MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-6676-TDI/626

TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS BI-IMPULSIVAS COM LIMITE DE TEMPO

Evandro Marconi Rocco

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovada em setembro de 1997.

INPE
São José dos Campos
Setembro de 1997

Publicado por:

Coordenação de Ensino, Documentação e
Programas Especiais - CEP

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Caixa Postal 515
12201-970 - São José dos Campos - SP - Brasil
Fone: (012) 345.6911
Fax: (012) 345.6919
E-Mail: marciana@sid.inpe.br

- Solicita-se intercâmbio
- We ask for exchange
- Si sollecita intercambio
- On demande l'échange
- Mann bittet un Austausch
- Pidese canje
- Просим обмену
- 歡迎交換
- 出版物交換を求めます

Publicação Externa - É permitida sua reprodução para interessados.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-6676-TDI/626

TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS BI-IMPULSIVAS COM LIMITE DE TEMPO

Evandro Marconi Rocco

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovada em setembro de 1997.

INPE
São José dos Campos
Setembro de 1997

INPE-6676-TDI/626

TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS BI-IMPULSIVAS COM LIMITE DE TEMPO

Evandro Marconi Rocco

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovada em setembro de 1997.

INPE
São José dos Campos
Setembro de 1997

629.7.017.2

ROCCO, E. M.
Transferências orbitais bi-impulsivas com limite de tempo / E. M. Rocco. - São José dos Campos: INPE, 1997.
196 p. - (INPE-6676-TDI/626).

1. Transferência orbital. 2. Astrodinâmica. 3. Controle ótimo. 4. Manobras orbitais. I. Título.

Aprovada pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia e Tecnologia Espaciais

Dr. Atair Rios Neto

Presidente

Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Orientador

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Membro da Banca

Dr. Sandro da Silva Fernandes

Membro da Banca
- Convidado -

Candidato: Evandro Marconi Rocco

São José dos Campos, 01 de setembro de 1997

"Tempo virá em que uma pesquisa diligente e contínua esclarecerá aspectos que agora permanecem escondidos. O espaço de tempo de uma vida, mesmo que se inteiramente devotada ao estudo do céu, não seria suficiente para investigar um objetivo tão vasto ... este conhecimento será conseguido somente através de gerações sucessivas. Tempo virá em que nossos descendentes ficarão admirados de que não soubéssemos particularidades tão óbvias a eles ... Muitas descobertas estão reservadas para os que virão, quando a lembrança de nós estará apagada. O nosso universo será um assunto sem importância, a menos que haja alguma coisa nele a ser investigada a cada geração ... A natureza não revela seus mistérios de uma só vez."

Sêneca, Problemas Naturais
Livro 7, século I

À minha esposa e amiga Fernanda

e aos meus pais Norival e Emilia.

AGRADECIMENTOS

À Divisão de Mecânica Espacial e Controle do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

Ao CNPq que financiou este estudo.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões para o enriquecimento deste trabalho.

Aos meus orientadores que além de orientadores tornaram-se grandes amigos.

Aos colegas de curso pelo apoio e cooperação.

Aos amigos e familiares pelo apoio e incentivo.

Aos meus pais que com seus ensinamentos tornaram possível a realização deste sonho.

À minha esposa que com sua compreesão tornou tudo mais fácil e agradável.

RESUMO

Neste trabalho, o problema da transferência orbital com mínimo consumo de combustível, mas com limite de tempo para esta transferência é estudado para os casos bi-impulsivos coplanar e não coplanar. Este limite de tempo impõe uma característica nova ao problema, fazendo com que grande parte dos métodos existentes na literatura não mais se apliquem. Assim sendo, para o caso coplanar utilizamos as equações apresentadas por Lawden em 1993, modificamos e resolvemos estas equações de forma a desenvolver um programa para manobras orbitais. O método original desenvolvido por Lawden foi apresentado sem resultados numéricos e considera apenas o caso onde os pontos de início e fim da manobra são conhecidos. O programa desenvolvido estende o método ao caso onde apenas um ponto é conhecido e ao caso onde os dois pontos são livres. Já para o caso não coplanar, utilizamos as equações apresentadas por Eckel e Vinh em 1984, modificamos e resolvemos estas equações para, da mesma forma que no caso coplanar, desenvolver um programa para manobras orbitais. O método original apresentado por Eckel e Vinh só é válido para uma determinada geometria da manobra. Portanto, o programa desenvolvido estendeu a aplicação deste método a casos de geometria mais complexa. As simulações mostraram que os programas desenvolvidos podem ser utilizados em aplicações reais e que eles são capazes de gerar resultados confiáveis. Como era esperado, as simulações mostraram que, de uma forma geral, quanto menor o tempo de transferência maior o consumo de combustível. Contudo, as simulações sugerem haver descontinuidades no comportamento de alguns elementos orbitais o que dificultou a obtenção de soluções. Além dessas descontinuidades, as simulações também sugerem a existência de mais de uma solução para um mesmo valor de tempo, porém esta possibilidade não foi comprovada.

