

INPE-6385-TDI/604

**TRANSFERENCIAS BI-IMPULSIVAS ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS
NÃO COPLANARES COM CONSUMO MÍNIMO DE COMBUSTÍVEL**

Walkiria Schulz

**Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e
Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado
e Helio Koiti Kuga, aprovada em março de 1997.**

**INPE
São José dos Campos
Março de 1997**

**MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-6385-TDI/604

**TRANSFERENCIAS BI-IMPULSIVAS ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS
NÃO COPLANARES COM CONSUMO MÍNIMO DE COMBUSTÍVEL**

Walkíria Schulz

**Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e
Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e
Helio Koiti Kuga, aprovada de março de 1997.**

**INPE
São José dos Campos
Março de 1997**

629.7.062

SCHULZ, W.

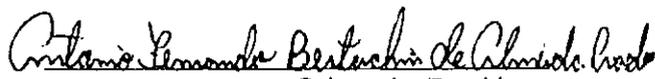
Transferencias bi-impulsivas entre órbitas elípticas não coplanares com consumo mínimo de combustível / W. Schulz. - José dos Campos: INPE, 1997.

112 p. - (INPE-6385-TDI/604)

1. Satélites artificiais. 2. Otimização. 3. Manobras orbitais. 4. Perturbação. I. Título.

Aprovada pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de Mestre em
Engenharia e Tecnologia Espaciais

Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado


Orientador/Presidente

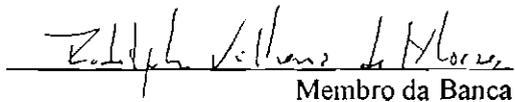
Dr. Hélio Koiti Kuga


Orientador

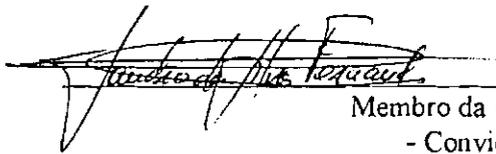
Dr. Atair Rios Neto


Membro da Banca

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes


Membro da Banca

Dr. Sandro da Silva Fernandes


Membro da Banca
- Convidado -

Candidata: Walkiria Schulz

São José dos Campos, 05 de março de 1997

Satélite

Manuel Bandeira

Fim de tarde,
No céu plúmbeo
A Lua baça
Paira
Muito cosmograficamente
Satélite.

Desmetaforizada,
Desmitificada,
Despojada do velho segredo de melancolia,
Não é agora o golfão de cismas,
O astro dos loucos e dos enamorados.
Mas tão-somente
Satélite.

Ah Lua deste fim de tarde,
Demissionária de atribuições românticas,
Sem *show* para as disponibilidades sentimentais!

Fatigado de mais-valia,
Gosto de ti assim:
Coisa em si,
- Satélite.

Se eu pudesse escreveria na capa que são autores também: Arthur Schulz Junior e
Teresinha Schulz. A quem torceu e sofreu por este: meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais que me abrigou e instruiu na Divisão de Mecânica Orbital e Controle.

Ao CNPq que financiou este estudo.

Aos membros da banca examinadora pelas relevantes sugestões ao enriquecimento deste.

Ao Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado que me convenceu da importância deste trabalho, me estimulou, ajudou e tornou tudo mais divertido. Enfim, foi mais do que orientador. Posso chamá-lo de amigo ?

Ao Dr. Hélio Koiti Kuga, muito obrigada pelas rotinas que me pouparam bastante trabalho e pelo tempo investido em me aproximar do computador sem temê-lo.

Ao Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, que talvez nem saiba, foi quem me convenceu a vir fazer mestrado nesta divisão. Também pelo seu incansável investimento na pós-graduação do INPE.

Aos amigos da EMBRATEL, espero que o tempo investido em mim não tenha sido em vão. Tomara um dia eu poder retornar um pouco do que aprendi com vocês.

Papai e mamãe nunca vou parar de agradecer. Tenho muita sorte.

Aos meus amigos e aos mais que amigos que aguentaram as minhas crises e festejaram as minhas conquistas.

RESUMO

Neste trabalho, o problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas elípticas não coplanares dadas, através da aplicação de dois impulsos, com consumo mínimo de combustível é resolvido em dois casos diferentes: *i)* considerando uma dinâmica kepleriana para o movimento do veículo espacial; e *ii)* considerando uma dinâmica não kepleriana (potencial gravitacional terrestre não uniforme e arrasto atmosférico). Neste último caso o problema é resolvido transformando-o no *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP). Foi desenvolvido um novo método de cálculo e um programa que utiliza as equações analíticas desenvolvidas neste método para gerar uma estimativa inicial para o programa que resolve o TPBVP. O *software* desenvolvido para gerar transferências orbitais em dinâmica kepleriana será utilizado pelo INPE em futuras missões espaciais, inclusive a missão do satélite *China-Brazil Earth Resources Satellite* (CBERS). Foram geradas e analisadas várias simulações para se observar o comportamento orbital de um veículo espacial sujeito a diferentes perturbações e vínculos, no que diz respeito ao consumo de combustível.

BI-IMPULSIVE TRANSFERS BETWEEN ELLIPTIC NON COPLANAR ORBITS WITH MINIMUM FUEL CONSUMPTION

ABSTRACT

In this work the problem of a spacecraft bi-impulsive transfer between two given non coplanar elliptical orbits, with minimum fuel consumption is solved for two different cases: *i)* considering the spacecraft movement on a keplerian force field; and *ii)* considering a non keplerian force field (the perturbing forces include Earth gravity harmonics and atmospheric drag). In the last one the problem is solved by the Two Point Boundary Value Problem (TPBVP) formulation. It was developed a new algorithm and a software, that uses the analytical expressions developed in this algorithm, to get an initial guess to solve the TPBVP. The software developed to generate orbital transfers on a keplerian force field will be used by the INPE staff on space missions like the satellite China-Brazil Earth Resources Satellite (CBERS). Several simulations were performed to observe the spacecraft orbital behavior by different kind of perturbations and constraints, on a fuel consumption optimization point of view.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xvii
LISTA DE TABELAS	xix
LISTA DE SÍMBOLOS	xxi
<u>CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO</u>	1
1.1 Introdução	1
1.2 Motivação	2
1.3 Organização	7
<u>CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA</u>	9
<u>CAPÍTULO 3 - TRANSFERÊNCIAS BI-IMPULSIVAS TRIDIMENSIONAIS EM UMA DINÂMICA KEPLERIANA</u>	15
3.1 Introdução	15
3.2 O Método de Cálculo	16
<u>CAPÍTULO 4 - TRANSFERÊNCIAS BI-IMPULSIVAS ÓTIMAS EM UMA DINÂMICA NÃO KEPLERIANA USANDO O “TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM”</u>	29
4.1 Introdução	29
4.2 O “Two Point Boundary Value Problem”	30
4.3 O Método Numérico	31

4.4 O Programa	32
<u>CAPÍTULO 5 - RESULTADOS</u>	35
5.1 Introdução	35
5.2 Simulações com Dinâmica Kepleriana	36
5.2.1 Comparação entre a variação total em velocidade calculada e a da literatura	36
5.2.2 Testes de visibilidade	42
5.3 Simulações com Dinâmica Não-Kepleriana	51
5.3.1 TPBVP.FOR	51
5.3.2 Aplicação de um impulso kepleriano em um campo perturbado	56
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES</u>	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
APÊNDICE A - TRANSFER.FOR	71
APÊNDICE B - TPBVP.FOR	79
APÊNDICE C - LISTAGEM DOS ARQUIVOS DE ENTRADA	85
APÊNDICE C - BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA	87

LISTA DE FIGURAS

3.1 - Ângulos envolvidos na transferência entre duas órbitas não coplanares	18
3.2 - Órbita de transferência	19
5.1 - Subdivisão dos intervalos da anomalia verdadeira da órbita final	44

LISTA DE TABELAS

5.1 - Teste 1 de Visibilidade	45
5.2 - Teste 2 de Visibilidade	45
5.3 - Teste 3 de Visibilidade	46
5.4 - Teste 4 de Visibilidade	49
5.5 - Teste 5 de Visibilidade	49
5.6 - Teste 6 de Visibilidade	50
5.7 - Componentes do Vetor Velocidade do Teste A	54
5.8 - Componentes do Vetor Velocidade do Teste B	55
5.9 - CBERS com Fluxo Solar = 250	58
5.10 - CBERS com Fluxo Solar = 300	59
5.11 - CBERS com Fluxo Solar = 350	59
5.12 - Satélite Fictício com Fluxo Solar = 350	61

LISTA DE SÍMBOLOS

a	semi-eixo maior
\vec{a}_p	vetor aceleração devido às perturbações (a_{px}, a_{py}, a_{pz})
e	excentricidade
g_0	aceleração gravitacional terrestre = 9,8066 m/s ²
H	momento angular
i	inclinação
I_{SP}	impulso específico
m_f	massa final
m_i	massa inicial
\vec{M}	vetor definido pela expressão = $\left(\frac{\hat{z} \times \hat{t}}{ \hat{z} \times \hat{t} } \right)$
Q	constante definida pela expressão = $\frac{H_2^2 [1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]}{H_1^2 [1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]}$
$Q1$	constante definida pela expressão = $\frac{[1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]}{H_1^2}$
$Q2$	constante definida pela expressão = $\frac{[1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]}{H_2^2}$
r	módulo do vetor posição
\vec{r}	vetor posição (r_x, r_y, r_z)
\vec{S}	vetor unitário normal ao plano orbital
t	tempo
\hat{t}	vetor unitário normal ao plano de transferência
\vec{v}	vetor velocidade (v_x, v_y, v_z)
V	velocidade
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	vetores unitários das direções básicas do sistema de referência
Δ	variação de uma variável

ϕ	anomalia verdadeira
λ	ângulo entre os planos da órbita final e de transferência
μ	constante gravitacional ($398600,64 \text{ km}^3/\text{s}^2$ para a Terra)
σ	ângulo de transferência
ω	argumento do perigeu
Ω	ascensão reta do nodo ascendente
ζ	ângulo entre os planos da órbita inicial e de transferência

Índices inferiores

A	órbita inicial
B	órbita final
C	valor calculado
T	órbita de transferência
k	componente normal
r	componente radial
θ	componente transversal
1	primeiro impulso
2	segundo impulso

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

1.1 Introdução

Desde muito cedo o Homem tem se interessado pelos movimentos dos corpos celestes. Acreditava-se que o Sol, a Lua e os planetas controlavam o destino da humanidade. Mas o interesse pelo estudo destes movimentos foi realmente despertado pela necessidade de se medir o tempo e de se usar objetos celestes para orientação.

A teoria heliocêntrica de Copérnico abriu caminho para estudos mais exatos e avançados. As leis de Newton e de Kepler formaram a base do que ficou então conhecido como Mecânica Celeste, ou seja, o estudo do movimento espacial de corpos pesados. Com esta teoria bem estruturada, o passo seguinte foi aplicá-la aos veículos espaciais. Satélites artificiais, sondas e naves tripuladas são hoje uma realidade graças àqueles primeiros seres humanos que olharam de forma curiosa para o céu.

Planejar e executar manobras em satélites que orbitam a Terra são hoje objetivos importantes das atividades espaciais. Existem muitos estudos disponíveis na literatura a este respeito e muitas alternativas para resolver estas questões. Neste trabalho, nós nos concentramos em encontrar soluções para o problema de manobras orbitais ótimas em um campo de força que seja ou não kepleriano. O problema de manobras em um campo não kepleriano é um caso particular que não foi muito estudado na literatura. Nós adotamos como modelo de propulsão, as transferências bi-impulsivas (variação de velocidade instantânea nos pontos inicial e final da transferência). Assumimos uma dinâmica que contém o termo kepleriano e algumas perturbações

usuais, tais como: arrasto atmosférico e não homogeneidade do potencial gravitacional terrestre.

O problema acima apresentado foi transformado no conhecido *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP).

1.2 Motivação

Os problemas relativos a transferências orbitais são de considerável importância. Para órbitas não coplanares, é particularmente importante minimizar o gasto de combustível necessário para realizar uma mudança de plano especificada. O presente estudo pretende desenvolver algoritmos numéricos com utilização prática imediata para obter o mínimo incremento de velocidade necessário para realizar transferências entre órbitas elípticas não coplanares em uma dinâmica não kepleriana.

Este estudo faz parte do programa de manobras orbitais do *China-Brazil Earth Resources Satellite* (CBERS) e apesar de poder ser estendido para qualquer tipo de transferência orbital bi-impulsiva, foi desenvolvido motivado pelas necessidades deste satélite. O CBERS é um satélite de sensoriamento remoto que será mantido em uma órbita polar congelada (aproximadamente 98° de inclinação), garantindo assim uma cobertura total da Terra em latitude e condições de heliosincronismo, conforme descrito no parágrafo abaixo.

Existe uma órbita fundamental para as missões de sensoriamento remoto que é chamada de hélio-síncrona. Esta órbita se desloca acompanhando o movimento anual do Sol e sua vantagem é que as passagens do satélite ocorrem em horários locais constantes. Desta forma, as condições de iluminação são as mesmas em todas as passagens e isto facilita a interpretação dos sinais e a montagem das imagens finais.

Veículos espaciais estão sujeitos a perturbações devido à não esfericidade do potencial gravitacional terrestre. A magnitude dos efeitos destas perturbações depende dos valores iniciais de certos parâmetros orbitais, tais como semi-eixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do perigeu. Os efeitos de certas perturbações podem ser minimizados através da escolha apropriada destes elementos orbitais.

O período de uma órbita varia com a altitude do satélite. Uma órbita que tem repetibilidade é aquela cujo período faz o satélite passar sobre o mesmo ponto da superfície terrestre após algumas revoluções (do satélite e da Terra). Uma órbita que apresenta uma repetibilidade conveniente para uma cobertura completa da superfície terrestre é uma órbita recorrente.

Para observação da Terra é conveniente escolher uma órbita com excentricidade nula (órbita circular), para não haver mudanças na altitude de observação dos dados. Porém, devido às perturbações, uma excentricidade nula nunca pode ser mantida e esta acaba se desviando do valor zero. Com isto a altitude do satélite vai variar com a anomalia verdadeira e, a partir daí, a precessão do perigeu provoca diferenças na altitude do satélite para um mesmo ponto na superfície da Terra. Uma escolha adequada para o argumento do perigeu (90°) e para uma pequena excentricidade pode manter o argumento do perigeu dentro de um estreito limite em torno da condição escolhida, que normalmente é chamada de congelada. Mantendo o perigeu dentro da condição congelada, a altitude do satélite se mantém fixa em função da latitude. Este é o conceito de órbita congelada (*frozen orbit*).

Uma órbita hélio-síncrona, recorrente e congelada é particularmente conveniente para aplicações terrestres e observações de sensoriamento remoto por várias razões:

- o satélite passa em cada latitude no mesmo tempo local e como consequência apresenta as mesmas condições de iluminação terrestre a cada passagem;
- a maior parte da superfície terrestre pode ser mapeada por faixas contínuas de norte a sul em um período fixo com repetibilidade;
- o ângulo médio de incidência do Sol no satélite se mantém dentro de limites definidos, assegurando suprimento estável de energia;
- o satélite passa em cada latitude com aproximadamente a mesma altitude, a despeito da pequena excentricidade.

Um estudo detalhado sobre a necessidade de manobras espaciais para satélites em órbitas congeladas pode ser encontrado em Schulz (1996). As conclusões deste estudo são apresentadas aqui e são a motivação deste trabalho.

Uma vez que o satélite seja colocado em uma órbita congelada sofrendo perturbação devido ao potencial gravitacional terrestre, ele irá permanecer nesta órbita sem requisitar grandes manobras corretivas pelo menos por 2 anos. Neste estudo, o efeito do arrasto atmosférico não foi considerado e este pode modificar a conclusão no que diz respeito à realização de manobras corretivas.

A questão seguinte a ser abordada é a da realização das manobras orbitais e este é o objetivo deste trabalho. Para isto, foi desenvolvido um método de cálculo e um *software* que obtém a solução mais econômica de uma transferência entre duas órbitas dadas. Foi adotado como modelo de propulsor o caso mais popular na literatura, que é o caso onde o controle admitido ao veículo espacial é a aplicação de dois impulsos (variação instantânea na velocidade) nos instantes inicial e final da manobra.

Esse método de cálculo foi dividido em duas etapas distintas. Em uma primeira etapa foi considerada uma dinâmica que será chamada ao longo do trabalho de

kepleriana pois as únicas forças envolvidas na dinâmica do sistema são as forças dos propulsores (instantâneas) e a força gravitacional da Terra (assumida como um ponto de massa). Nesta fase, o problema proposto é obter uma órbita kepleriana de transferência entre duas outras órbitas keplerianas não coplanares conhecidas previamente, de tal forma que a soma das magnitudes dos dois impulsos aplicados seja mínima.

