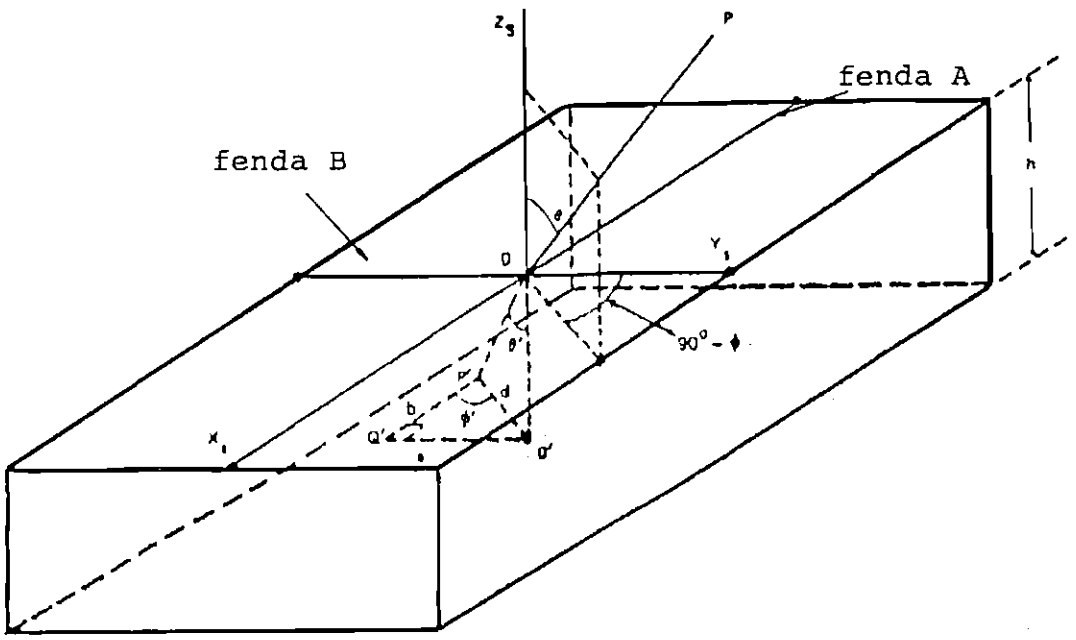


Fig. 2.7 - Ótica do sensor solar.

O zênite dos sensores A e B é representado por OZ_s. O raio refratado OP' é defletido no instrumento com indice de refração n_s e o ponto P' fica definido pelas coordenadas a_s e b_s. A Lei de Snell determina que

$$\text{sen}\theta_s = n_s \circ \text{sen}\theta_s' \ , \tag{2.67}$$

$$\phi_s = \phi_s' \ . \tag{2.68}$$

Dos triângulos OO'P' e O'Q'P' obtêm-se as relações abaixo:

$$\phi_s = \phi_s' = \text{ATAN2}(a_s, b_s) \ , \tag{2.69}$$

$$\tan\theta_s' = d_s/h_s = (a_s^2 + b_s^2)^{1/2}/h_s \ , \qquad (2.70)$$

onde ATAN2 = função arco tangente do FORTRAN, que resolve a ambiguidade de quadrantes.

Combinando as Equações 2.67, 2.68, 2.69 e 2.70 obtém-se

$$\theta_s = \arctan\{n_s \circ (a_s^2 + b_s^2)^{1/2}/(h_s^2 - (n_s^2 - 1) \circ (a_s^2 + b_s^2))^{1/2}\} \ , \qquad (2.71)$$

onde θ_s e ϕ_s são definidos no referencial do sensor.

Usualmente, porém, define-se o vetor Sol através dos ângulos entre suas projeções nos planos Y_s-Z_s e X_s-Z_s e o eixo Z_s como mostra a Figura 2.8.

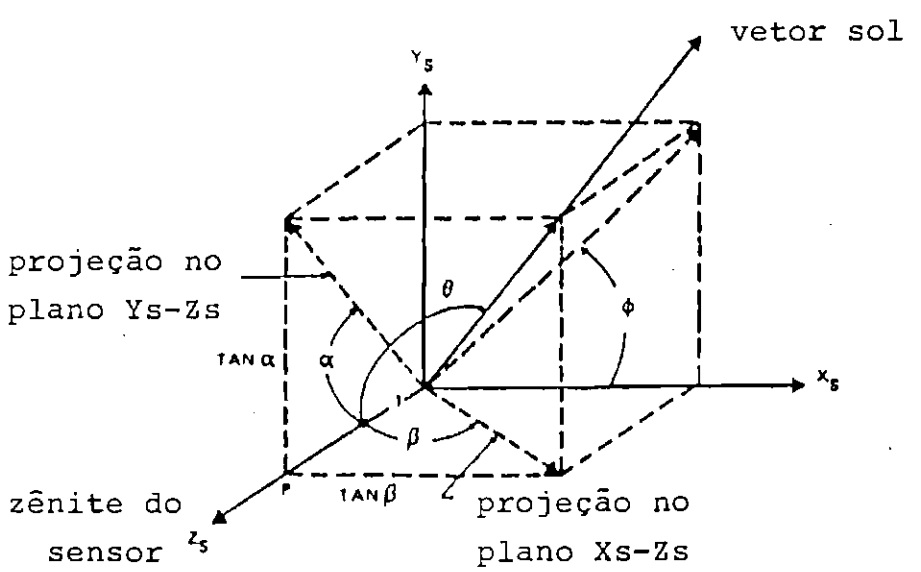


Fig. 2.8 - Ângulos de referência do sensor solar.

Os ângulos α e β são rotações sobre os eixos X_s e Y_s, dados respectivamente por

$$\tan\alpha = \tan\theta_s \circ \mathrm{sen}\phi_s = n_s \circ a_s/r_s \ , \qquad (2.72)$$

$$\tan\beta = \tan\theta_s \circ \cos\phi_s = n_s \circ b_s / r_s \ , \tag{2.73}$$

onde r_s é definido pela expressão

$$r_s = (h_s^2 - (n_s^2 - 1) \circ (a_s^2 + b_s^2))^{1/2} \tag{2.74}$$

Pode-se observar pelas Equações 2.72 e 2.73 que existe correlação entre as medidas de α e β. Entretanto, os ruídos que afetam estas variáveis de observação são considerados usualmente não correlacionados, com o objetivo de simplificar os cálculos de estimação.

2.4.2.2 - MODELO DE ERRO

Os erros nas medidas do sensor solar são erros discretos provenientes da precisão das fotocélulas em determinar o ponto de sensibilização pela projeção do Sol. Estes erros podem ser modelados como sendo ruídos brancos gaussianos contínuos para permitir a utilização do Filtro de Kalman. Desta forma descrevem-se as medidas por

$$\alpha = \alpha_r + \eta_a \ , \tag{2.75}$$

$$\beta = \beta_r + \eta_b \ , \tag{2.76}$$

onde α_r e β_r = ângulos verdadeiros da projeção do Sol ,
η_a e η_b = erros de medida .

Supõe-se para η_a e η_b as seguintes estatísticas:

$$E\ \{\eta_a(t_k)\} = E\ \{\eta_b(t_k)\} = 0 \ , \tag{2.77}$$

$$E\ \{\eta_i(t_j) \circ \eta_i(t_k)\} = Q_i(t_k) \circ \delta_{jk} \ , \tag{2.78}$$

para $i = a, b$ e quaisquer t_j e t_k ,

$$E\ \{\eta_a(t_j) \circ \eta_b(t_k)\} = 0 \ . \tag{2.79}$$

2.4.3 - MAGNETÔMETRO

Utilizado como sensor de atitude em veículos espaciais, o magnetômetro obtém direção e magnitude do campo magnético com diversas facilidades operacionais tais como peso reduzido, pequeno consumo de potência, funcionamento em grande variação de temperatura, não apresenta elementos móveis e, portanto, não interfere na dinâmica do veículo.

O principal problema deste instrumento é a baixa precisão de suas medidas em função dos erros consideráveis nos modelos do campo magnético terrestre. Esta limitação é ainda mais crítica em missões de grande altitude, uma vez que a intensidade de campo decresce com o cubo da altitude do veículo. O magnetômetro consiste de uma unidade de sensores magnéticos e outra com a eletrônica de tratamento do sinal gerado (Figura 2.9).

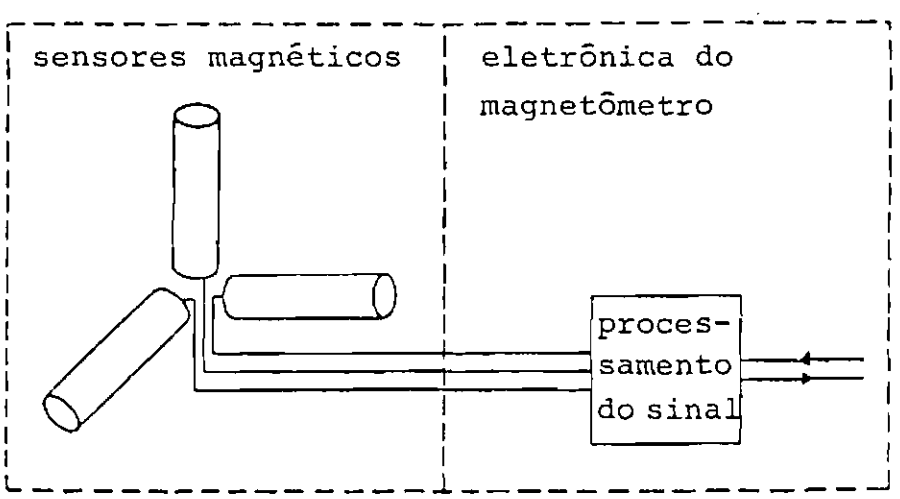


Fig. 2.9 - Componentes do magnetômetro.

O modelo de magnetômetro usado neste trabalho - "fluxgate" - é dos mais usados por medir diretamente as componetes do campo. O seu funcionamento se baseia na indução magnética descrita pela Lei de Faraday. Uma força eletromotriz $\underline{E}$ é induzida numa bobina

imersa em fluxo magnético variável no tempo $d\Phi_B/dt$, de forma que a integral de linha de $\underline{E}$ ao longo da bobina resulta em

$$V = \oint \underline{E} \circ d\underline{l} = - d\Phi_B/dt \ . \qquad (2.80)$$

2.4.3.1 - MODELO DE FUNCIONAMENTO

No sensor de um magnetômetro "fluxgate", ilustrado na Figura 2.10, uma bobina primaria P é usada para levar, alternadamente os núcleos saturáveis SC1 e SC2 para estados de saturação oposta (Wertz, 1978; Primdahl, 1979). Na presença de um campo magnético, através do segundo harmônico da corrente induzida na bobina secundária S, pode-se mensurar sua intensidade.

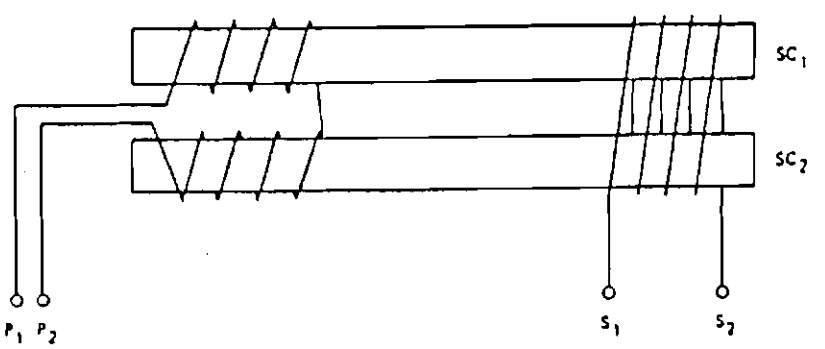


Fig. 2.10 - Magnetômetro "fluxgate".

Os núcleos saturados opostamente servem para tornar a bobina secundária insensível à frequência primária. Para ilustrar o funcionamento do instrumento, supõe-se que a bobina primária é excitada com uma onda triangular de frequência $2\pi/T$ e cuja intensidade magnética é H_D. Os núcleos saturam com densidade de fluxo de $\pm B_S$, quando a intensidade magnética alcança $\pm H_C$. A intensidade magnética residual fica deslocada do zero em ΔH, a intensidade magnética ambiente. Surge então, na bobina secundária, uma tensão induzida, V_S, enquanto os núcleos vão sendo mudados de uma saturação para outra oposta à intensidade de fluxo magnético. V_S fica então caracterizada por um trem de

pulsos de largura K_1T, com período K_2T ou $(1-K_2)T$ onde

$$K_1 = H_C/(4H_D) \qquad e \qquad K_2 = (1 - \Delta H/H_D)/2 \ . \tag{2.81}$$

Pode-se expressar a intensidade magnética ambiente em função do intervalo entre pulsos na forma

$$\Delta H = (1 - 2K_2)H_D \ . \tag{2.82}$$

Modelando a resposta da eletrônica do instrumento, V_S é expressa em série de Fourier como se segue:

$$V_S = (2b_S/K_1T)\circ \sum_{n-1}^{\infty} [1 - \exp(-i2\pi K_2)]\circ(\mathrm{sen}K_1 n\pi/n\pi)\circ\cos(2\pi n/T). \tag{2.83}$$

Na ausência de campo magnético externo, ou seja, $\Delta H=0$, então $K_2=1/2$ e o termo que envolve K_2 da Equação 2.83 torna-se

$$[1 - \exp(-i2\pi n K_2)] = [1 - \cos n\pi] = \left\{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right\} \text{ para } \left\{\begin{matrix}n=1,3,\ldots\\n=0,2,\ldots\end{matrix}\right. \ . \tag{2.84}$$

Das Equações 2.83 e 2.84 pode-se concluir que os harmônicos pares da frequência primária podem ocorrer somente na presença de campo magnético externo. A razão entre segundo e primeiro harmônico é

$$r_m = \frac{1 - \exp(-i2\pi(1-\Delta H/H_D)}{1 - \exp(-i\pi(1-\Delta H/H_D)} \times \frac{\mathrm{sen}2\pi K}{2\mathrm{sen}\pi K_1 1} \ . \tag{2.85}$$

Para $\Delta H \ll H_D$ e $H_C \ll H_D$ tem-se $K_1 \ll 1$ e

$$r_m \cong \frac{1 - 1 + i\mathrm{sen}(2\pi\Delta H/H_D)}{1 + 1 - i\mathrm{sen}(\pi\Delta H/H_D)} = \frac{i\Delta H}{H_D} \ . \tag{2.86}$$

Isto significa que o segundo harmônico está defasado em 90 graus do primeiro. O sinal do segundo harmônico dá o sentido de ΔH, relativo ao eixo do núcleo, e a amplitude é proporcional a $\Delta H/H_D$.

2.4.3.2 - MODELO DE ERRO

O modelo de erro simplificado, considerando-se os modelos de magnetômetro que compensam os erros devidos à deriva, é descrito por

$$\underline{H}_m(t_k) = \underline{H}_{mr}(t_k) + \underline{\eta}_3(t_k) \ , \tag{2.87}$$

onde $\underline{H}_m$ = vetor intensidade magnética medido ,

$\underline{H}_{mr}$ = vetor intensidade magnética real ,

$\underline{\eta}_3$ = ruído branco gaussiano .

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS PARA ESTIMAÇÃO DE ATITUDE

Neste capítulo são apresentados os procedimentos utilizados para determinação de atitude do balão, mais especificamente da carga útil - o telescópio instalado na gôndola. A primeira configuração utiliza a técnica de Estimação Ótima (Filtro Estendido de Kalman) e a segunda é uma simplificação que utiliza ganho de Kalman constante na filtragem. Estão desenvolvidas aqui as equações utilizadas para as simulações em cada caso.

3.1 - ESTIMAÇÃO ÓTIMA

Para que a determinação de atitude tenha uma maior precisão é necessário que se considere que as medidas dos sensores são resultado de observações sujeitas a erros, e que entre cada instante de observação a atitude está variando segundo uma dinâmica que pode ser modelada. Combinam-se, então, as informações tomadas nas observações com aquelas que o modelo do sistema provê através de propagação no tempo.

Este tipo de determinação, denominada estimação ótima, é muito utilizada através do estimador bayesiano de processos estocásticos de Gauss-Markov conhecido por Filtro de Kalman (Maybeck, 1979). Este filtro matemático combina as informações de atitude obtidas pelos sensores e pela evolução temporal desta atitude, modelada por equações diferenciais lineares de primeira ordem, otimizando o resultado em função dos erros e imprecisões.

Neste trabalho, onde as equações de estado não são lineares, utiliza-se o Filtro Estendido de Kalman, que está descrito a seguir.

3.1.1 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

O Filtro Estendido de Kalman é uma aproximação sub-ótima do Filtro de Kalman, aplicável em casos onde o estado é descrito por equações diferenciais não lineares (Lefferts et al., 1982). Para a dedução deste estimador define-se um sistema cujo modelo matemático é dado por

$$d\underline{x}(t)/dt = \underline{f}(\underline{x}(t),\underline{u}(t),t) + G(t)\circ\underline{w}(t) \ , \tag{3.1}$$

onde $\underline{x}(t)$ = vetor de estado / n-dimensional;

$\underline{f}(.)$ = função vetorial diferenciável não necessariamente linear;

G = matriz contínua no tempo de dimensão $n \times r$;

$\underline{w}(t)$ = vetor de incertezas do modelo / r-dimensional.

Supõe-se que $\underline{w}(t)$ seja um processo gaussiano com estatística $N(0, Q(t))$, ou seja,

$$E\{\ \underline{w}(t)\ \} = 0 \ , \tag{3.2}$$

$$E\{\ \underline{w}(t)\circ\underline{w}(t')^T\ \} = Q(t)\circ\delta(t-t') \ , \tag{3.3}$$

onde $E\{.\}$ = expectância;

$Q(t)$ = matriz diagonal $r \times r$ definida positiva;

$\delta(t-t')$ = função Delta de Dirac.

A condição inicial do estado ($\underline{x}_0$) é considerada uma variável aleatória gaussiana com média $\hat{\underline{x}}_0$ e covariância P_0, ou seja,

$$E\{\ \underline{x}_0\ \} = \hat{\underline{x}}_0 \ , \tag{3.4}$$

$$E\{\ (\underline{x}_0-\hat{\underline{x}}_0)\circ(\underline{x}_0-\hat{\underline{x}}_0)^T\} = P_0 \ . \tag{3.5}$$

As observações são obtidas em pontos discretos do tempo (t_1, t_2, t_3, ...) e modeladas pela relação seguinte:

$$\underline{y}_k = \underline{h}(\underline{x}(t_k), t_k) + \underline{v}_k \ , \tag{3.6}$$

onde $\underline{y}_k$ = conjunto de observações no instante t_k;

$\underline{h}$ = função vetorial diferenciável não necessariamente linear;

$\underline{v}_k$ = vetor ruído de observação.

Considera-se que o ruído de observação é aleatório e gaussiano, podendo-se descrevê-lo pelas relações que se seguem:

$$E \{ \underline{v}_k \} = 0 \ , \tag{3.7}$$

$$E \{ \underline{v}_k \circ \underline{v}_j \} = R_v \circ \delta_{kj} \ , \tag{3.8}$$

onde δ_{kj} = Delta de Kroenecker;

R_v = matriz de covariância do ruído.

É necessário ainda estabelecer as seguintes hipóteses: $\underline{w}(t)$ é não correlacionado com o estado inicial e com o ruído nas observações, assim como o estado inicial é não correlacionando com o ruído nas observações, ou seja,

$$E \{ \underline{w}(t_k) \circ \underline{v}_j^T \} = 0 \ , \tag{3.9}$$

$$E \{ \underline{w}(t_k) \circ \underline{x}_0^T \} = 0 \ , \tag{3.10}$$

$$E \{ \underline{v}_k \circ \underline{x}_0^T \} = 0 \ . \tag{3.11}$$

Considerando-se uma trajetória nominal $\bar{\underline{x}}(t)$ a partir da condição inicial $\bar{\underline{x}}(t_0)$ tem-se

$$d\bar{\underline{x}}(t)/dt = \underline{f}(\bar{\underline{x}}(t), t) \ . \tag{3.12}$$

Define-se o desvio da trajetória na forma

$$\delta\underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}(t) \ , \tag{3.13}$$

que satisfaz a

$$d\delta\underline{x}(t)/dt = \underline{f}(\underline{x}(t),t) - \underline{f}(\bar{\underline{x}}(t),t) + G(t)\circ\underline{w}(t) \ . \tag{3.14}$$

Com a condição inicial $\delta\underline{x}(t_0)$, considerada uma variável aleatória com estatística $N(\hat{\underline{x}}_0-\underline{x}(t_0),P_{t_0})$, e expanindo-se $\underline{f}(\underline{x}(t),t)$ em série de Taylor até primeira ordem em torno da trajetória nominal tem-se

$$\underline{f}(\underline{x}(t),t) - \underline{f}(\bar{\underline{x}}(t),t) \cong F(t,\bar{\underline{x}}(t))\circ\delta\underline{x}(t) \ , \tag{3.15}$$

onde $F(t,\bar{\underline{x}}(t)) = \partial f_i(\bar{\underline{x}}(t),t)/\partial X_j$.

Substituindo-se a Equação 3.15 em 3.14 obtém-se

$$d\delta\underline{x}(t)/dt = F(t,\bar{\underline{x}}(t))\circ\delta\underline{x}(t) + G(t)\circ\underline{w}(t) \ . \tag{3.16}$$

Sobre esta equação que representa o sistema linearizado, é que se aplica o Filtro de Kalman, obtendo-se a matriz de covariância de erro no estado da equação de Riccati. Para facilitar os cálculos, discretiza-se o sistema evitando integrações, e supõe-se que $\underline{w}(t)$ seja constante em cada intervalo de tempo e ainda

$$E\left\{ \underline{w}(t_k) \right\} = 0 \ , \tag{3.17}$$

$$E\left\{ \underline{w}(t_k)\circ\underline{w}(t_j)^T \right\} = Q(t_k)\circ\delta_{kj} \ , \tag{3.18}$$

onde δ_{kj} = Delta de Kroenecker,

$$\delta\underline{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1},t_k)\circ\delta\underline{x}(t_k) + \Gamma(t_k)\circ\underline{w}(t_k) \ . \tag{3.19}$$

A matriz de transição do sistema $\Phi(t_{k+1},t_k)$, no intervalo (t_k,t_{k+1}), é definida por

$$d\Phi(t,t_k)/dt = F(t,\bar{\underline{x}}(t))\circ\Phi(t,t_k) \quad ; \quad t_k \le t \le t_{k+1} \ , \tag{3.20}$$

$$\Phi(t_k, t_k) = I \ , \tag{3.21}$$

$$\Gamma(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \circ G(\tau) d\tau \ . \tag{3.22}$$

Como trajetória nominal escolhe-se a estimativa mais recente do estado $\bar{\underline{x}}(t_k) = \hat{\underline{x}}(t_k, t_k)$ e como condição inicial $\bar{\underline{x}}(t_0) = \hat{\underline{x}}(t_0)$, onde $\hat{\underline{x}}(t_0)$ é a estimativa a priori do estado, e a matriz de covariância do erro P_0 baseada nas informações iniciais.