BI-IMPULSIVE ORBITAL TRANSFERS WITH TIME LIMIT

ABSTRACT

In this work, we consider the problem of orbital transfers with minimum fuel consumption but with a time limit for this transfer. The bi-impulsive coplanar and non coplanar orbit cases are considered. This time limit imposes a new characteristic to the problem that rules out the majority of the transfer methods. Then, to solve the coplanar case we used the equations presented by Lawden in 1993, we modified and solved those equations to develop a software for orbital maneuvers. The original method developed by Lawden was presented without numerical results and considers only the case where the initial and final points of maneuver are known. The software developed here extends this method to the case where only one point is known and to the case where the two points are free. To solve the non coplanar case we used the equations presented by Eckel and Vinh in 1984, we modified and solved those equations and, in the same way to the coplanar case, we developed a software for orbital maneuvers. The original method developed by Eckel and Vinh is only valid for a specific geometry of the maneuver. The software developed here extends this method to the cases with a more complex geometry. The simulations shown that the software developed can be used in real applications and they are capable to generate trust results. The simulations shown in general form that for smaller time we have bigger fuel consumption. However, the simulations suggest that there are discontinuities for some orbital elements and this discontinuities difficult to solve the problem. Beyond this, the simulations also suggest that there are more than one solution for the same value of time, but this possibility wasn't proven.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS xix

LISTA DE TABELAS xxiii

LISTA DE SÍMBOLOS xxv

CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO 1

1.1- Generalidades 1

1.2- Objetivos do Trabalho 2

1.3- Metodologia Utilizada 2

1.4- Contribuições do Trabalho 3

1.5- Organização do Trabalho 4

CAPÍTULO 2 - CONCEITOS BÁSICOS 5

2.1- Definição de Transferência Orbital 5

2.2- Modelagem do Problema 7

2.2.1- Vínculos Dinâmicos 7

2.2.2- Controle Aplicado ao Sistema 8

2.2.3- Métodos de Otimização 9

2.3- Sistemas de Propulsão 10

CAPÍTULO 3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 15

3.1- Transferências com Orientação Livre 15

3.2- Transferências entre Órbitas Circulares 15

3.2.1- Órbitas Coplanares 16

3.2.1.1- Transferências Bi-Impulsivas 16

3.2.1.2- Transferências Tri-Impulsivas 17

3.2.2- Órbitas não Coplanares 21

3.2.2.1- Transferências Bi-Impulsivas 21

3.2.2.2- Transferências Tri-Impulsivas 21

3.2.3- Resultados Gerais 22
3.3- Teoria do "Primer-Vector" 24
3.3.1- O Caso Impulsivo 28
3.4- Transferências Orbitais com Vínculo de Tempo 29

CAPÍTULO 4 - TRANSFERÊNCIA BI-IMPULSIVA ÓTIMA COM TEMPO FIXO ENTRE ÓRBITAS COPLANARES 33
4.1- Introdução 33
4.2- Apresentação do Método 35
4.3- Implementação do Método 45
4.3.1- Descrição do Método Newton-Raphson 45
4.3.2- Rotinas Utilizadas na Solução do Problema 49
4.3.3- Apresentação do Programa Desenvolvido 50
4.4- Resultados Obtidos 53
4.4.1- Caso 1: Pontos Terminais Fixos 53
4.4.2- Caso 2: Ponto Terminal Inicial Fixo 59
4.4.3- Caso 3: Ponto Terminal Final Fixo 66
4.4.4- Caso 4: Pontos Terminais Livres 72
4.5- Comentários 77

CAPÍTULO 5 - TRANSFERÊNCIA BI-IMPULSIVA ÓTIMA COM TEMPO FIXO ENTRE ÓRBITAS NÃO COPLANARES 79
5.1- Introdução 79
5.2- Apresentação do Método 87
5.3- Implementação do Método 94
5.3.1- Rotinas Utilizadas na Solução do Problema 94
5.3.2- Apresentação do Programa Desenvolvido 95
5.4- Resultados Obtidos 98
5.5- Comentários 115