Após essa primeira etapa, buscou-se um método de solução para o problema não kepleriano baseado no *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP). Foi assumido que a dinâmica do sistema inclui forças perturbadoras, tais como arrasto atmosférico e atração gravitacional terrestre (onde a Terra não é mais considerada como um ponto de massa). A solução obtida pelo método anterior (com modelo kepleriano) é utilizada como estimativa inicial. Com essa solução foi iniciado um método numérico de busca direta, que consiste nos seguintes passos:

- i) *Propagação da órbita*: Propagação da órbita de transferência (que é obtida a partir da aplicação do primeiro impulso obtido no caso kepleriano na órbita inicial) do tempo inicial ao tempo final da transferência (o tempo final é fixo para cada resolução do TPBVP);
- ii) *Busca dos vínculos*: Verificação da satisfação ou não dos vínculos no instante final da manobra. Os vínculos aqui citados se referem às posições do veículo espacial nos instantes inicial e final da transferência. Caso não estejam satisfeitos, deve-se buscar um novo valor para os impulsos de tal forma que o sistema caminhe para a satisfação dos vínculos;
- iii) *Otimização em relação ao tempo de transferência*: Após atingidos os vínculos, deve-se variar o tempo de transferência com o objetivo de reduzir o custo da manobra. Desta forma, o problema é resolvido para valores do tempo de transferência entre 0,5 e 1,5 vezes o tempo calculado pelo método com dinâmica kepleriana.

Os passos *i)* a *iii)* foram repetidos até obter-se a resposta mais econômica, do ponto de vista de consumo de combustível, para cada problema simulado.

Com este esquema, foi obtida a solução do problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas dadas, através da aplicação de dois impulsos, com consumo mínimo de combustível em uma dinâmica não kepleriana.

Assim sendo, atendendo ao que foi decidido pelo grupo de trabalho do INPE que participa do projeto CBERS, este trabalho pretende dar as seguintes contribuições:

- i)* Desenvolvimento, implementação e testes de um método numérico de cálculo de transferências entre duas órbitas dadas em um campo gravitacional kepleriano. Um *software* deste tipo será de utilidade para o INPE em futuras missões e não existia até o momento;
- ii)* Simulações numéricas mostrando o incremento necessário, em termos de consumo de combustível, para uma manobra que possua vínculos nas regiões em que possam ser feitas as aplicações dos impulsos, em relação a uma manobra livre destes vínculos;
- iii)* Desenvolvimento de um método de cálculo de manobras orbitais que possam considerar perturbações sofridas pelo veículo espacial durante a realização da manobra;
- iv)* Simulações numéricas mostrando a importância ou não desta dinâmica não kepleriana em diversas situações possíveis.

1.3 Organização

O trabalho foi dividido em 6 capítulos. São eles:

Capítulo 1. Apresenta o problema que será resolvido por este trabalho e a sua motivação.

Capítulo 2. Apresenta uma revisão da literatura relevante para o estudo deste problema.

Capítulo 3. Obtém a solução do problema de transferência de veículo espacial entre duas órbitas elípticas não coplanares dadas, através da aplicação de dois impulsos, com consumo mínimo de combustível em uma dinâmica kepleriana. Apresenta o método de cálculo e o *software* desenvolvidos que utilizam equações analíticas para as componentes do impulso aplicado. O método aqui apresentado é original, embora já existam na literatura outros métodos de solução para o mesmo problema.

Capítulo 4. Busca um método de solução para o problema não kepleriano baseado no TPBVP. Assume que a dinâmica do sistema inclui forças perturbadoras (arrasto atmosférico e geopotencial). A solução obtida no capítulo anterior é usada como estimativa inicial. Na revisão bibliográfica efetuada não foi encontrado trabalho algum que resolva o problema de transferência orbital dentro das hipóteses aqui consideradas.

Capítulo 5. Apresenta e analisa os resultados obtidos.

Capítulo 6. Apresenta as conclusões e os comentários finais.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Manobras orbitais com consumo mínimo de combustível são o objetivo deste estudo. Diversos trabalhos foram desenvolvidos nesta área de transferência ótima de veículo espacial entre duas órbitas dadas ou entre dois pontos fixos.

Um dos estudos mais antigos sobre transferências orbitais é o clássico trabalho de Hohmann, no qual o autor propõe uma órbita de transferência elíptica bi-tangente com ângulo de transferência igual a 180° entre duas órbitas circulares coplanares em um campo de força inversamente proporcional ao quadrado da distância. Esta transferência, que então recebeu seu nome, foi durante muito tempo considerada como a solução final do problema.

Uma solução teórica completa do problema de transferência orbital entre dois pontos do espaço com consumo mínimo de combustível foi encontrada por Lawden (1953). Devido ao extensivo trabalho teórico desenvolvido por ele este problema foi denominado Problema de Lawden.

O termo *primer vector* foi introduzido por Lawden para caracterizar os multiplicadores de Lagrange associados com o vetor velocidade em uma trajetória ótima. Lawden encontrou uma condição necessária para a otimização de trajetórias impulsivas em função da magnitude deste vetor.

Em um trabalho de Edelbaum (1967) as soluções conhecidas do problema de Lawden são citadas e discutidas. Gobetz e Doll (1969) e Robinson consideraram a aproximação de impulsos instantâneos e também discutiram as soluções

conhecidas deste problema. A aproximação impulsiva foi explorada ainda pelos trabalhos de Eckel (1963), Prussing (1970) com dois ou três impulsos, Pines (1964) que encontra e aplica constantes de movimento ao caso impulsivo para obter valores aproximados das variáveis adjuntas e Robbins (1966) que faz um estudo analítico desta aproximação. Resultados muito importantes foram encontrados para transferências ótimas com múltiplos impulsos. Exemplos são os trabalhos de Lawden (1962), Breakwell, as extensões à transferência de Hohmann feitas por Sthernfeld, Edelbaum e o trabalho onde Holker e Silber mostraram que a solução de Hohmann era a solução ótima apenas quando a razão entre os raios das órbitas final e inicial for menor que 11,939. Quando esta razão for maior que 11,939 e menor do que 15,582 será possível encontrar uma transferência tri-impulsiva que tenha um menor consumo de combustível, desde que o segundo impulso seja aplicado quando o veículo se encontre a uma distância suficientemente grande do corpo central, ou seja, existirá um valor mínimo para essa distância, a partir do qual a transferência tri-impulsiva será mais econômica. No caso desta razão ser superior a 15,582, qualquer transferência tri-impulsiva apresentará menor consumo que a transferência de Hohmann; transferências ótimas entre elipses coaxiais com impulsos instantâneos aplicados nos apses por Marchal (1965), transferências ótimas nas proximidades de uma órbita circular por Edelbaum e transferências ótimas entre órbitas hiperbólicas por Gobetz (1963) e por Marchal. Em Marec (1979) encontram-se gráficos comparando a eficiência das transferências de Hohmann, bi-elíptica e bi-parabólica, para diferentes valores da razão entre o raio final e o raio inicial. Smith (1959) obteve soluções exatas e aproximadas para diversos casos de transferência entre duas órbitas coplanares, tais como: órbitas com eixos alinhados ou quase alinhados; uma das órbitas sendo quase-circular; as duas órbitas sendo quase-circulares. Bender (1962) desenvolveu uma modelagem capaz de resolver qualquer transferência entre órbitas coplanares. Estas e outras soluções foram encontradas para transferências ótimas cujo tempo de transferência não é especificado.

Entretanto, mais resultados foram encontrados para o caso de tempo de

transferência fixo. As publicações nesta área incluem estudos teóricos de Lawden, Prussing (1969), soluções para longos tempos de transferência de Marec (1967) e os trabalhos de Lion e Handelsman (1968) que buscam não só as magnitudes e direções dos impulsos, mas também o seu número, assim como os de Jezewski e Rozendaal (1968), Gross e Prussing (1974), Eckel (1982) e Prussing e Chiu (1986).

As manobras tri-impulsivas foram estendidas ao caso elíptico por Ting, que também mostrou que a aplicação de mais de três impulsos não leva a uma solução mais econômica (no caso de empuxo infinito, que se traduz por impulso instantâneo) e por Roth (1967) que obteve a solução de mínimo incremento de velocidade para a transformação bi-elíptica não coplanar, mas ainda mantendo as órbitas circulares.

Baseado nos estudos preliminares de Breakwell e de Contensou (1962), Moyer (1965) analisou a transferência entre uma órbita circular e uma elíptica usando elementos orbitais. Esta formulação o tornou capaz de considerar transferências usando N impulsos e resultou na prova da otimização global tanto da transferência tipo Hohmann quanto da transferência bi-parabólica para transferências entre uma órbita circular e uma elíptica. Hazelrigg mostra ainda uma outra prova para a otimização global da transferência de Hohmann e da bi-parabólica, que é mais geral (segundo o autor) e que atinge o resultado de forma mais direta. Também estuda transferências ótimas hiperbólicas que podem necessitar mais de quatro impulsos.

McCue (1963) estudou o problema de transferência bi-impulsiva entre duas órbitas elípticas inclinadas, incluindo a possibilidade de *rendez-vous*. Eckel (1962) encontrou a melhor solução bi-impulsiva para o caso de órbitas elípticas não coplanares, depois generalizada para N impulsos (porém, com N dado *a priori*). Eckel e Vinh (1984) encontraram a solução ótima para o caso de transferências entre órbitas elípticas não coplanares com tempo ou combustível fixo, em que, quando se faz o tempo tender a infinito, chega-se ao resultado de Hohmann.

Outros trabalhos foram desenvolvidos no sentido de obter-se a diferença entre o caso ideal de propulsão instantânea (empuxo infinito) e o caso real de propulsão limitada (empuxo finito), como o de Zee (1963) e o de Melton e Jin (1991) que estuda a transferência entre duas órbitas circulares com dois impulsos de magnitudes fixas, em que o objetivo é encontrar as direções dos impulsos.

Dentro do domínio da propulsão finita, Tsien mostrou que um empuxo na direção do movimento é mais eficiente que na sua perpendicular, e Lawden (1955) buscou direções ótimas para a aplicação do empuxo próximas à direção do movimento.

Prussing e Clifton apresentaram um conjunto de condições necessárias e suficientes para transferências impulsivas ótimas usando equações lineares gerais. Recentemente, Carter contribuiu para o problema de trajetórias impulsivas ótimas com tempo fixo, usando também sistemas de equações lineares. Moskowitz (1963) publicou os resultados de dois tipos de aproximação para impulso finito: a linear e a bi-linear, ambas para o caso de pequenas transferências (correções) orbitais coplanares. E uma outra aproximação linear foi desenvolvida por Biggs (1978), e se aplica a transferências de grande ou pequena amplitude.

Em seguida, Biggs (1979) estendeu este trabalho a um caso mais genérico utilizando o método híbrido (onde as equações necessárias de primeira ordem do problema de controle ótimo associado são utilizadas, mas resolvidas através de um método de busca direta) de otimização. Este mesmo método híbrido foi utilizado por Prado (1990) para uma transferência entre a Terra e a Lua. Um método análogo que usa coordenadas polares e não elementos keplerianos, pode ser encontrado em Weiß (1985) e também foi apresentado por Erno. Tomita e Feiring desenvolveram a mesma abordagem híbrida, mas com a proposta de um novo algoritmo numérico para a solução do problema de minimização.

Essencialmente, duas classes de métodos para resolver problemas de trajetórias ótimas surgiram nos últimos 40 anos. A primeira discretiza a forma variacional do problema original, i.e., aproxima o problema de controle ótimo de um problema de máximos e mínimos discreto, que é então resolvido numericamente (como por exemplo o método do gradiente). Este método é chamado de “direto”. Na outra classificação as condições necessárias de primeira ordem para a otimização são encontradas usando as equações de Euler-Lagrange e o princípio de máximo de Pontryagin. Este método é chamado de “indireto”.

Muitas técnicas foram desenvolvidas para resolver o TPBVP que resulta do método indireto de solucionar problemas de trajetórias ótimas. A lista inclui os métodos de gradiente de Kelley, quasilinearização de Bellman e Kabala, métodos de diferença finita de Keller e técnicas de colocação de Russell e Shampine (1972). O principal inconveniente dos métodos indiretos é que eles requerem uma boa estimativa inicial para as variáveis do TPBVP. Neste trabalho nós superamos este inconveniente desenvolvendo um conjunto de equações e um *software* que geram esta estimativa inicial.

Em outros trabalhos, Ceballos e Rios-Neto usando a abordagem do método direto, com parametrização da função de controle do problema de controle ótimo associado, e Rios-Neto e Bambace (1981), usando a estimação linear ótima de parâmetros, resolveram um problema de transferência em tempo mínimo da Terra a Marte, com baixo empuxo de direção variável.

Um outro bom exemplo de resultados analíticos aproximados pode ser encontrado em Broucke (1991), onde é considerado o problema de uma transferência ótima com aplicação de um empuxo baixo e contínuo.

Como restrição, Burns mostrou de uma forma geométrica e sem considerações sobre otimização que, para órbitas coplanares que se interceptam, uma transferência com impulso tangencial nem sempre pode ser utilizada.

Mais recentemente, Prussing (1993) desenvolveu uma equação de quarta ordem para resolver o problema de otimização de transferências orbitais com consumo de combustível limitado.

Enright e Conway (1992), Pierson e Kluever (1994), Golan e Breakwell, investigaram trajetórias entre a Terra e a Lua, com consumo mínimo de combustível. Todos os três estudos utilizaram trajetórias influenciadas simultaneamente pelos campos gravitacionais da Terra e da Lua. Kluever e Pierson estenderam o trabalho anterior em transferências planas ótimas com magnitude constante para um problema de transferência tridimensional com consumo mínimo de combustível.

Ainda usando uma abordagem baseada na teoria do *primer vector*, mas para o caso impulsivo, Fernandes e Moraes (1989), que estudam casos não singulares, e novamente Fernandes (1989), que estuda casos singulares, levaram em consideração o efeito do achatamento terrestre no problema de transferências orbitais ótimas. Fernandes e Sessin (1989) estudaram uma extensão deste problema, que é a transferência de empuxo baixo e contínuo, através da expansão analítica e aplicação do método de Hori para sistemas canônicos.

No presente trabalho nós nos dispomos a resolver o problema de transferências orbitais ótimas entre órbitas não coplanares, sujeitas a perturbações devidas ao geopotencial e ao arrasto atmosférico usando o TPBVP.

CAPÍTULO 3

TRANSFERÊNCIAS BI-IMPULSIVAS TRIDIMENSIONAIS EM UMA DINÂMICA KEPLERIANA

3.1 Introdução

Foi obtida a solução do problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas elípticas não coplanares dadas, através da aplicação de dois impulsos, com consumo mínimo de combustível em uma dinâmica kepleriana. Para isto desenvolveu-se um novo método de cálculo e um programa que utiliza as equações analíticas desenvolvidas no método.

Foi considerado que as únicas forças envolvidas na dinâmica do sistema são as forças dos propulsores (instantâneas) e a força gravitacional da Terra (assumida como um ponto de massa). O problema resume-se em obter uma órbita kepleriana de transferência entre duas outras órbitas keplerianas não coplanares conhecidas previamente. Essa manobra deve ser efetuada de tal forma que a soma das magnitudes dos dois impulsos aplicados seja mínima.

Este método permite que se escolham as regiões orbitais nas quais os impulsos poderão ser aplicados. Desta forma, é possível considerar vínculos que coloquem restrições nas posições de aplicação dos impulsos como, por exemplo, a de que as manobras sejam efetuadas apenas em regiões visíveis de uma determinada estação de rastreamento.

3.2 O Método de Cálculo

Para obter a solução do problema de transferência bi-impulsiva de um veículo espacial entre duas órbitas elípticas não coplanares dadas, com consumo mínimo de combustível, seguimos os passos descritos abaixo.

Em primeiro lugar, é necessário obter as direções dos planos orbitais. Como as órbitas inicial (órbita A) e final (órbita B) são conhecidas, temos os cinco elementos keplerianos de cada uma (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, argumento do perigeu, argumento do nodo ascendente). Pode-se, então, escolher valores para duas anomalias verdadeiras e obter-se dois vetores posição para cada órbita, que serão denominados $\vec{r}_{1A}, \vec{r}_{2A}, \vec{r}_{1B}, \vec{r}_{2B}$, correspondentes a estas anomalias verdadeiras escolhidas.

Com isto, obtém-se os vetores unitários normais para cada plano orbital:

$$\vec{S}_A = \frac{\vec{r}_{1A} \times \vec{r}_{2A}}{|\vec{r}_{1A} \times \vec{r}_{2A}|}, \quad (3.1)$$

$$\vec{S}_B = \frac{\vec{r}_{1B} \times \vec{r}_{2B}}{|\vec{r}_{1B} \times \vec{r}_{2B}|}. \quad (3.2)$$

A seguir, deve-se definir o plano de transferência orbital. Para executar esta tarefa é necessário fixar os vetores posição do início e fim da transferência (\vec{r}_1, \vec{r}_2), respectivamente. Isto pode ser feito assumindo-se valores para as anomalias verdadeiras de início e fim de manobra (ϕ_1, ϕ_2). É importante frisar que os valores destas anomalias se referem aos respectivos planos orbitais e, portanto, são ângulos em planos diferentes. Estes valores serão variados na órbita completa (0° e 360°) para obter-se o mínimo consumo de combustível da manobra e então ser possível determinar onde aplicar os impulsos. Como alternativa, pode-se escolher um ou mais sub-intervalos na região 0° -

360° de cada órbita para representar os possíveis vínculos de proibição de manobra em certas regiões.