Define-se o vetor de medidas nominais por

$$\underline{y}(t_{k+1}) = \underline{h}(\bar{\underline{x}}(t_{k+1}), t_{k+1}) \ , \tag{3.23}$$

e também a variação

$$\delta\underline{y}_{k+1} = \underline{y}_{k+1} - \bar{\underline{y}}(t_{k+1}) = \underline{y}_{k+1} - \underline{h}(\bar{\underline{x}}(t_{k+1}), t_{k+1}) \ . \tag{3.24}$$

Utilizando-se a expansão em série de Taylor até primeira ordem obtém-se

$$\delta\underline{y}_{k+1} = H_{k+1} \circ \delta\underline{x}(t_{k+1}) + \underline{v}_{k+1} \ , \tag{3.25}$$

onde:

$$H_{k+1} = [\partial h_i(\underline{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) / \partial x_j] \ . \tag{3.26}$$

Depois da propagação da estimativa feita pela Equação 3.1 faz-se a atualização com as novas observações com a seguinte relação:

$$\delta\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^+) = \delta\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^-) + K_{k+1}(\delta\underline{y}_{k+1} - H_{k+1} \circ \delta\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^-) \ , \tag{3.27}$$

onde K_{k+1} é o ganho de Kalman, dado por

$$K_{k+1} = P(t_{k+1}^-)H_{k+1}^T(H_{k+1}P(t_{k+1}^-)H_{k+1}^T + R_v)^{-1} \quad . \tag{3.28}$$

E a estimativa do vetor estado é dada por

$$\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^+) = \hat{\underline{x}}(t_{k+1}^-) + \delta\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^+) \quad . \tag{3.29}$$

A melhor estimativa do estado, antes da atualização, é dada por $\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^-)$, obtida pela propagação de $\hat{\underline{x}}(t_k^+)$ de onde se conclui que $\delta\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^-)=0$ e pode-se escrever

$$\hat{\underline{x}}(t_{k+1}^+) = \hat{\underline{x}}(t_{k+1}^-)+K_{k+1}\circ(\underline{y}_{k+1}-\underline{h}(\underline{x}(t_{k+1}^-),t_{k+1})) \quad . \tag{3.30}$$

Utilizando-se outra notação, $\hat{\underline{x}}_{k+1}(-)$ e $P_{k+1}(-)$ para os valores propagados e $\hat{\underline{x}}_{k+1}(+)$ e $P_{k+1}(+)$ para os valores atualizados temos, para a etapa de propagação, as expressões

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \hat{\underline{x}}_k(+) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{f}(\underline{x}_k(+),\underline{u}(t_k))dt \quad , \tag{3.31}$$

$$P_{k+1}(-) = \Phi(t_{k+1},t_k)P_k(+)\Phi^T(t_{k+1},t_k)$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} {}_{k+1},t_k)G(t)Q(t)Gt)G^T(t)\Phi^T(t_{k+1},t_k)dt \tag{3.32}$$

E para a atualização tem-se

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + K_{k+1}(\underline{y}_{k+1} - \underline{h}(\hat{\underline{x}}_{k+1}(-),t_{k+1})) \quad , \tag{3.33}$$

$$P_{k+1}(+) = [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1}(-)[I - K_{k+1}H_{k+1}]^T$$

$$+ K_{k+1}R_vK_{k+1}^T \quad , \tag{3.34}$$

onde o ganho de Kalman é dado por

$$K_{k+1} = P_{k+1}(-)H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1}(-)H_{k+1}^T + R_v)^{-1} \ . \tag{3.35}$$

3.2 - ESTIMAÇÃO UTILIZANDO O MODELO CINEMÁTICO DO GIROSCÓPIO

Neste procedimento de estimação o modelo cinemático do giroscópio substitui o modelo dinâmico de vôo do balão nas equações de estado do Filtro Estendido de Kalman (Lefferts et al., 1982). Esta substituição se justifica porque o modelamento do giroscópio é mais confiável que o modelamento do vôo do balão. Com isto, obtém-se uma melhor propagação da atitude e, consequentemente, maior precisão na estimativa desta.

A cinemática da atitude é descrita através de quatérnions, que são tratados no Apêndice A, e pode ser equacionada como se segue na Seção 3.2.1.

3.2.1 - CINEMÁTICA DA ATITUDE

Para utilizar o modelo cinemático do giroscópio no Filtro Estendido de Kalman, é necessária a descrição cinemática da atitude através do quatérnion de atitude e da velocidade angular. A atitude é representada por uma matriz de rotação entre o referencial horizontal local e o referencial solidário ao telescópio (Shuster, s.d.). Para a matriz de atitude, num intervalo de tempo Δt muito pequeno, tem-se

$$A(t + \Delta t) = \Phi \circ A(t) \ , \tag{3.36}$$

onde Φ é matriz de rotação dada por

$$\Phi = \cos\Delta\theta \circ I + (1 - \cos\Delta\theta)\hat{\underline{n}}\hat{\underline{n}}^T + \operatorname{sen}\Delta\theta \circ \| \hat{\underline{n}} \| \ , \tag{3.37}$$

onde $\hat{\underline{n}}$ = versor do eixo de rotação;

$\Delta\theta$ = ângulo de rotação (infinitesimal);

I = matriz identidade dimensão 3x3;

$$K_{k+1} = P_{k+1}(-)H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1}(-)H_{k+1}^T + R_v)^{-1} \ . \tag{3.35}$$

3.2 - ESTIMAÇÃO UTILIZANDO O MODELO CINEMÁTICO DO GIROSCÓPIO

Neste procedimento de estimação o modelo cinemático do giroscópio substitui o modelo dinâmico de vôo do balão nas equações de estado do Filtro Estendido de Kalman (Lefferts et al., 1982). Esta substituição se justifica porque o modelamento do giroscópio é mais confiável que o modelamento do vôo do balão. Com isto, obtém-se uma melhor propagação da atitude e, consequentemente, maior precisão na estimativa desta.

A cinemática da atitude é descrita através de quatérnions, que são tratados no Apêndice A, e pode ser equacionada como se segue na Seção 3.2.1.

3.2.1 - CINEMÁTICA DA ATITUDE

Para utilizar o modelo cinemático do giroscópio no Filtro Estendido de Kalman, é necessária a descrição cinemática da atitude através do quatérnion de atitude e da velocidade angular. A atitude é representada por uma matriz de rotação entre o referencial horizontal local e o referencial solidário ao telescópio (Shuster, s.d.). Para a matriz de atitude, num intervalo de tempo Δt muito pequeno, tem-se

$$A(t + \Delta t) = \Phi \circ A(t) \ , \tag{3.36}$$

onde Φ é matriz de rotação dada por

$$\Phi = \cos\Delta\theta \circ I + (1 - \cos\Delta\theta)\hat{\underline{n}}\hat{\underline{n}}^T + \operatorname{sen}\Delta\theta \circ \| \hat{\underline{n}} \| \ , \tag{3.37}$$

onde $\hat{\underline{n}}$ = versor do eixo de rotação;

$\Delta\theta$ = ângulo de rotação (infinitesimal);

I = matriz identidade dimensão 3x3;

$\| \hat{\underline{n}} \|$ = matriz definida pela Equação A.4 (Apêndice A).

Utilizando as seguintes aproximações:

$\cos\Delta\theta \cong 1$,

$\mathrm{sen}\Delta\theta \cong \Delta\theta$,

obtém-se

$$\Phi = I + \Delta\theta \circ \| \hat{\underline{n}} \| \cong I + \| \Delta\theta\hat{\underline{n}} \| . \tag{3.38}$$

Substituindo-se na Equação 3.36 tem-se

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \| \Delta\theta\hat{\underline{n}} \| \circ A(t) , \tag{3.39}$$

$$(A(t + \Delta t) - A(t))/\Delta t = \| \Delta\theta\hat{\underline{n}} \| \circ A(t)/\Delta t . \tag{3.40}$$

Fazendo-se $\Delta t \to 0$ a relação torna-se

$$dA(t)/dt = \| \underline{\omega} \| \circ A(t) . \tag{3.41}$$

Para o quatérnion obtém-se uma equação muito similar dada por

$$\bar{q}(t + \Delta t) = \delta\bar{q}(t) \otimes \bar{q}(t) = \{ \delta\bar{q}(t) \}_L \circ \bar{q}(t) , \tag{3.42}$$

onde $\otimes$ = composição de quatérnions , e

$$\delta\bar{q}(t) = [n_1 \mathrm{sen}(\Delta\theta/2); n_2 \mathrm{sen}(\Delta\theta/2); n_3 \mathrm{sen}(\Delta\theta/2); \cos(\Delta\theta/2)]^T . \tag{3.43}$$

Sendo $\Delta\theta$ muito pequeno pode-se escrever

$$\delta\bar{q}(t) = [\ n_1\omega\Delta t/2\ ;\ n_2\omega\Delta t/2\ ;\ n_3\omega\Delta t/2\ ;\ 1\ ]^T$$

$$= [\ \omega_1\Delta t/2\ ;\ \omega_2\Delta t/2\ ;\ \omega_3\Delta t/2\ ;\ 1\ ]^T\ . \tag{3.44}$$

Calculando a matriz $\{\ \delta\bar{q}(t)\ \}_L$ obtém-se

$$\{\ \delta\bar{q}(t)\ \}_L = \begin{bmatrix} 1 & \omega_3\Delta t/2 & -\omega_2\Delta t/2 & \omega_1\Delta t/2 \\ -\omega_3\Delta t/2 & 1 & \omega_1\Delta t/2 & \omega_2\Delta t/2 \\ \omega_2\Delta t/2 & -\omega_1\Delta t/2 & 1 & \omega_3\Delta t/2 \\ -\omega_1\Delta t/2 & -\omega_2\Delta t/2 & -\omega_3\Delta t/2 & 1 \end{bmatrix}\ , \tag{3.45}$$

$$\{\ \delta\bar{q}(t)\ \}_L = I_{4x4} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \circ \Delta t/2\ , \tag{3.46}$$

$$\{\ \delta\bar{q}(t)\ \}_L = I_{4x4} + \Omega(\underline{\omega})\Delta t/2\ , \tag{3.47}$$

onde $\Omega(\underline{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix}$.

Substituindo a Equação 3.47 na Equação 3.42 obtém-se

$$\bar{q}(t+\Delta t) = (I_{4x4} + \Omega(\underline{\omega})\Delta t/2)\circ\bar{q}(t)\ , \tag{3.48}$$

$$\bar{q}(t+\Delta t) - \bar{q}(t) = \Omega(\underline{\omega})\bar{q}(t)\Delta t/2\ , \tag{3.49}$$

$$(\bar{q}(t+\Delta t) - \bar{q}(t))/\Delta t = \Omega(\underline{\omega})\bar{q}(t)/2\ . \tag{3.50}$$

Fazendo $\Delta t \to 0$ pode-se escrever esta relação na forma diferencial como se segue:

$$d\bar{q}(t)/dt = \Omega(\underline{\omega})\bar{q}(t)/2\ , \tag{3.51}$$

que, utilizando a definição da matriz $Z(\bar{q}(t))$, desenvolvida no Apêndice B, torna-se

$$d\bar{q}(t)/dt = Z(\bar{q}(t))\underline{\omega}(t)/2 \ . \tag{3.52}$$

Substituindo o vetor $\underline{\omega}(t)$ pela expressão do modelo cinemático do giroscópio, ou seja,

$$\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}_g(t) - \underline{b}(t) - \underline{\eta}_1(t) \ , \tag{3.53}$$

a Equação 3.51 fica na forma

$$d\bar{q}(t)/dt = \Omega(\underline{\omega}_g(t) - \underline{b}(t) - \underline{\eta}_1(t))\bar{q}(t)/2 \ . \tag{3.54}$$

Da linearidade de $\Omega(.)$ obtém-se

$$d\bar{q}(t)/dt = \Omega(\underline{\omega}_g(t) - \underline{b}(t))\bar{q}(t)/2 - \Omega(\underline{\eta}_1(t))\bar{q}(t)/2 \ , \tag{3.55}$$

$$d\bar{q}(t)/dt = \Omega(\underline{\omega}_g(t) - \underline{b}(t))\bar{q}(t)/2 - Z(\bar{q}(t))\underline{\eta}_1(t)/2 \ . \tag{3.56}$$

Tem-se ainda que

$$d\underline{b}(t)/dt = \underline{\eta}_2(t) \ . \tag{3.57}$$

As Equações 3.56 e 3.57 estão na forma

$$d\underline{x}(t)/dt = \underline{f}(\underline{x}(t),t) + \underline{g}(\underline{x}(t),t)\underline{\eta}(t) \ , \tag{3.58}$$

que permite a aplicação do Filtro Estendido de Kalman.

3.2.2 - EQUACIONAMENTO DO FILTRO

Das equações desenvolvidas para a cinemática da atitude obtém-se um conjunto de equações não-lineares (Equações 3.56 e 3.57) que descrevem as variáveis de estado para o Filtro Estendido de

Kalman, utilizado neste procedimento de estimação.

Define-se o estado expandido, composto pelo quatérnion e pelas derivas dos giroscópios, através de

$$\underline{x}(t) = [q_1(t);q_2(t);q_3(t);q_4(t);b_1(t);b_2(t);b_3(t)]^T \ , \tag{3.59}$$

e a equação de estado por

$$d\underline{x}(t)/dt = \underline{f}(\underline{x}(t),t) + \underline{g}(\underline{x}(t),t)\circ\underline{\eta}(t) \ , \tag{3.60}$$

onde:

$$\underline{f}(\underline{x}(t),t) = \begin{bmatrix} \Omega(\underline{\omega}_g(t)-\underline{b}(t))\circ\bar{q}(t)/2 \\ 0_{3x1} \end{bmatrix} \ ; \tag{3.61}$$

$$\underline{g}(\underline{x}(t),t) = \begin{bmatrix} -Z(\bar{q}(t))/2 & 0 \\ 0 & I_{3x3} \end{bmatrix} \ ; \tag{3.62}$$

$$\underline{\eta}(t) = [\eta_{11};\eta_{12};\eta_{13};\eta_{21};\eta_{22};\eta_{23}]^T \ . \tag{3.63}$$

Para o filtro deve-se, primeiramente, linearizar esta equação matricial em torno de uma trajetória nominal $\bar{\underline{x}}(t)$:

$$d\delta\underline{x}(t)/dt = F\circ\delta\underline{x}(t) + G\circ\underline{\eta}(t) \ , \tag{3.64}$$

onde:

$$F = \partial\underline{f}(\underline{x}(t),t)/\partial\underline{x} \ \Big|_{\underline{x}=\bar{\underline{x}}} \tag{3.65}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & (\omega_{g3}-b_3) & -(\omega_{g2}-b_2) & (\omega_{g1}-b_1) & -q_4 & q_3 & -q_2 \\ -(\omega_{g3}-b_3) & 0 & (\omega_{g1}-b_1) & (\omega_{g2}-b_2) & -q_3 & -q_4 & q_1 \\ (\omega_{g2}-b_2) & -(\omega_{g1}-b_1) & 0 & (\omega_{g3}-b_3) & q_2 & -q_1 & -q_4 \\ -(\omega_{g1}-b_1) & -(\omega_{g2}-b_2) & -(\omega_{g3}-b_3) & 0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ & & & 0_{3x7} & & & \end{bmatrix} , \qquad (3.66)$$

$$G = \underline{g}(\underline{x}(t),t) , \qquad (3.67)$$

$$G = \begin{bmatrix} -Z/2 & 0 \\ 0 & I_{3x3} \end{bmatrix} . \qquad (3.68)$$

O vetor observação é composto pelas medidas do sensor solar e do magnetômetro, ou seja,

$$\underline{y}(t_k) = [\ \alpha\ ;\ \beta\ ;\ \mu_1\ ;\ \mu_2\ ;\ \mu_3\ ]^T , \qquad (3.69)$$

onde α e β são as leituras do sensor solar e μ_1, μ_2 e μ_3 são as leituras do magnetômetro.

A relação entre o vetor observação e o vetor de estado é descrita pela equação que se segue:

$$\underline{y}(t_k) = \underline{h}(\underline{x}(t_k),t_k) + \underline{v}(t_k) , \qquad (3.70)$$

onde $\underline{v}(t_k)$ é o ruído de observação, considerado gaussiano.

O vetor sol, no referencial horizontal local, é dado por

$$\underline{s} = [\ s_x\ ;\ s_y\ ;\ s_z\ ]^T . \qquad (3.71)$$

No referencial solidário ao telescópio, este vetor é descrito por

$$\underline{s}_t = R \circ \underline{s} , \qquad (3.72)$$

onde R é a matriz de rotação em função das componentes do quatérnion.

Têm-se então as seguintes equações para as componentes do vetor

$$s_{tx} = s_x(q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2)+2s_y(q_1q_2+q_4q_3)+2s_z(q_1q_3-q_4q_2) \ , \tag{3.73}$$

$$s_{ty} = 2s_x(q_2q_1-q_3q_4)-s_y(-q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2)+2s_z(q_2q_3+q_1q_4), \tag{3.74}$$

$$s_{tz} = 2s_x(q_3q_1+q_4q_2)+2s_y(q_3q_2-q_4q_1)+s_z(-q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2). \tag{3.75}$$

As medidas do sensor solar α e β estão relacionadas com as componentes de $\underline{s}_t$ da maneira que se segue:

$$\alpha = \arctan s_{tx}/s_{tz} \ , \tag{3.76}$$

$$\beta = \arctan s_{ty}/s_{tz} \ . \tag{3.77}$$

Da mesma forma, o vetor campo magnético, que no referencial horizontal local é dado por

$$\underline{m} = [\ m_x \ ; \ m_y \ ; \ m_z \ ]^T \ , \tag{3.78}$$

no referencial do telescópio, fica na forma

$$\underline{m}_t = R \circ \underline{m} \ , \tag{3.79}$$

e suas componentes são equacionadas como se segue:

$$m_{tx} = m_x(q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2)+2m_y(q_1q_2+q_4q_3)+2m_z(q_1q_3-q_4q_2) \ , \tag{3.80}$$

$$m_{ty} =2m_x(q_2q_1-q_3q_4)-m_y(-q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2)+2m_z(q_2q_3+q_4q_1) \ , \tag{3.81}$$

$$m_{tz} =2m_x(q_3q_1+q_4q_2)+2m_y(q_3q_2-q_4q_1)+m_z(-q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2) \ . \tag{3.82}$$

Linearizando-se a equação de observação em torno do último quatérnion estimado, tem-se

$$\Delta \underline{y} = H \circ \Delta \underline{x} + \underline{v} \quad , \tag{3.83}$$

onde $H = \partial h_m(\bar{q})/\partial q_n$.

O equacionamento do Filtro de Kalman fica definido, para este caso, pelas Equações 3.31 e 3.32 na fase de propagação das variáveis de estado, ou seja,

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \hat{\underline{x}}_k(+) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{f}(\underline{x}_k(+))dt \ . \tag{3.84}$$

Esta propagação do estado, considerando-se que as derivas são constantes no intervalo de propagação, reduz-se ao quatérnion, que pode ser aproximada por uma forma analítica bastante simplificada, e que evita integração numérica, dada por

$$\hat{\bar{q}}(t_{k+1}^-) = [\cos(|\hat{\underline{\omega}}|\Delta t/2) \circ I_{4x4}$$

$$+ (\sin(|\hat{\underline{\omega}}|\Delta t/2)/|\hat{\underline{\omega}}|) \circ \Omega(|\hat{\underline{\omega}}|\Delta t)] \circ \hat{\bar{q}}(t_k^+) \ . \tag{3.85}$$

Para a matriz de covariâncias dos erros no estado, obtém-se o valor propagado através da solução da equação de Riccati

$$\frac{d}{dt}P(t) = F(t) \circ P(t) + P(t) \circ F^T(t) + G(t) \circ Q(t) \circ G^T(t) \ . \tag{3.86}$$

Desta forma, tem-se a matriz propagada dada por

$$P_{k+1}(-) = \Phi(t_{k+1}, t_k) P_k(+) \Phi^T(t_{k+1}, t_k)$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t',t_k)G(t')Q(t')G^T(t')\Phi(t',t_k)dt' \quad . \tag{3.87}$$

e pelas Equações 3.33 e 3.34 na fase de atualização da estimativa:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + K_{k+1}(\underline{y}_{k+1} - \underline{h}(\hat{\underline{x}}_{k+1}(-),t_{k+1})) \ , \tag{3.88}$$

$$P_{k+1}(+) = [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1}(-)[I - K_{k+1}H_{k+1}]^T$$

$$+ K_{k+1}R_vK_{k+1}^T \ , \tag{3.89}$$

onde o ganho de Kalman é dado por

$$K_{k+1} = P_{k+1}(-)H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1}(-)H_{k+1}^T + R_v)^{-1} \ . \tag{3.90}$$

3.2.3 - ALGORÍTMO DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

Neste procedimento de estimação, a fase de propagação do filtro tem como parâmetros as velocidades angulares medidas pelos giroscópios, tomadas como constantes no intervalo de tempo da propagação. Uma maneira de melhorar as estimativas propagadas, do estado e da matriz de covariâncias dos erros no estado, é dividir a fase de propagação em pequenos intervalos de tempo, para os quais são atualizadas as medidas de velocidades angulares.

A Figura 3.1 mostra um diagrama que esquematiza os seguintes intervalos de tempo do algorítmo:

1) fase de propagação do estado e da matriz de covariância dos erros no estado do instante t_k ao instante t_{k+1} com as velocidades angulares medidas através dos giroscópios no instante t_k, e corrigidas pelo valor estimado da deriva.

2) se $t_{k+1} = t_{in}$, $i=1,2,3,\ldots$ (t_{in} são os instantes onde ocorre a fase de atualização do Filtro Estendido de Kalman) processa-se os valores das observações do sensor solar e do magnetômetro para obter as estimativas atualizadas do estado e da matriz de covariâncias dos erros no estado. Se $t_{k+1} \neq t_{in}$, então o passo (1) é novamente aplicado.