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS 117

6.1- Conclusões 117

6.2- Sugestões e Recomendações Para Trabalhos Futuros 120

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS 121

APÊNDICE A - PROGRAMA PRINCIPAL UTILIZADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA COPLANAR 125

APÊNDICE B - SUB-ROTINA FUNCV (CASO COPLANAR) 135

APÊNDICE C - PROGRAMA PRINCIPAL UTILIZADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO COPLANAR 143

APÊNDICE D - SUB-ROTINA FUNCV E SUB-ROTINA MULTI (CASO NÃO COPLANAR) 155

APÊNDICE E - SUB-ROTINAS EXTRAÍDAS DE PRESS ET AL (1992) .. 163

LISTA DE FIGURAS

2.1- Transferência de Órbita 6

3.1- Sumário das Transferências de Hohmann 17

3.2- Sumário das Transferências Bi-Elípticas 20

3.3- Sumário das Transferências Entre Órbitas Circulares 23

3.4- Lei de Controle Típica Para Sistemas de Empuxo Infinito 28

4.1- Geometria da Manobra 38

4.2- Solução de Duas Equações não Lineares 46

4.3- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 1) 54

4.4- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 1) 54

4.5- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 1) 55

4.6- Delta T vs. Tempo (Caso 1) 55

4.7- Excentricidade vs. Tempo (Caso 1) 56

4.8- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 1) 56

4.9- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 1) 57

4.10- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 1) 57

4.11- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 1) 58

4.12- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 2) 60

4.13- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 2) 60

4.14- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 2) 61

4.15- Delta T vs. Tempo (Caso 2) 61

4.16- Excentricidade vs. Tempo (Caso 2) 62

4.17- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 2) 62

4.18- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 2) 63

4.19- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 2) 63

4.20- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 2) 64

4.21- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 3) 67

4.22- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 3) 67

4.23- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 3) 68

4.24- Delta T vs. Tempo (Caso 3) 68

4.25- Excentricidade vs. Tempo (Caso 3) 69
4.26- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 3) 69
4.27- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 3) 70
4.28- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 3) 70
4.29- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 3) 71
4.30- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 4) 73
4.31- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 4) 73
4.32- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 4) 74
4.33- Excentricidade vs. Tempo (Caso 4) 74
4.34- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 4) 75
4.35- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 4) 75
4.36- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 4) 76
4.37- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 4) 76
5.1- Geometria da Manobra Quando $\Omega_2 > \Omega_1$ e $i_2 > i_1$ 81
5.2- Geometria da Manobra Quando $\Omega_1 > \Omega_2$ e $i_1 > i_2$ 81
5.3- Geometria da Manobra Quando $\Omega_2 > \Omega_1$ e $i_1 > i_2$ 82
5.4- Geometria da Manobra Quando $\Omega_1 > \Omega_2$ e $i_2 > i_1$ 82
5.5- Caso 1: Impulso I_1 Aplicado Antes do Ponto N e I_2 Após N 84
5.6- Triângulo Esférico Referente ao Caso 1 84
5.7- Caso 2: Ambos os Impulsos Aplicados Após o Ponto N 85
5.8- Triângulo Esférico Referente ao Caso 2 85
5.9- Caso 3: Ambos os Impulsos Aplicados Antes do Ponto N 86
5.10- Triângulo Esférico Referente ao Caso 3 86
5.11- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Exemplo 1) 99
5.12- Excentricidade vs. Tempo (Exemplo 1) 99
5.13- Argumento do Periapside vs. Tempo (Exemplo 1) 100
5.14- Inclinação vs. Tempo (Exemplo 1) 100
5.15- Alfa1 vs. Tempo (Exemplo 1) 101
5.16- Alfa2 vs. Tempo (Exemplo 1 101
5.17- Longitude do Nodo Ascendente vs. Tempo (Exemplo 1) 102