Em outras palavras, vamos primeiramente equacionar e resolver o problema de transferência com mínimo consumo de combustível entre dois pontos fixos (um na órbita inicial e outro na órbita final) e a seguir faremos estes dois pontos circularem pelas duas órbitas envolvidas para obtermos a transferência de menor consumo.

Com os vetores posição do início e do fim da manobra conhecidos, obtém-se o ângulo de transferência (σ) entre \vec{r}_1 e \vec{r}_2 a partir de:

$$\cos(\sigma) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}. \quad (3.3)$$

Posteriormente, obtém-se também o vetor unitário (\hat{t}) normal ao plano de transferência:

$$\hat{t} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}. \quad (3.4)$$

É importante notar que este passo faz com que os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 colineares produzam uma singularidade. Por esta razão, vetores próximos desta condição não são adequados ao método de cálculo. Esta restrição impõe limitações ao método, que não tem capacidade de resolver problemas com geometria especial (transferência de Hohmann, bi-elíptica, etc.). Porém, deve-se levar em conta que esta classe de problemas apresenta solução imediata e não necessita ser resolvida pelo método aqui proposto. O programa se encarrega de não considerar estes casos.

Obtém-se o ângulo entre os planos da órbita inicial e de transferência (ζ) e o ângulo entre os planos da órbita final e de transferência (λ), através de:

$$\cos(\zeta) = \bar{S}_A \cdot \hat{t}, \quad (3.5)$$

$$\cos(\lambda) = \bar{S}_B \cdot \hat{t}. \quad (3.6)$$

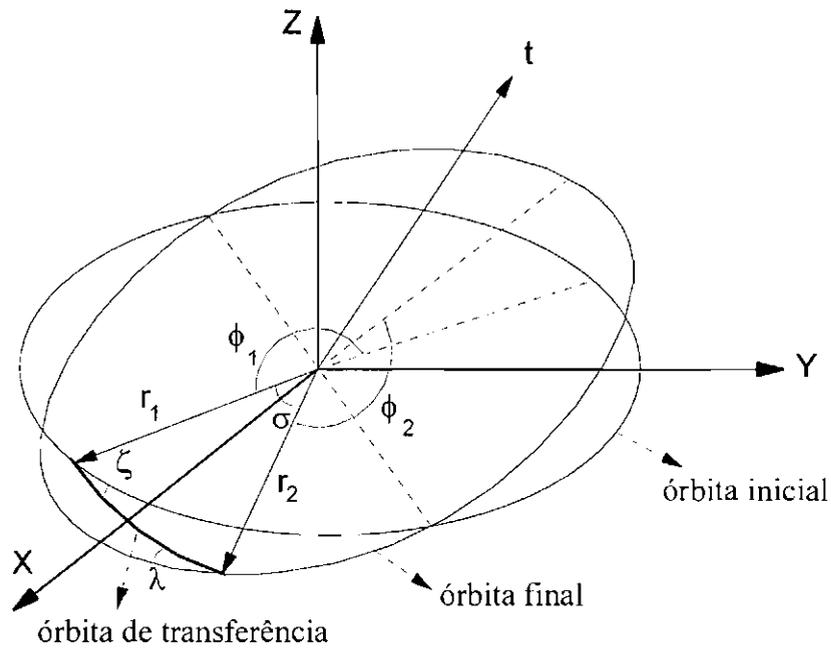


Figura 3.1 - Ângulos envolvidos na transferência entre duas órbitas não coplanares.

Tendo-se os dois vetores da órbita de transferência \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , pode-se calcular: inclinação (i_T), argumento do nodo ascendente (Ω_T) e o ângulo que representa a soma do argumento do perigeu com a anomalia verdadeira ($\omega_T + \phi_1$) da órbita de transferência, usando-se:

$$\cos(i_T) = \hat{t} \cdot \hat{z}, \quad (3.7)$$

$$\cos(\Omega_T) = \bar{M} \cdot \hat{x}, \quad (3.8)$$

$$\cos(\omega_T + \phi_T) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{M}}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{M}|}, \quad (3.9)$$

onde, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ são os vetores unitários das direções básicas do sistema de referência e

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \hat{z} \times \hat{l} \\ \hat{z} \times \hat{l} \end{pmatrix}.$$

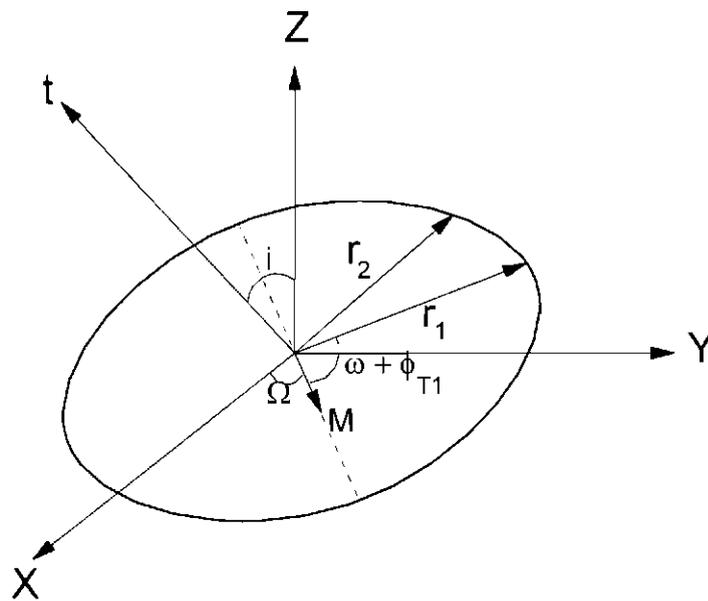


Figura 3.2 - Órbita de transferência.

Os outros elementos da órbita de transferência só serão determinados depois que se resolver o problema de minimizar o combustível, ou seja, minimizar a variação total em velocidade (ΔV).

Como se trata de transferências bi-impulsivas, o ΔV tem que ser dividido em duas parcelas: ΔV_1 (primeiro impulso, a ser aplicado na órbita inicial) e ΔV_2 (segundo impulso, a ser aplicado na órbita de transferência para atingir a órbita final).

As componentes radial e transversal da velocidade na órbita inicial são dadas por:

$$\begin{aligned} V_{r1} &= \frac{\mu}{H_1} e_1 \sin(\phi_1) \\ V_{\theta 1} &= \frac{\mu}{H_1} [1 + e_1 \cos(\phi_1)], \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde,

- μ = constante gravitacional (398600,64 km³/s² para a Terra);
- e_1 = excentricidade da órbita inicial;
- H_1 = momento angular da órbita inicial;
- ϕ_1 = anomalia verdadeira no ponto de aplicação do primeiro impulso.

Projetando-as no plano de transferência, tem-se:

$$\begin{aligned} V_{r1T} &= V_{r1} \\ V_{\theta 1T} &= V_{\theta 1} \cdot \cos(\zeta) \\ V_{k1T} &= V_{\theta 1} \cdot \sin(\zeta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

As componentes da velocidade após o primeiro impulso na órbita de transferência são:

$$\begin{aligned} V_{rT1} &= \frac{\mu}{H_T} e_T \sin(\phi_{T1}) \\ V_{\theta T1} &= \frac{\mu}{H_T} [1 + e_T \cos(\phi_{T1})] \\ V_{kT1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde,

$e_T =$ excentricidade da órbita de transferência;

$H_T =$ momento angular da órbita de transferência;

$\phi_{T1} =$ anomalia verdadeira no ponto de aplicação do primeiro impulso medida na órbita de transferência.

Assim, o primeiro impulso pode ser determinado como uma função das incógnitas H_T, e_T, ϕ_{T1} , pois:

$$\Delta V_1^2 = (V_{rT1} - V_{r1})^2 + (V_{\theta T1} - V_{\theta 1} \cdot \cos(\zeta))^2 + (V_{\theta 1} \cdot \sin(\zeta))^2. \quad (3.13)$$

O mesmo processo deve ser feito para o segundo impulso. As componentes radial e transversal da velocidade na órbita final são:

$$\begin{aligned} V_{r2} &= \frac{\mu}{H_2} e_2 \sin(\phi_2) \\ V_{\theta 2} &= \frac{\mu}{H_2} [1 + e_2 \cos(\phi_2)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde,

$e_2 =$ excentricidade da órbita final;

$H_2 =$ momento angular da órbita final;

$\phi_2 =$ anomalia verdadeira no ponto de aplicação do segundo impulso.

Projetando-se no plano de transferência, tem-se:

$$\begin{aligned} V_{r2T} &= V_{r2} \\ V_{\theta 2T} &= V_{\theta 2} \cdot \cos(\lambda) \\ V_{k2T} &= V_{\theta 2} \cdot \sin(\lambda). \end{aligned} \quad (3.15)$$

As componentes da velocidade no momento do segundo impulso na órbita de transferência são:

$$\begin{aligned} V_{rT2} &= \frac{\mu}{H_T} e_T \sin(\phi_{T2}) \\ V_{\theta T2} &= \frac{\mu}{H_T} [1 + e_T \cos(\phi_{T2})] \\ V_{kT2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde,

$$\phi_{T2} = \phi_{T1} + \sigma, \quad (3.17)$$

é a anomalia verdadeira do ponto de aplicação do segundo impulso medida na órbita de transferência.

E, assim, o segundo impulso fica também determinado como uma função de H_T, e_T, ϕ_{T1} . Esta expressão é dada por:

$$\Delta V_2^2 = (V_{r2} - V_{rT2})^2 + (V_{\theta 2} \cdot \cos(\lambda) - V_{\theta T2})^2 + (V_{\theta 2} \cdot \sin(\lambda))^2. \quad (3.18)$$

O problema agora pode ser resumido em minimizar o impulso total, dado por:

$$\Delta V(H_T, e_T, \phi_{T1}) = |\Delta V_1| + |\Delta V_2|, \quad (3.19)$$

sujeito aos dois vínculos dinâmicos, que expressam o fato de que \vec{r}_1 e \vec{r}_2 tem os mesmos valores, independentemente de serem calculados na órbita de transferência ou nas órbitas inicial (\vec{r}_1) e final (\vec{r}_2).

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\mu}{H_1^2} [1 + e_1 \cos(\phi_1)] = \frac{\mu}{H_T^2} [1 + e_T \cos(\phi_{T1})] \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\mu}{H_2^2} [1 + e_2 \cos(\phi_2)] = \frac{\mu}{H_T^2} [1 + e_T \cos(\phi_{T1} + \sigma)] \quad (3.21)$$

Estas equações de vínculo são trabalhadas para transformá-las em expressões do tipo $e_T(\phi_{T1})$ e $H_T(\phi_{T1})$, como segue:

$$(3.20) \rightarrow H_T^2 = H_1^2 \frac{[1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1})]}{[1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]} \quad (3.22)$$

$$(3.21) \rightarrow H_T^2 = H_2^2 \frac{[1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)]}{[1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]} \quad (3.23)$$

$$(3.22) = (3.23) \rightarrow H_1^2 \frac{[1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1})]}{[1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]} = \pm H_2^2 \frac{[1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)]}{[1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]} \quad (3.24)$$

$$[1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1})] = \pm \frac{H_2^2}{H_1^2} \frac{[1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]}{[1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]} \cdot [1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)] \quad (3.25)$$

Como:

$$Q = \frac{H_2^2}{H_1^2} \frac{[1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]}{[1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]} \quad (3.26)$$

é uma constante conhecida, podemos simplificar a Expressão (3.25):

$$1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1}) = \pm Q \cdot [1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)] \quad (3.27)$$

$$e_T \cdot [\cos(\phi_{T1}) - Q \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)] = \pm[Q - 1] \quad (3.28)$$

ou melhor:

$$e_T = \pm \frac{Q - 1}{\cos(\phi_{T1}) - Q \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)}, \quad (3.29)$$

através de simulações numéricas descobriu-se que para manter-se $e \geq 0$:

$$e_T(\phi_{T1}) = \frac{Q - 1}{\cos(\phi_{T1}) - Q \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)}. \quad (3.30)$$

A Equação (3.30) expressa a excentricidade da órbita de transferência em função da anomalia verdadeira ϕ_{T1} .

Continuando o trabalho algébrico, temos:

$$(3.20) \rightarrow [1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1})] = \frac{H_T^2}{H_1^2} [1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)] \quad (3.31)$$

$$(3.21) \rightarrow [1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)] = \frac{H_T^2}{H_2^2} [1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)] \quad (3.32)$$

$$(3.31) \rightarrow e_T = \frac{1}{\cos(\phi_{T1})} \left\{ \frac{H_T^2}{H_1^2} [1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)] - 1 \right\} \quad (3.33)$$

$$(3.32) \rightarrow e_T = \frac{1}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)} \left\{ \frac{H_T^2}{H_2^2} [1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)] - 1 \right\} \quad (3.34)$$

(3.33) = (3.34) \rightarrow

$$\left\{ \frac{H_T^2}{H_1^2} [1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)] - 1 \right\} = \frac{\cos(\phi_{T1})}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)} \left\{ \frac{H_T^2}{H_2^2} [1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)] - 1 \right\} \quad (3.35)$$

Como:

$$Q1 = \frac{[1 + e_1 \cdot \cos(\phi_1)]}{H_1^2} \quad (3.36)$$

$$Q2 = \frac{[1 + e_2 \cdot \cos(\phi_2)]}{H_2^2} \quad (3.37)$$

são constantes conhecidas, podemos simplificar a Expressão (3.35):

$$H_T^2 \cdot Q1 - 1 = \frac{\cos(\phi_{T1})}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)} [H_T^2 \cdot Q2 - 1] \quad (3.38)$$

$$H_T^2 \left\{ Q1 - \frac{\cos(\phi_{T1})}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)} \cdot Q2 \right\} = 1 - \frac{\cos(\phi_{T1})}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)} \quad (3.39)$$

ou melhor:

$$H_T(\phi_{T1}) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos(\phi_{T1})}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)}}{Q1 - \frac{\cos(\phi_{T1})}{\cos(\phi_{T1} + \sigma)} \cdot Q2}} \quad (3.40)$$

A Equação (3.40) expressa o momento angular da órbita de transferência em função da anomalia verdadeira ϕ_{T1} . Podem existir valores de ϕ_{T1} para os quais o radicando da Equação (3.40) é negativo. Para estes valores não há solução e o programa não funciona. Este problema pode ser contornado induzindo-se o programa a não

considerar estes casos ou subdividindo o problema em intervalos que não contenham as anomalias verdadeiras que tornam este radicando negativo.

Agora o ΔV é função apenas da anomalia verdadeira ϕ_{T1} pois $e_T(\phi_{T1})$ e $H_T(\phi_{T1})$ foram deduzidas. Diversas técnicas podem ser utilizadas para encontrar o valor mínimo de uma função de uma variável. Uma forma utilizada neste trabalho é a busca da raiz real da equação $\frac{\partial(\Delta V)}{\partial\phi_{T1}} = 0$. A expressão para $\frac{\partial(\Delta V)}{\partial\phi_{T1}}$ pode ser obtida analiticamente com o auxílio do *software Mathematica* e a raiz da expressão pode ser calculada com o uso de métodos numéricos como, por exemplo, o método da bissecção dentro do intervalo $[0, 2\pi]$. Este método é bastante recomendado para o problema em questão, conforme demonstrado em Prado e Broucke (1994).

Outra forma possível, e também utilizada neste trabalho, é o emprego de rotinas de minimização de funções como, por exemplo, a que foi encontrada em Press et al. (1992). Pelo fato de ambas apresentarem resultados idênticos, a primeira técnica foi suprimida para economia de tempo computacional. Porém, diversos casos foram resolvidos com as duas técnicas como medida de segurança.

Com o valor de ϕ_{T1} para o qual ΔV é mínimo, calculamos os outros elementos da órbita de transferência (semi-eixo maior, excentricidade, argumento do perigeu).

A excentricidade é calculada pela substituição do valor encontrado para ϕ_{T1} na Expressão (3.30). O semi-eixo maior pode ser calculado através de qualquer uma das equações abaixo:

$$r_1 = \frac{a_T(1 - e_T^2)}{1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1})} \quad (3.41)$$

$$r_2 = \frac{a_T(1 - e_T^2)}{1 + e_T \cdot \cos(\phi_{T1} + \sigma)} \quad (3.42)$$

O argumento do perigeu é calculado através de:

$$\cos(\omega_T + \phi_{T1}) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{M}}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{M}|} \quad (3.43)$$

E, assim, a órbita de transferência e os impulsos, que serão a estimativa inicial para resolução do problema em uma dinâmica não kepleriana, estão determinados.