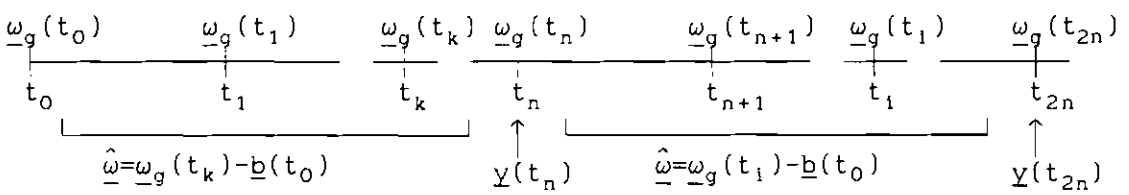


Fig. 3.1 - Intervalos de propagação e instantes de atualização do estimador.

O diagrama de blocos do algorítmo de determinação de atitude está representado na Figura 3.2, onde se observa a fase de propagação das estimativas do estado e da matriz de covariâncias dos erros no estado, e a fase de atualização dessas estimativas.

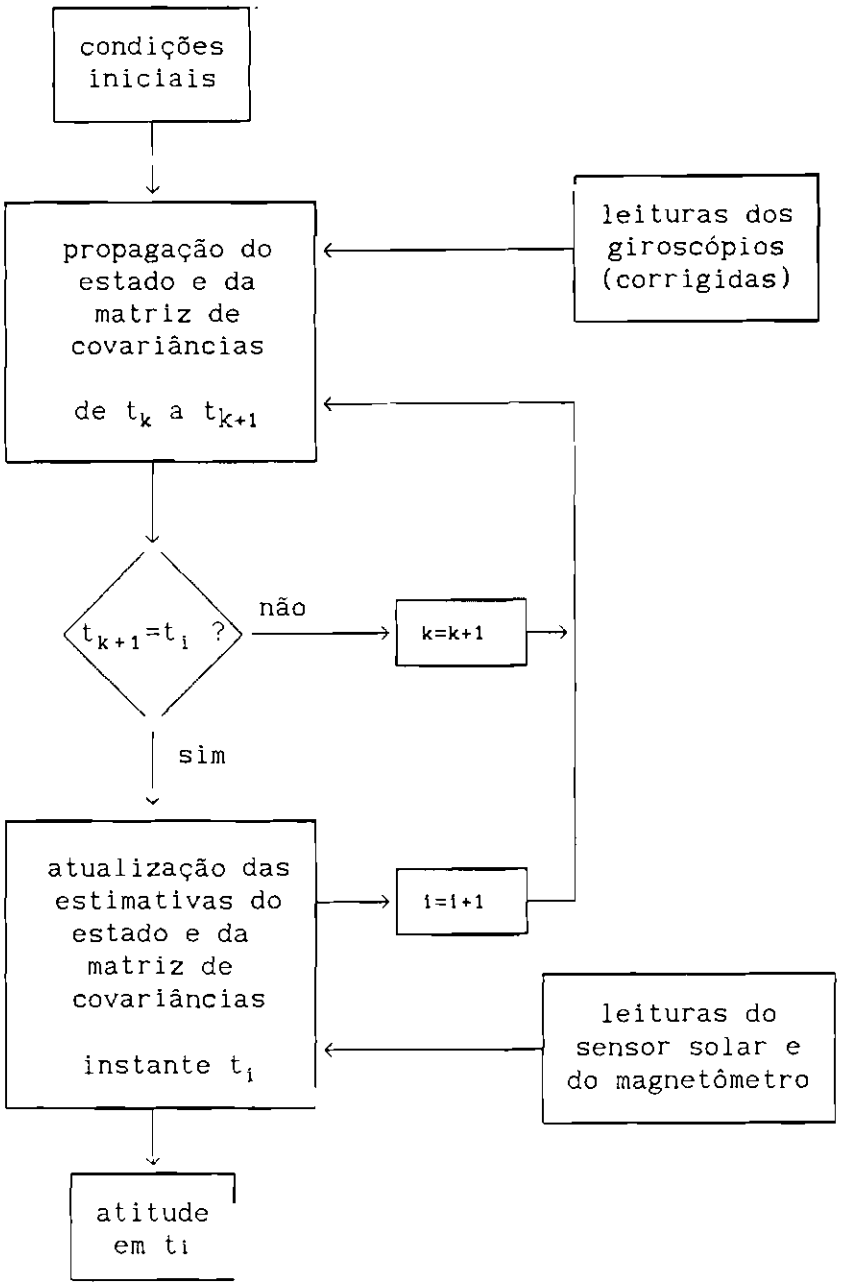


Fig. 3.2 - Algorítmo de determinação de atitude (filtro completo).

3.3 - SINGULARIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

A representação da atitude através de quatérnions, tem como incoveniente a singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado (Lefferts et al., 1982). Isto ocorre devido à condição de

unidade do quatérnion, ou seja, as suas componentes não são independentes,

$$\bar{q}^T(t)\circ\bar{q}(t) = 1 \ . \tag{3.91}$$

Para demonstrar esta propriedade, toma-se uma estimativa do quatérnion dada por

$$\hat{\bar{q}}(t) = \bar{q}(t) - \Delta\bar{q}(t) \ , \tag{3.92}$$

onde $\bar{q}(t)$ é o valor real do quatérnion e $\Delta\bar{q}(t)$ é o erro da estimativa.

Substituindo-se $\bar{q}(t)$ da Equação 3.92 na Equação 3.91 obtém-se

$$\bar{q}^T(t)\circ\bar{q}(t) = (\hat{\bar{q}}^T(t) + \Delta\bar{q}^T(t))\circ(\hat{\bar{q}}(t) + \Delta\bar{q}(t)) \ . \tag{3.93}$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem em $\Delta\bar{q}(t)$, a relação fica dada por

$$\bar{q}^T(t)\circ\bar{q}(t) = 1 + 2\Delta\bar{q}^T(t)\circ\hat{\bar{q}}(t) = 1 \ . \tag{3.94}$$

De onde se conclui que, sendo a norma de $\bar{q}(t)$ unitária, é necessário que

$$\Delta\bar{q}^T(t)\circ\hat{\bar{q}}(t) = 0 \ . \tag{3.95}$$

A definição da matriz de covariâncias dos erros em quatérnion é expressa por

$$P_q(t) = E\ \{\Delta\bar{q}(t)\circ\Delta\bar{q}^T(t)\} \ . \tag{3.96}$$

Multiplicando-se $\Delta\bar{q}(t)$ por $\hat{\bar{q}}(t)$ obtém-se

$$\hat{\bar{q}}^T(t)\circ P_q(t)\circ\hat{\bar{q}}(t) = \hat{\bar{q}}^T(t)\circ E\ \{\Delta\bar{q}(t)\circ\Delta\bar{q}^T(t)\}\circ\hat{\bar{q}}(t) \ , \tag{3.97}$$

$$\hat{\bar{q}}^T(t)\circ P_q(t)\circ\hat{\bar{q}}(t) = E\ \{(\hat{\bar{q}}^T(t)\circ\Delta\bar{q}(t))\circ(\Delta\bar{q}^T(t)\circ\hat{\bar{q}}(t))\}\ . \qquad (3.98)$$

Dada a Equação 3.95, pode-se observar que $\hat{\bar{q}}(t)$ é um vetor nulo de $P_q(t)$, ou seja,

$$\hat{\bar{q}}^T(t)\circ P_q(t)\circ\hat{\bar{q}}(t) = 0\ . \qquad (3.99)$$

E consequentemente o vetor $[\hat{\bar{q}}(t),\ 0]^T$ é um vetor da matriz P, que inclui as derivas do giroscópio. Esta singularidade é muito difícil de ser mantida devido aos erros numéricos de processamento. Uma maneira simples de manter a singularidade é representar P(t) por uma matriz de dimensão menor como a definida a seguir.

3.3.1 - REPRESENTAÇÃO REDUZIDA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

Com o objetivo de obter uma representação reduzida da matriz de covariâncias dos erros no estado, define-se nesta seção um erro do quatérnion que corresponde a uma rotação. Esta diferença entre o valor real e o valor estimado é dada por

$$\delta\bar{q}(t) = \bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{q}}^{-1}(t)\ . \qquad (3.100)$$

Desta relação, denominada composição e definida no Apêndice B, obtém-se o vetor de incremento $\delta\underline{q}(t)$. A quarta componente do quatérion de incremento, considerando que se trata de uma rotação infinitesimal, tem valor próximo à unidade. Tomando-se $\delta q_4(t) = 1$ as informações de interesse ficam contidas nas outras três componentes (Lefferts et al., 1982).

O vetor de estado reduzido fica definido por

$$\tilde{\underline{x}} = [\delta\underline{q}\ ;\ \underline{b}]^T = [\delta q_1\ ;\ \delta q_2\ ;\ \delta q_3\ ;\ b_1\ ;\ b_2\ ;\ b_3]^T\ . \qquad (3.101)$$

Reescrevendo a Equação 3.100 tem-se

$$\bar{q}(t) = [\hat{\bar{q}}(t)]\circ\delta\bar{q}(t) \ , \tag{3.102}$$

onde:

$$[\hat{\bar{q}}(t)] = \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \ . \tag{3.103}$$

Utilizando a matriz $Z(\bar{q}(t))$ na Equação 3.103 obtém-se

$$\bar{q}(t) = [Z(\hat{\bar{q}}(t)) \ \vdots \ \hat{\bar{q}}(t)]\circ\delta\bar{q}(t) \ . \tag{3.104}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = Z^T(\hat{\bar{q}}(t))\circ\underline{q}(t) \ , \tag{3.105}$$

$$\delta q_4 = \hat{\bar{q}}^T(t)\circ\bar{q}(t) = 1 \ , \tag{3.106}$$

e ainda

$$\underline{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} Z^T(\hat{\bar{q}}(t)) & 0_{3x3} \\ 0_{3x4} & I_{3x3} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ \underline{b}(t) \end{bmatrix} \ . \tag{3.107}$$

Define-se assim a matriz $S^T(\bar{q}(t))$ que transforma o estado de dimensão 7 no estado de dimensão 6, dada por

$$S(\hat{\bar{q}}(t)) = \begin{bmatrix} Z(\hat{\bar{q}}(t)) & 0_{4x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix} \ , \tag{3.108}$$

$$\underline{\tilde{x}}(t) = S^T(\hat{\bar{q}}(t))\circ\underline{x}(t) \ . \tag{3.109}$$

A mesma relação é valida para os valores estimados de $\underline{\tilde{x}}(t)$ e $\underline{x}(t)$:

$$\hat{\underline{\tilde{x}}}(t) = S^T(\hat{\bar{q}}(t))\circ\hat{\underline{x}}(t) \ . \tag{3.110}$$

E, consequentemente, para a diferença entre os valores estimado e real do estado, tem-se as relações seguintes:

$$\Delta\underline{\tilde{x}}(t) = S^T(\hat{\bar{q}}(t))\circ\Delta\underline{x}(t) \ , \tag{3.111}$$

$$\Delta\underline{x}(t) = S(\hat{\bar{q}}(t))\circ\Delta\underline{\tilde{x}}(t) \ , \tag{3.112}$$

onde $\Delta\underline{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \delta\underline{q}(t) \\ \Delta\underline{b}(t) \end{bmatrix}$.

Reescrevendo a Equação 3.51 na forma de composição de quatérnions, tem-se

$$\frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\,\hat{\bar{\omega}}(t)\otimes\bar{q}(t) \ . \tag{3.113}$$

Considerando-se os valores estimados de $\bar{q}(t)$, a relação fica expressa por

$$\frac{d\hat{\bar{q}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\,\hat{\bar{\omega}}(t)\otimes\hat{\bar{q}}(t) \quad \frac{d\hat{\bar{q}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\,\hat{\bar{\omega}}(t)\otimes\hat{\bar{q}}(t) \ , \tag{3.114}$$

onde $\hat{\bar{\omega}} = [\hat{\omega}_x \ ; \ \hat{\omega}_y \ ; \ \hat{\omega}_z \ ; \ 0]^T$.

Da Equação 3.100 obtém-se

$$\bar{q}(t) = \delta\bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{q}}(t) \ . \tag{3.115}$$

Derivando-se em relação ao tempo, esta equação torna-se

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{q}}(t) + \delta\bar{q}(t)\otimes\frac{d}{dt}\hat{\bar{q}}(t) = \frac{d\bar{q}(t)}{dt} \quad . \tag{3.116}$$

Substituindo as Equações 3.113 e 3.114 em 3.116 obtém-se

$$\frac{d}{dt}\delta\hat{\bar{q}}(t)\otimes\hat{\bar{q}}(t) + \delta\bar{q}(t)\otimes\left(\frac{1}{2}\hat{\bar{\omega}}(t)\otimes(\hat{\bar{q}}t)\right) = \frac{1}{2}\hat{\bar{\omega}}(t)\otimes\bar{q}(t) \quad . \tag{3.117}$$

Utilizando a identidade descrita pela Equação 3.116 , a Equação 3.117 torna-se

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{q}(t) + \frac{1}{2}\delta\bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{\omega}}(t) = \frac{1}{2}\bar{\omega}(t)\otimes\bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{q}}^{-1}(t) \quad , \tag{3.118}$$

ou, de outra forma,

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{q}(t) = \frac{1}{2}(\bar{\omega}(t)\otimes\delta\bar{q}(t) - \delta\bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{\omega}}(t)) \quad . \tag{3.119}$$

Definindo-se o incremento de $\bar{\omega}(t)$ por

$$\bar{\omega}(t) = \delta\bar{\omega}(t) + \hat{\bar{\omega}}(t) \quad , \tag{3.120}$$

onde:

$$\delta\bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \delta\underline{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega}-\hat{\underline{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta\underline{b} - \underline{\eta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \tag{3.121}$$

$$\underline{\omega} = [\omega_x \ ; \ \omega_y \ ; \ \omega_z]^T \ ;$$

$$\hat{\underline{\omega}} = [\hat{\omega}_x \ ; \ \hat{\omega}_y \ ; \ \hat{\omega}_z]^T \ ;$$

e substituindo-se na Equação 3.119 tem-se

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{q}(t) = \frac{1}{2}[\hat{\bar{\omega}}(t)\otimes\delta\bar{q}(t) - \delta\bar{q}(t)\otimes\hat{\bar{\omega}}(t)] + \frac{1}{2}\delta\bar{\omega}(t)\otimes\delta\bar{q}(t) \quad . \tag{3.122}$$

Através da definição de composição de quatérnions (Lefferts et al., 1982), obtém-se

$$\frac{1}{2}\,[\hat{\bar{\omega}}\otimes\delta\bar{q} - \delta\bar{q}\otimes\hat{\bar{\omega}}] = \begin{bmatrix} -\hat{\bar{\omega}}\times\delta\bar{q} \\ 0 \end{bmatrix} , \tag{3.123}$$

$$\delta\bar{\omega}\otimes\delta\bar{q} = \delta\bar{\omega} + O(2) . \tag{3.124}$$

Desconsiderando os termos de segunda ordem e substituindo as Equações 3.123 e 3.124 na Equação 3.122, chega-se às expressões para $\delta\underline{q}$ e δq_4 na forma

$$\frac{d}{dt}\delta\underline{q} = [\hat{\underline{\omega}}(t)]\delta\bar{q} - \frac{1}{2}(\Delta\underline{b} + \underline{\eta}_1) , \tag{3.125}$$

$$\frac{d}{dt}\delta q_4 = 0 , \tag{3.126}$$

onde $[\hat{\underline{\omega}}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, a equação de estado do erro pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\Delta\tilde{\underline{x}}(t) = \tilde{F}(t)\Delta\tilde{\underline{x}} + \tilde{G}(t)\underline{w}(t) , \tag{3.127}$$

onde $\tilde{F}(t) = \begin{bmatrix} [\hat{\underline{\omega}}(t)] & -I_{3x3}/2 \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} \end{bmatrix}$;

$$\tilde{G}(t) = \begin{bmatrix} -I_{3x3}/2 & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix} .$$

Para facilitar os cálculos, pode-se desmembrar a matriz de transição de estado como se segue:

$$\tilde{\Phi}(t_{k+1},t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(t_{k+1},t_k) & \tilde{\Psi}(t_{k+1},t_k) \\ 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix} . \tag{3.128}$$

As partições da matriz de transição são definidas por

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Theta}(t_{k+1},t_k) = [\hat{\underline{\omega}}(t_k)]\circ\tilde{\Theta}(t_{k+1},t_k) , \tag{3.129}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Psi}(t_{k+1},t_k) = [\hat{\underline{\omega}}(t_k)]\circ\tilde{\Psi}(t_{k+1},t_k) , \tag{3.130}$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\tilde{\Theta}(t_k,t_k) = I_{3x3} , \tag{3.131}$$

$$\tilde{\Psi}(t_k,t_k) = 0_{3x3} . \tag{3.132}$$

A matriz reduzida de covariâncias é definida por

$$\tilde{P}(t) = E\{\Delta\tilde{\underline{x}}(t)\circ\Delta\tilde{\underline{x}}^T(t)\} . \tag{3.133}$$

E as relações entre $\tilde{P}(t)$ e $P(t)$, utilizando-se a matriz de redução de estado, ficam na forma

$$\tilde{P}(t) = S^T(\hat{\bar{q}}(t))\circ P(t)\circ S(\hat{\bar{q}}(t)) , \tag{3.134}$$

$$P(t) = S(\hat{\bar{q}}(t))\circ\tilde{P}(t)\circ S^T(\hat{\bar{q}}(t)) . \tag{3.135}$$

A matriz $\tilde{P}(t)$ satisfaz à equação de Riccati dada por

$$\frac{d}{dt}\tilde{P}(t) = \tilde{F}(t)\circ\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)\circ\tilde{F}^T(t) + \tilde{G}(t)\circ Q(t)\circ\tilde{G}^T(t) . \tag{3.136}$$

A solução, utilizando-se a matriz de transição de estado, é a seguinte:

$$\tilde{P}(t) = \tilde{\Phi}(t,t_0)\tilde{P}(t)\tilde{\Phi}^T(t,t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \tilde{\Phi}(t',t_0)\tilde{G}(t')Q(t')\tilde{G}^T(t')\tilde{\Phi}(t',t_0)dt' \ . \qquad (3.137)$$

Utilizando a notação adotada na Seção 3.1.1, tem-se

$$\tilde{P}_{k+1}(-) = \tilde{\Phi}(t_{k+1},t_k)\tilde{P}_k(t)\tilde{\Phi}^T(t_{k+1},t_k)$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{\Phi}(t',t_k)\tilde{G}(t')Q(t')\tilde{G}^T(t')\tilde{\Phi}(t',t_k)dt' \ . \qquad (3.138)$$

Para a fase de atualização das estimativas no Filtro Estendido de Kalman tem-se para o cálculo do ganho, a seguinte equação:

$$\tilde{K}_{k+1} = \tilde{P}_{k+1}(-)\tilde{H}_{k+1}{}^T[\tilde{H}_{k+1}\tilde{P}_{k+1}(-)\tilde{H}_{k+1}{}^T + R_v]^{-1} \ , \qquad (3.139)$$

onde $\tilde{H}_{k+1} = H_{k+1} \circ S(\hat{\bar{q}}(t_{k+1}{}^-))$;

H_{k+1} = matriz de sensibilidade definida pela Equação 3.83.

A atualização da matriz reduzida de covariâncias dos erros no estado é dada por

$$\tilde{P}_{k+1}(+) = [I_{6x6} - \tilde{K}_{k+1}\tilde{H}_{k+1}]\tilde{P}_{k+1}(+) \ , \qquad (3.140)$$

ou, na forma de Joseph, por

$$\tilde{P}_{k+1}(+) = [I_{6x6} - \tilde{K}_{k+1}\tilde{H}_{k+1}]\tilde{P}_{k+1}(-)[I_{6x6} - \tilde{K}_{k+1}\tilde{H}_{k+1}]^T$$

$$+ \tilde{K}_{k+1}R_v\tilde{K}_{k+1}{}^T \ . \qquad (3.141)$$

A estimativa do vetor de estado é atualizada calculando-se primeiramente o incremento através de

$$\Delta\tilde{\underline{x}}(t_{k+1}^{+}) = \begin{bmatrix} \delta\hat{\underline{q}}(t_{k+1}^{+}) \\ \Delta\hat{\underline{b}}(t_{k+1}^{+}) \end{bmatrix} = \tilde{K}_{k+1}[\underline{y}_{k+1} - \underline{h}(\hat{\bar{q}}(t_{k+1}^{-}))] \ , \tag{3.142}$$

onde $\delta\hat{\underline{q}} = [\delta\hat{q}_1 \ ; \ \delta\hat{q}_2 \ ; \ \delta\hat{q}_3]^T$.

Depois, calcula-se o quatérnion por

$$\hat{\bar{q}}(t_{k+1}^{+}) = \delta\hat{\bar{q}}(t_{k+1}^{+}) \otimes \hat{\bar{q}}(t_{k+1}^{-}) \ , \tag{3.143}$$

onde $\delta\hat{\bar{q}}(t_{k+1}^{+}) = \begin{bmatrix} \delta\hat{\underline{q}}(t_{k+1}^{+}) \\ 1 \end{bmatrix}$.

A equação 3.143 pode ser simplificada utilizando-se as propriedades da composição de quatérnions e a relação que se segue:

$$\Omega(\underline{b})\bar{q} = Z(\bar{q})\underline{b} \ . \tag{3.144}$$

Desta forma obtém-se

$$\delta\hat{\bar{q}} \otimes \hat{\bar{q}} = \hat{\bar{q}} + \Omega(\delta\hat{\underline{q}})\hat{\bar{q}} = \hat{\bar{q}} + Z(\hat{\bar{q}})\delta\hat{\underline{q}} = \hat{\bar{q}} + Z(\hat{\bar{q}}) \begin{bmatrix} \delta\hat{q}_1 \\ \delta\hat{q}_2 \\ \delta\hat{q}_3 \end{bmatrix} \ . \tag{3.145}$$

Assim, a atualização do estado (quatérnion e derivas) é feita através de

$$\bar{q}(t_{k+1}^{+}) = \bar{q}(t_{k+1}^{-}) + Z(\bar{q}(t_{k+1}^{-}))\circ\delta\underline{q}(t_{k+1}^{+}) \ , \tag{3.146}$$

$$\hat{\underline{b}}(t_{k+1}^{+}) = \hat{\underline{b}}(t_{k+1}^{-}) + \Delta\hat{\underline{b}}(t_{k+1}^{+}) \ . \tag{3.147}$$

3.4 - CONFIGURAÇÃO SIMPLIFICADA DE ESTIMAÇÃO

Pode-se estabelecer grande simplificação no procedimento de estimação através da utilização de ganho constante no Filtro Estendido de Kalman, que em alguns casos funciona bem. Apesar de geralmente prolongar o período transitório do filtro, esta configuração reduz muito a carga de cálculos e o tempo de processamento.