5.18- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Exemplo 1) 102
5.19- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Exemplo 1) 103
5.20- Variação de Velocidade Necessária vs. Tempo (Exemplo 1) 103
5.21- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 105
5.22- Excentricidade vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 105
5.23- Argumento do Periapside vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 106
5.24- Inclinação vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 106
5.25- Alfa1 vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 107
5.26- Alfa2 vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 107
5.27- Longitude do Nodo Ascendente vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 108
5.28- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 108
5.29- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 109
5.30- Variação de Velocidade Necessária vs. Tempo (Exemplo 2*a*) 109
5.31- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 110
5.32- Excentricidade vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 110
5.33- Argumento do Periapside vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 111
5.34- Inclinação vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 111
5.35- Alfa1 vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 112
5.36- Alfa2 vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 112
5.37- Longitude do Nodo Ascendente vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 113
5.38- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 113
5.39- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 114
5.40- Variação de Velocidade Necessária vs. Tempo (Exemplo 2*b*) 114

LISTA DE TABELAS

2.1- Classificação dos Sistemas de Propulsão 13

LISTA DE SÍMBOLOS

Caso Coplanar

a semi-eixo maior

e excentricidade

l semi-latus rectum

r raio (distância do centro de atração ao satélite)

$\vec{v}_1$ vetor velocidade do veículo com relação a órbita inicial no local onde é aplicado o primeiro impulso

$\vec{v}_i$ vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o primeiro impulso

$\vec{v}_f$ vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o segundo impulso

$\vec{v}_2$ vetor velocidade do veículo com relação a órbita final no local onde é aplicado o segundo impulso

ω longitude do periapside

ϕ ângulo formado entre a direção circunferencial (direção perpendicular a reta que liga o centro de atração ao satélite) e a direção do impulso

θ ângulo de posição do satélite (coordenada polar). Ângulo formado entre a reta que liga o centro de atração ao nodo ascendente e a reta que liga o centro de atração ao satélite. Portanto $\theta = \omega + f$, onde f é a anomalia verdadeira

μ constante gravitacional, que para a Terra vale $398600\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$

$\Delta\vec{v}_r$ vetor impulso na direção radial

$\Delta\vec{v}_s$ vetor impulso na direção circunferencial

Δv_1 magnitude do primeiro impulso

Δv_2 magnitude do segundo impulso

Caso Não Coplanar

a semi-eixo maior

e excentricidade

p semi-latus rectum

i inclinação

M anomalia média

E anomalia excêntrica.

I_1 localização do primeiro impulso

I_2 localização do segundo impulso

V_1 magnitude do primeiro impulso

V_2 magnitude do segundo impulso

V velocidade característica

T tempo gasto na manobra

r_1 distância radial do ponto I_1

r_2 distância radial do ponto I_2

f_1 anomalia verdadeira do ponto I_1 medida no plano da órbita de transferência

f_2 anomalia verdadeira do ponto I_2 medida no plano da órbita de transferência

x_1 componente radial do primeiro impulso

x_2 componente radial do segundo impulso

y_1 componente transversal do primeiro impulso

y_2 componente transversal do segundo impulso

z_1 componente do primeiro impulso na direção ortogonal ao plano da órbita de transferência

z_2 componente do segundo impulso na direção ortogonal ao plano da órbita de transferência

h_i componente horizontal de V_i

ω argumento do periapside

Ω longitude do nodo ascendente

ϕ ângulo entre os planos das órbitas inicial e final

β_1 anomalia verdadeira da linha dos nodos FN medida no plano da órbita inicial

β_2 anomalia verdadeira da linha dos nodos FN medida no plano da órbita final

Δ ângulo de transferência, medido no plano da órbita de transferência

γ_1 ângulo de mudança de plano gerado pelo primeiro impulso

γ_2 ângulo de mudança de plano gerado pelo segundo impulso

α_1 anomalia verdadeira do ponto I_1 medida no plano da órbita inicial

α_2 anomalia verdadeira do ponto I_2 medida no plano da órbita final

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

1.1- GENERALIDADES

Uma boa parte dos veículos espaciais colocados em órbita ao redor da Terra utiliza os conceitos básicos de manobras orbitais pois, quando o veículo é lançado ele é colocado em uma órbita que nem sempre é a órbita ideal para a qual o veículo foi projetado. Dessa maneira, deve-se efetuar uma transferência de órbita para que o veículo possa atingir a órbita final desejada. Mesmo quando o veículo já é injetado na órbita final, existem erros de injeção que, em muitos casos, devem ser corrigidos. Além disto, para ele permanecer nesta órbita, devem ser executadas correções de órbita periódicas para eliminar os efeitos gerados pelas perturbações que agem sobre o veículo.