Os resultados de diversas simulações efetuadas com o método descrito neste capítulo serão mostrados no Capítulo 5.

CAPÍTULO 4

TRANSFERÊNCIAS BI-IMPULSIVAS ÓTIMAS EM UMA DINÂMICA NÃO KEPLERIANA USANDO O “TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM”

4.1 Introdução

O problema de transferência bi-impulsiva entre duas órbitas elípticas não coplanares, com consumo mínimo de combustível em uma dinâmica não kepleriana foi transformado no conhecido *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP) e sua solução foi encontrada.

Dada uma estimativa inicial, que foi calculada através de um método que usa uma dinâmica kepleriana (as únicas forças envolvidas no sistema são os propulsores e a atração gravitacional da Terra, considerada como ponto de massa) e que está descrito no Capítulo 3, foi usado o TPBVP para resolver o problema assumindo que o sistema dinâmico inclui perturbações devidas ao arrasto atmosférico e à não esfericidade do potencial gravitacional terrestre.

Assim, tendo sido obtida a solução desejada, pode-se calcular manobras orbitais reais e avaliar a variação do consumo de combustível devido às perturbações.

Esta pesquisa é uma continuação do estudo de transferências bi-impulsivas entre duas órbitas coplanares com consumo mínimo de combustível que foi desenvolvido por Prado (1993) e está diretamente relacionada com o estudo sobre a necessidade de manobras espaciais em satélites em órbitas congeladas (Schulz, 1996).

4.2 O “Two Point Boundary Value Problem”

Quando o problema a ser estudado pode ser modelado através de equações diferenciais ordinárias e tem que satisfazer vínculos para mais de um valor da variável independente, o problema resultante é chamado de *Two Point Boundary Value Problem*. O estudo de transferência orbital realizado neste trabalho é um caso típico deste tipo de problema. O veículo espacial deve partir de um estado com algumas variáveis conhecidas (órbita inicial), se deslocar até um segundo estado também com algumas variáveis conhecidas (órbita final) e, durante esta transferência, ter a dinâmica governada por equações de movimento que nada mais são do que as equações diferenciais ordinárias. Portanto, para a realização deste estudo, foi implementado o caso mais comum de TPBVP, onde os vínculos devem ser satisfeitos em dois pontos - nos instantes inicial e final da integração - para resolver o problema de manobras orbitais bi-impulsivas não coplanares com otimização de combustível.

O TPBVP tem a seguinte forma: deseja-se encontrar a solução de um conjunto de N equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem (as 6 equações que governam o movimento de um veículo espacial):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_p - \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (4.2)$$

onde,

\vec{r} = vetor posição (r_x, r_y, r_z) ;

\vec{v} = vetor velocidade (v_x, v_y, v_z) ;

$\vec{a}_p =$ vetor aceleração devido às perturbações (a_{px}, a_{py}, a_{pz}) ;

$r =$ módulo do vetor posição;

$\frac{d}{dt} =$ derivada em relação ao tempo,

satisfazendo n_1 vínculos (as 3 componentes do vetor posição do primeiro impulso) em um ponto inicial t_1 (o instante do primeiro impulso) e o conjunto restante de $n_2 = N - n_1$ vínculos (as 3 componentes do vetor posição do segundo impulso), em um ponto final t_2 (o instante do segundo impulso).

4.3 O Método Numérico

Foi usado um método Cash-Karp Runge-Kutta de 5ª ordem com controle adaptativo de passo para integrar as equações de movimento.

Neste método são aproveitados os valores calculados pelo programa kepleriano das componentes do vetor velocidade após o primeiro impulso na órbita de transferência como estimativa inicial. Tendo os valores das variáveis dependentes solucionado o primeiro vínculo, as equações diferenciais ordinárias são integradas até o tempo final da transferência.

O problema se resume a encontrar um bom ajuste dos parâmetros livres do ponto inicial (a velocidade após o primeiro impulso) que anule as discrepâncias entre a posição final obtida através da integração numérica das equações de movimento e a posição desejada (vínculo no instante final).

Foram utilizadas subrotinas em FORTRAN já prontas e disponíveis em Press et al. (1992) para implementar o método numérico. Dada uma estimativa inicial, a

subrotina NEWT.FOR encontra as raízes de um conjunto de equações através de um método de convergência global. O Runge-Kutta de 5^a ordem utilizado está na subrotina ODEINT.FOR. A rotina RKQS.FOR monitora o erro de truncamento local para garantir a precisão e ajustar o tamanho do passo, enquanto a RKCK.FOR utiliza o método Cash-Karp Runge-Kutta de 5^a ordem para avançar a solução em um passo pré estabelecido.

4.4 O Programa

Foi desenvolvido um programa em FORTRAN (TPBVP.FOR) para resolver o problema de transferência bi-impulsiva tridimensional usando o TPBVP e sofrendo perturbações devido ao arrasto atmosférico e aos harmônicos esféricos do geopotencial.

O arquivo de entrada é gerado pelo programa descrito no Capítulo 3, que resolve o problema de manobras orbitais em uma dinâmica kepleriana e que, entre outras informações, fornece as posições inicial e final ótimas da transferência, as velocidades antes e depois de cada impulso e as perturbações que se deseja levar em consideração (nenhuma, geopotencial, arrasto atmosférico ou ambas). No caso da perturbação devida aos harmônicos esféricos do geopotencial, é possível escolher-se a ordem dos harmônicos zonais e tesserais que se deseja incluir no cálculo.

Para calcular as acelerações devidas ao arrasto atmosférico e aos harmônicos esféricos do geopotencial foram utilizados, respectivamente, os pacotes de rotinas ACEDRG.FOR e PINES_TOT.FOR. O pacote computacional ACEDRG.FOR usa o modelo de Jacchia-Roberts (Roberts, 1971) corrigido e implementado na Divisão de Mecânica Orbital e Controle do INPE (Kuga, 1985; Rios Neto, 1973). O pacote PINES_TOT.FOR usa o desenvolvimento recursivo do geopotencial conforme

apresentado em Pines (1973), junto com o modelo GEM10B dos harmônicos esféricos terrestres.

O programa TPBVP.FOR utiliza os dados obtidos na solução com dinâmica kepleriana como estimativa inicial. Sendo assim, o programa executa as seguintes tarefas: *i)* parte da posição inicial \vec{r}_1 (vínculo no instante inicial); *ii)* assume que a velocidade inicial seja \vec{v}_1 , a velocidade obtida pela solução do problema com dinâmica kepleriana; *iii)* integra numericamente as equações de movimento pelo mesmo intervalo de tempo dado pela estimativa inicial; *iv)* verifica se a posição desejada (vínculo no instante final) foi atingida (em geral, a existência de perturbações na dinâmica faz com que este vínculo não seja satisfeito em uma primeira iteração); e *v)* o programa então resolve o TPBVP usando um método multidimensional de procura de raízes (um método globalmente convergente baseado no método de Newton-Raphson para resolver sistemas de equações não lineares e que está descrito em Press et al., 1992) e, assim, calcula uma nova estimativa para a velocidade inicial \vec{v}_1 a partir do erro na satisfação do vínculo no instante final. Este passo é repetido até que o vínculo seja atingido dentro de uma precisão numérica estipulada.

É preciso levar-se em consideração que são utilizados como estimativa inicial para as posições inicial e final da transferência os raios vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 que foram obtidos através da variação discreta das anomalias verdadeiras das órbitas inicial e final no programa de dinâmica kepleriana. Por conta disto a manobra calculada pelo programa TPBVP.FOR não é ótima, pois o método de discretização pode negligenciar os valores das posições inicial e/ou final que correspondem à melhor solução possível (menor consumo de combustível) e considerar apenas uma solução próxima da ótima. Além disto, para uma dinâmica perturbada pode haver uma transferência cujos pontos inicial e final sejam ligeiramente diferentes e melhores (sempre do ponto de vista de otimização) do que os valores fornecidos pela dinâmica kepleriana. Porém, os testes mostraram que, na prática, estas diferenças não são significativas e, assim, a

transferência calculada pelo programa TPBVP.FOR pode ser considerada ótima do ponto de vista prático.

Uma outra questão a ser abordada se refere ao tempo de duração da manobra. Existe a possibilidade de que um tempo de transferência diferente do obtido pela solução com dinâmica kepleriana (Δt) seja mais eficiente, em termos de um menor consumo de combustível, devido a uma menor variação de velocidades (ΔV_{TOTAL}). Para verificar esta possibilidade, o programa resolve o problema para diferentes valores do tempo de transferência, entre $0,5 \cdot \Delta t$ e $1,5 \cdot \Delta t$, para verificar se existe alguma transferência que apresente um menor consumo de combustível.

A subrotina de integração devolve os novos valores das velocidades nos pontos dos primeiro e segundo impulsos na órbita de transferência, corrigidos devido às perturbações.

O TPBVP.FOR calcula os valores ótimos das variações na velocidade para a manobra estudada e produz um arquivo de saída com informações sobre a órbita ótima de transferência, os pontos onde devem ser aplicados os impulsos, as componentes dos impulsos, o impulso total, o impulso total kepleriano e os tempos de duração das transferências perturbada e kepleriana.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 Introdução

Foram gerados resultados numéricos para diversos tipos de transferências orbitais.

Em uma primeira etapa são apresentadas e analisadas as simulações realizadas com o programa que utiliza uma dinâmica kepleriana. Estes resultados são comparados com os resultados obtidos através de um outro método de cálculo descrito em Altman e Pistiner (1964) e implementado pela aluna de mestrado da Divisão de Engenharia e Tecnologia Espaciais opção Mecânica Espacial e Controle Maria Matilde Netto dos Santos Paulo e são comparados também com resultados de transferências contínuas dispostas em Biggs (1978). Estão incluídos nesta parte testes relativos ao efeito dos vínculos de proibição da aplicação do impulso em algumas regiões da órbita, principalmente devido à condição de só aplicar impulsos quando o veículo está visível em uma determinada estação de rastreamento.

Na segunda etapa encontram-se os testes realizados com o programa TPBVP.FOR. São comparados os resultados dos casos kepleriano, perturbados pelos harmônicos esféricos terrestres, pelo arrasto atmosférico e também por ambas. Por falta de casos tridimensionais perturbados na literatura para comparação, estas simulações são analisadas de acordo com o seu comportamento esperado. Deve-se levar em conta que neste trabalho não está sendo assumido algum tipo de erro nos propulsores. Dependendo da situação particular, erros deste tipo podem ter uma magnitude maior que os efeitos aqui estudados.

Foi abordada ainda a questão de estabelecer qual é o erro encontrado no caso de se aplicar o impulso calculado pelo programa kepleriano na órbita inicial em uma dinâmica não kepleriana, ou seja, descobrir a que distância se chega do ponto desejado (\vec{r}_2) da órbita final utilizando um impulso calculado para um caso não perturbado. Com isto, pode-se calcular o custo, em termos da não satisfação dos vínculos, para uma manobra que não leve em conta a dinâmica perturbada durante o cálculo dos impulsos.

5.2 Simulações com Dinâmica Kepleriana

5.2.1 Comparação entre a variação total em velocidade calculada e a da literatura

São apresentadas algumas simulações realizadas com o programa descrito no Capítulo 3, que utiliza uma dinâmica kepleriana, ou seja, as únicas forças envolvidas na dinâmica são a dos propulsores do satélite e a devida à atração gravitacional da Terra (considerada como ponto de massa), para encontrar o mínimo consumo de combustível para uma transferência bi-impulsiva entre duas órbitas não coplanares.

Em todos os casos foi repetido o processo de busca de mínimo consumo de combustível (ΔV_{TOTAL}) através da variação dos valores das anomalias verdadeiras inicial e final (ϕ_1 e ϕ_2) entre 0° e 360° , i.e., para cada transferência entre duas órbitas dadas foram consideradas as diferentes combinações possíveis de raios vetores das posições inicial e final até encontrar a combinação cuja variação de velocidade necessária para a transferência é menor. Em poucos casos o programa funcionou em todo intervalo sem parar em alguns pontos devido a problemas numéricos. Foi necessário repartir o intervalo 0° a 360° em sub-intervalos que excluem os pontos

problemáticos onde o programa funcionou perfeitamente. Isto indica que existem problemas de convergência em pontos específicos, mas a técnica de subdividir o intervalo em intervalos menores que excluem estes pontos funcionou bem em todos os exemplos testados.

São apresentados em cada caso: os valores dos elementos keplerianos das órbitas inicial e final; o semi-eixo maior da órbita de transferência; a excentricidade da órbita de transferência; as anomalias verdadeiras dos impulsos na órbita de transferência; e os valores das variações de velocidades (que podem ser traduzidos por consumo de combustível) calculados pelo programa kepleriano (Capítulo 3), por Matilde dos Santos Paulo (obtidas através de comunicação pessoal) e por Biggs (1978).

Foram utilizados exemplos similares aos encontrados em Biggs (1978), no sentido de serem transferências entre as mesmas órbitas, para melhor comparação. Porém, é preciso ter em mente que Biggs calcula o mínimo consumo de combustível nestas transferências orbitais considerando que o veículo espacial possui um único motor que é responsável por um empuxo contínuo, ou seja, o combustível é queimado durante um certo intervalo de tempo finito ao longo da órbita de transferência. Este tipo de restrição requer equações diferentes das usadas nas transferências que consideram as manobras impulsivas (intervalo de tempo infinitesimal para a propulsão) além de poder apresentar resultados diferentes, em termos de custo, em alguns casos.

a) Uma transferência entre duas órbitas elípticas e não coplanares, com pequena variação em todos elementos orbitais é apresentada. Os elementos keplerianos da órbita inicial são:

semi-eixo maior: 12030,0 km;

excentricidade:	0,02000;
inclinação:	0,00873 rad ($0,5^\circ$);
argumento do perigeu:	3,17649 rad (182°);
nodo ascendente:	0,0 rad (0°).

Os elementos keplerianos da órbita final são:

semi-eixo maior:	11994,7 km;
excentricidade:	0,01600;
inclinação:	0,00602 rad ($0,3^\circ$);
argumento do perigeu:	3,05171 rad ($175,9^\circ$);
nodo ascendente:	0,15568 rad ($8,9^\circ$).

As anomalias verdadeiras das órbitas inicial e final foram inicialmente variadas em sub-intervalos dentro do intervalo $0^\circ - 360^\circ$, até encontrar-se o intervalo que apresentava o par de anomalias verdadeiras correspondente à menor variação em velocidade. O melhor resultado foi encontrado no subintervalo onde a anomalia verdadeira da órbita inicial varia entre 4,00 e 4,30 rad com um incremento de 0,05 rad e a anomalia verdadeira da órbita final varia entre 3,00 e 6,28 rad com o mesmo incremento.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

semi-eixo maior da órbita de transferência: 12038,1 km;

excentricidade da órbita de transferência: 0,01945;
 anomalia verdadeira do primeiro impulso: 4,03754 rad (231,3°);
 anomalia verdadeira do segundo impulso: 5,91049 rad (338,6°),

sendo, estas anomalias, medidas na órbita de transferência.

As variações totais em velocidade são:

Programa kepleriano: 0,02222 km/s;
 Matilde dos Santos Paulo: 0,02205 km/s;
 Biggs (1978): 0,02210 km/s.

Os resultados são todos muito semelhantes entre si. Em particular, o resultado obtido pelo programa kepleriano é muito próximo ao obtido por Matilde dos Santos Paulo, que utiliza um método de cálculo diferente para a mesma modelagem (ponto material sujeito a alterações instantâneas de velocidade e dinâmica kepleriana). Os resultados mostram valores para a variação em velocidade dentro do esperado, ou seja, na mesma ordem de grandeza da referência. Em Biggs (1978) encontra-se o consumo total de combustível desta transferência. Considerando o empuxo contínuo, este valor foi transformado em variação de velocidade através da equação de Tsiolkovsky (Chobotov, 1991):

$$\Delta V = g_0 \cdot I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right), \quad (5.1)$$

onde,

$\Delta V =$ variação total de velocidade;

$g_0 =$ constante gravitacional terrestre = $9,80660 \times 10^{-3} \text{ km/s}^2$;

$I_{SP} =$ impulso específico = 255 s;

$m_i =$ massa inicial = 300 kg;

$m_f =$ massa final = 297,36 kg.

Todos os métodos numéricos envolvidos lidam com variações discretas da variável independente e existem muitos mínimos locais. Devido a este fato, mínimos locais em pontos diferentes podem apresentar consumo muito próximo. Assim sendo, a comparação deve ser restrita ao consumo de combustível e não levar em conta os pontos de aplicação do impulso e outras variáveis.

b) Um segundo teste é apresentado com dados para as órbitas inicial e final obtidos em Biggs (1978). Os elementos keplerianos da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	4500,0 km;
excentricidade:	0,50000;
inclinação:	0,13963 rad (8°);
argumento do perigeu:	5,93412 rad (-20°);
nodo ascendente:	3,75246 rad (-145°).