O ganho de Kalman constante, que consiste de uma matriz 6x5 neste caso, é determinado através de simulações com o filtro completo para cada apontamento nominal (θ_0, ϕ_0, ψ_0). Toma-se uma média dos valores dos elementos da matriz de ganho, na fase de regime de estabilidade, pois, devido aos efeitos da perturbação pendular, estes valores são oscilatórios.

Não é possivel calcular analiticamente o valor do ganho constante pela relação

$$\tilde{K} = \tilde{P} \circ \tilde{H}^T \circ [\tilde{H} \circ \tilde{P} \circ \tilde{H}^T + R_v]^{-1} , \qquad (3.148)$$

que seria mais simples, porque $\tilde{H}$ e $\tilde{P}$ não têm valor constante no regime de estabilidade do filtro, mas são também oscilatórios.

3.4.1 - EQUACIONAMENTO DO FILTRO

Considerando que o ganho de Kalman é constante e previamente determinado, a propagação e a atualização da matriz de covariâncias dos erros no estado são desnecessárias para o cálculo da estimativa do estado. Com o objetivo de reduzir o tempo de processamento, apesar de conter informações sobre a qualidade da estimação do estado, a matriz de covariâncias não é calculada nesta confguração. Desta forma, a fase de propagação fica reduzida ao estado, ou seja,

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \hat{\underline{x}}_k(+) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{f}(\underline{x}_k(+))dt \ . \tag{3.149}$$

A Equação 3.149, assim como na Seção 3.2.2, para evitar a necessidade de integração numérica, pode ser aproximada por

$$\hat{\bar{q}}(t_{k+1}^-) = [\cos(|\hat{\underline{\omega}}|\Delta t/2)\circ I_{4x4}$$

$$+ (\sin(|\hat{\underline{\omega}}|\Delta t/2)/|\hat{\underline{\omega}}|)\circ\Omega(|\hat{\underline{\omega}}|\Delta t)]\circ\hat{\bar{q}}(t_k^+) \ . \tag{3.150}$$

A fase de atualização do estado é descrita pela expressão que se segue:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + K[\underline{y}_{k+1} - \underline{h}(\hat{\underline{x}}_{k+1}(-)] \ . \tag{3.151}$$

3.4.2 - ALGORÍTMO DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

De maneira similar ao algorítmo descrito na Seção 3.3.3, este procedimento utiliza os valores de velocidades angulares medidos pelos giroscópios e corrigidos com os valores de deriva estimados, na fase de propagação de estimativas. A simplificação decorrente da utilização de ganho de Kalman constante reduz fortemente a quantidade de cálculos e o tempo de processamento.

A Figura 3.3 mostra o esquema do algorítmo de determinação de atitude deste procedimento.

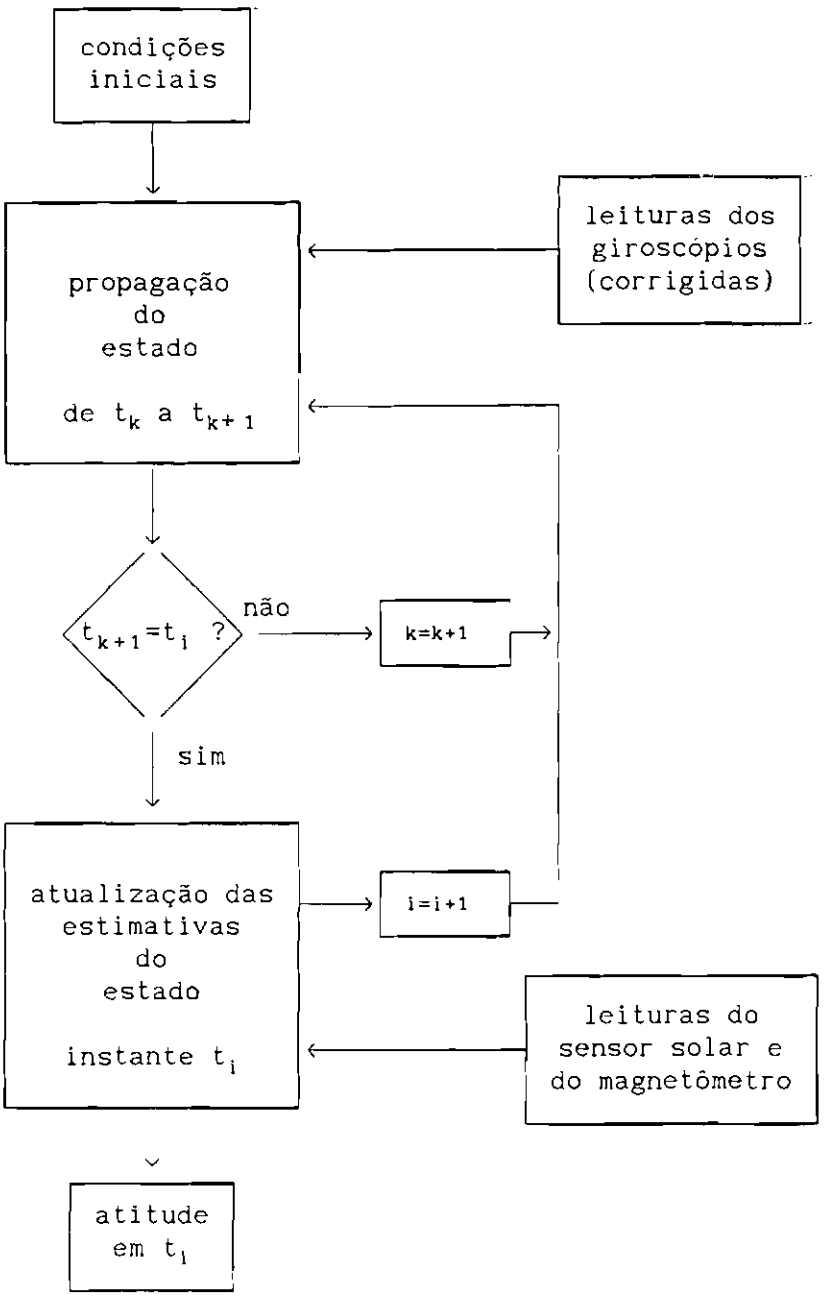


Fig. 3.3 - Algorítmo de determinação de atitude (filtro simplicado).

CAPITULO 4

TESTES E RESULTADOS

São apresentados neste capítulo os testes realizados através de simulação numérica em computador digital, utilizando-se o modelo dinâmico de vôo do balão descrito no Capítulo 2. Os resultados estão representados por gráficos e analisados segundo critérios aqui definidos.

4.1 - PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO

O esquema de simulação está dividido em duas partes distintas. A primeira corresponde ao movimento do balão, e consequentemente do telescópio, utilizando-se o modelo dinâmico descrito pela Equação 2.45. Além disso, esta primeira parte também é composta pela geração das leituras dos sensores inerciais (giroscópios) e não inerciais (sensor solar e magnetômetro) a partir da atitude e movimento simulado, e contaminadas com ruídos e derivas.

A segunda parte consta do Filtro Estendido de Kalman propriamente dito. A fase de propagação de estimativas do estado do filtro utiliza o modelo cinemático do giroscópio dado pela Equação 2.59.

O procedimento de simulação para configuração simplificada, com ganho de Kalman constante, é basicamente o mesmo. A etapa de simulação da dinâmica de vôo do balão e de simulação das leituras dos sensores é idêntica à do filtro completo, e o filtro fica reduzido ao estado pois a matriz de covariâncias dos erros no estado não é calculada com o objetivo de reduzir o tempo de processamento.

O diagrama de blocos que esquematiza este procedimento para as duas configurações está apresentado na Figura 4.1.

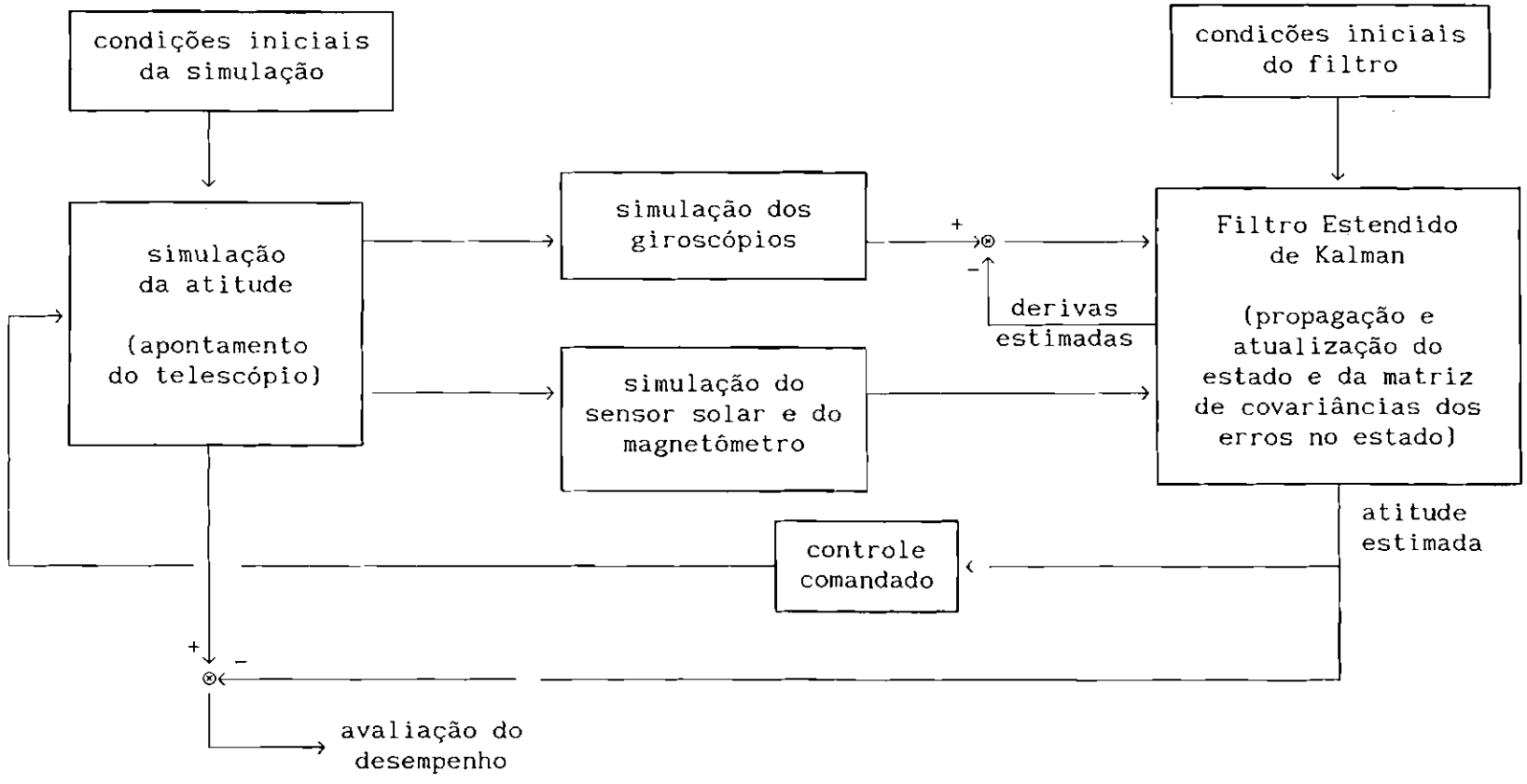


Fig. 4.1 - Algorítmo das simulações.

4.2 - DESCRIÇÃO DOS PARÂMETROS DE DESEMPENHO

Os parâmetros estabelecidos para avaliação dos resultados obtidos, em relação ao funcionamento do Filtro Estendido de Kalman e à configuração simplificada, são:

- erros reais: erros entre o apontamento simulado e o apontamento estimado pelo filtro, e entre as derivas simuladas para os giroscópios e seus valores estimados;

- erros estimados: estimativas dos erros de filtragem obtidos através da matriz de covariâncias dos erros no estado.

Estes erros estão definidos da seguinte forma:

- erro real em quatérnion:

$$\Delta\bar{q} = [\sum_{i=1}^{4} (q_i - \hat{q}_i)^2]^{1/2} \; ; \tag{4.1}$$

- erro estimado em quatérnion:

$$\Delta\hat{\bar{q}} = [\sum_{i=1}^{4} P_{ii} \;]^{1/2} \; , \tag{4.2}$$

onde P_{ii} é o elemento da i-ésima linha e da i-ésima coluna da matriz de covariâncias dos erros no estado;

- erro real em deriva:

$$\Delta\underline{b} = [\sum_{i=1}^{3} (b_i - \hat{b}_i)^2 \;]^{1/2} \; ; \tag{4.3}$$

-erro estimado em deriva:

$$\Delta\hat{\underline{b}} = [\sum_{i=5}^{7} P_{ii}\ ]^{1/2} \ . \tag{4.4}$$

A evolução temporal desses parâmetros estão apresentados em gráficos comparativos, com as curvas dos valores reais e estimados dos erros em quatérnion e em deriva, de forma a verificar a confiabilidade dos resultados de estimação. Na configuração simplificada do filtro, com ganho de Kalman constante e previamente determinado, apenas a curva dos valores dos erros reais é apresentada porque os valores dos erros estimados são dados pela matriz de covariâncias dos erros no estado, e neste caso esta matriz não é calculada.

Outro parâmetro que permite analisar o funcionamento do Filtro Estendido de Kalman é o resíduo de cada componente do vetor observação, definido pela diferença entre os valores simulados para a observação e os valores calculados com a última estimativa propagada do estado. Este resíduo não deve ultrapassar o triplo do valor do desvio padrão dos ruídos de observação. Para facilitar a análise, toma-se uma média dos resíduos das componentes do vetor de observação normalizados pelo valor do desvio padrão do respectivo ruído. Desta forma, este resíduo normalizado médio não deve ultrapassar três unidades. O cálculo do resíduo normalizado é feito através de

$$r = [\sum_{i=1}^{5} (y_i-\hat{y}_i)\ /\sigma_i\ ]/5 \ , \tag{4.5}$$

onde y_i = valor da componente da observação

$\hat{y}_i$ = valor calculado com estado propagado

σ_i = desvio padrão do ruído de observação

Outros gráficos, que mostram o desempenho do filtro e do sistema de controle em função dos resultados do filtro, apresentam a

evolução temporal das seguintes variáveis:

- derivas dos três eixos de giroscópio, valores simulados e estimados;

- erro em θ ($\Delta\theta$), que segundo a Equação 2.19, mostra a resultante dos erros de apontamento nos eixos x e z;

- erro em th_y (Δth_y), que mostra o erro de apontamento no eixo y;

- erro de apontamento total, que é a resultante dos erros de apontamento nos três eixos e é o parâmetro que atesta o funcionamento do sistema de controle de atitute do telescópio, segundo a especificação do projeto;

- valores das variáveis de controle em volts (u_1 e u_2), que permite avaliar a utilização dos motores de elevação do telescópio e da roda de reação (azimute) e suas especificações.

4.3 - RESULTADOS

Na simulação do movimento do balão, para um apontamento nominal de θ_0 = 45 graus (0,7854 rad), ψ_0 = 100 graus (1,7453 rad) e ϕ_0 = 0 grau, foram adotados os seguintes valores iniciais:

θ_i = 0,7868 rad ;

ψ_i = 1,7456 rad ;

ϕ_i = 0,0014 rad ;

$(d\theta/dt)_i$ = 0,0018 rad/s ;

$(d\psi/dt)_i$ = $-5,0.10^{-5}$ rad/s ;

$(d\phi/dt)_I = 0,0018$ rad/s .

A simulação das leituras dos giroscópios foram realizadas utilizando-se a Equação 2.59 e foram contaminadas com deriva aleatória com desvio padrão de 0,11 grau/hora ($5,0.10^{-7}$ rad/s) e deriva constante de 1 grau/hora ($4,8.10^{-6}$ rad/s). Para os sensores não inerciais a simulação das leituras utilizaram a Equação 3.23, vetor Sol e campo magnético hipotéticos e constantes, e erros aleatórios com desvio padrão de $1,0.10^{-3}$ rad para o sensor solar, e 2,0 mG para o magnetômetro, compatíveis com os erros dos sensores utilizados no projeto.

Com o objetivo de atenuar os efeitos negativos da perturbação oscilatória do movimento pendular na estimação das derivas, foi utilizado um filtro passa-baixa nas estimativas das derivas. O resultado observado na Figura 4.3 apresenta a aplicação deste filtro a partir do instante 150 s.

As condições iniciais adotadas para as duas configurações são mostradas na Tabela 4.1.

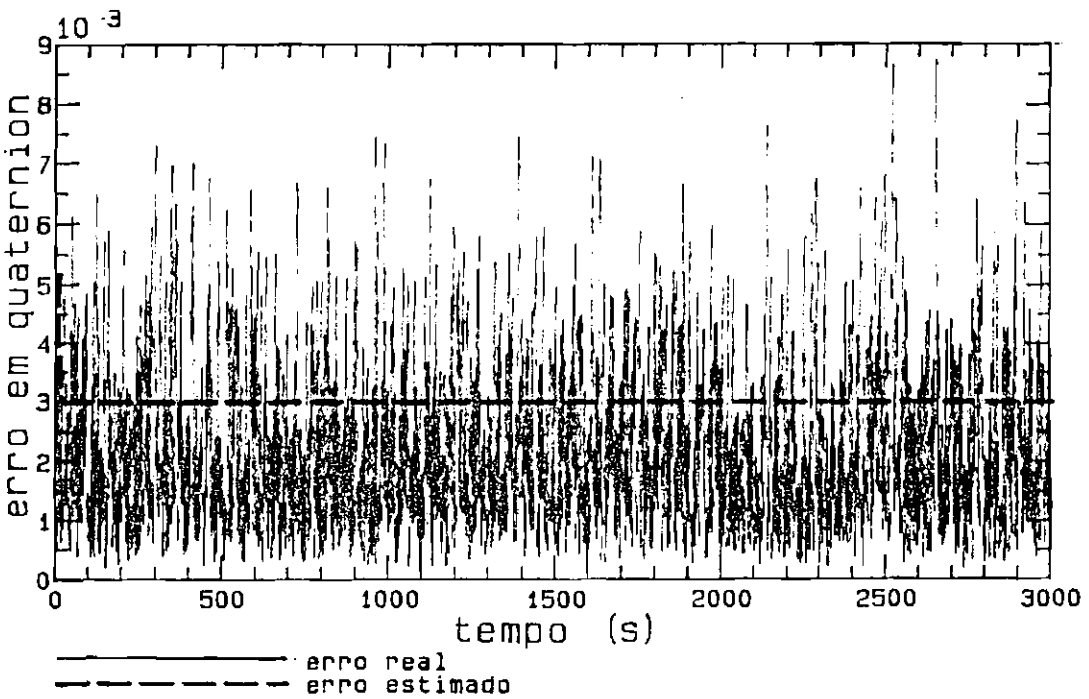
TABELA 4.1 - CONDIÇÕES INICIAIS DE SIMULAÇÃO

configuração	completa	simplif.
tempo de simulação	3000 s	3000 s
intervalo de propagação	0,125 s	0,125 s
intervalo de atualização	1,0 s	1,0 s
precisão nas cond. iniciais/quat.	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-3}$
precisão nas cond. iniciais/deriva	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-3}$
variância inicial / quatérnion	diag(10^{-1})	-
variância inicial / deriva	diag(10^{-1})	-
variância do ruído no estado/quat.	diag(10^{-11})	-
variância do ruído no estado/deriva	diag(10^{-7})	-
variância do ruído na observ./s.solar	diag(10^{-6})	diag(10^{-6})
variância do ruído na observ./magnet.	diag(4,0)	diag(4,0)

Os valores da variância do ruído no estado foram obtidos por tentativa e erro a partir de valores encontrados na literatura, e

ajustados segundo as performances observadas nos gráficos característicos do filtro. O ganho de Kalman constante utilizado na configuração simplificada foi obtido na simulação com o filtro completo.

Os resultados dos testes de simulação estão apresentados nas Figuras 4.2 a 4.13.



(a)

Fig. 4.2 - Erro em quatérnion (filtro completo): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s.

(continua)

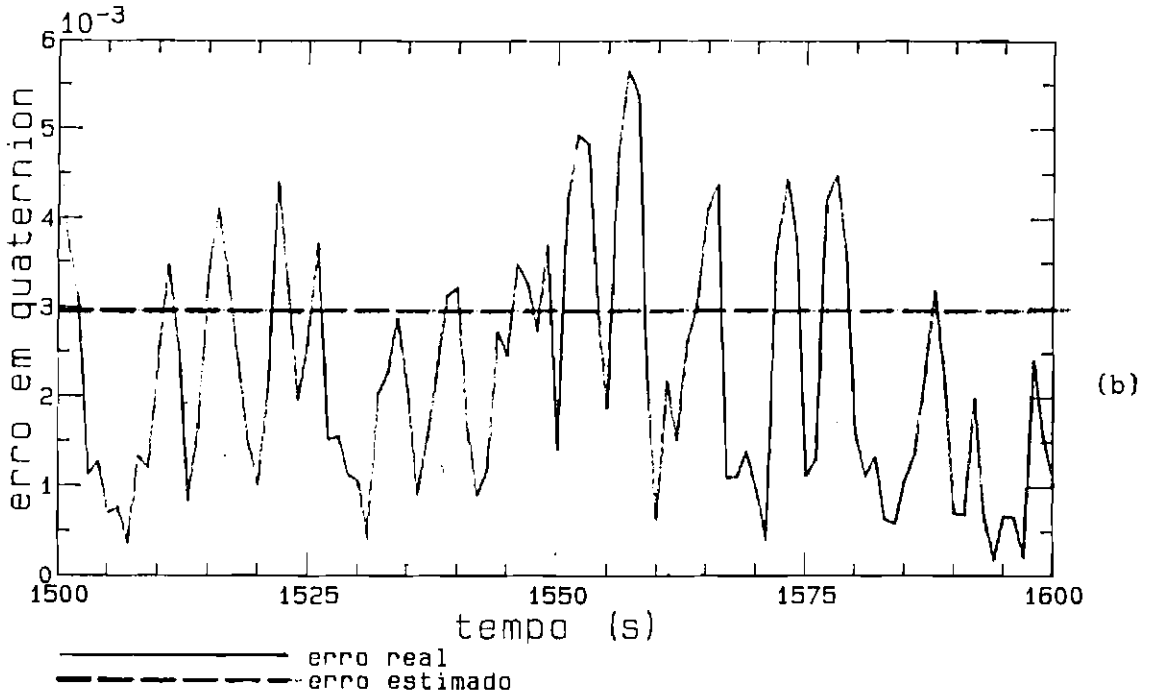


Fig. 4.2 - Conclusão.