Como exemplos de aplicação destas manobras (de transferência ou de correção) podemos citar a colocação de um satélite em órbita geoestacionária, a manutenção da órbita de um satélite, o envio de sondas interplanetárias, missões de "rendezvous", missões de interceptação, etc. Para o Brasil teremos importantes aplicações na ocasião do lançamento dos dois satélites de sensoriamento remoto (SSR 1 e SSR 2) que fazem parte da MECB (Missão Espacial Completa Brasileira) e dos dois satélites sino-brasileiros de Recursos Terrestres ("China-Brazil Earth Resources Satellites" CBERS 1 e CBERS 2), também de sensoriamento remoto, que necessitarão de manobras de transferência e de correção de órbita para atingirem e se manterem nas órbitas desejadas.

Dessa forma, podemos ver que temos duas manobras básicas possíveis: as transferências de órbita e as correções de órbitas. Nelas freqüentemente minimizam-se por inúmeros métodos: 1) o combustível gasto (por não ser renovável no espaço); 2) o tempo gasto (por consumir energia das baterias e por ser feita em visibilidade).

1.2- OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é estudar o problema da transferência orbital com consumo mínimo de combustível, mas com limite de tempo para essa transferência. Esse limite de tempo impõe uma característica nova ao problema e muitas das conclusões que serão mostradas no Capítulo 3 deste trabalho não mais se aplicam. Assim sendo, os métodos aqui mostrados foram estudados e adaptados a esse novo vínculo.

Essa linha de pesquisa é importante, pois em muitas missões podem haver vínculos dessa natureza. Em certos casos existem vínculos temporais diretos (a manobra tem que ser completada antes de um determinado evento) e em outros esses vínculos podem decorrer de outras situações (por exemplo, a necessidade de se efetuar uma manobra em visibilidade pode ser transformada em um vínculo temporal). Esse item vem a completar outros trabalhos de pesquisa que foram, ou vêm sendo desenvolvidos na Divisão de Mecânica Espacial e Controle - DMC na área de transferências de órbitas, tais como Prado (1989); Rodrigues (1991); Schulz (1997); Santos (1997); Jesus (1997); Felipe (1997).

1.3- METODOLOGIA UTILIZADA

Inicialmente foi feita uma pesquisa bibliográfica complementar a que já foi realizada nos trabalhos acima citados, enfatizando o problema da transferência com tempo limitado. A seguir dois métodos foram escolhidos para adaptação, implementação e testes.

Utilizamos como modelo para a dinâmica órbitas keplerianas alteradas por transferências bi-impulsivas com o mínimo Δv total possível, considerando atuadores capazes de aplicarem empuxos instantâneos e de magnitude infinita.

Os meios necessários ao desenvolvimento desse trabalho consistiram em

microcomputadores, "softwares" diversos (compiladores FORTRAN, programas gráficos, etc.) livros e artigos de periódicos.

1.4- CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Neste trabalho estudou-se o problema da transferência orbital com vínculo de tempo, para os casos bi-impulsivo coplanar e não coplanar.

O caso coplanar utiliza como base as equações apresentadas por Lawden (1993). Ele fornece a órbita de transferência entre duas órbitas elípticas coplanares, que executa a transferência com mínimo consumo de combustível e tempo fixo. O método de cálculo é apresentado na literatura, porém nenhuma solução numérica é mostrada. Para obter a solução, o método foi modificado de forma a simplificar a resolução das equações, gerando dessa maneira quatro casos com diferentes vínculos de tempo. Portanto, quatro programas foram desenvolvidos e testados.

O caso não coplanar utiliza como base as equações apresentadas por Eckel e Vinh (1984). Ele fornece a órbita de transferência entre duas órbitas elípticas não coplanares, que executa a transferência com mínimo consumo de combustível e tempo fixo. Da mesma forma que no caso coplanar, o método de cálculo é apresentado na literatura, porém nenhuma solução numérica é mostrada. Para obter a solução foi feita uma análise geometrica que permitiu adaptar o método de cálculo apresentado por Eckel e Vinh (1984) para manobras com diferentes geometrias. Portanto, as equações que faltavam (Equações 5.1, 5.2, 5.3 e 5.5) para tornar o método mais geral, foram deduzidas e dessa maneira, desenvolvemos e testamos o programa com vários exemplos.

1.5- ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho é dividido em seis Capítulos.