Os elementos keplerianos da órbita final são:

semi-eixo maior:	7435,0 km;
excentricidade:	0,12200;

inclinação:	0,03997 rad (2,3°);
argumento do perigeu:	5,93412 rad (-20°);
nodo ascendente:	3,75246 rad (-145°).

O melhor resultado foi encontrado no intervalo onde a anomalia verdadeira foi variada de 1,10 a 1,70 rad com um incremento de 0,01 rad na órbita inicial, e de 3,00 a 6,28 rad com o mesmo incremento na órbita final.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

semi-eixo maior da órbita de transferência:	5348,8 km;
excentricidade da órbita de transferência:	0,55684;
anomalia verdadeira do primeiro impulso:	0,74217 rad (42,5°);
anomalia verdadeira do segundo impulso:	3,23394 rad (185,2°).

As variações totais em velocidade são:

Programa kepleriano:	2,52782 km/s;
Matilde dos Santos Paulo:	2,94 km/s;
Biggs (1978):	2,66888 km/s.

O programa kepleriano aqui apresentado encontrou um resultado da mesma ordem de grandeza que o de Matilde dos Santos Paulo, porém com menor consumo de combustível. A justificativa desta pequena diferença vem da grande

sensibilidade do problema aqui tratado com relação a parâmetros numéricos. Existem diversos mínimos locais e nem sempre o método numérico consegue obter o menor deles através de uma busca discreta. De acordo com o esperado, foi encontrado também um resultado diferente e melhor que o de Biggs (1978), pois além de se tratar o problema com uma transferência finita, o caso testado nesta referência apresenta vínculos a serem superados que não foram incluídos nas simulações aqui realizadas.

Foi usada a Equação (5.1) para transformar variação em massa em variação em velocidade. Porém, o impulso específico (I_{sp}) neste caso é igual a 433 s e as massas inicial e final são, respectivamente, iguais a 11300 kg e 6030,5 kg (Biggs, 1978).

5.2.2 Testes de visibilidade

Para se observar as diferenças no consumo de combustível devidas a vínculos impostos por possíveis problemas de visibilidade de uma determinada estação de rastreamento, foram feitas duas simulações: a primeira é uma transferência entre uma órbita baixa levemente inclinada e excêntrica e uma órbita geoestacionária e a segunda é uma transferência cuja órbita final é a órbita nominal do CBERS. Em termos práticos, estes vínculos requerem que o impulso não possa ser aplicado em certas regiões da órbita do veículo espacial, e a variação no consumo de combustível imposta por estas restrições é avaliada através da subdivisão dos intervalos das anomalias verdadeiras das órbitas inicial e final.

a) Simulação para avaliar o custo devido a restrições de visibilidade cuja órbita final é uma órbita geoestacionária.

Os elementos keplerianos da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	7500,0 km;
excentricidade:	0,02000;
inclinação:	0,03491 rad (2°);
argumento do perigeu:	0,87266 rad (50°);
nodo ascendente:	0,52359 rad (30°).

Os elementos keplerianos da órbita final são:

semi-eixo maior:	42164,2 km;
excentricidade:	0,0;
inclinação:	0,0 rad (0°);
argumento do perigeu:	0,87266 rad (50°);
nodo ascendente:	0,52359 rad (30°).

Em uma primeira etapa, as anomalias verdadeiras foram variadas de 0° a 360° nas órbitas inicial e final. O resultado obtido para a variação mínima em velocidade foi:

$$\Delta V = 3,649 \text{ km/s}$$

Outros resultados obtidos:

semi-eixo maior da órbita de transferência: 24910,7 km;

excentricidade da órbita de transferência: 0,69486;

anomalia verdadeira do primeiro impulso: 0,04563 rad (2,6°);

anomalia verdadeira do segundo impulso: 3,06097 rad (175,3°).

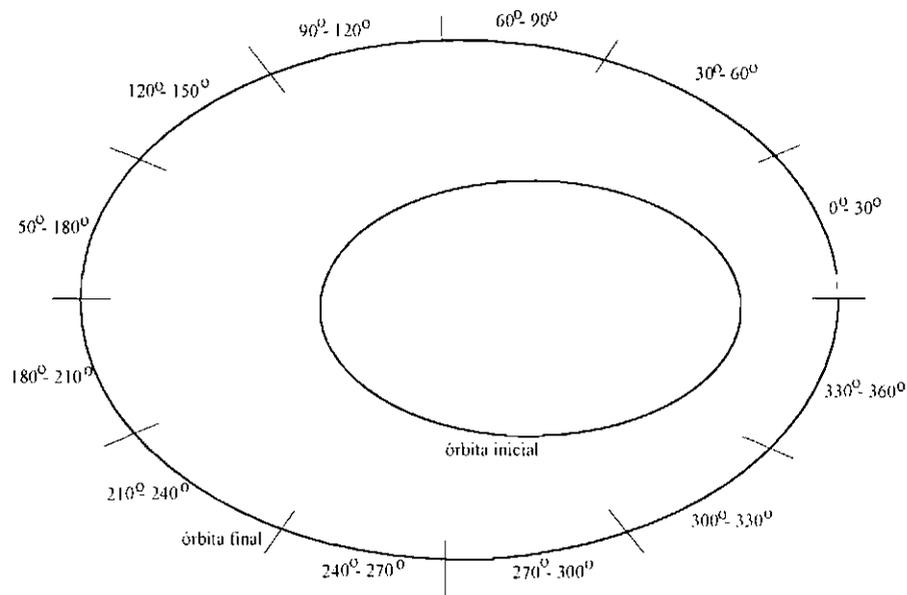


Figura 5.1 - Subdivisão dos intervalos da anomalia verdadeira da órbita final

Em uma segunda etapa os intervalos das anomalias verdadeiras foram subdivididos, de forma a ser possível comparar as variações do consumo de combustível através do ΔV , para diferentes casos de visibilidade da estação de rastreamento. Primeiro foi mantido o intervalo de variação de 0° a 360° para a anomalia verdadeira da órbita inicial (ϕ_1) e subdividido o intervalo de variação da anomalia verdadeira da órbita final (ϕ_2) em subintervalos de 30° (Figura 5.1). Depois, foi a vez de manter o intervalo de variação de 0° a 360° para a anomalia verdadeira da órbita final e subdividir da mesma forma o intervalo de variação da anomalia verdadeira da órbita inicial. Em uma última etapa os intervalos de variação das anomalias verdadeiras das duas órbitas foram

subdivididos em intervalos iguais de 30°. Os resultados podem ser observados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

TABELA 5.1 - TESTE 1 DE VISIBILIDADE

ϕ_1	ϕ_2	ΔV (km/s)
0° a 360°	0° a 30°	3,963
	30° a 60°	4,035
	60° a 90°	3,964
	90° a 120°	3,882
	120° a 150°	3,708
	150° a 180°	3,759
	180° a 210°	3,891
	210° a 240°	4,290
	240° a 270°	3,965
	270° a 300°	3,910
	300° a 330°	3,649
	330° a 360°	3,675

TABELA 5.2 - TESTE 2 DE VISIBILIDADE

ϕ_1	ϕ_2	ΔV (km/s)
0° a 30°	0° a 360°	4,072
30° a 60°		4,307
60° a 90°		4,185
90° a 120°		3,773
120° a 150°		3,649
150° a 180°		3,714
180° a 210°		3,846
210° a 240°		4,103
240° a 270°		4,035
270° a 300°		3,915
300° a 330°		3,921
330° a 360°		3,716

TABELA 5.3 - TESTE 3 DE VISIBILIDADE

ϕ_1	ϕ_2	ΔV (km/s)
0° a 30°	0° a 30°	12,689
30° a 60°	30° a 60°	12,606
60° a 90°	60° a 90°	12,504
90° a 120°	90° a 120°	12,408
120° a 150°	120° a 150°	12,341
150° a 180°	150° a 180°	12,320
180° a 210°	180° a 210°	12,329
210° a 240°	210° a 240°	12,333
240° a 270°	240° a 270°	12,390
270° a 300°	270° a 300°	12,489
300° a 330°	300° a 330°	12,599
330° a 360°	330° a 360°	12,691

Estes resultados mostram que os efeitos da visibilidade de uma estação de rastreamento existem e em alguns casos podem ser muito comprometedores. Os resultados da Tabela 5.3 demonstram claramente que este tipo de restrição pode incrementar o gasto de combustível em até 4 vezes. Mesmos os resultados das restrições em apenas uma das anomalias mostram que este gasto alcança a ordem de 10% sobre o valor que teria se não houvesse restrição.

A razão para a construção da Tabela 5.3 é explicada a seguir. Supõe-se que a missão esteja sendo rastreada por uma estação terrestre apenas e que os impulsos só possam ser aplicados quando o satélite é visível a partir desta estação. Isto significa que a região da órbita onde um impulso pode ser aplicado é bastante estreita. O valor exato depende de certos parâmetros, como por exemplo a altitude da órbita e informações relativas à antena. Apenas como um exemplo, as órbitas foram divididas em intervalos de 30° cada. Para as manobras simuladas neste exemplo o argumento do perigeu não é alterado, logo a mesma região permitida para a aplicação de impulso na

órbita inicial é válida para a órbita final. Por este motivo as combinações da Tabela 5.3 utilizam os mesmos intervalos para as anomalias verdadeiras ϕ_1 e ϕ_2 .

b) Simulação para avaliar o custo devido a restrições de visibilidade cuja órbita final é a órbita nominal do CBERS.

Os elementos keplerianos da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	7000,0 km;
excentricidade:	0,02000;
inclinação:	1,57080 rad (90°);
argumento do perigeu:	1,72253 rad ($98,7^\circ$);
nodo ascendente:	4,93805 rad ($-77,1^\circ$).

Os elementos keplerianos da órbita final são:

semi-eixo maior:	7148,9 km;
excentricidade:	0,00206;
inclinação:	1,71969 rad ($98,5^\circ$);
argumento do perigeu:	1,72253 rad ($98,7^\circ$);
nodo ascendente:	4,93805 rad ($-77,1^\circ$).

Em uma primeira etapa, as anomalias verdadeiras foram variadas de 0° a 360° nas órbitas inicial e final. O resultado obtido para a variação mínima em velocidade foi:

$$\Delta V = 1,123 \text{ km/s}$$

Outros resultados obtidos:

semi-eixo maior da órbita de transferência: 7076,8 km;

excentricidade da órbita de transferência: 0,01693;

anomalia verdadeira do primeiro impulso: 0,72712 rad ($41,7^\circ$);

anomalia verdadeira do segundo impulso: 4,03435 rad ($231,2^\circ$).

O passo seguinte é subdividir os intervalos das anomalias verdadeiras da mesma forma que foi feito no exemplo anterior para comparar as variações do consumo de combustível através do ΔV , para diferentes casos de visibilidade da estação de rastreamento. No terceiro caso os intervalos da órbita final foram subdivididos em três para cada subintervalo da órbita inicial, para avaliar-se o custo de uma pequena variação no argumento do perigeu provocada por uma perturbação. Os resultados podem ser observados nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6.

TABELA 5.4 - TESTE 4 DE VISIBILIDADE

ϕ_1	ϕ_2	ΔV (km/s)
0° a 360°	0° a 30°	1,227
	30° a 60°	1,241
	60° a 90°	1,123
	90° a 120°	1,188
	120° a 150°	1,418
	150° a 180°	1,278
	180° a 210°	1,215
	210° a 240°	1,172
	240° a 270°	1,131
	270° a 300°	1,161
	300° a 330°	1,199
	330° a 360°	1,200

TABELA 5.5 - TESTE 5 DE VISIBILIDADE

ϕ_1	ϕ_2	ΔV (km/s)
0° a 30°	0° a 360°	1,269
30° a 60°		1,410
60° a 90°		1,138
90° a 120°		1,140
120° a 150°		1,172
150° a 180°		1,195
180° a 210°		1,195
210° a 240°		1,216
240° a 270°		1,168
270° a 300°		1,123
300° a 330°		1,203
330° a 360°		1,219

TABELA 5.6 - TESTE 6 DE VISIBILIDADE

ϕ_1	ϕ_2	ΔV (km/s)
0° a 30°	330° a 360°	23,135
	0° a 30°	4,958
	30° a 60°	2,036
30° a 60°	0° a 30°	23,128
	30° a 60°	2,853
	60° a 90°	1,329
60° a 90°	30° a 60°	21,483
	60° a 90°	1,669
	90° a 120°	1,413
90° a 120°	60° a 90°	23,025
	90° a 120°	1,783
	120° a 150°	1,391
120° a 150°	90° a 120°	28,411
	120° a 150°	2,922
	150° a 180°	2,081
150° a 180°	120° a 150°	15,831
	150° a 180°	4,300
	180° a 210°	2,543
180° a 210°	150° a 180°	20,400
	180° a 210°	3,857
	210° a 240°	1,569
210° a 240°	180° a 210°	20,356
	210° a 240°	2,012
	240° a 270°	1,131
240° a 270°	210° a 240°	14,978
	240° a 270°	1,161
	270° a 300°	1,161
270° a 300°	240° a 270°	21,444
	270° a 300°	1,826

	300° a 330°	-
300° a 330°	270° a 300°	27,654
	300° a 330°	3,536
	330° a 360°	2,648
330° a 360°	300° a 330°	27,975
	330° a 360°	4,464
	0° a 30°	2,410

Estes resultados apresentam o mesmo comportamento dos resultados do exemplo anterior para os casos em que tem-se os mesmos subintervalos para as anomalias verdadeiras das órbitas inicial e final: uma restrição devida à falta de visibilidade de uma estação de rastreamento pode provocar um incremento de até 4 vezes no consumo de combustível de uma manobra. Esta afirmação pode ser aferida comparando-se o melhor resultado para o incremento de velocidade total (1,123) com o pior resultado da Tabela 5.6 (4,958). As simulações demonstraram, também, que dependendo dos intervalos de variação das anomalias verdadeiras o custo da manobra pode alcançar valores de mais de 20 vezes o custo da manobra sem restrição ou, por outro lado, não apresentar aumento de consumo de combustível significativo.

5.3 Simulações com Dinâmica Não-Kepleriana

5.3.1 TPBVP.FOR

O programa descrito no Capítulo 4, que resolve o *Two Point Boundary Value Problem*, foi testado através de várias simulações de transferências orbitais em dinâmicas keplerianas e não keplerianas.

No arquivo de entrada é possível especificar que tipos de perturbações se deseja levar em consideração durante a transferência orbital. A escolha é feita entre: nenhuma perturbação; com perturbação devida aos harmônicos esféricos do geopotencial (podendo-se escolher a ordem dos harmônicos zonais e tesserais); com perturbação devida ao arrasto atmosférico; e com perturbação devida, tanto ao geopotencial, quanto ao arrasto.

A estimativa inicial, necessária para resolver-se o TPBVP, é gerada pelo programa com dinâmica kepleriana descrito no Capítulo 3 e seus resultados também são apresentados.

Em cada uma das simulações abaixo são descritos os tipos de transferência apresentando-se os elementos orbitais das órbitas inicial e final, além de comparados os resultados gerados pelo programa kepleriano, e pelo não kepleriano (TPBVP) para todos os tipos de perturbação.

a) Nesta simulação é demonstrada uma correção orbital para um satélite artificial em órbita polar. Os elementos orbitais da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	7000,0 km;
excentricidade:	0,02000;
inclinação:	1,57080 rad (90°);
argumento do perigeu:	1,72253 rad ($98,7^{\circ}$);
nodo ascendente:	4,93805 rad ($-77,1^{\circ}$).

Os elementos orbitais da órbita final representam a órbita nominal do CBERS:

semi-eixo maior:	7148,9 km;
excentricidade:	0,00206;
inclinação:	1,71969 rad (98,5°);
argumento do perigeu:	1,72253 rad (98,7°);
nodo ascendente:	4,93805 rad (-77,1°).

Os resultados são:

Programa kepleriano:	1,1232294 km/s
TPBVP sem perturbação:	1,1232294 km/s
TPBVP com Geopotencial:	1,1232297 km/s
TPBVP com Arrasto:	1,1232339 km/s
TPBVP com Geopotencial + Arrasto:	1,1232340 km/s

Os resultados apresentados através das componentes (x , y , z) do vetor velocidade depois do primeiro impulso podem ser observados na Tabela 5.7.

TABELA 5.7 - COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE DO TESTE A

	V_{1X}	V_{1Y}	V_{1Z}
Sem perturbação	-1.037055139	-4.538820294	6.038772244
Geopotencial	-1.037055586	-4.538822227	6.038773071
Arrasto	-1.037084038	-4.538961106	6.038717593
Geopot. + Arrasto	-1.037084021	-4.538961035	6.038717824

Os resultados demonstram que ambas perturbações atuam no satélite em uma transferência entre órbitas baixas, embora de forma muito sensível.

b) Nesta simulação é testada uma transferência entre órbitas baixas após 10 revoluções orbitais do satélite durante a órbita de transferência. Os elementos da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	7000,0 km;
excentricidade:	0,01000;
inclinação:	0,17453 rad (10^0);
argumento do perigeu:	0,0 rad (0^0);
nodo ascendente:	0,17453 rad (10^0).