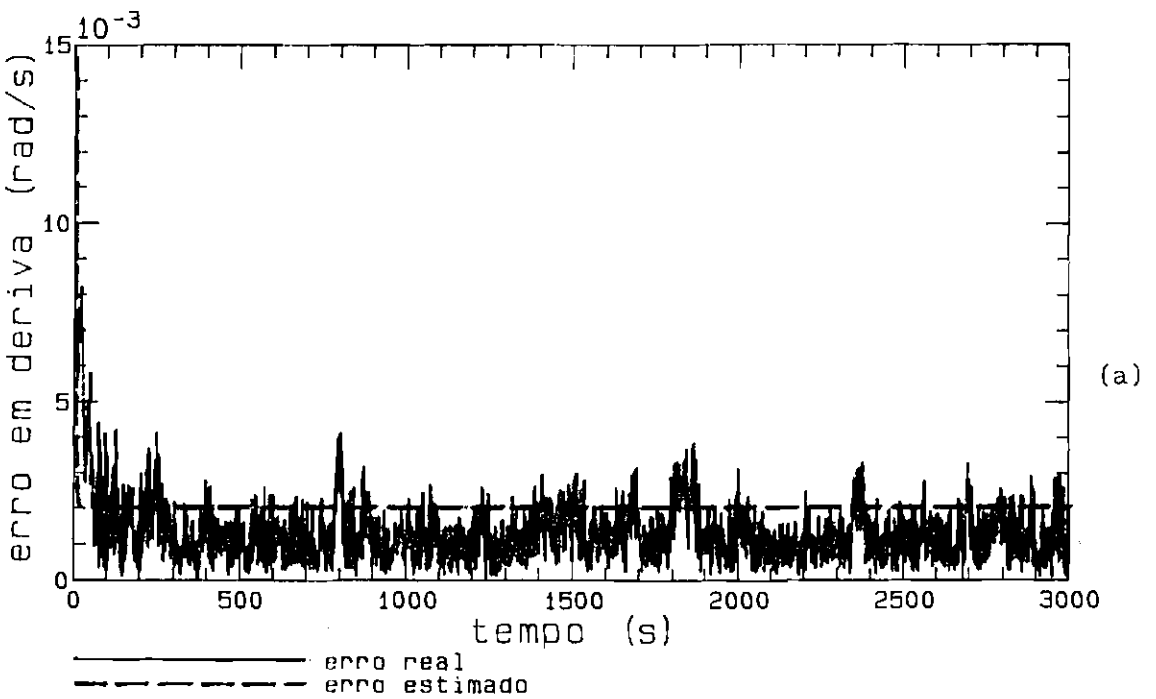
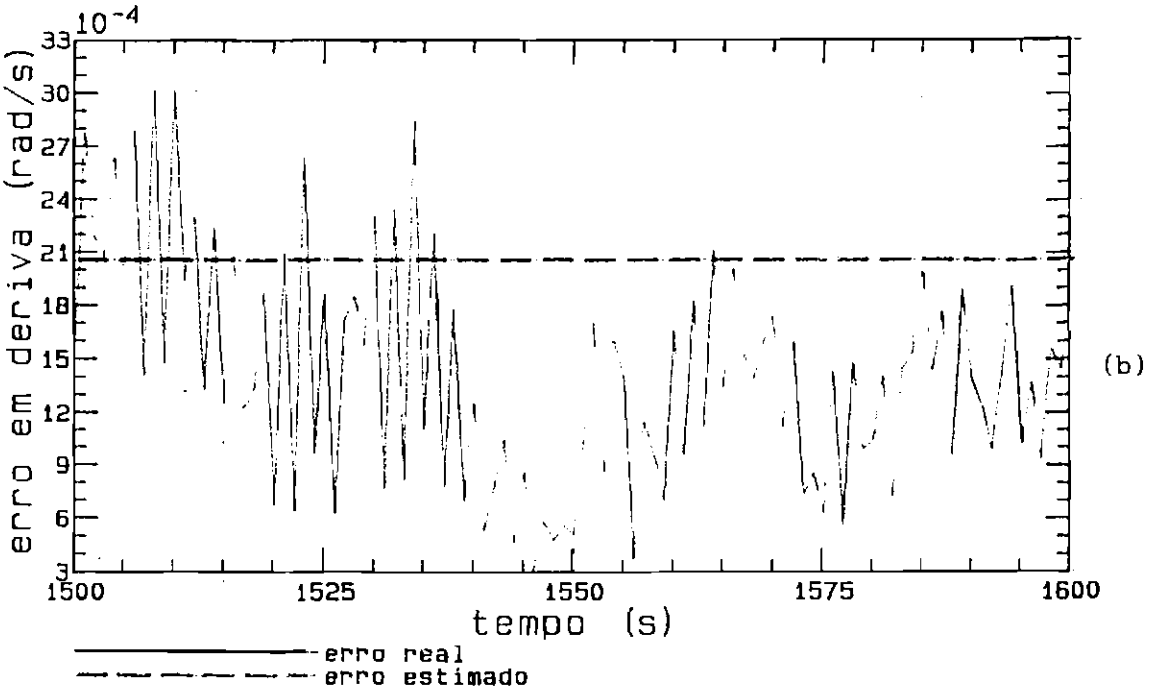


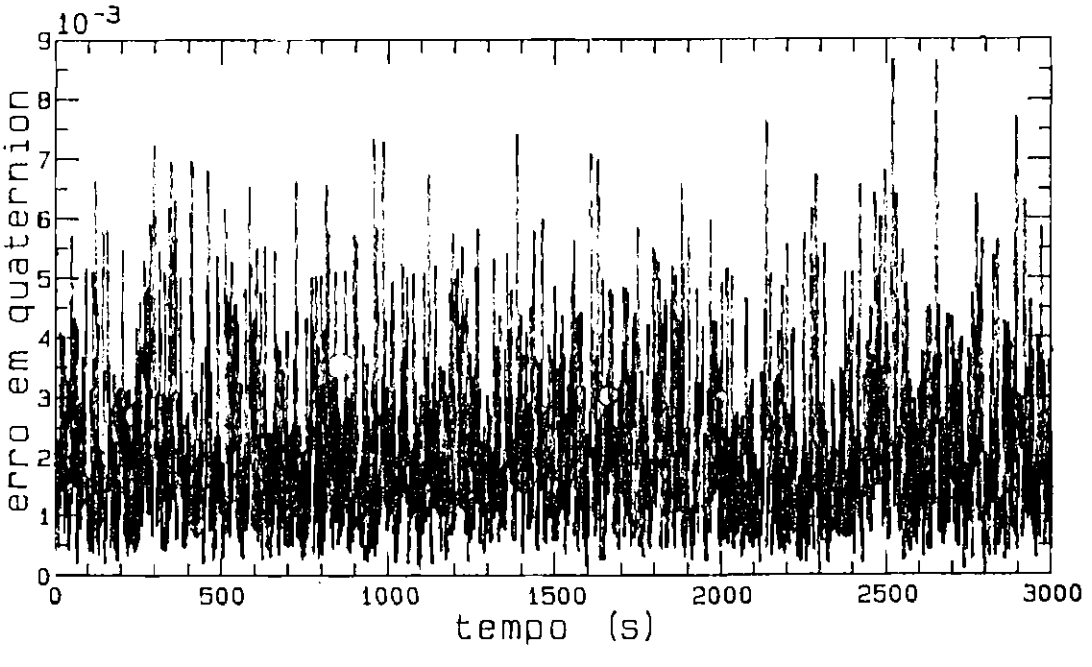
Fig. 4.3 - Erro em deriva (filtro completo): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s.

(continua)



(b)

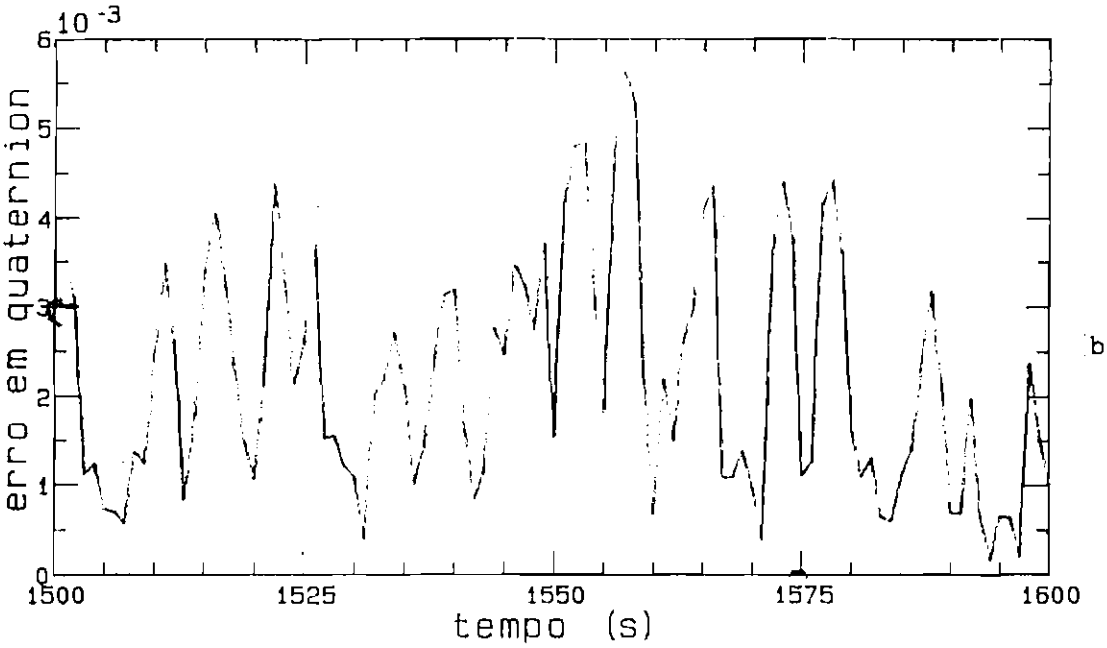
Fig. 4.3 - Conclusão.



(a)

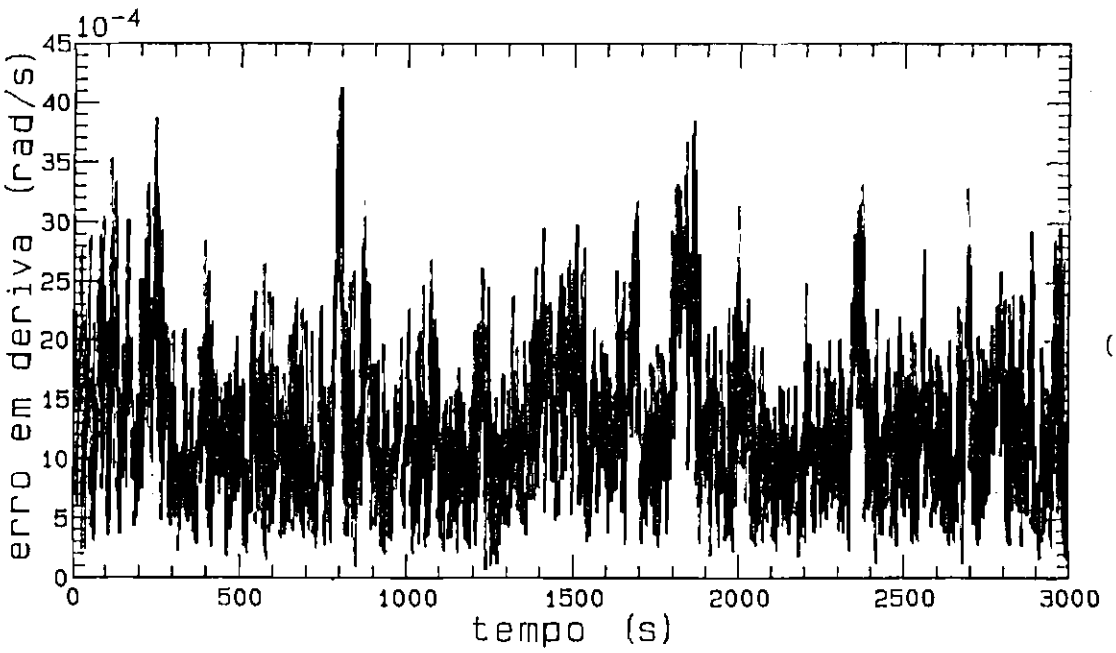
Fig. 4.4 - Erro em quatérnion (filtro simplificado): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s.

(continua)



b)

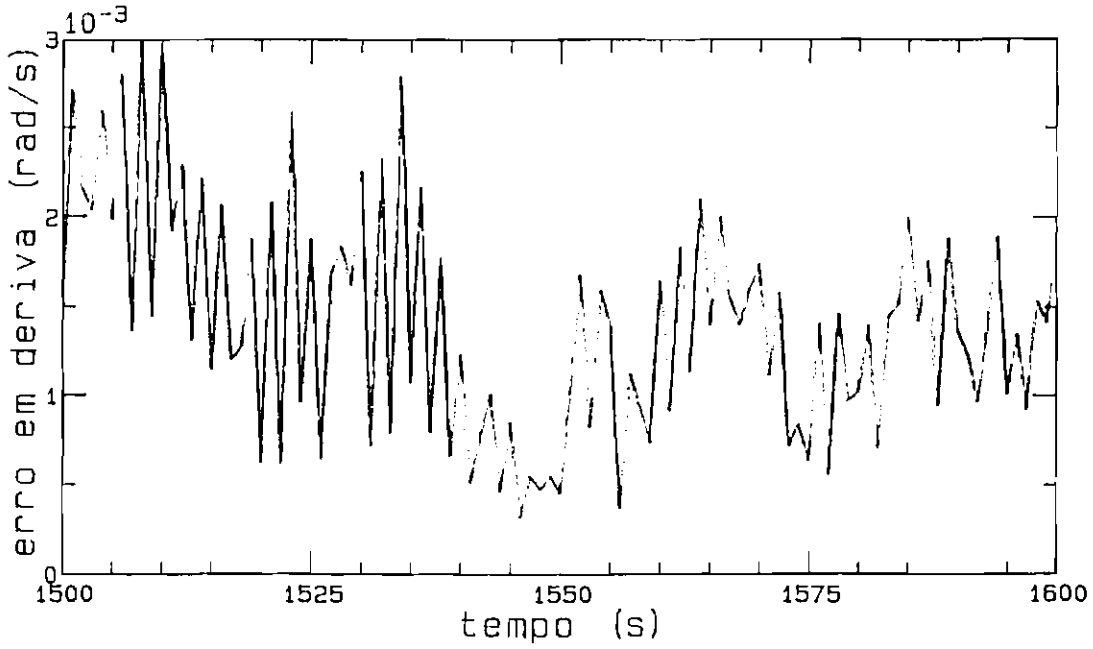
Fig. 4.4 - Conclusão.



(a)

Fig. 4.5 - Erro em deriva (filtro simplificado): a)de 0 a 3000 s; b)de 1500 a 1600 s.

(continua)



(b)

Fig. 4.5 - Conclusão.

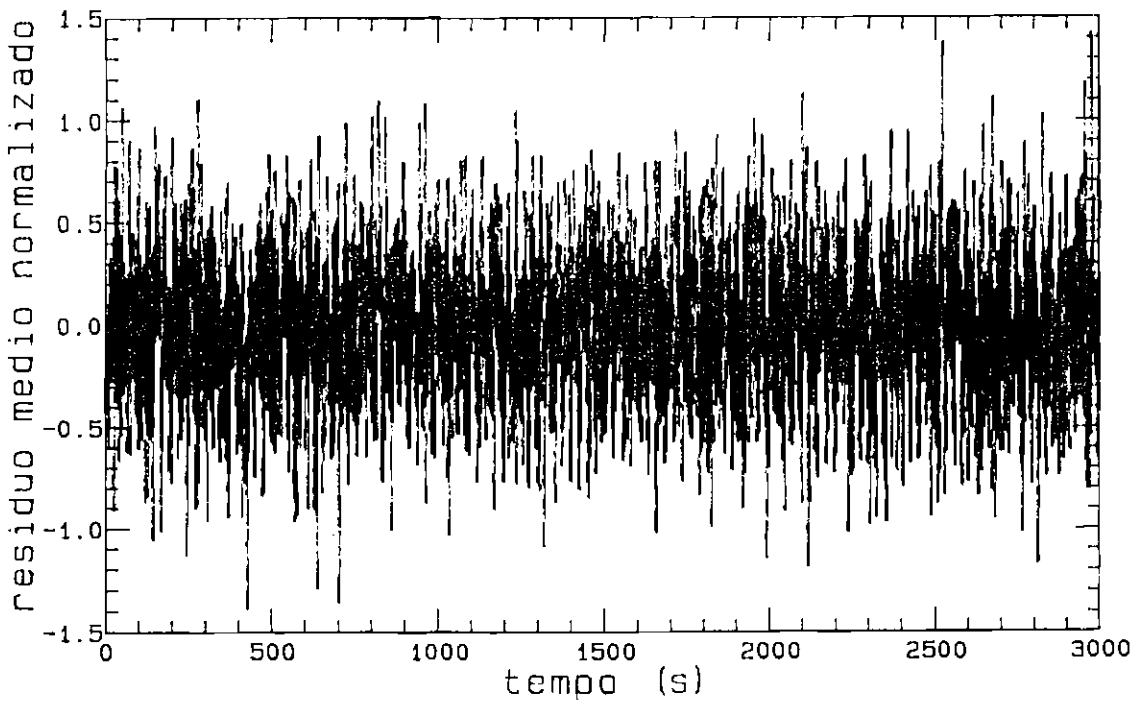


Fig. 4.6 - Resíduo médio normalizado (filtro completo).

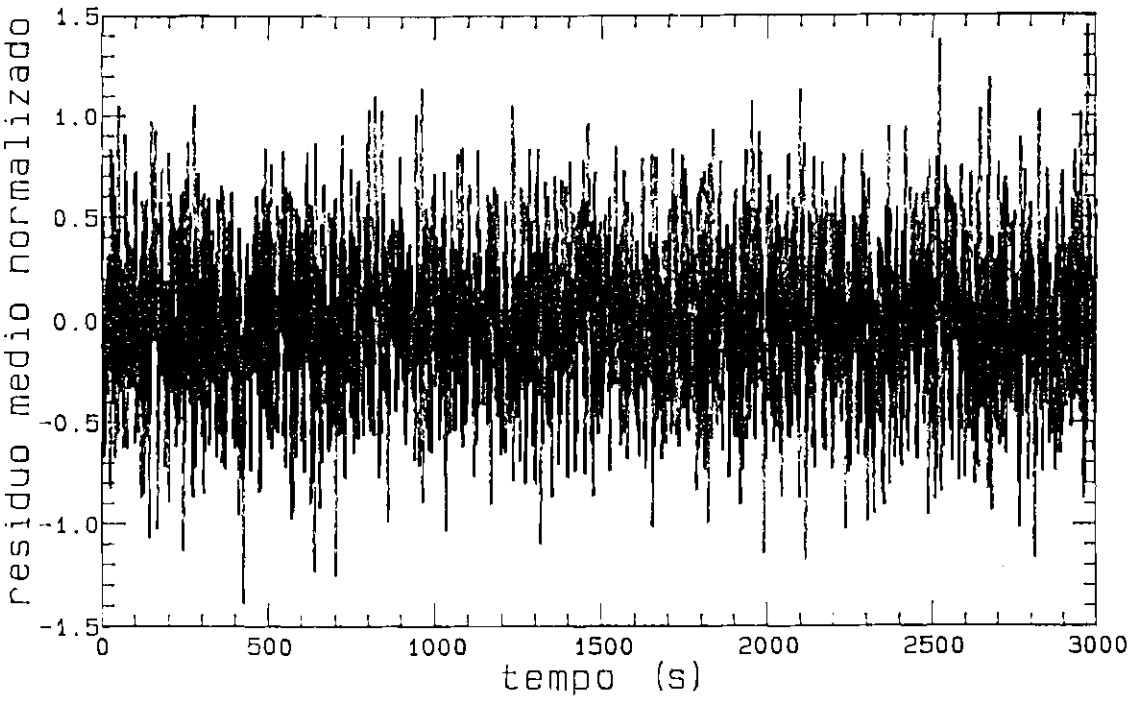


Fig. 4.7 - Resíduo médio normalizado (filtro simplificado).