O Capítulo 1 apresenta inicialmente um breve comentário da importância das manobras orbitais e da utilização dessas manobra na Missão Espacial Completa Brasileira. A seguir, é apresentado o objetivo do trabalho, a metodologia utilizada e as contribuições do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho, onde são apresentadas as definições de transferência orbital, de modelagem do problema, do controle aplicado ao sistema, dos métodos de otimização e dos sistemas de propulsão.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão da literatura que trata do problema da transferência orbital.

O Capítulo 4 trata do problema da transferência bi-impulsiva ótima com tempo fixo entre órbitas coplanares. São apresentados o método de cálculo e o programa desenvolvido. A Seguir os resultados são mostrados e comentados para quatro casos diferentes.

O Capítulo 5 trata do problema da transferência bi-impulsiva ótima com tempo fixo entre órbitas não coplanares. São apresentados o método de cálculo e o programa desenvolvido. A Seguir os resultados são mostrados e comentados para dois exemplos.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS

2.1 - DEFINIÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ORBITAL

O movimento de um veículo espacial através de um campo gravitacional $\vec{g}(\vec{r},t)$ e sujeito à força propulsiva $\vec{F}$, é descrito pela equação diferencial abaixo:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + m\vec{g}$$

onde m é a massa instantânea do veículo e $\vec{r}$ o vetor posição.

A força $\vec{F}$ resulta da ejeção de massa a uma taxa q dada por:

$$q = -\frac{dm}{dt} \geq 0$$

Sendo $\vec{W}$ a velocidade de ejeção de massa temos:

$$\vec{F} = q\vec{W}$$

Assim, define-se que a transferência de um veículo espacial para uma órbita desejada, consiste (Marec, 1979) em se alterar o estado (posição, velocidade e massa) de um veículo espacial das condições $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ e m_0 no instante t_0 para $\vec{r}_f, \vec{v}_f$ e m_f no instante t_f $(t_f \geq t_0)$ usualmente com o menor gasto de combustível $(m_0 - m_f)$ possível.

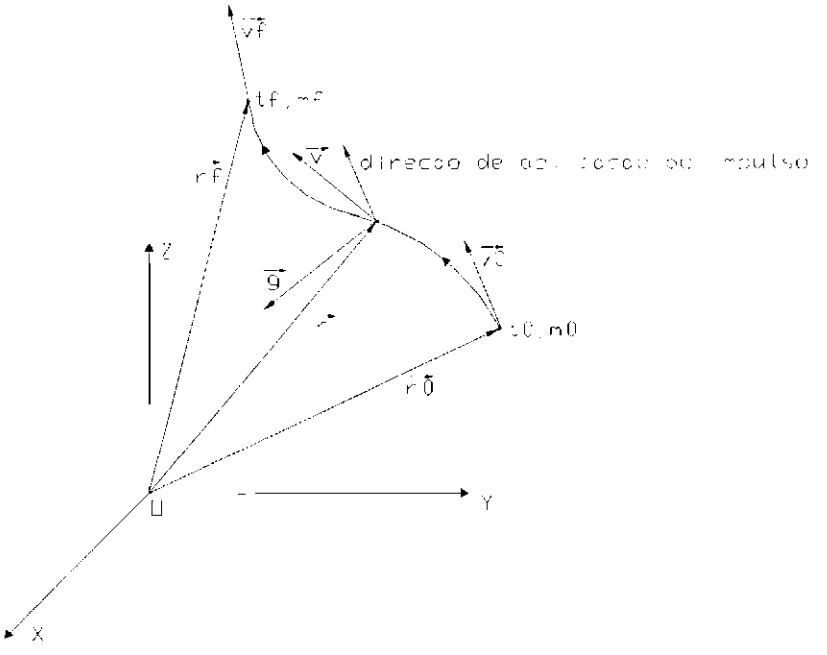


Fig. 2.1 - Transferência de Órbita.
FONTE: Marec (1979). Pág. 3.

Podemos ainda classificar as transferências da seguinte forma:

Transferência parcialmente livre

Neste caso pelo menos um dos parâmetros da transferência é livre, por exemplo: o tempo de execução da manobra é livre; ou deseja-se somente interceptar um corpo celeste, mas sem a necessidade de permanecer junto a ele; etc.

Transferência completamente vinculada

Nesta transferência todos os parâmetros são vinculados, deseja-se que o veículo mude de sua órbita para uma outra órbita específica em um ponto específico desta órbita. Este é o caso de manobras de rendezvous, onde um veículo espacial tem o objetivo de encontrar com outro e permanecer ao lado dele.