Os elementos da órbita final são:

semi-eixo maior:	6900,0 km;
excentricidade:	0,0;
inclinação:	0,17453 rad (10^0);

argumento do perigeu: 0,0 rad (0°);
 nodo ascendente: 0,17453 rad (10°).

O vetor posição do primeiro impulso foi mantido constante, enquanto o vetor posição do segundo impulso pôde variar por mais de 10 revoluções.

Os resultados obtidos são:

Programa kepleriano: 0,0543332 km/s
 TPBVP sem perturbação: 0,0543329 km/s
 TPBVP com Geopotencial: 0,0543330 km/s
 TPBVP com Arrasto: 0,0542482 km/s
 TPBVP com Geopotencial + Arrasto: 0,0542482 km/s

Os resultados apresentados através das componentes (x , y , z) do vetor velocidade depois do primeiro impulso podem ser observados na Tabela 5.8.

TABELA 5.8 - COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE DO TESTE B

	V_{1X}	V_{1Y}	V_{1Z}
Sem perturbação	-7,504504680	0,749790720	0,359969259
Geopotencial	-7,504506081	0,749790684	0,359969710
Arrasto	-7,504552943	0,749779215	0,359968799
Geopot. + Arrasto	-7,504553097	0,749779139	0,359968791

Neste exemplo é possível notar que a perturbação devida ao geopotencial não representa mudanças relevantes no consumo de combustível das manobras

efetuadas, porém a perturbação devida ao arrasto atmosférico é significativa em uma manobra cujo segundo impulso é aplicado 10 revoluções orbitais do satélite após o primeiro.

5.3.2 Aplicação de um impulso kepleriano em um campo perturbado

Foram desenvolvidas simulações com o objetivo de calcular o erro resultante da aplicação de um impulso calculado pelo programa kepleriano na órbita inicial em uma dinâmica não kepleriana, ou seja, deseja-se descobrir a que distância se chega do ponto desejado da órbita final utilizando um impulso calculado para um caso não perturbado.

Em uma manobra bi-impulsiva o vetor posição de aplicação do primeiro impulso na órbita inicial é o mesmo vetor posição inicial da órbita de transferência. O mesmo pode ser dito para o vetor posição final da transferência, onde é aplicado o segundo impulso, e o vetor posição da órbita final.

Nestas simulações é calculado o erro devido à não consideração de uma dinâmica perturbada, comparando-se o vetor posição da órbita final, que se deseja atingir, e o vetor posição calculado através de uma propagação de órbita em uma dinâmica não kepleriana, porém com impulso inicial calculado para uma dinâmica kepleriana.

Em cada uma das simulações são apresentados os elementos orbitais das órbitas inicial e final, e as variações angular e em módulo da posição que são causadas pela não consideração de uma dinâmica perturbada.

Foram realizadas simulações para correções orbitais do satélite CBERS após várias revoluções sob a influência de perturbações devidas ao geopotencial e ao arrasto atmosférico, porém com diferentes valores para o fluxo solar. Este parâmetro altera consideravelmente os resultados por sua influência na composição da atmosfera terrestre. O que torna pertinente o estudo de valores diferentes para o fluxo solar é o fato deste ser alterado conforme a atividade solar.

Para fins de comparação o projeto CBERS especifica que a manobra deve ser realizada de forma que os erros finais nos elementos orbitais sejam menores que: 50 m em semi-eixo maior, 10^{-4} em excentricidade, 5° em argumento do perigeu e $0,01^\circ$ em inclinação.

Também foram realizadas simulações para uma transferência orbital baixa com diferentes valores para o número de revoluções de um satélite fictício cuja razão área da seção de choque sobre massa total do satélite é maior que a do CBERS, mas apenas sobre a influência do arrasto atmosférico.

a) Foi simulada uma correção orbital para o satélite CBERS onde o fluxo solar considerado é 250. Os elementos orbitais da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	7000,0 km;
excentricidade:	0,02000;
inclinação:	1,57080 rad (90°);
argumento do perigeu:	1,72253 rad ($98,7^\circ$);
nodo ascendente:	4,93805 rad ($-77,1^\circ$).

Os elementos orbitais da órbita final representam a órbita nominal do CBERS:

semi-eixo maior:	7148,9 km;
excentricidade:	0,00206;
inclinação:	1,71969 rad (98,5°);
argumento do perigeu:	1,72253 rad (98,7°);
nodo ascendente:	4,93805 rad (-77,1°).

TABELA 5.9 - CBERS COM FLUXO SOLAR = 250

Número de Revoluções	Varição em módulo (m)	Varição angular
0	0,3	0,000°
5	45,2	0,006°
10	79,2	0,025°
20	111,2	0,102°
80	655,1	1,678°
100	1233,4	2,635°

b) Foi simulada uma correção orbital para o satélite CBERS onde o fluxo solar considerado é 300. Os elementos orbitais das órbitas inicial e final são os mesmos do exemplo *a*.

TABELA 5.10 - CBERS COM FLUXO SOLAR = 300

Número de Revoluções	Varição em módulo (m)	Varição angular
0	0,9	0,000°
5	70,8	0,009°
10	123,9	0,039°
20	174,1	0,160°
80	975,1	2,643°
100	1800,7	4,151°

c) Foi simulada uma correção orbital para o satélite CBERS onde o fluxo solar considerado é 350. Os elementos orbitais das órbitas inicial e final são os mesmos do exemplo a.

TABELA 5.11 - CBERS COM FLUXO SOLAR = 350

Número de Revoluções	Varição em módulo (m)	Varição angular
0	1,7	0,000°
5	101,9	0,013°
10	178,4	0,057°
20	250,1	0,233°
80	1326,5	3,851°
100	2375,9	6,051°

Pode-se observar que dependendo do fluxo solar na época da realização da manobra e do número de revoluções orbitais entre os impulsos, a não consideração das perturbações devidas ao geopotencial e ao arrasto atmosférico tem conseqüências desastrosas, podendo atingir erros da ordem de quilômetros nos piores casos.

d) Foi simulada uma correção orbital para um satélite fictício cuja razão área/massa é 100 vezes maior que a do CBERS e onde o fluxo solar considerado é 350. Os elementos orbitais da órbita inicial são:

semi-eixo maior:	7000,0 km;
excentricidade:	0,0;
inclinação:	1,57080 rad (90°);
argumento do perigeu:	1,72253 rad ($98,7^{\circ}$);
nodo ascendente:	4,93805 rad ($-77,1^{\circ}$).

Os elementos orbitais da órbita final são:

semi-eixo maior:	7200,0 km;
excentricidade:	0,0;
inclinação:	1,71969 rad ($98,5^{\circ}$);
argumento do perigeu:	1,72253 rad ($98,7^{\circ}$);
nodo ascendente:	4,93805 rad ($-77,1^{\circ}$).

TABELA 5.12 - SATÉLITE FICTÍCIO COM FLUXO SOLAR = 350

Número de Revoluções	Varição em módulo (km)	Varição angular
0	0,312	0,003°
5	3,352	0,535°
10	6,751	1,958°
20	15,221	7,565°
50	76,529	48,562°
100	221,319	140,755°

Neste caso os resultados mostram que a não consideração do arrasto atmosférico na realização de uma manobra orbital pode gerar erros da ordem de vários quilômetros dependendo do número de revoluções entre os impulsos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Foi desenvolvido e implementado um novo algoritmo, baseado no método de cálculo desenvolvido por Prado e Broucke (1994) para órbitas coplanares, com o objetivo de solucionar o problema de transferências orbitais bi-impulsivas entre órbitas elípticas não coplanares em uma dinâmica kepleriana. Os resultados demonstraram ótima concordância com a literatura, como na simulação de uma transferência com pequena variação em todos os elementos orbitais, onde encontramos o valor para a variação total em velocidade igual a 0,02222 km/s, enquanto Paulo (1996) encontrou 0,02205 km/s e Biggs (1978) 0,02210 km/s para a mesma transferência usando métodos diferentes. Até o momento o INPE não dispunha de um *software* com estas características, embora tenha sido detectada a sua necessidade para futuras missões, como por exemplo a missão CBERS.

Foram realizados testes com o objetivo de avaliar o possível aumento de consumo de combustível causado por restrições na visibilidade de uma determinada estação de rastreamento. As simulações mostraram que os efeitos desta restrição podem alcançar níveis comprometedores, com incrementos da ordem de 20 vezes o consumo necessário pela transferência sem este vínculo. Estes testes foram implementados, pois a missão CBERS, que motivou este trabalho, será susceptível a este tipo de limitante.

Também foi desenvolvido um método mais genérico baseado no *Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP) para solucionar o problema de transferências bi-impulsivas entre órbitas elípticas não coplanares em uma dinâmica não kepleriana. As perturbações envolvidas são as devidas aos harmônicos esféricos do geopotencial e

ao arrasto atmosférico. O programa implementado nesta fase atende a várias propostas como por exemplo manobras de reentrada atmosférica, em órbitas baixas, geoestacionárias, etc. Agora o INPE dispõe de um *software* que permite avaliar os efeitos destas perturbações durante uma transferência orbital qualquer.

O programa foi usado para medir o possível erro em posição causado pela não consideração de uma dinâmica perturbada. Nas simulações realizadas o efeito mostrou-se dependente das características de cada manobra podendo alcançar erros da ordem de vários quilômetros nos piores casos.

Este *software* poderá ainda ser utilizado para manobras de *aerobraking* em missões como a do satélite Franco-Brasileiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altman, S.P.; Pistiner, J.S. Analysis of the orbital transfer problem in three-dimensional space. In: AIAA Astrodynamics Conference, New Haven, Connecticut. August 19-21, 1963. *Celestial Mechanics and Astrodynamics*. New York, Academic Press, 1964. p. 627-654.
- Bender, D.F. Optimum coplanar two-impulse transfers between elliptic orbits. *Aerospace Engineering*, 21 (10): 44-52, Oct. 1962.
- Biggs, M.C.B. *The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres. part I: linearly varying thrust angles*. The Hatfield Polytechnic. Numerical Optimisation Centre, Oct. 1978.
- Biggs, M.C.B. *The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres. part II: using Pontryagin's maximum principle*. The Hatfield Polytechnic. Numerical Optimisation Centre, Jan. 1979.
- Broucke, R.A. Low-thrust trajectories optimization in an inverse square force field. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Houston, TX, EUA, Feb. 11-13 1991. (*AAS paper 91-159*.)
- Chobotov, V.A. *Orbital Mechanics*. Washington, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1991.
- Contensou, P. Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique. *Astronautica Acta*, 8 (2/3): 134-150, Mar./ June 1962.
- Eckel, K. Optimum transfer between non-coplanar elliptical orbits. *Astronautica Acta*, 8 (4): 177-192, July/ Aug. 1962.
- Eckel, K. Optimum transfer in a central force field with n impulses. *Astronautica Acta*, 9 (5/6): 302-324, Sept./ Dec. 1963.
- Eckel, K.G. Optimal impulsive transfer with time constraint. *Acta Astronautica*, 9 (3): 139-146, Mar. 1982.
- Eckel, K.G.; Vinh, N.X. Optimal switching conditions for minimum fuel fixed time transfer between non coplanar elliptical orbits. *Acta Astronautica*, 11 (10/11): 621-631, Oct./ Nov. 1984.

- Edelbaum, T.N. How many impulses ? *Astronautics and Aeronautics*, 5 (11): 64-69, Nov. 1967b.
- Enright, P.J.; Conway, B.A. Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15 (4):994-1002, July/ Aug. 1992.
- Fernandes, S.S. Earth oblateness effect on the optimal impulsive transfer between close orbits. Part 2: singular solutions. *Acta Astronautica*, 19 (5): 393-399, 1989.
- Fernandes, S.S.; Moraes, R.V. Earth oblateness effect on the optimal impulsive transfer between close orbits. Part 1: nonsingular solutions. *Acta Astronautica*, 19 (4): 281-285, 1989.
- Fernandes, S.S.; Sessin, W. Optimal low-thrust power transfer between neighbouring quasi-circular orbits of small inclinations around an oblate planet. *Acta Astronautica*, 19: 401-409, 1989.
- Gobet, F.W. Optimum transfers between hyperbolic asymptotes. *AIAA Journal*, 1 (9): 2034-2041, Sept. 1963.
- Gobet, F.W.; Doll, J.R. A survey of impulsive trajectories. *AIAA Journal*, 7 (5): 801-834, May 1969.
- Gross, L.R.; Prussing, J.E. Optimal multiple-impulse direct ascent fixed-time rendezvous. *AIAA Journal*, 12 (7): 885-889, July 1974.
- Jezewski, D.J.; Rozendaal, H.L. An efficient method for calculating optimal free-space n-impulse trajectories. *AIAA Journal*, 6 (2): 2160-2165, Nov. 1968.
- Kuga, H.K. *Reformulação computacional do modelo de Jacchia-Roberts para a densidade atmosférica*. Instituto de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, INPE, Out. 1985 (INPE-3691-RPE/493.)
- Lawden, D.F. Minimal rocket trajectories. *ARS Journal*, 23 (6): 360-382, Nov./ Dec. 1953.
- Lawden, D.F. Optimal programming of rocket thrust direction. *Astronautica Acta*, 1 (1): 41-56, Jan./ Feb. 1955.
- Lawden, D.F. Impulsive transfer between elliptical orbits. In: Leitmann, G. ed. *Optimization technics with applications to aerospace systems*. New York, Academic Press, 1962. p. 323-351.

- Lion, P.M.; Handelsman, M. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. *AIAA Journal*, 6 (1): 127-132, Jan. 1968.
- Marchal, C. Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifférente). *Astronautica Acta*, 11 (6): 432-445, Nov./ Dec. 1965.
- Marchal, C. Transferts optimaux entre orbites hyperboliques. In: XVII IAF Congress, *Proceedings*. Madrid, International Astronautical Federation, 1966.
- Marec, J.P. Rendez-vous impulsionnels optimaux de longue durée entre orbites quasi-circulaires proches, coplanaires ou non. In: Colloquium on Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimization, *Proceedings*. Liege, França, 1967.
- Marec, J.P. *Optimal space trajectories*. New York, Elsevier Scientific, 1979. p. 27-32.
- McCue, G.A. Optimum two-impulse orbital transfer and rendezvous between inclined elliptical orbits. *AIAA Journal*, 1 (8): 1865-1872, Aug. 1963.
- Melton, R.G.; Jin, H. Transfers between circular orbits using fixed impulses. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Houston, TX, EUA, Feb. 11-13 1991. (*AAS paper*, 91-161.)
- Moskowitz, S.E. On the accuracy of approximate thrust steering schedules in optimal correctional maneuvers. *Astronautica Acta*, 9 (1): 20-30, Jan./ Feb. 1963.
- Moyer, H.G. Minimum impulse coplanar circle-ellipse transfer. *AIAA Journal*, 3 (4): 723-726, Apr. 1965.
- Paulo, M.S. Comunicação pessoal, São José dos Campos, SP, INPE, 1996.
- Pierson, B.L.; Kluever, C.A. Three-stage approach to optimal low-thrust earth-moon trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17 (6): 1275-1282, Nov./ Dec. 1994.
- Pines, S. Constants of the motion for optimum thrust trajectories in a central force field. *AIAA Journal*, 2 (2): 2010-2014, Nov. 1964.
- Pines, S. Uniform representation of the gravitational potencial and its derivatives. *AIAA Journal*, 11 (11): 1508-1511, Nov. 1973.
- Prado, A.F.B.A. Earth-moon trajectories for the lunar polar orbit mission. In: International Astronautical Congress, 41st, Dresden, Federal Republic of Germany, 1990. (*IAF paper ST-90-016*.)

- Prado, A.F.B.A. *Optimal transfer and swing-by orbits in the two- and three-body problems*. (Ph.D. Dissertation) - University of Texas. Austin, Texas, USA, 1993.
- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. The minimum delta-v Lambert's problem. In: 7^o Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, *Proceedings*. 21-25. Santos, São Paulo, Nov. 1994.
- Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P. *Numerical recipes in FORTRAN (the art of scientific computing)*. 2. ed., Cambridge University Press, 1992.
- Prussing, J.E. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. *AIAA Journal*, 7 (5):928-935, May 1969.
- Prussing, J.E. Optimal two- and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. *AIAA Journal*, 8 (7): 1221-1228, July 1970.
- Prussing, J.E.; Chiu, J.H. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 9 (1): 17-22, Jan./Feb. 1986.
- Prussing, J.E. Equation for optimal power-limited spacecraft trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16 (2): 391-393, Mar./Apr. 1993.
- Rios Neto, A. *The estimation of the state and the un modeled atmospheric drag of near earth satellites*. (Ph.D. Dissertation) - University of Texas. Austin, Texas, USA, 1973.
- Robbins, H.M. An analytical study of the impulsive approximation. *AIAA Journal*, 4 (8): 1417-1423, Aug. 1966.
- Roberts Jr., C.E. An analytical model for upper atmospheric densities based upon Jacchia's 1970 models. *Celestial Mechanics*, 4: 368-377, 1971.
- Roth, H.L. Minimization of the velocity increment for a bi-elliptic transfer with plane change. *Astronautica Acta*, 13 (2): 119-130, Mar./Apr. 1967.
- Russell, R.D.; Shampine, L.F. A collocation method for boundary value problems. *Numerical Mathematics*, 19 (1): 1-28, 1972.
- Schulz, W. *Estudo da necessidade de manobras espaciais para satélites em órbita congelada*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, INPE, 1996. 35p. (INPE-5972-NTC/326).