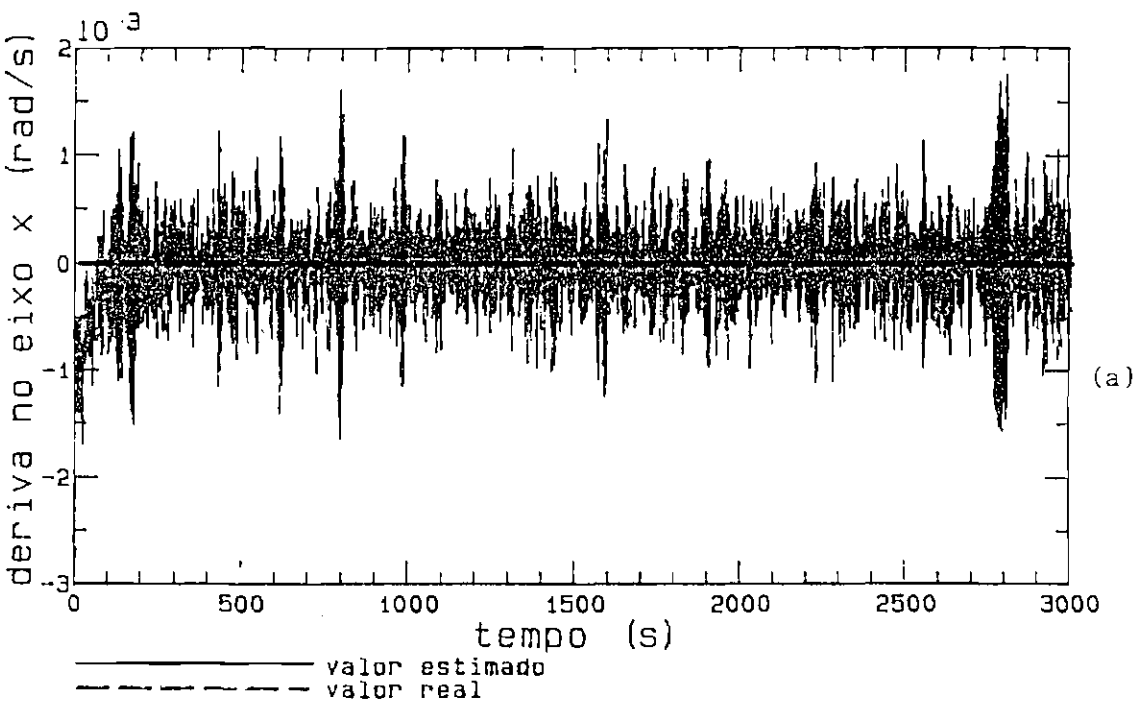
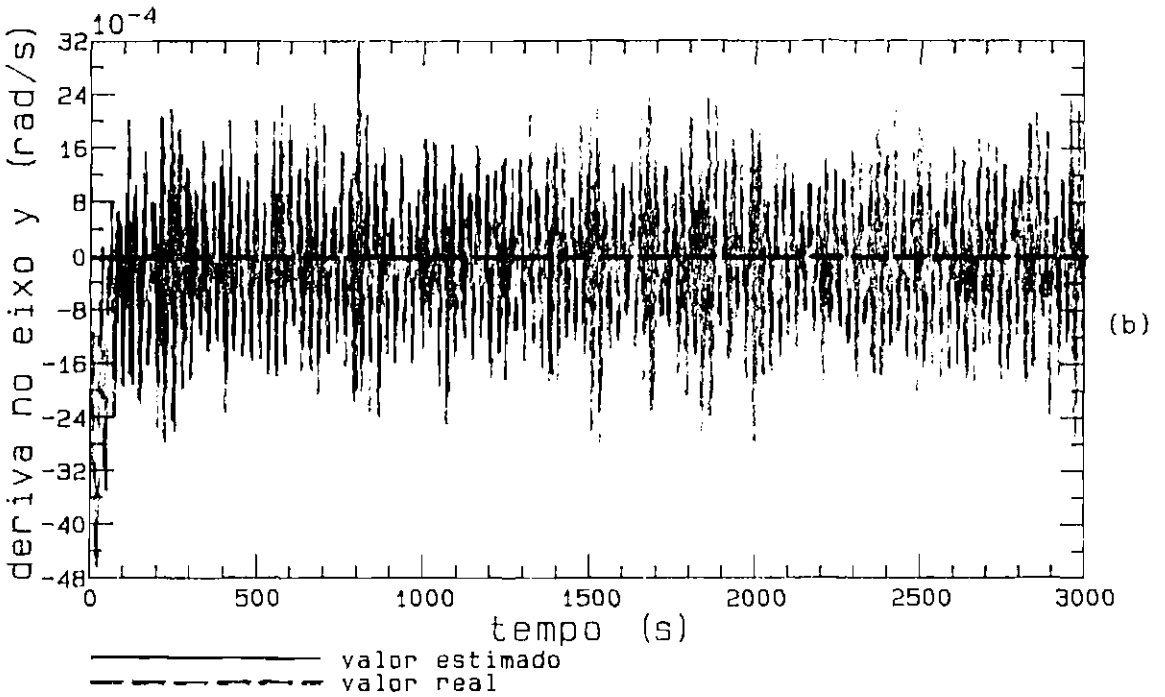


Fig. 4.8 - Derivas simuladas e estimadas (filtro completo): a)eixo x; b)eixo y; c)eixo z.

(continua)



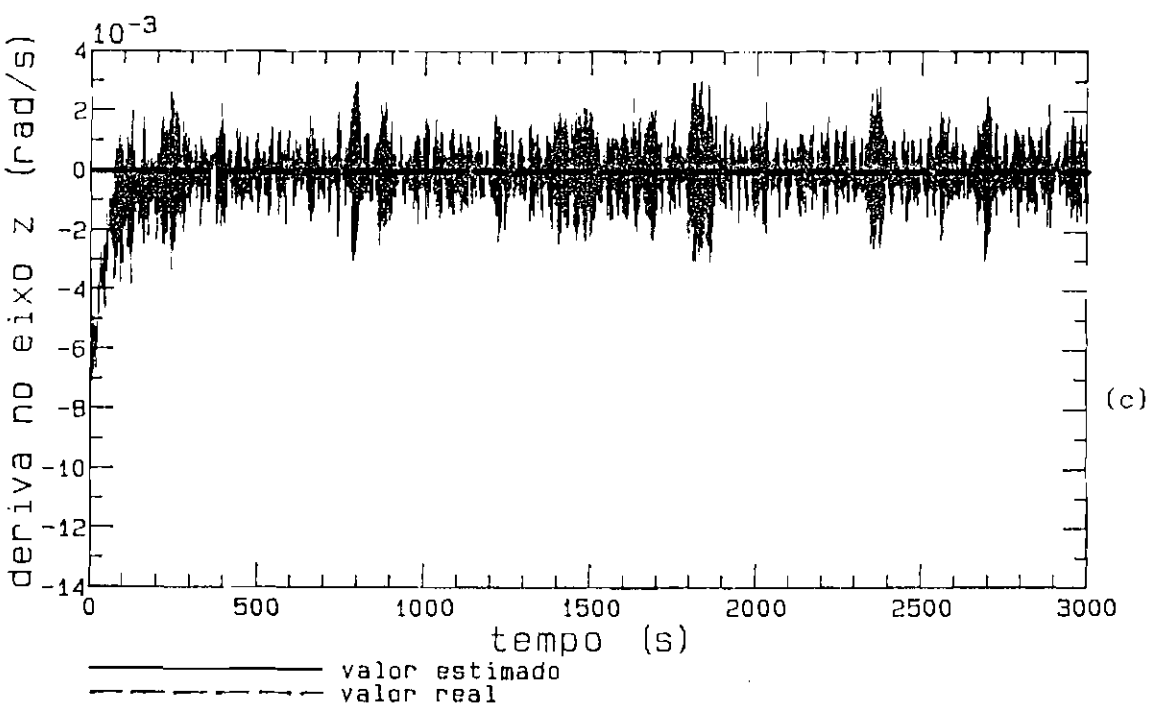
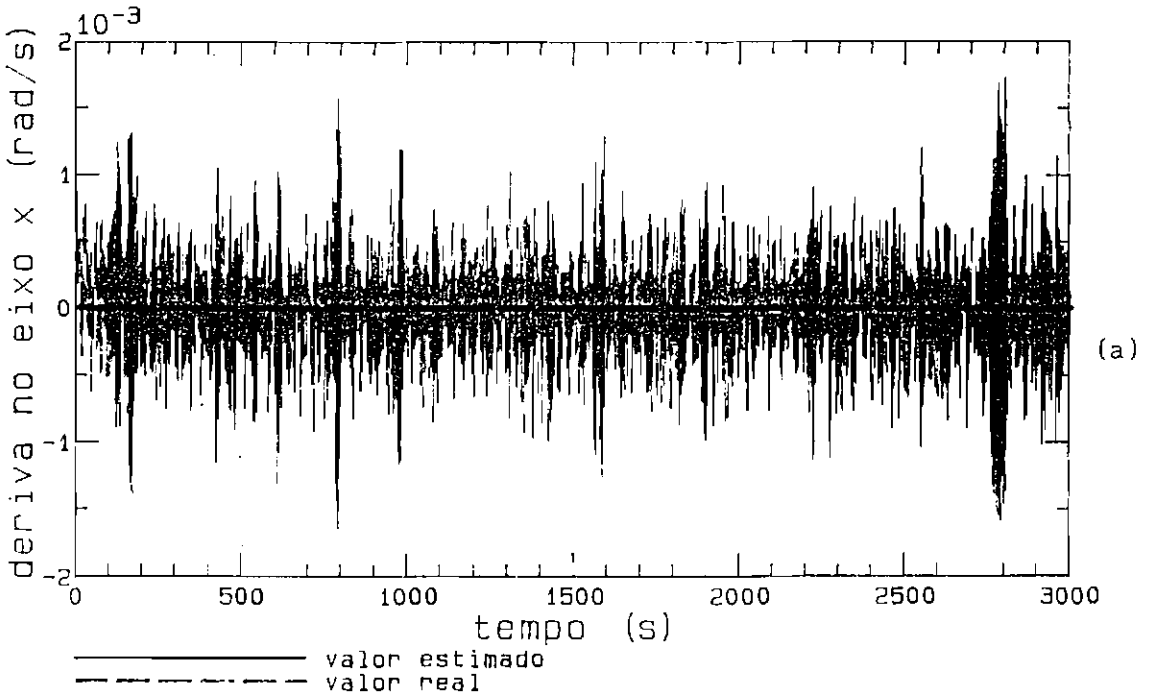


Fig. 4.8 - Conclusão.



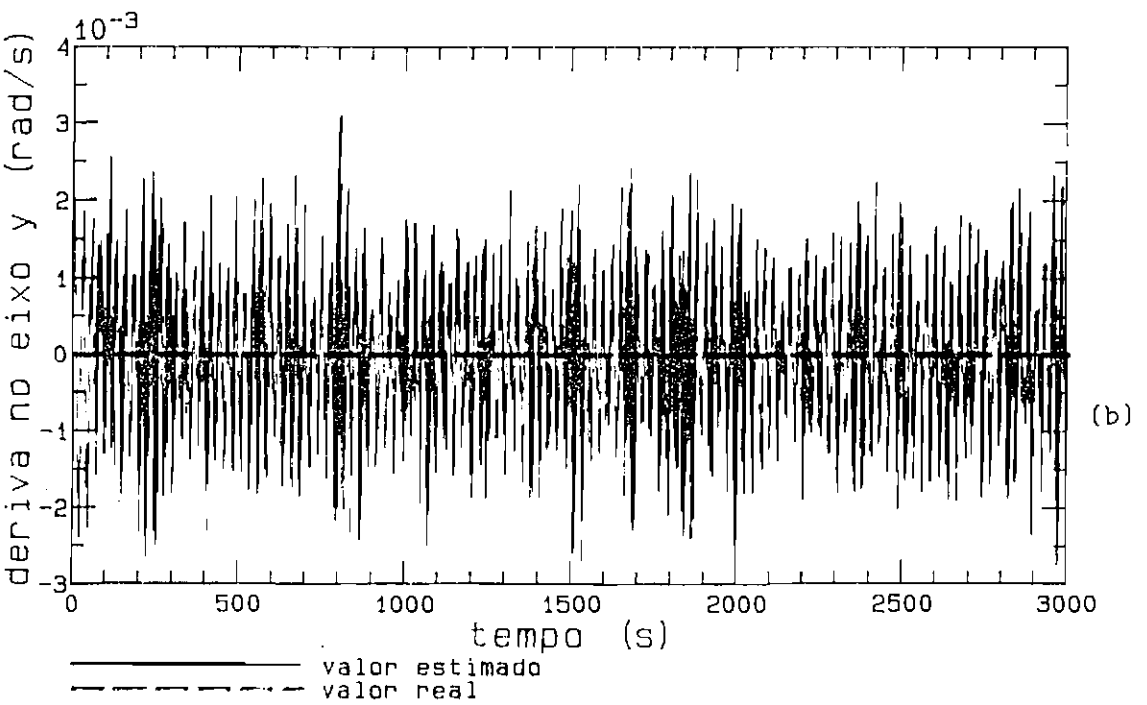


Fig. 4.9 - Derivas simuladas e estimadas (filtro simplificado): a)eixo x; b)eixo y; c)eixo z.

(continua)

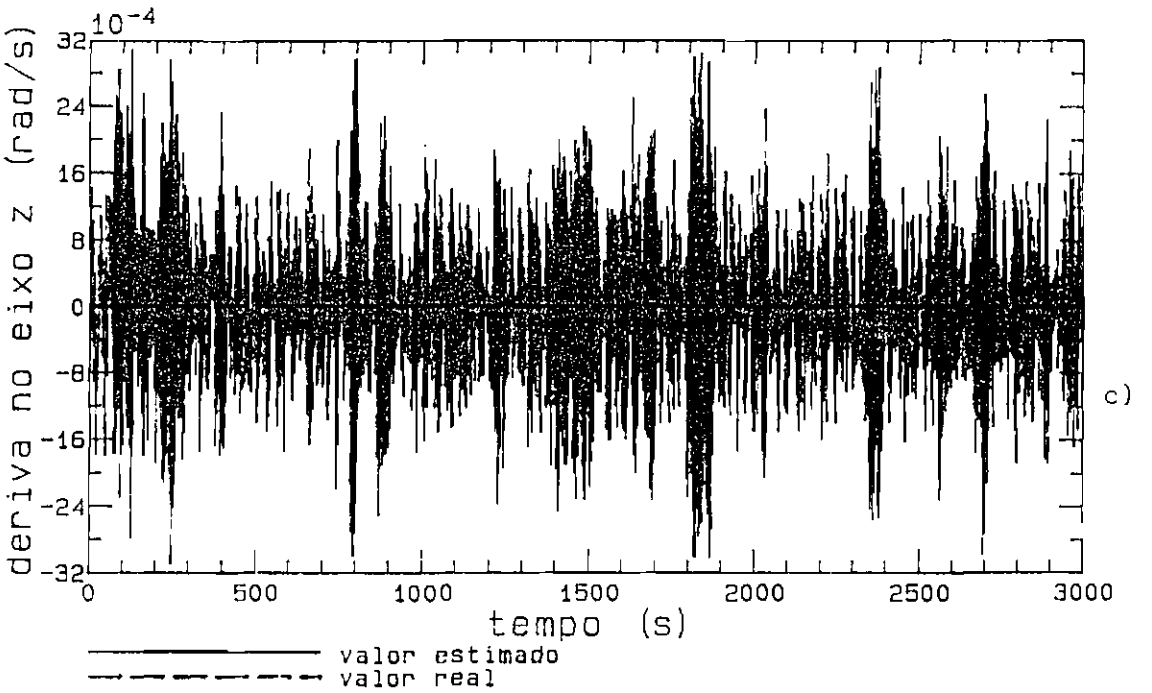


Fig. 4.9 - Conclusão.

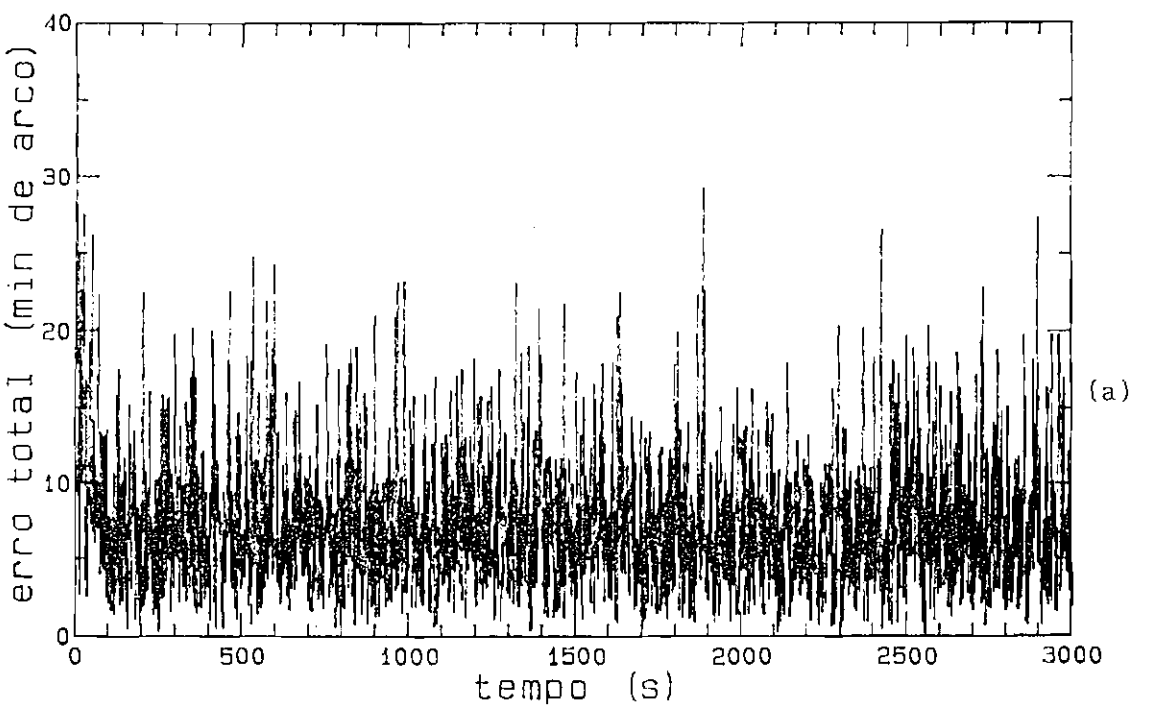
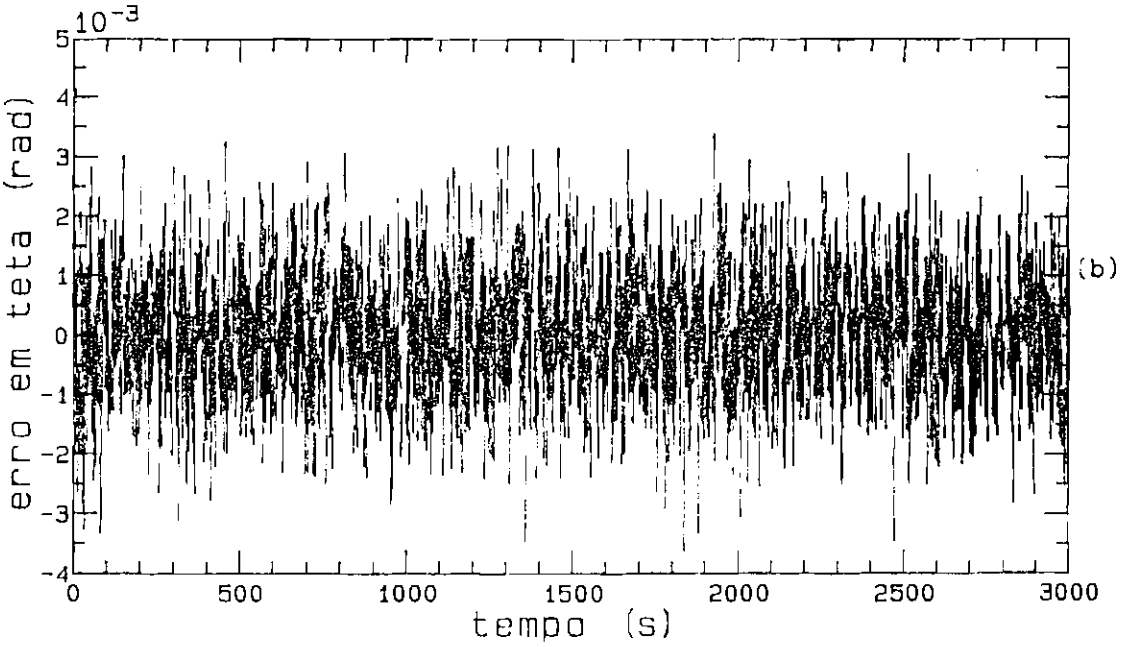


Fig. 4.10 - Erro de apontamento (filtro completo): a)erro total; b)erro em θ; c)erro em th_y.

(continua)



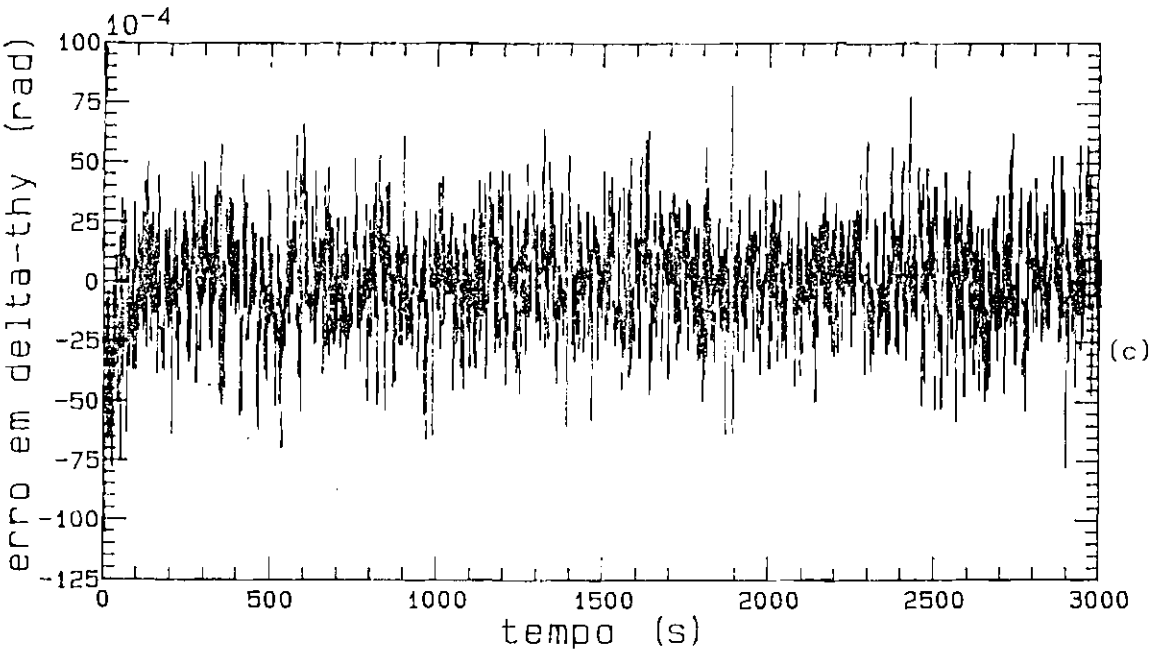
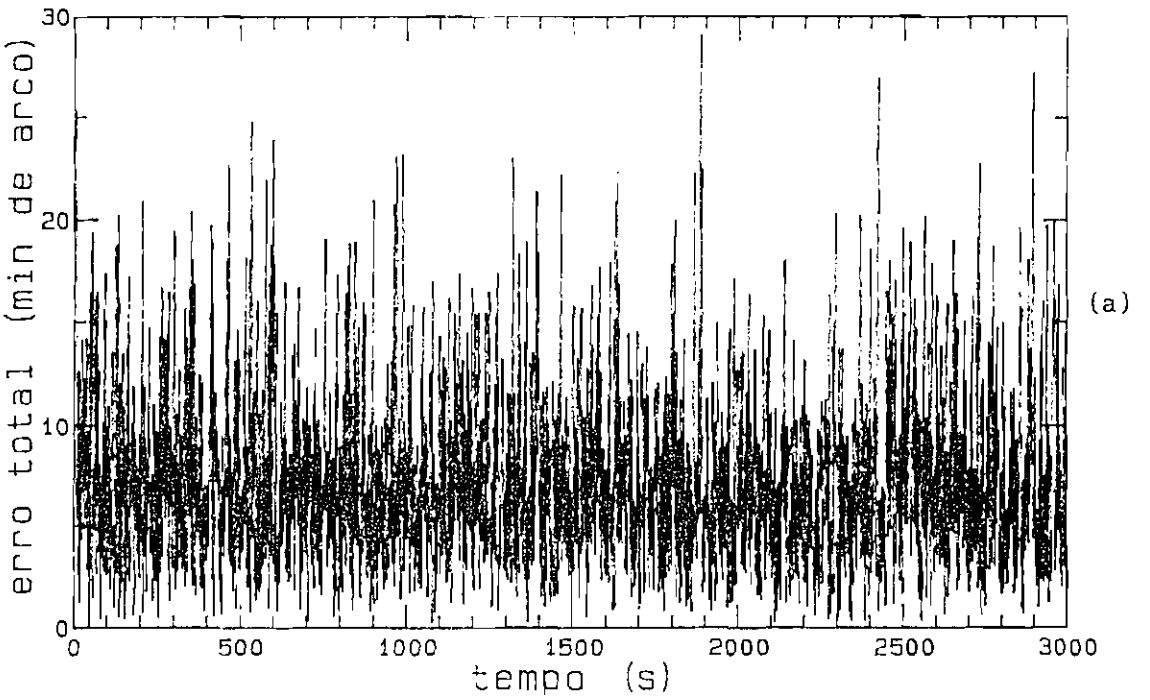


Fig. 4.10 - Conclusão.