2.2- MODELAGEM DO PROBLEMA

Podemos encontrar na literatura diversas formas de modelagem do problema em questão. As diferenças entre elas podem ser divididas em três grupos: quanto aos vínculos dinâmicos; quanto ao controle aplicado; quanto ao método de otimização.

2.2.1- VÍNCULOS DINÂMICOS

Neste grupo estão as várias formas de modelagem do sistema dinâmico, ou seja, a forma de montar as equações de movimento. Podemos apresentar quatro categorias básicas de modelagem, que são dadas a seguir.

Modelagem simples com dois corpos

Temos, neste caso, a presença de um astro massivo e de um veículo espacial de massa desprezível orbitando este astro. Assume-se os dois corpos envolvidos como pontos de massa e não se considera nenhuma perturbação (de outros corpos ou de outras fontes). Assume-se também, que em todas as fases sem propulsão o veículo descreve uma órbita kepleriana. Este é, sem dúvida, o modelo mais estudado devido à sua simplicidade, rapidez no fornecimento de resultados, existência de soluções analíticas e boa precisão na maioria das situações. Dessa maneira, esta modelagem é sempre o ponto de partida para uma análise de missão, independente da complexidade da mesma.

Modelagem com dois corpos perturbados

Nesta modelagem adotamos o modelo matemático do caso anterior e acrescentamos uma ou mais perturbações ao sistema. Como exemplo de perturbações podemos citar a não esfericidade da Terra, o arrasto atmosférico, a pressão de radiação,

a presença de outros corpos, etc. Para este tipo de modelagem não existem soluções analíticas, sendo a integração numérica a ferramenta mais utilizada.

Modelagem com três corpos

Considera-se a presença de apenas três corpos que são tratados como pontos de massa. A versão mais adequada a Astronáutica (já que um veículo espacial nunca tem massa planetária) dessa modelagem também é conhecida como "problema restrito de três corpos" (Szebehely, 1967) que considera o movimento de um ponto de massa desprezível movendo-se guiado exclusivamente pela força gravitacional gerada pelos outros dois corpos (por exemplo um veículo espacial viajando através do sistema Terra-Lua). Esta modelagem é muito usada para o estudo de trajetórias lunares e interplanetárias, mas ela não possui solução analítica, sendo portanto, usualmente efetuadas integrações numéricas.

Modelagem com N corpos

Assume-se a presença de um número arbitrário N de corpos celestes, que são tratados como pontos de massa e geralmente livres de perturbações além daquelas geradas pelos seus próprios campos gravitacionais. Tem como aplicação missões multi-planetárias, como por exemplo as missões Pioneer, Voyager, Galileo, etc. Em geral essa modelagem é utilizada para melhorar resultados obtidos por outra modelagem mais simples.

2.2.2- CONTROLE APLICADO AO SISTEMA

Entende-se por controle aplicado ao sistema o modo de atuação dos propulsores. Existem duas categorias básicas, que são descritas abaixo.

Empuxo Infinito

Nesta categoria assume-se que os propulsores são capazes de aplicar empuxos instantâneos e de magnitude infinita. Dessa forma, temos a variação instantânea da velocidade do veículo espacial. Este é o modelo mais utilizado devido a sua simplicidade e razoável precisão.

Empuxo Contínuo

Assume-se agora que os propulsores são capazes apenas de aplicar um empuxo finito por um intervalo de tempo diferente de zero. Geralmente utiliza-se integrações numéricas das equações de movimento, ou linearizações válidas por um curto intervalo de tempo para se obter o efeito gerado por estes empuxos.

2.2.3- MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Podemos agrupar a maioria da literatura existente em três grupos:

Métodos Diretos

Consiste na busca direta de valores numéricos para um determinado número de parâmetros que tornem um certo funcional mínimo. Para isto, são empregados algoritmos computacionais que geram métodos iterativos para encontrar os valores destes parâmetros.

Métodos Indiretos

As condições necessárias de primeira ordem, as equações de Euler-Lagrange, são escritas e resolvidas analítica ou numericamente, fornecendo assim os dados necessários para encontrar a solução final desejada.

Métodos Híbridos

As condições necessárias de primeira ordem são escritas e resolvidas através de uma busca direta de parâmetros. Dessa forma, as equações de Euler-Lagrange transformam o problema original em outro equivalente, que pode ser resolvido pelo método direto.

2.3- SISTEMAS DE PROPULSÃO

Os resultados mostrados neste item foram extraídos de Marec (1979).