Smith, G.C. The calculation of minimal orbits. *Astronautica Acta*, 5 (5): 253-265, Sept./ Oct. 1959.

Weiβ, J. Orbit manoeuvres with finite thrust. *ESA Journal*, 9: 49-63, Jan./ Feb./ May 1985.

Zee, C.H. Effect of finite thrusting time in orbital maneuvers. *AIAA Journal*, 1 (1): 60-64, Jan. 1963.

APÊNDICE A**TRANSFER.FOR**

PROGRAM TRANSFER

***** PROGRAMA PARA RESOLVER O PROBLEMA DE TRANSFERENCIA BI-IMPULSIVA
 ***** EM 3-D VERSAO DE 11/NOVEMBRO/1996

```

INTEGER FLAG
REAL*8 PHY1A,PHY2A,PHY1B,PHY2B
REAL ANGS,ANG
REAL*8 ORB1A(8),ORB2A(8),ORB1B(8),ORB2B(8),ORBT(8),ORBTS(8)
REAL*8 R1A(3),R2A(3),R1B(3),R2B(3)
REAL*8 RDOT1A(3),RDOT2A(3),RDOT1B(3),RDOT2B(3)
REAL*8 S1A(3),S1B(3),SA(3),SB(3),S2A,S2B,TWOPI
REAL*8 PHY1MIN,PHY1MAX,PHY2MIN,PHY2MAX,DELTAPHY1,DELTAPHY2
REAL*8 ORB1(8),ORB2(8),PHY1,PHY2
REAL*8 R1(3),R2(3),RDOT1(3),RDOT2(3)
REAL*8 AR1,AR2,SIGMA,T2,ETA,LAMBDA
REAL*8 T1(3),T(3)
REAL*8 X(3),Z(3),M1(3),M(3),TI,M2,TCW,AM,TWPHY
REAL*8 HMAG1,HMAG2
REAL*8 ORB17,ORB12,ORB22,XACC
REAL*8 GOLDEN,DVMIN,ORBT2
REAL*8 AX,BX,CX,FA,FB,FC,PHYT2
REAL*8 ET,AT,IT,OMEGA,NODO,PHYT1
REAL*8 PARAM,F11,F12
REAL*8 RT(3),RDOTT(3),RT2(3),RDOTT2(3)
REAL*8 VRA,VTA,VKA,VR1,VT1,DV1,VRB,VTB,VKB,VR2,VT2,DV2
REAL*8 RTT,F,GM,TETP
REAL*8 NT,NZ,ANO,MES,DIA,HORA,MINUTO,SEGUNDO,DJ0,TS0
REAL*8 O1,O2,O3,P1,P2,P3,Q1,Q2,Q3,XP,YP,ZP,XPA,YPA,ZPA
REAL*8 OO1,OO2,OO3,PP1,PP2,PP3,QQ1,QQ2,QQ3,XPB,YPB,ZPB
REAL*8 TEMPO,DOTP,DJM
EXTERNAL DELTAV

```

```

COMMON /COM1/ ORB17,ETA,LAMBDA
COMMON /COM2/ ORB12,PHY1,HMAG1,HMAG2,ORB22,PHY2,SIGMA
COMMON /COM7/ VRA,VTA,VKA,VR1,VT1,DV1,VRB,VTB,VKB,VR2,VT2,DV2
COMMON /EARTH/ RTT,F,GM,TETP

```

```

OPEN(1,FILE='ENTRADA.DAT')
OPEN(2,FILE='SAIDA.DAT')

```

```

TWOPI = 8*ATAN(1.0)
CALL CONSTA

```

***** 1

***** OBTER 2 VETORES POSIÇÃO DE CADA ORBITA (INICIAL E FINAL)

```

READ(1,100)ORB1A(1)
READ(1,100)ORB1A(2)
READ(1,100)ORB1A(3)
READ(1,100)ORB1A(4)
READ(1,100)ORB1A(5)
READ(1,100)ORB1B(1)
READ(1,100)ORB1B(2)
READ(1,100)ORB1B(3)
READ(1,100)ORB1B(4)
READ(1,100)ORB1B(5)
ORB1A(7)=GM*1E-9
100 FORMAT(F18.12,1X)
PHY1A = 0
ORB1A(6)=TEMPO(PHY1A,ORB1A(2))
ORB1A(8)=0
PHY2A=1.570795
ORB2A(1)=ORB1A(1)
ORB2A(2)=ORB1A(2)
ORB2A(3)=ORB1A(3)
ORB2A(4)=ORB1A(4)
ORB2A(5)=ORB1A(5)
ORB2A(6)=TEMPO(PHY2A,ORB2A(2))
ORB2A(7)=ORB1A(7)
ORB2A(8)=0
PHY1B = 0
ORB1B(6)=TEMPO(PHY1B,ORB1B(2))
ORB1B(7)=ORB1A(7)
ORB1B(8)=0
PHY2B=1.570795
ORB2B(1)=ORB1B(1)
ORB2B(2)=ORB1B(2)
ORB2B(3)=ORB1B(3)
ORB2B(4)=ORB1B(4)
ORB2B(5)=ORB1B(5)
ORB2B(6)= TEMPO(PHY2B,ORB2B(2))
ORB2B(7)=ORB1B(7)
ORB2B(8)=0

```

***** TRANSFORMAR OS ELEMENTOS KEPLERIANOS EM RETANGULARES

```

CALL OETORC(ORB1A,R1A,RDOT1A)
CALL OETORC(ORB2A,R2A,RDOT2A)
CALL OETORC(ORB1B,R1B,RDOT1B)
CALL OETORC(ORB2B,R2B,RDOT2B)

```

***** OBTER OS VERSORES DE CADA PLANO

```

CALL CROSSP(S1A,R1A,R2A)
S2A=DSQRT((S1A(1))**2+(S1A(2))**2+(S1A(3))**2)
SA=S1A/S2A

```

```

CALL CROSSP(S1B,R1B,R2B)
S2B=DSQRT((S1B(1))**2+(S1B(2))**2+(S1B(3))**2)
SB=S1B/S2B

```

```

***** 2

```

```

***** INICIO DO LOOP

```

```

PARAM = 10000
READ(1,100)PHY1MIN
READ(1,100)PHY1MAX
READ(1,100)PHY2MIN
READ(1,100)PHY2MAX
READ(1,100)DELTAPHY1
READ(1,100)DELTAPHY2
READ(1,100)NT
READ(1,100)NZ
READ(1,300)FLAG
READ(1,100)ANO
READ(1,100)MES
READ(1,100)DIA
READ(1,100)HORA
READ(1,100)MINUTO
READ(1,100)SEGUNDO
READ(1,100)AMASS0

```

```

DJ0 = DJM(DIA,MES,ANO)
TS0 = (HORA*60.D0 + MINUTO)*60.D0 + SEGUNDO
WRITE(2,300)FLAG
WRITE(2,200)NT
WRITE(2,200)NZ
WRITE(2,200)DJ0
WRITE(2,200)TS0
WRITE(2,200)AMASS0

```

```

DO 10 PHY1=PHY1MIN,PHY1MAX,DELTAPHY1
  DO 20 PHY2=PHY2MIN,PHY2MAX,DELTAPHY2

```

```

ORB1(1)=ORB1A(1)
ORB1(2)=ORB1A(2)
ORB1(3)=ORB1A(3)
ORB1(4)=ORB1A(4)
ORB1(5)=ORB1A(5)
ORB1(6)=TEMPO(PHY1,ORB1(2))
ORB1(7)=ORB1A(7)
ORB1(8)=ORB1A(8)

```

```

ORB2(1)=ORB1B(1)
ORB2(2)=ORB1B(2)
ORB2(3)=ORB1B(3)
ORB2(4)=ORB1B(4)
ORB2(5)=ORB1B(5)
ORB2(6)=TEMPO(PHY2,ORB2(2))

```

```
ORB2(7)=ORB1B(7)
ORB2(8)=ORB1B(8)
```

```
CALL OETORC(ORB1,R1,RDOT1)
CALL OETORC(ORB2,R2,RDOT2)
```

```
*****  OBTER ANGULO ENTRE R1 E R2 (SIGMA)
```

```
AR1=DSQRT((R1(1))**2+(R1(2))**2+(R1(3))**2)
AR2=DSQRT((R2(1))**2+(R2(2))**2+(R2(3))**2)
ANGS=DOTP(R1,R2)/(AR1*AR2)
SIGMA=DACOS(ANGS)
CALL QCK(SIGMA)
IF(SIGMA.GE. 3.05 .AND. SIGMA.LE. 3.23) GOTO 50
IF(SIGMA.GE. 6.2 .AND. SIGMA.LE. 0.09) GOTO 50
```

```
*****  OBTER A NORMAL AO PLANO DE TRANSFERENCIA (T)
```

```
CALL CROSSP(T1,R1,R2)
T2=DSQRT((T1(1))**2+(T1(2))**2+(T1(3))**2)
IF(T2.EQ.0)THEN
  T=0
ELSE
  T=T1/T2
  T(3)=DABS(T(3))
ENDIF
IF(ORB1(3).LT. 1.570795 .AND. ORB2(3).GT. 1.570795)T(3)=-T(3)
IF(T1(3).LT.0.D0) THEN
  SIGMA = TWOPI - SIGMA
ENDIF
```

```
*****  OBTER ANGULO ENTRE A ORBITA INICIAL E DE TRANSF (ETA)
```

```
ETA=DACOS(DOTP(SA,T))
CALL QCK(ETA)
```

```
*****  OBTER ANGULO ENTRE A ORBITA FINAL E DE TRANSF (LAMBDA)
```

```
LAMBDA=DACOS(DOTP(SB,T))
CALL QCK(LAMBDA)
```

```
*****  OBTER ELEMENTOS DA ORBITA DE TRANSFERENCIA
```

```
DATA X/1,0,0/
DATA Z/0,0,1/
```

```
TI=DACOS(DOTP(T,Z))
CALL QCK(TI)
```

```
CALL CROSSP(M1,Z,T)
M2=DSQRT((M1(1))**2+(M1(2))**2+(M1(3))**2)
IF(M2.EQ.0)THEN
  M=0
```

```

ELSE
M=M1/M2
ENDIF

```

```

TCW=DACOS(DOTP(M,X))
CALL QCK(TCW)

```

```

AM=DSQRT((M(1))**2+(M(2))**2+(M(3))**2)
IF(AM.EQ.0)THEN
  TWPHY=0
ELSE
  ANG=REAL(DOTP(R1,M)/(AR1*AM))
  TWPHY=DACOS(ANG)
ENDIF
CALL QCK(TWPHY)

```

```

CALL ANGMOM(R1,RDOT1,H1,HMAG1)
CALL ANGMOM(R2,RDOT2,H2,HMAG2)

```

***** PROCURAR O MINIMO DA FUNCAO DELTAV

```

ORB17 = ORB1(7)
ORB12 = ORB1(2)
ORB22 = ORB2(2)
XACC = 10.D0**(-6.D0)
AX = 0.D0
BX = 3.14D0

```

```

CALL MNBRAK(AX,BX,CX,FA,FB,FC,DELTAV)
DVMIN = GOLDEN(AX,BX,CX,DELTAV,XACC,PHYT1)
CALL QCK(PHYT1)
PRINT *,PHY1,PHY2

```

```

IF(DVMIN.LT.PARAM)THEN

```

```

  ET = ORBT2(PHYT1)
  IF(ET.GE. 1.0D0) GOTO 50
  AT = DABS(AR1*(1.D0 + ET*DCOS(PHYT1)) / (1.D0 - ET**2))
  IT = TI
  OMEGA = TWPHY - PHYT1
  CALL QCK(OMEGA)
  NODO = TCW
  PHYT2 = PHYT1 + SIGMA
  PARAM = DVMIN
  FI1 = PHY1
  FI2 = PHY2

```

```

  ORBT(1) = AT
  ORBT(2) = ET
  ORBT(3) = IT
  ORBT(4) = OMEGA
  ORBT(5) = NODO
  ORBT(6) = TEMPO(PHYT1,ET)

```

ORB(7) = ORB17
ORB(8) = 0

CALL OETORC(ORB,RT,RDOTT)

ORBTS(1) = AT
ORBTS(2) = ET
ORBTS(3) = IT
ORBTS(4) = OMEGA
ORBTS(5) = NODO
ORBTS(6) = TEMPO(PHYT2,ET)
ORBTS(7) = ORB17
ORBTS(8) = 0

CALL OETORC(ORBTS,RT2,RDOTT2)

O1 = DCOS(OMEGA+PHYT1)*DCOS(NODO)-DSIN(OMEGA+PHYT1)*DCOS(IT)*
& DSIN(NODO)
O2 = -DSIN(OMEGA+PHYT1)*DCOS(NODO)-DCOS(OMEGA+PHYT1)*DCOS(IT)*
& DSIN(NODO)
O3 = DSIN(IT)*DSIN(NODO)
P1 = DCOS(OMEGA+PHYT1)*DSIN(NODO)+DSIN(OMEGA+PHYT1)*DCOS(IT)*
& DCOS(NODO)
P2 = -DSIN(OMEGA+PHYT1)*DSIN(NODO)+DCOS(OMEGA+PHYT1)*DCOS(IT)*
& DCOS(NODO)
P3 = -DSIN(IT)*DCOS(NODO)
Q1 = DSIN(OMEGA+PHYT1)*DSIN(IT)
Q2 = DCOS(OMEGA+PHYT1)*DSIN(IT)
Q3 = DCOS(IT)

XP = O1*VR1 + O2*VT1
YP = P1*VR1 + P2*VT1
ZP = Q1*VR1 + Q2*VT1

XPA = O1*VRA + O2*VTA + O3*VKA
YPA = P1*VRA + P2*VTA + P3*VKA
ZPA = Q1*VRA + Q2*VTA + Q3*VKA

OO1 = DCOS(OMEGA+PHYT2)*DCOS(NODO)-DSIN(OMEGA+PHYT2)*DCOS(IT)*
& DSIN(NODO)
OO2 = -DSIN(OMEGA+PHYT2)*DCOS(NODO)-DCOS(OMEGA+PHYT2)*DCOS(IT)*
& DSIN(NODO)
OO3 = DSIN(IT)*DSIN(NODO)
PP1 = DCOS(OMEGA+PHYT2)*DSIN(NODO)+DSIN(OMEGA+PHYT2)*DCOS(IT)*
& DCOS(NODO)
PP2 = -DSIN(OMEGA+PHYT2)*DSIN(NODO)+DCOS(OMEGA+PHYT2)*DCOS(IT)*
& DCOS(NODO)
PP3 = -DSIN(IT)*DCOS(NODO)
QQ1 = DSIN(OMEGA+PHYT2)*DSIN(IT)
QQ2 = DCOS(OMEGA+PHYT2)*DSIN(IT)
QQ3 = DCOS(IT)

XPB = OO1*VRB + OO2*VTB + OO3*VKB

YPB = PP1*VRB + PP2*VTB + PP3*VKB
ZPB = QQ1*VRB + QQ2*VTB + QQ3*VKB

ENDIF

50 CONTINUE

20 CONTINUE

10 CONTINUE

WRITE(2,200)XP

WRITE(2,200)YP

WRITE(2,200)ZP

WRITE(2,200)XPA

WRITE(2,200)YPA

WRITE(2,200)ZPA

WRITE(2,200)XPB

WRITE(2,200)YPB

WRITE(2,200)ZPB

WRITE(2,200)ORBT(1)

WRITE(2,200)ORBT(2)

WRITE(2,200)ORBT(6)

WRITE(2,200)ORBTS(6)

WRITE(2,200)RT(1)

WRITE(2,200)RT(2)

WRITE(2,200)RT(3)

WRITE(2,200)RT2(1)

WRITE(2,200)RT2(2)

WRITE(2,200)RT2(3)