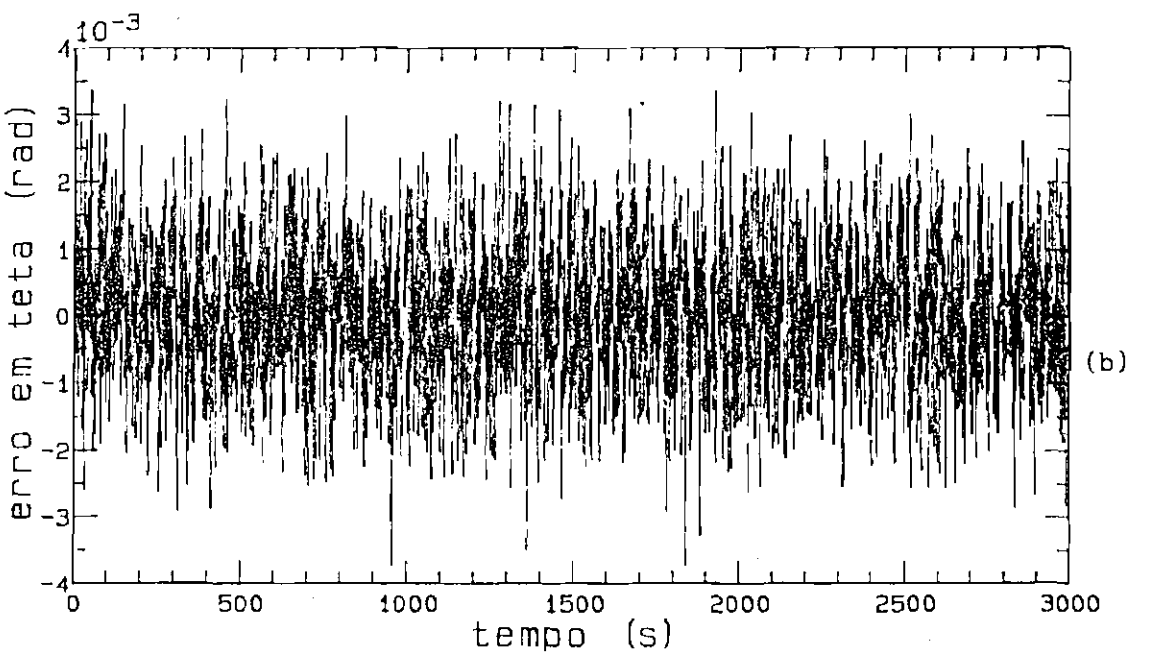


Fig. 4.11 - Erro de apontamento (filtro simplificado): a)erro total; b)erro em θ; c)erro em th_y.

(continua)

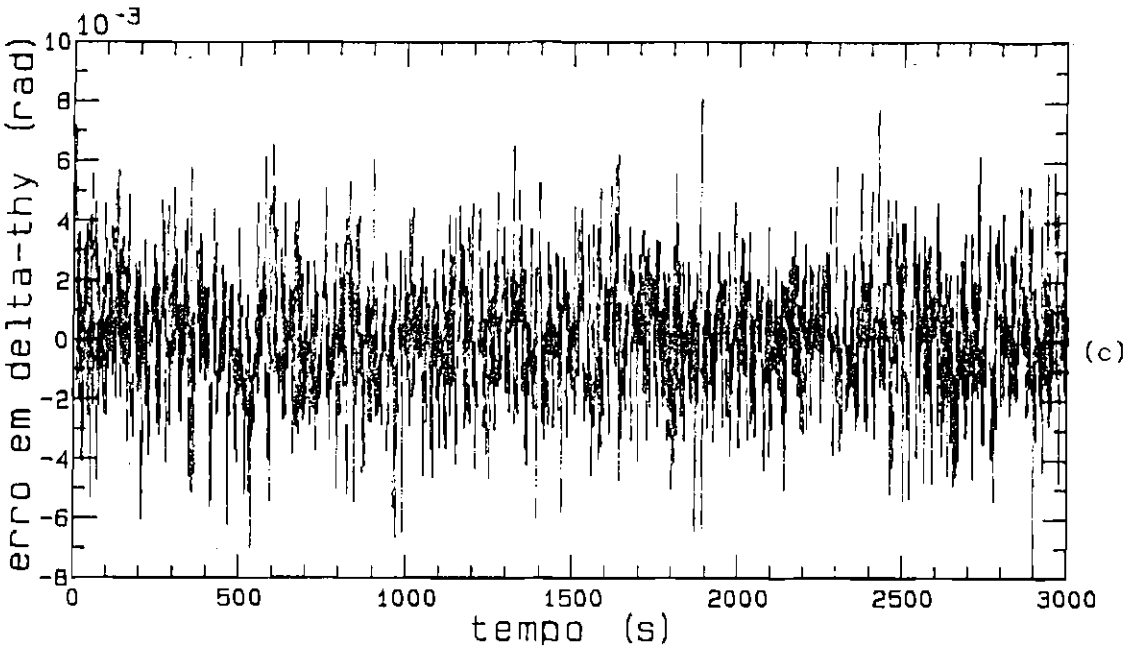


Fig. 4.11 - Conclusão.

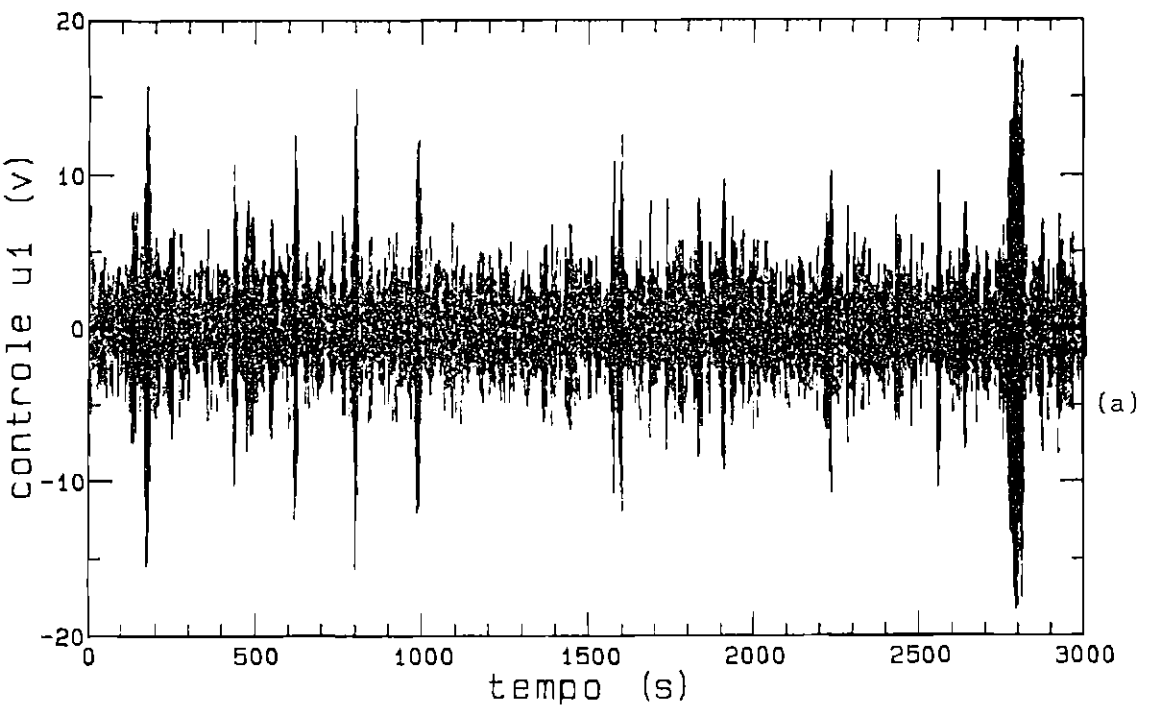


Fig. 4.12 - Variáveis de controle (filtro completo): a)u_1; b)u_2.

(continua)

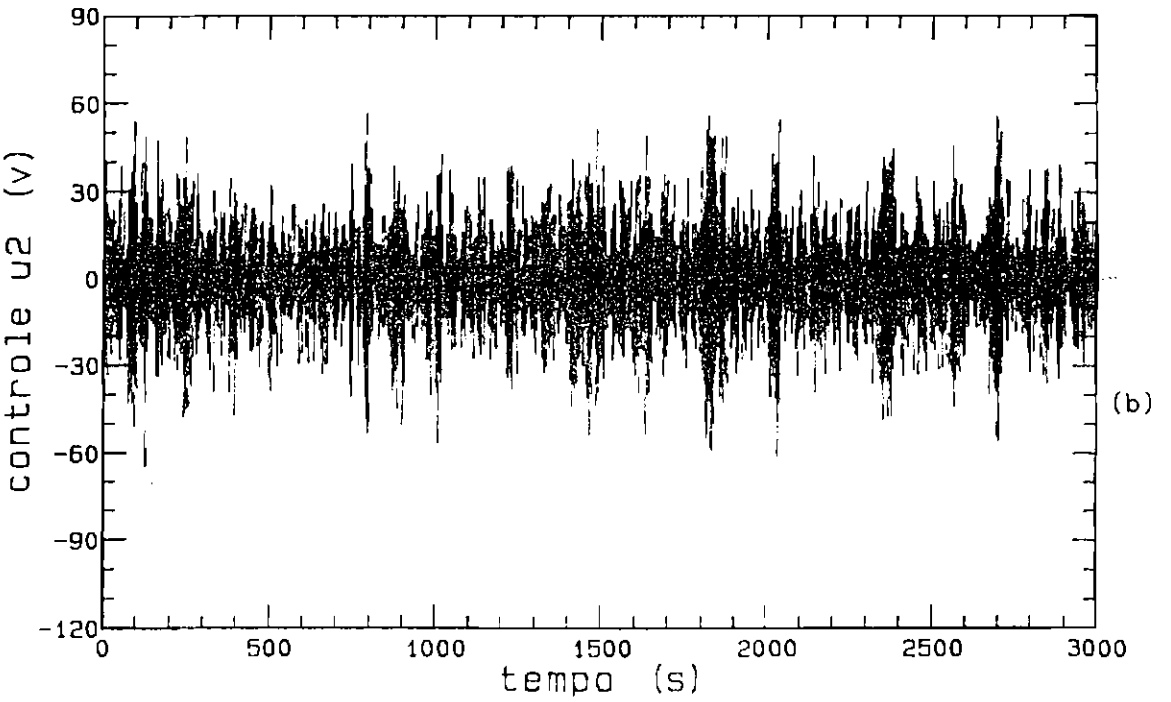


Fig. 4.12 - Conclusão.

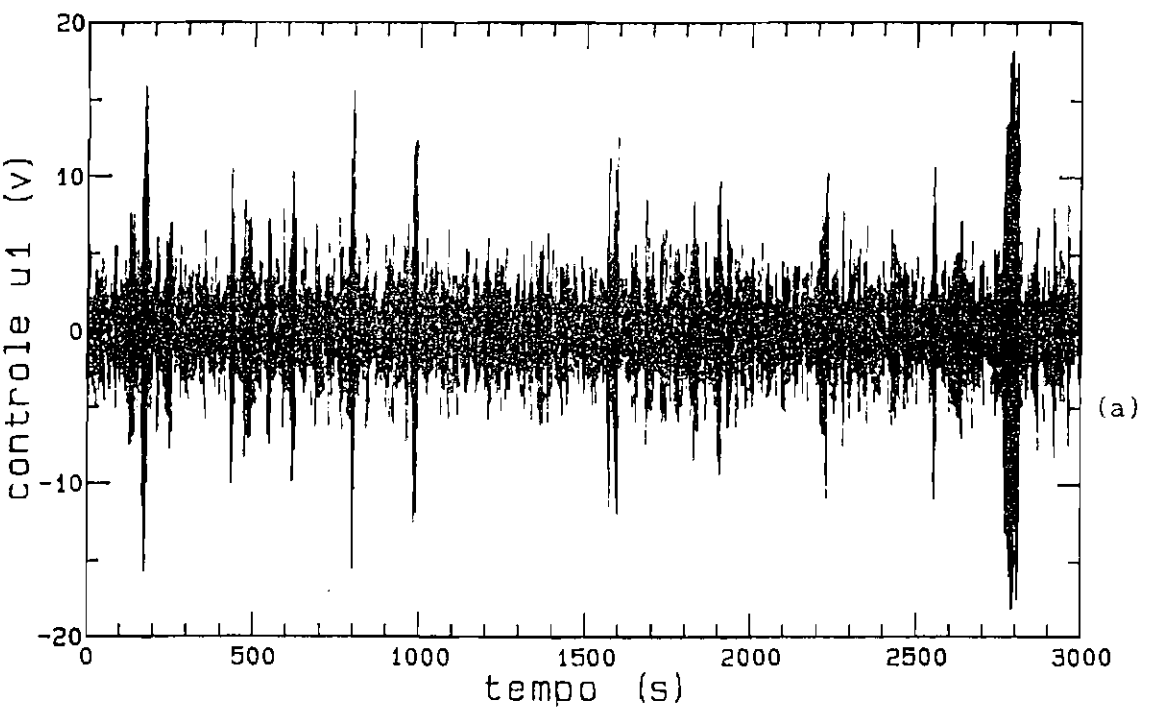


Fig. 4.13 - Variáveis de controle (filtro simplificado): a)u_1; b)u_2.

(continua)

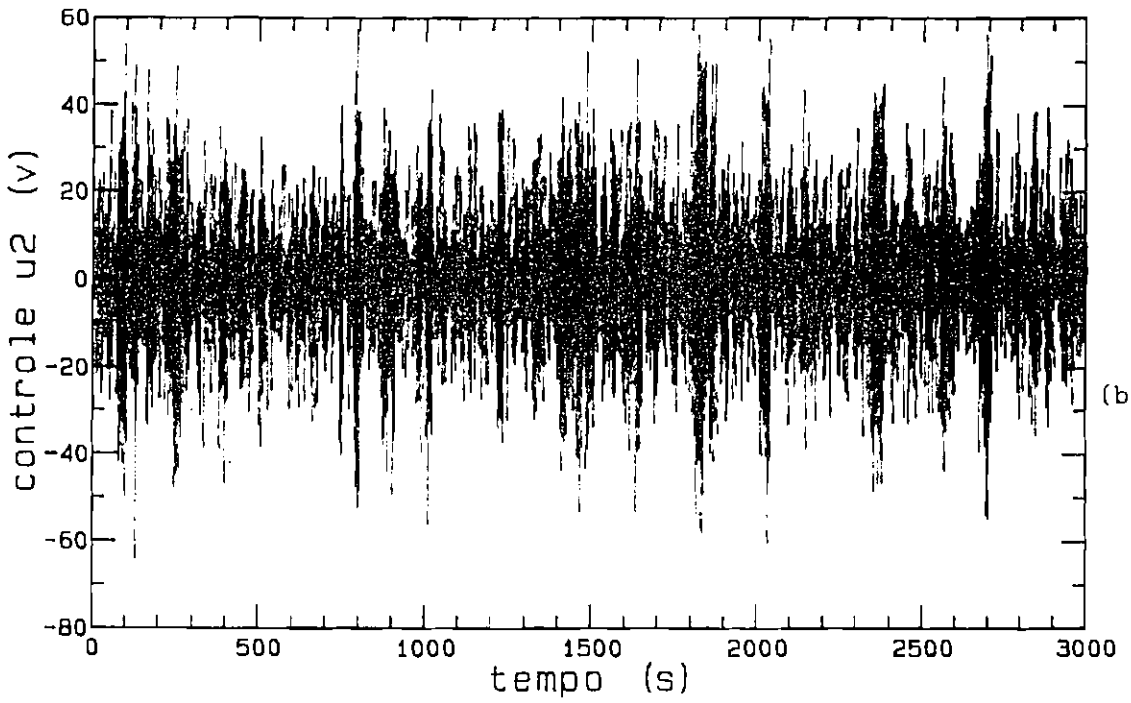


Fig. 4.13 - Conclusão.

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram as curvas dos erros estimados e reais nas estimativas do quatérnion e das derivas para o filtro completo. As curvas dos valores dos erros estimados convergem para um regime estável e superiores aos valores médios dos erros reais. A perturbação oscilatória do movimento pendular, apesar de não interferir na convergência e na estabilidade do funcionamento do filtro, é bastante significativa e pode ser observada sobretudo na curva das derivas. Para a configuração simplificada as curvas dos erros reais do quatérnion e da deriva estão apresentadas nas Figuras 4.4 e 4.5.

As Figuras 4.6 e 4.7 apresentam, para as duas configurações, o resíduo definido pela Equação 4.5, com média nula e contido dentro de uma faixa muito inferior a três unidades. Estas curvas confirmam o funcionamento adequado do estimador.

As curvas das derivas simuladas e estimadas estão mostradas na Figura 4.8 para o filtro completo e na Figura 4.9 para o filtro com ganho constante. Nestas curvas pode ser verificado o efeito da perturbação oscilatória.

O sistema de controle pode ser avaliado nas Figuras 4.10 (filtro completo) e 4.11 (ganho constante), que mostram o erro total real de apontamento e suas componentes que são definidas nas Equações 2.17 e 2.19. Estas curvas apresentam média de 7,3896 minutos de arco, desvio padrão de 4,3229, limite superior (média mais três vezes o desvio padrão) de 20,3583 para o filtro completo, e média de 7,4081, desvio padrão de 4,3245 e limite suparior de 20,3816 para o filtro simplificado. Observa-se, portanto, que a especificação de erro máximo do projeto (20 minutos de arco) foi satisfeita.

As variáveis de controle u_1 e u_2, apresentadas nas Figuras 4.12 (filtro completo) e 4.13 (ganho constante), são os sinais de entrada dos motores de elevação e da roda de reação. Os valores encontrados estão dentro do limite nominal de funcionamento que é cerca de 20 volts (em regime).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões tiradas das várias etapas do trabalho, e as sugestões para sua continuidade e sua aplicação no projeto MASCO.

5.1 - CONCLUSÕES

A aplicação da técnica de estimação via filtro estendido de Kalman no sistema de controle do telescópio mostrou-se bastante satisfatória. Os resultados apresentados no Capítulo 4 confirmam a validade da substituição do modelo dinâmico do movimento do telescópio pelo modelo cinemático do giroscópio nas equações de estado do filtro.

A perturbação oscilatória do movimento pendular, apesar dos efeitos negativos observados na estimação, não comprometeram a convergência e a estabilidade do filtro. Porém, as derivas, além do fato de serem pouco observáveis, têm suas estimativas bastante prejudicadas pela perturbação.

Comparando o desempenho das duas configurações utilizadas, o filtro completo e o filtro simplificado com ganho constante, verificou-se que não apresentaram diferenças significativas para as mesmas condições nas simulações, apenas uma diminuição no transiente no início da simulação no caso do ganho constante. A configuração simplificada de filtragem, além de obter resultados equivalentes aos do filtro completo, apresentou uma grande redução na quantidade de cálculos e, consequentemente, no tempo de processamento.

O projeto MASCO prevê um sistema de controle com processamento realizado por computador embarcado no balão estratosférico. Conclue-se, portanto, que a utilização da configuração simplificada de estimação é a mais recomendável porque, obtendo um desempenho satisfa-

tório, apresenta tempo de processamento reduzido.

O sistema de controle cumpriu as metas especificadas para o erro de apontamento na fase de estabilização, ou seja, erro máximo de 20 minutos de arco. Isto mostra que a precisão das estimativas do apontamento, que alimentam o sistema de controle, foi suficiente para a estabilização do telescópio.

Os objetivos iniciais do trabalho: a aplicação do filtro de Kalman no problema, as simulações do movimento do balão e do sistema de controle, a comparação das duas configurações de estimação, e a obtenção de uma referência para o projeto MASCO, segundo os resultados apresentados, pode-se considerar que foram alcançados.

5.2 - SUGESTÕES

Com o intuito de melhorar o desempenho deste trabalho em sua aplicação no projeto MASCO, e de dar subsídios para desenvolvimentos futuros nesta área, pode-se citar as seguintes sugestões:

1) Estudar mais detalhadamente a fase de propagação do estado, visando aumentar o intervalo entre as atualizações das estimativas.

2) Realizar simulações com modelos de Sol e campo magnético mais completos e variáveis no tempo, para testar a convergência do filtro e o funcionamento do sistema de controle para diferentes posicionamentos destes parâmetros, assim como situações de ocorrência de sombra, onde o sensor solar não pode ser utilizado.

3) Adicionar outras perturbações na simulação de atitude do telescópio, além do ruído branco da modelagem do Capítulo 2, de modo a aumentar a confiabilidade do sistema de controle.

4) Estudar as possibilidades de não incluir as derivas na estimação, devido à pequena precisão desta parte do filtro, e utilizar outras formas de compensação como recalibração periódica dos giroscópios.

5) Propor e testar alterações no sistema de controle, com o objetivo de utilizar mais plenamente os limites dos motores de elevação e da roda de reação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Athans, M. Key definitions in SISO systems. Cambridge, MA, MIT, 1981. Apostila de curso.

Coyle, L.M.; Aurilio, G.; Nystrom, G.U. Design of a single-axis platform for ballon-born remote sensing. Rev. Sci. Instrum., 57(10):2512-2518, Oct. 1986.

Craig, R.J. Theory of operation of an elastically supported, tuned gyroscope. IEEE Trans. Aer. and Elet. Sys., 8(3):280-288, May 1972.

Durão, O.; Gandelman, G. Controle de atitude de balões estratosféricos. In: Congresso Brasileiro de Automática, 8., Belém, 1990. Anais. Belém, SBA, 1990, p. 1293-1298.

Farman, M.E.; Hardie, A.L. A 3-axis stabilised balloon platform for use during day- and night-time flights. Adv. Space Res., 7(7):121-127, July 1987.

Farrenkopf, R.L. Analytic steady-state accuracy solutions for two common spacecraft attitude estimators. J. Guidance and Control, 1(4):282-284, July/Aug. 1978.

Ferraresi, V.A. Utilização conjunta de sensores inerciais e não-inerciais em determinação de atitude de satélites via filtro de Kalman. (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1987. (INPE-4313-TDL/280)

Gandelman, G.; Durão, O. Testes para validação e desenvolvimento de sensores inerciais. In: Congresso Brasileiro de Automática, 8., Belém, 1990. Anais. Belém, SBA, 1990, p. 1293-1298.

Hazen, N.L.; Coyle, L.M.; Diamond, S.M. Stabilization, pointing and command control of a balloon-born 1-meter telescope. Cambridge, MA, Harvard College Observatory and Smithsonian Astrophysical Observatory, 1974.

Howe, E.W.; Savet, P.H. The dynamically tuned free rotor gyro. Control Engineering, 10(6):67-72, June 1964.

Kaplan, M.H. Modern spacecraft dynamics and control. New York, John Wiley & Sons, 1976.

Kwakernaak, H.; Sivan, R. Linear optimal control systems. New York, Wiley-Interscience, 1972.

Lefferts, E.J.; Markley, F.L.; Shuster, M.D. Kalman filtering for spacecraft attitude determination. J. Guidance and Control, 5(5):417-429, Sept./Oct. 1982.

Maybeck, P.S. Stochastic models, estimation, and control. New York, Academic Press, 1979.

Nidey, R.A. Stabilization and orientation of balloon-born instruments. Boulder, CO, National Center for Atmospheric Research, Sept., 1968.

Primdahl, F. The fluxgate magnetometer. J. Phys. E: Sci. Instrum., 12(4):241-253, Apr. 1979.

Sheppard, S.W. Quaternion from rotation matrix. J. Guidance and Control, 1(3):223-224, May/June 1978.

Shuster, M.D. Spacecraft attitude determination and control. In: Pisacane, V.L.; Moore,R.C., ed. Space systems. Oxford University Press. No prelo.

Shuster, M.D. A survey of attitude representations. Aceito para publicação no J. Astronaut. Sci. 1993.

Sinkievitz, J.S.; Feldman, J.; Lory, C.B. Evaluation of selected strapdown inertial instruments and pulse torque loops. Washington, DC, NASA, 1974. (NASA-CR-120427)

Souza, M.A.P. Características preliminares para o sistema de apontamento e estabilização do telescópio imageador de raios gama. São José dos Campos, INPE, 1989. Relatório interno não publicado.

Souza, M.A.P. Projeto mecânico de um telescópio de raios gama a bordo de balão estratosférico. (Dissertação de Mestrado em Ciência) - Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1990.

Wertz, J.R., ed. Spacecraft attitude determination and control. London, D. Reidel, 1978.

APÊNDICE A

QUATÉRNIONS

Define-se quatérnions por (Shuster, 1993)

$$\bar{q} = [\ \underline{q}\ ;\ q_4\ ]^T = [\ q_1\ ;\ q_2\ ;\ q_3\ ;\ q_4\ ]^T\ , \tag{A.1}$$

onde $\underline{q} = \hat{n} \circ \mathrm{sen}(\theta/2)$,

$q_4 = \cos(\theta/2)$,

$\hat{n}$ = eixo de rotação ,

θ = ângulo de rotação .

O quatérnion tem, portanto, dimensão 4 (4 componentes) e uma condição de contorno ou de normalização descrita por

$$\bar{q}^T\bar{q} = 1 = |\underline{q}|^2 + q_4{}^2 = 1\ . \tag{A.2}$$

Definindo-se para um vetor qualquer $\underline{c}$, dado por

$$\underline{c} = [\ c_1\ ;\ c_2\ ;\ c_3\ ]^T\ , \tag{A.3}$$

a matriz $\|\ \underline{c}\ \|$ é definida por

$$\|\ \underline{c}\ \| = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}\ . \tag{A.4}$$

E tomando-se a fórmula de Euler para uma matriz de rotação R, ou seja,

$$R(\hat{n},\ \theta) = \cos\theta \circ I + (1-\cos\theta)\hat{n}\hat{n}^T + \mathrm{sen}\theta \circ \|\ \hat{n}\ \|\ , \tag{A.5}$$

onde $\hat{n}$ = eixo de rotação ,

θ = ângulo de rotação ,

I = matriz identidade dimensão 3x3 .

Pode-se escrever a matriz de rotação (ou matriz de atitude) em função das componentes do quatérnion,

$$R = (q_4 - |\underline{q}|^2)I + 2\underline{q}\underline{q}^T + 2q_4\|\underline{q}\| , \tag{A.6}$$

ou, explicitando cada componente da matriz, na forma

$$R = \begin{bmatrix} q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_1q_2+q_3q_4) & 2(q_1q_3-q_2q_4) \\ 2(q_1q_2-q_3q_4) & -q_1^2+q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_2q_3+q_1q_4) \\ 2(q_1q_3+q_2q_4) & 2(q_2q_3-q_4q_1) & -q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2 \end{bmatrix} . \tag{A.7}$$

Através dos elementos da matriz, e da condição de unidade decrita pela Equação A.2, pode-se calcular as componentes do quatérnion como se segue (Sheppard, 1978):

$$\text{tr } R = R_{11} + R_{22} + R_{33} = 4q_4 - 1 , \tag{A.8}$$

$$q_4 = (1 + \text{tr } R)^{1/2}/2 , \tag{A.9}$$

onde tr representa o traço da matriz.

Se $q_4 \neq 0$ então tem-se

$$q_1 = (R_{23} - R_{32})/4q_4 , \tag{A.10}$$

$$q_2 = (R_{31} - R_{13})/4q_4 , \tag{A.11}$$

$$q_3 = (R_{12} - R_{21})/4q_4 . \tag{A.12}$$

O sinal de $\bar{q}$ não fica aqui determinado, mas isto é indiferente pois R é uma função bilinear de $\bar{q}$. Se q_4 for próximo de zero a precisão do cálculo das outras componentes fica comprometida, utiliza-se então outras relações em função das demais componentes tais como

$$q_1 = (1 + R_{11} - R_{22} - R_{33})^{1/2}/2 \ , \tag{A.13}$$

$$q_2 = (R_{12} + R_{21})/4q_1 \ , \tag{A.14}$$

$$q_3 = (R_{13} + R_{31})/4q_1 \ , \tag{A.15}$$

$$q_4 = (R_{23} - R_{32})/4q_1 \ . \tag{A.16}$$

Estas equações, calculando-se primeiramente de q_2, ficam dadas por

$$q_2 = (1 - R_{11} + R_{22} - R_{33})^{1/2}/2 \ , \tag{A.17}$$

$$q_1 = (R_{21} + R_{12})/4q_2 \ , \tag{A.18}$$

$$q_3 = (R_{23} + R_{32})/4q_2 \ , \tag{A.19}$$

$$q_4 = (R_{31} - R_{13})/4q_2 \ . \tag{A.20}$$

O último conjunto de equações fica como se segue:

$$q_3 = (1 - R_{11} - R_{22} + R_{33})^{1/2}/2 \ , \tag{A.21}$$

$$q_1 = (R_{31} + R_{13})/4q_3 \ , \tag{A.22}$$

$$q_2 = (R_{32} + R_{23})/4q_3 \ , \tag{A.23}$$

$$q_4 = (R_{12} - R_{21})/4q_3 \ . \tag{A.24}$$

É sempre possível obter a solução única (a menos de sinais) pois sendo a norma do quatérnion igual a 1 ao menos um dos componentes vale no mínimo 0,5 permitindo assim o cálculo.

Ao combinar rotações, o cálculo do quatérnion resultante é muito simples de forma que

$$R(\bar{q}'') = R(\bar{q}')\circ R(\bar{q}) \quad , \tag{A.25}$$

$$\bar{q}'' = \bar{q}' \otimes \bar{q} \ . \tag{A.26}$$

Permitindo-se obter, portanto, a combinação de rotações como se segue:

$$\bar{q} \otimes \bar{q} = \begin{bmatrix} q_4\underline{q}' + q_4'\underline{q} - \underline{q}'\times\underline{q} \\ q_4'q_4 - \underline{q}'\underline{q} \end{bmatrix} \ . \tag{A.27}$$

Que pode ser escrito de outra forma

$$\bar{q}' \otimes \bar{q} = \{ \ \bar{q}' \ \}_L \ \bar{q} = \{ \ \bar{q} \ \}_R \ \bar{q}' \ , \tag{A.28}$$

onde:

$$\{ \ \bar{q} \ \}_L = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \ ,$$

$$\{ \ \bar{q} \ \}_R = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \ .$$

E a condição de normalização é fácil de se fazer cumprir usando

$$\bar{q} \quad => \quad (\ \bar{q}^T\bar{q} \ )^{-1/2} \circ \ \bar{q} \quad . \tag{A.29}$$

Uma necessidade do algorítmo de determinação do apontamento do telescópio, em função da utilização de quatérnions no Filtro Estendido de Kalman proposto neste trabalho, é a obtenção da atitude em ângulos de Euler dado o quatérnion e vice-versa.

Existe uma solução única para este problema, neste caso em particular, pois os ângulos estão em quadrantes conhecidos. Sem esta informação obter-se-ia mais de uma solução para a correspondência entre ângulos e quatérnions.

A matriz de atitude, também conhecida por matriz de cossenos diretores, para a sequência de rotações descrita por

$$R = R_2(-\theta)\circ R_1(-\phi)\circ R_3(-\psi) \tag{A.30}$$

é dada por (Shuster, 1993; Wertz, 1978):

$$R = \begin{bmatrix} c\psi\circ c\theta+s\psi\circ s\theta\circ s\phi & -s\psi\circ c\theta+c\psi\circ s\psi\circ s\phi & c\phi\circ s\theta \\ s\psi\circ c\phi & c\psi\circ c\phi & -s\phi \\ -s\theta\circ c\psi+s\psi\circ s\phi\circ sc\theta & s\theta\circ s\psi+c\psi\circ s\phi\circ c\theta & c\theta\circ c\phi \end{bmatrix} \tag{A.31}$$

onde c representa a função cosseno e s a função seno.

Se o sinal escolhido para o quatérnion não tem importância nos procedimentos de determinação de atitude, por outro lado, na obtenção dos ângulos de Euler, surge o problema da existência da ambiguidade.

Da Equação A.31, tem-se:

$$sen(\phi) = - R_{23} \tag{A.32}$$

Utilizando os elementos R_{21} e R_{22}, obtém-se o cosseno de ϕ através de:

$$\cos(\phi)= \pm (R_{21}^2 + R_{22}^2)^{1/2} \tag{A.33}$$

Sabendo-se que o valor de ϕ está próximo de $\phi o = 0$, ou seja, está compreendido entre o primeiro e o quarto quadrante, toma-se o cosseno com sinal positivo. Desta forma pode-se obter o valor de ϕ, através da função ATAN2 da linguagem Fortran, como se segue:

$$\phi = \mathrm{ATAN2}(\mathrm{sen}(\phi), \cos(\phi)) \tag{A.34}$$

Com os elementos R_{21} e R_{22}, determina-se os valores do seno e cosseno do ângulo ψ da seguinte maneira:

$$\mathrm{sen}(\psi) = R_{21}/\cos(\phi) \tag{A.35}$$

$$\cos(\psi) = R_{22}/\cos(\phi) \tag{A.36}$$

$$\psi = \mathrm{ATAN2}(\mathrm{sen}(\psi), \cos(\psi)) \tag{A.37}$$

Restando ainda a determinação do valor do ângulo θ, que é feita utilizando-se os elementos R_{13} e R_{33} com as seguintes equações:

$$\mathrm{sen}(\theta) = R_{13}/\cos(\phi) \tag{A.38}$$

$$\cos(\theta) = R_{33}/\cos(\phi) \tag{A.39}$$

$$\theta = \mathrm{ATAN2}(\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)) \tag{A.40}$$

APÊNDICE B

PROPRIEDADES DA MATRIZ $Z(\bar{q}(t))$

Assume-se inicialmente que a equação cinemática para o quatérnion é determinística, isto é, que valem as seguintes relações:

$$d\bar{q}(t)/dt = \Omega(\underline{\omega})\bar{q}(t)/2 \ , \tag{B.1}$$

$$\bar{q}(t) = \Theta(t,t_0)\bar{q}(t_0) \ , \tag{B.2}$$

que corresponde a utilizar os valores médios de $\bar{q}(t)$ e $\underline{\omega}(t)$.

Por definição (Lefferts et al., 1982), para um vetor tridimensional $\underline{c}$ qualquer, tem-se

$$Z(\bar{q})\underline{c} = \Omega(\underline{c})\bar{q} \ . \tag{B.3}$$

onde $Z(\bar{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}$.

Diferenciando a Equação B.3 obtém-se

$$(dZ(\bar{q})/dt)\underline{c} + Z(\bar{q})d\underline{c}/dt = \Omega(d\underline{c}/dt)\bar{q} + \Omega(\underline{c})d\bar{q}/dt \ . \tag{B.4}$$

Tomando-se um valor arbitrário para $\underline{c}$ num tempo t e a variação temporal de $\underline{c}$ dada por

$$d\underline{c}/dt = \| \ \underline{\omega} \ \|\underline{c} = - \ \underline{\omega}\times\underline{c} \ . \tag{B.5}$$

Substituindo as Equações B.5 e B.1 em B.4 tem-se

$$(dZ(\bar{q})/dt)\underline{c} + Z(\bar{q})\| \ \underline{\omega} \ \|\underline{c} = -\Omega(\underline{\omega}\times\underline{c})\bar{q} + \Omega(\underline{c})\Omega(\underline{\omega})\bar{q}/2 \ . \tag{B.6}$$

Utilizando-se a identidade da relação descrita por

$$\Omega(\underline{\omega}\times\underline{c}) = -\ [\Omega(\underline{\omega})\Omega(\underline{c}) - \Omega(\underline{c})\Omega(\underline{\omega})]/2\ , \tag{B.7}$$

a Equação B.6 fica dada por

$$(dZ(\bar{q})/dt)\underline{c} + Z(\bar{q})\|\ \underline{\omega}\ \|\underline{c} = \Omega(\underline{\omega})\Omega(\underline{c})\bar{q}/2\ , \tag{B.8}$$

$$dZ(\bar{q})/dt = \Omega(\underline{\omega})Z(\bar{q}) - Z(\bar{q})\|\ \underline{\omega}\ \|\ . \tag{B.9}$$

Define-se pela Equação B.9 a primeira propriedade da matriz $Z(\bar{q}(t))$. Deduz-se outra propriedade a partir da definição que se segue:

$$C(t.t_0) = \Theta(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0)) - Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)\ . \tag{B.10}$$

A matriz $\Lambda(t,t_0)$ é uma matriz de rotação da atitude estimada de t_0 a t, ou seja,

$$\Lambda(t,t_0) = A(\hat{q}(t))A(\hat{q}(t_0)\ . \tag{B.11}$$

Diferenciando a Equação B.10 obtém-se

$$\partial C(t,t_0)/\partial t = (\partial\Theta(t,t_0)/\partial t)Z(\bar{q}(t_0)) - (\partial Z(\bar{q}(t))/\partial t)\Lambda(t,t_0)$$

$$- Z(\bar{q}(t)\partial\Lambda(t,t_0)/\partial t\ , \tag{B.12}$$

$$\partial C(t,t_0)/\partial t = \Omega(\underline{\omega})\Theta(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0))/2 - \Omega(\underline{\omega})Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)$$

$$+ Z(\bar{q}(t))\|\ \underline{\omega}\ \|\Lambda(t,t_0) - Z(\bar{q}(t))\|\ \underline{\omega}\ \|\Lambda(t,t_0)\ , \tag{B.13}$$

$$\partial C(t,t_0)/\partial t = \Omega(\underline{\omega})C(t,t_0)/2\ . \tag{B.14}$$

Escrevendo a Equação B.14 de outra maneira tem-se

$$C(t,t_0) = \Theta(t,t_0)C(t_0,t_0) \ . \tag{B.15}$$

Da Equação B.10 pode-se concluir que

$$C(t_0,t_0) = 0 \ . \tag{B.16}$$

Portanto, a Equação B.15 torna-se

$$C(t,t_0) = 0 \ . \tag{B.17}$$

E, desta forma, pode-se obter a segunda propriedade da matriz $Z(\bar{q}(t))$ expressa na seguinte equação:

$$\Theta(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0)) = Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0) \ . \tag{B.18}$$

Pré-multiplicando a Equação B.18 por $Z(\bar{q}(t))^T$ e utilizando a identidade

$$Z(\bar{q}(t))^T Z(\bar{q}(t)) = I_{3x3} \ . \tag{B.19}$$

obtém-se a terceira propriedade na forma que se segue:

$$Z(\bar{q}(t))^T Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0) = Z(\bar{q}(t))^T \Theta(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0)) \ , \tag{B.20}$$

$$\Lambda(t,t_0) = Z(\bar{q}(t))^T \Theta(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0)) \ . \tag{B.21}$$

Para obter a quarta propriedade utiliza-se a relação inversa

$$Z(\bar{q}(t))Z(\bar{q}(t))^T = I_{4x4} - \bar{q}(t)\bar{q}(t)^T \ . \tag{B.22}$$

Que, aplicada na Equação B.18, resulta em

$$\Theta(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0))Z(\bar{q}(t_0))^T = Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0))^T \ , \tag{B.23}$$

$$\Theta(t,t_0)[I_{4x4} - \bar{q}(t_0)\bar{q}(t_0)^T] = Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0))^T \ , \qquad (B.24)$$

$$\Theta(t,t_0) - \bar{q}(t)\bar{q}(t_0)^T = Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0))^T \ . \qquad (B.25)$$

E, por fim, a quarta propriedade expressa por

$$\Theta(t,t_0) = Z(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)Z(\bar{q}(t_0))^T + \bar{q}(t)\bar{q}(t_0)^T \ . \qquad (B.26)$$

APÊNDICE C

A MATRIZ DE OBSERVAÇÃO $H(\bar{q}(t))$

Para obter a matriz de observação $H(\bar{q}(t))$ lineariza-se a equação de observação em torno do último quatérnion estimado, desta forma tem-se

$$\Delta \underline{y} = H \circ \Delta \underline{x} + \underline{v} \quad , \tag{C.1}$$

onde $H = \partial h_m(\bar{q})/\partial q_n$.

As componentes da primeira e da segunda linha de H são calculadas através de

$$\partial h_1/\partial q_n = (1/(1 + s_{tx}^2/s_{tz}^2)) \circ [(s_{tz}(\partial s_{tx}/\partial q_n) - s_{tx}(\partial s_{tz}/\partial q_n))/s_{tz}^2] \quad , \tag{C.2}$$

$$\partial h_2/\partial q_n = (1/(1 + s_{ty}^2/s_{tz}^2)) \circ [(s_{tz}(\partial s_{ty}/\partial q_n) - s_{ty}(\partial s_{tz}/\partial q_n))/s_{tz}^2] \quad , \tag{C.3}$$

onde as derivadas parciais são dadas por

$$\partial s_{tx}/\partial q_1 = 2q_1 s_x + 2q_2 s_y + 2q_3 s_z \quad , \tag{C.4}$$

$$\partial s_{tx}/\partial q_2 = -2q_2 s_x + 2q_1 s_y - 2q_4 s_z \quad , \tag{C.5}$$

$$\partial s_{tx}/\partial q_3 = -2q_3 s_x + 2q_4 s_y + 2q_1 s_z \quad , \tag{C.6}$$

$$\partial s_{tx}/\partial q_4 = 2q_4 s_x + 2q_3 s_y - 2q_2 s_z \quad , \tag{C.7}$$

$$\partial s_{ty}/\partial q_1 = 2q_2 s_x - 2q_1 s_y + 2q_4 s_z \quad , \tag{C.8}$$

$$\partial s_{ty}/\partial q_2 = 2q_1 s_x + 2q_2 s_y + 2q_3 s_z \ , \tag{C.9}$$

$$\partial s_{ty}/\partial q_3 = -2q_4 s_x - 2q_3 s_y + 2q_2 s_z \ , \tag{C.10}$$

$$\partial s_{ty}/\partial q_4 = -2q_3 s_x + 2q_4 s_y + 2q_1 s_z \ , \tag{C.11}$$

$$\partial s_{tz}/\partial q_1 = 2q_1 s_x - 2q_4 s_y - 2q_1 s_z \ , \tag{C.12}$$

$$\partial s_{tz}/\partial q_2 = 2q_4 s_x + 2q_3 s_y - 2q_2 s_z \ , \tag{C.13}$$

$$\partial s_{tz}/\partial q_3 = 2q_1 s_x + 2q_2 s_y + 2q_3 s_z \ , \tag{C.14}$$

$$\partial s_{tz}/\partial q_4 = 2q_2 s_x - 2q_1 s_y + 2q_4 s_z \ . \tag{C.15}$$

E as componentes das três últimas linhas de H estão definidas pelas relações seguintes:

$$\partial h_3/\partial q_1 = 2m_x q_1 + 2m_y q_2 + 2m_z q_3 \ , \tag{C.16}$$

$$\partial h_3/\partial q_2 = -2m_x q_2 + 2m_y q_1 - 2m_z q_4 \ , \tag{C.17}$$

$$\partial h_3/\partial q_3 = -2m_x q_3 + 2m_y q_4 + 2m_z q_1 \ , \tag{C.18}$$

$$\partial h_3/\partial q_4 = 2m_x q_4 + 2m_y q_3 - 2m_z q_2 \ , \tag{C.19}$$

$$\partial h_4/\partial q_1 = 2m_x q_2 - 2m_y q_1 + 2m_z q_4 \ , \tag{C.20}$$

$$\partial h_4/\partial q_2 = 2m_x q_1 + 2m_y q2 + 2m_z q3 \ , \tag{C.21}$$

$$\partial h_4/\partial q_3 = -2m_x q_4 - 2m_y q_3 + 2m_z q_2 \ , \tag{C.22}$$

$$\partial h_4/\partial q_4 = -2m_x q_3 + 2m_y q_4 + 2m_z q_1 \ , \tag{C.23}$$

$$\partial h_5/\partial q_1 = 2m_x q_3 - 2m_y q_4 - 2m_z q_1 \ , \tag{C.25}$$

$$\partial h_5/\partial q_2 = 2m_x q_4 + 2m_y q_3 - 2m_z q_2 \ , \tag{C.25}$$

$$\partial h_5/\partial q_3 = 2m_x q_1 + 2m_y q_2 + 2m_z q_3 \ , \tag{C.26}$$

$$\partial h_5/\partial q_4 = 2m_x q_2 - 2m_y q_1 + 2m_z q_4 \ . \tag{C.27}$$