WRITE(2,200)PARAM

200 FORMAT(F20.12,1X)

300 FORMAT(I1,1X)

STOP

END

APÊNDICE B**TPBVP.FOR**

```
PROGRAM TPBVP
```

```
***** PROGRAMA PARA RESOLVER O PROBLEMA DE TRANSFERENCIA BI-IMPULSIVA
***** EM 3-D USANDO TPBVP E PERTURBACOES DEVIDO AOS HARMONICOS DO
***** GEOPOTENCIAL VERSAO DE 13/DEZEMBRO/1996
```

```
PARAMETER (N=3)
INTEGER FLAG,NVAR,ISAT
REAL*8 TWOPI
REAL*8 NT,NZ,DJ0,TS0,AMASS0
REAL*8 VV(3),V(3),VI(3),VII(3),ORBT(2),U1,U2,R1(3),R2(3),DVMIN
REAL*8 EME,ADR,IYEAR,IDAYS,SF,SFB,AKP
REAL*8 TT1,TT2,TZERO,TTRA,PARAMETRO,TTRANSF
REAL*8 DV,VI(3),RII(3),V2(3),TPER
REAL*8 ESETC1(8),MANOM1,P1,RP1,RA1,ERRFLAG1
REAL*8 ESETC2(8),MANOM2,P2,RP2,RA2,ERRFLAG2
REAL*8 DELTAV1,DELTAV2
REAL*8 VRA,VTA,VKA,VR1,VT1,DDV1,VRB,VTB,VKB,VR2,VT2,DDV2
REAL*8 Y(6)
REAL*8 AE,FLAT,GM,TETAP
```

```
LOGICAL CHECK
```

```
COMMON /COM3/ TZERO,TTRANSF,NVAR
COMMON /COM4/ R2
COMMON /COM5/ EME
COMMON /COM6/ R1
COMMON /COM7/ VRA,VTA,VKA,VR1,VT1,DDV1,VRB,VTB,VKB,VR2,VT2,DDV2
COMMON /COM8/ NZ,NT,FLAG
COMMON /VELO/ Y
COMMON /EARTH/ AE,FLAT,GM,TETAP
COMMON /SATELL/ ISAT,AMASS0,ADR
COMMON /EPOCH/ DJ0,TS0,IYEAR,IDAYS
COMMON /MODPAR/ SF,SFB,AKP
```

```
OPEN(1,FILE='SAIDA.DAT')
OPEN(2,FILE='SAIDA2.DAT')
```

```
100 FORMAT(F20.12,1X)
200 FORMAT(I1,1X)
```

```
TWOPI = 8*ATAN(1.0)
```

```
READ(1,200)FLAG
```

```

READ(1,100)NT
READ(1,100)NZ
READ(1,100)DJ0
READ(1,100)TS0
READ(1,100)AMASS0
READ(1,100)VV(1)
READ(1,100)VV(2)
READ(1,100)VV(3)
READ(1,100)VI(1)
READ(1,100)VI(2)
READ(1,100)VI(3)
READ(1,100)VII(1)
READ(1,100)VII(2)
READ(1,100)VII(3)
READ(1,100)ORBT(1)
READ(1,100)ORBT(2)
READ(1,100)U1
READ(1,100)U2
READ(1,100)R1(1)
READ(1,100)R1(2)
READ(1,100)R1(3)
READ(1,100)R2(1)
READ(1,100)R2(2)
READ(1,100)R2(3)
READ(1,100)DVMIN

```

```

CALL CONSTA
CALL GEM10B
EME = GM*1E-9
ISAT = 1
ADR = 12.2
IYEAR = 0.0
IDAYS = 0.0
SF = 250.
SFB = 250.
AKP = 2.1

```

```

PRINT *,VV
NVAR = 6

```

```

CALL QCK(U1)
CALL QCK(U2)

```

```

TT1 = DSQRT((ORBT(1)**3)/EME)*(U1 - ORBT(2)*DSIN(U1))
TT2 = DSQRT((ORBT(1)**3)/EME)*(U2 - ORBT(2)*DSIN(U2))
TZERO = 0.D0
TTRANSF = TT2 - TT1
PARAMETRO = 1000000.D0

```

```

DO 10, TTRANSF= TTRA-TTRA/2, TTRA+TTRA/2,TTRA/10

```

```

V(1) = VV(1)
V(2) = VV(2)

```

```

V(3) = VV(3)

CALL NEWT(V,N,CHECK)

IF(CHECK)THEN
  PRINT *,'SHOOT FAILED; BAD INICIAL GUESS'
ELSE
  PRINT *,V
ENDIF

DV = (DSQRT((V(1)-VI(1))**2 + (V(2)-VI(2))**2 + (V(3)-VI(3))**2) +
& DSQRT((Y(4)-VII(1))**2 + (Y(5)-VII(2))**2 + (Y(6)-VII(3))**2))
IF(DV.LT.PARAMETRO)THEN
  PARAMETRO = DV
  V1(1)=V(1)
  V1(2)=V(2)
  V1(3)=V(3)
  R11(1)=Y(1)
  R11(2)=Y(2)
  R11(3)=Y(3)
  V2(1)=Y(4)
  V2(2)=Y(5)
  V2(3)=Y(6)
  TPER=TTRANSF
ENDIF

10 CONTINUE

CALL RCTOOE(R1,V1,EME,ESETC1,MANOM1,P1,RP1,RA1,ERRFLAG1)
CALL RCTOOE(R11,V2,EME,ESETC2,MANOM2,P2,RP2,RA2,ERRFLAG2)

DELTA V1 = DSQRT((V1(1)-VI(1))**2 + (V1(2)-VI(2))**2 + (V1(3)-
& VI(3))**2)
DELTA V2 = DSQRT((V2(1)-VII(1))**2 + (V2(2)-VII(2))**2 + (V2(3)-
& VII(3))**2)

WRITE(2,210)R1(1)
210 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do vetor posicao do ponto 1 na orbita de transferencia')
WRITE(2,220)R1(2)
220 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do vetor posicao do ponto 1 na orbita de transferencia')
WRITE(2,230)R1(3)
230 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do vetor posicao do ponto 1 na orbita de transferencia')
WRITE(2,240)V1(1)
240 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do vetor velocidade do ponto 1 na orbita de transferencia')
WRITE(2,250)V1(2)
250 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do vetor velocidade do ponto 1 na orbita de transferencia')
WRITE(2,260)V1(3)
260 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do vetor velocidade do ponto 1 na orbita de transferencia')
WRITE(2,270)R2(1)
270 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do vetor posicao do ponto 2 na orbita de transferencia')
WRITE(2,280)R2(2)
280 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do vetor posicao do ponto 2 na orbita de transferencia')
WRITE(2,290)R2(3)

```

```

290 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do vetor posicao do ponto 2 na orbita de transferencia')
    WRITE(2,300)RII(1)
300 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do vetor posicao do ponto 2 na orbita de transferencia
& (TPBVP)')
    WRITE(2,310)RII(2)
310 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do vetor posicao do ponto 2 na orbita de transferencia
& (TPBVP)')
    WRITE(2,320)RII(3)
320 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do vetor posicao do ponto 2 na orbita de transferencia
& (TPBVP)')
    WRITE(2,330)V2(1)
330 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do vetor velocidade do ponto 2 na orbita de transferencia')
    WRITE(2,340)V2(2)
340 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do vetor velocidade do ponto 2 na orbita de transferencia')
    WRITE(2,350)V2(3)
350 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do vetor velocidade do ponto 2 na orbita de transferencia')
    WRITE(2,360)V1(1)-VI(1)
360 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do delta V no ponto 1')
    WRITE(2,370)V1(2)-VI(2)
370 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do delta V no ponto 1')
    WRITE(2,380)V1(3)-VI(3)
380 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do delta V no ponto 1')
    WRITE(2,390)DELTA V1
390 FORMAT(F20.12,10X,'delta V no ponto 1')
    WRITE(2,400)V2(1)-VII(1)
400 FORMAT(F20.12,10X,'componente X do delta V no ponto 2')
    WRITE(2,410)V2(2)-VII(2)
410 FORMAT(F20.12,10X,'componente Y do delta V no ponto 2')
    WRITE(2,420)V2(3)-VII(3)
420 FORMAT(F20.12,10X,'componente Z do delta V no ponto 2')
    WRITE(2,430)DELTA V2
430 FORMAT(F20.12,10X,'delta V no ponto 2')
    WRITE(2,440)DELTA V1 + DELTA V2
440 FORMAT(F20.12,10X,'DELTA V TOTAL')
    WRITE(2,600)DVMIN
600 FORMAT(F20.12,10X,'DELTA V TOTAL Kepleriano')
    WRITE(2,450)ESETC1(1)
450 FORMAT(F20.12,10X,'semi-eixo maior da orbita do ponto 1')
    WRITE(2,460)ESETC1(2)
460 FORMAT(F20.12,10X,'excentricidade da orbita do ponto 1')
    WRITE(2,470)ESETC1(3)
470 FORMAT(F20.12,10X,'inclinacao da orbita do ponto 1')
    WRITE(2,480)ESETC1(5)
480 FORMAT(F20.12,10X,'argumento do perigeu da orbita do ponto 1')
    WRITE(2,490)ESETC1(4)
490 FORMAT(F20.12,10X,'nodo da orbita do ponto 1')
    WRITE(2,500)ESETC1(6)
500 FORMAT(F20.12,10X,'tempo de passagem pelo perigeu da orbita do ponto 1')
    WRITE(2,510)ESETC2(1)
510 FORMAT(F20.12,10X,'semi-eixo maior da orbita do ponto 2')
    WRITE(2,520)ESETC2(2)
520 FORMAT(F20.12,10X,'excentricidade da orbita do ponto 2')
    WRITE(2,530)ESETC2(3)

```

```
530 FORMAT(F20.12,10X,'inclinacao da orbita do ponto 2')
    WRITE(2,540)ESETC2(5)
540 FORMAT(F20.12,10X,'argumento do perigeu da orbita do ponto 2')
    WRITE(2,550)ESETC2(4)
550 FORMAT(F20.12,10X,'nodo da orbita do ponto 2')
    WRITE(2,560)ESETC2(6)
560 FORMAT(F20.12,10X,'tempo de passagem pelo perigeu da orbita do ponto 2')
    WRITE(2,570)TTRA
570 FORMAT(F20.12,10X,'tempo de duracao da transferencia kepleriano')
    WRITE(2,580)TPER
580 FORMAT(F20.12,10X,'tempo de duracao da transferencia perturbado')

STOP
END
```

APÊNDICE C**LISTAGEM DOS ARQUIVOS DE ENTRADA**

Arquivo de entrada do programa TRANSFER.FOR:

7500.0	semi-eixo maior da orbita inicial(km)
0.02	excentricidade da orbita inicial
0.03491	inclinacao da orbita inicial(rad)
0.87266	argumento do perigeu da orbita inicial(rad)
0.52359	nodo ascendente da orbita inicial(rad)
42164.2	semi-eixo maior da orbita final(km)
0.0	excentricidade da orbita final
0.0	inclinacao da orbita final(rad)
0.87266	argumento do perigeu da orbita final(rad)
0.52359	nodo ascendente da orbita final(rad)
0.0	anomalia verdadeira minima da orbita inicial(rad)
6.5	anomalia verdadeira maxima da orbita inicial(rad)
0.0	anomalia verdadeira minima da orbita final(rad)
6.5	anomalia verdadeira maxima da orbita final(rad)
0.5	passo da orbita inicial(rad)
0.5	passo da orbita final(rad)
2.0	harmonicos zonais
2.0	harmonicos tesserais
0	flag(0 sem perturbacoes;1 harmonicos esfericos;2 arrasto;3 ambas)
1997.	ano inicial
10.	mes inicial
1.	dia inicial
0.	hora inicial
0.	minuto inicial
0.	segundo inicial
1300.	massa inicial do satelite(kg)

Arquivo de entrada do programa TPBVP.FOR (este arquivo é gerado pelo programa TRANSFER.FOR):

```
3
2.000000000000
2.000000000000
17440.000000000000
.000000000000
1300.000000000000
3.893249531900
-8.555662814322
-.523757339651
3.178287898060
-6.428443118751
-.243068437371
-.985473158448
2.892466387818
.340607364812
-24910.740096844780
.694868087769
.045630874340
3.060972281075
-6787.155996071497
-3461.383748324193
60.901945260182
39882.298106132870
13666.615388655240
-667.311953842815
3.649161100388
```

APÊNDICE D

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

- Bellman, R.E.; Kabala, R.E. *Quasilinearization and nonlinear boundary value problems*. New York, American Elsevier, 1965.
- Breakwell, J.V. Minimum impulse transfer. In: AIAA Astrodynamics Conference, Yale University. *AIAA preprint*, 63-416, Aug. 1963.
- Burns, R.E. Forbidden tangencial orbit transfers between intersecting keplerian orbits. July 1990. (NASA TP-3031).
- Carter, T. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70 (2): 275-295, 1991.
- Ceballos, D.C. *Aproximações sub-ótimas para o controle em programas dinâmicos de otimização*. (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/ Mecânica Orbital) - Instituto de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, INPE, Fev. 1980. 186p. (INPE - 1676 - TDL/ 019).
- Ceballos, D.C.; Rios-Neto, A. Linear programming and suboptimal solutions of dynamical systems control problems. In: International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, Federal Republic of Germany, May 17-23, 1981. *Proceedings*. Noordwijk, The Netherlands, ESA, 1981, p. 239-244. (ESA-SP-160).
- Edelbaum, T.N. Some extensions of the Hohmann transfer maneuver. *ARS Journal*, 29: 864-865, 1959.
- Edelbaum, T.N. Minimum impulse transfers in the near vicinity of a circular orbit. *Journal of Astronautical Sciences*, 14 (2): 66-73, Mar./ Apr. 1967.
- Erno. Orbit manoeuvres with finite thrust. *ESA Journal*, 8 (2), Apr. 1984.
- Fernandes, S.S. *Efeito do achatamento da Terra sobre transferência impulsional ótima*. (Dissertação de Mestrado) - Instituto Tecnológico da Aeronáutica. São José dos Campos, ITA, 1986.

- Golan, O.M.; Breakwell, J.V. Minimum fuel lunar trajectories for low-thrust power-limited spacecraft. *AIAA*, Aug. 1990. (AIAA paper 90-2975.)
- Hazelrigg, G.A. The use of Green's theorem to find globally optimal solutions to a class of impulsive transfers. Jackson Hole, WYO, *AIAA*, Sept. 1968. (AIAA paper, 68-092.)
- Hoelker, R.F.; Silber, R. The bi-elliptical transfer between circular coplanar orbits. Redstone Arsenal, Ala., Army Ballistic Missile Agency, Jan. 1959 (DA Tech Memo 2-59).
- Hohmann, W. *Die erreichbarkeit der himmelskörper*. Oldenbourg, Munique, 1925.
- Keller, H.B. *Numerical methods for two-point boundary value problems*. New York, Blaisdell, 1968.
- Kelley, H.J. Gradient theory of optimal flight paths. *Journal of the American Rocket Society*, 30 (10): 947-954, Oct. 1960.
- Kluever, C.A.; Pierson, B.L. Optimal low-thrust three-dimensional earth-moon trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18 (4): 830-837, July/Aug. 1995.
- Lawden, D.F. Fundamentals of space navigation. *JBIS*, 13: 87-101, May 1954.
- Lawden, D.F. Interplanetary rocket trajectories. In: Ordway III, F.I. ed. *Advances in space science, 1*. New York, Academic Press, 1959. p. 1-53.
- Lawden, D.F. *Optimal trajectories for space navigation*. London, Butterworths, 1963.
- Marchal, C. Transferts optimaux entre orbites hyperboliques. In: XVII IAF Congress, *Proceedings*. Madrid, 1966.
- Prado, A.F.B.A.; Rios Neto, A. Um estudo bibliográfico sobre o problema de transferências orbitais. *RBMC-J. of Braz. Soc. Mechanical Sciences*, XV (1):65-78, 1993.
- Prussing, J.E.; Clifton, R.S. Optimal multiple-impulse satellite avoidance maneuvers. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Kallispell, MT, Aug. 1987. (AAS paper 87-543.)
- Rios Neto, A.; Bambace, L.A.W. Optimal linear estimation and suboptimal numerical solutions of dynamical systems control problems. In: International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, Federal Republic of Germany, Aug.

1981. *Proceedings*. Noordwijk, The Netherlands, ESA, 1981, p. 233-238. (ESA-SP-160.)

Robinson, A.C. A survey of methods and results in the determination of fuel-optimal space maneuvers. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Jackson, WYO, Sept. 3-5, 1968. (AAS paper 68-091.)

Sthernfeld, A. *Soviet space science*. New York, Basic Books Inc., 1959. p. 109-111.

Ting, L. Optimum orbital transfer by impulses. *ARS Journal*, 30: 1013-1018, Nov. 1960.

Tomita, K.; Feiring, B.R. Trajectory optimization for maneuvering satellites. *Systems & Control Letters*, 5 (4): 223-228, Feb. 1985.

Tsien, H.S. Take-off from satellite orbit. *Journal of the American Rocket Society*, 23 (4): 233-236, July/ Aug. 1953.