Define-se sistema de propulsão como sendo o sistema atuador capaz de alterar a magnitude e a direção do vetor velocidade, bem como a atitude de um veículo espacial.

Este sistema deve operar dentro de um domínio de operação Φ definido no plano F versus q podendo variar continuamente com o tempo, apresentando inclusive descontinuidades, como por exemplo o caso de separação de estágios. Dessa maneira, o estudo que será apresentado é limitado ao caso de sistemas de propulsão com domínio de operação fixado, isto é, o sistema é composto por um único estágio.

Podemos classificar os sistemas de propulsão com respeito a dois parâmetros de desempenho: o impulso específico máximo $I_{sp\,max}$, definido como a razão entre a velocidade máxima de ejeção dos gases W_{max} e a aceleração da gravidade ao nível do mar $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$; e a razão entre o máximo empuxo F_{max} e o peso do sistema propulsivo no solo. Dessa forma existem três categorias básicas de sistemas de propulsão, que são descritos abaixo.

Sistemas de Alto Empuxo (HT)

São caracterizados pelo elevado nível de aceleração, ou seja, a razão entre a aceleração máxima Γ_{max} e a gravidade local g (Γ_{max}/g) é grande, da ordem de 10 a 100, e por possuir um baixo impulso específico, na prática I_{sp} variando de 300 a 1000 s. Para estes sistemas os arcos propulsados são de curta duração (quasi-impulsos). Como exemplo temos a propulsão química convencional e a propulsão nuclear.

Sistemas de Empuxo Infinito (IFT)

Esta categoria é uma idealização da categoria anterior, pois neste caso a razão Γ_{max}/g tende a infinito e com isto o sistema propulsivo fornece ao veículo espacial um impulso instantâneo.

Sistemas de Baixo Empuxo (LT)

São caracterizados por baixo nível de aceleração com Γ_{max}/g variando de 10^{-2} a 10^{-4}, e elevado impulso específico I_{sp}, variando de 3000 a 10000 s. Para estes sistemas os arcos propulsados são de longa duração e, como exemplo, temos a propulsão elétrica e a energia solar.

Ainda podemos classificar os sistemas de propulsão com relação a posssibilidade de modulação da velocidade de ejeção dos gases, o que nos leva a distinguir essencialmente seguintes modelos.

1) Sistemas de propulsão com velocidade de ejeção constante e empuxo limitado (VEC)

2) Sistemas de propulsão com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL). Neste sistema o único vínculo existente é a impossibilidade de ultrapassar uma determinada potência sem a preocupação com os valores de W_{max} ou q_{max}, sendo que o domínio de operação é a região sob a parábola definida por $P = P_{max}$ mostrada na Tabela 2.1.

Assim sendo, podemos montar a tabela 2.1 com a classificação dos sistemas de propulsão.

Otimizar a atuação do sistema de propulsão consiste em maximizar a carga útil m_u ou maximizar a massa final do veículo m_f. No entanto, é conveniente substituir a massa $m(t)$ do veículo por grandezas mais convenientes a resolução do problema. Sendo assim é conveniente fazermos as escolhas mostradas abaixo.

Para sistemas VEC define-se a velocidade característica c, dada por:

$$c = \int_0 \Gamma \, dt = -\int_{m_0}^{m} \left(\frac{W}{m}\right) dm = W \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

E para sistemas PL define-se a grandeza j dada por:

$$j = \frac{1}{2}\int_0 \Gamma^2 \, dt = P_{\max}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_0}\right)$$

onde:

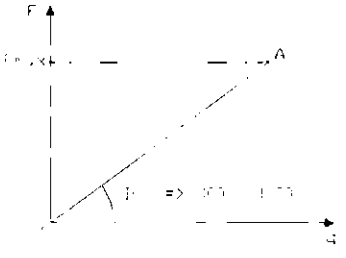
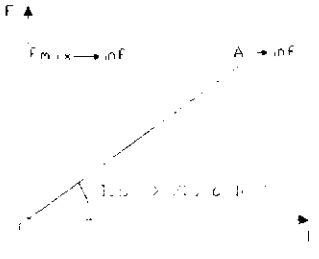
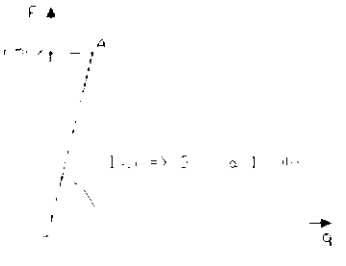
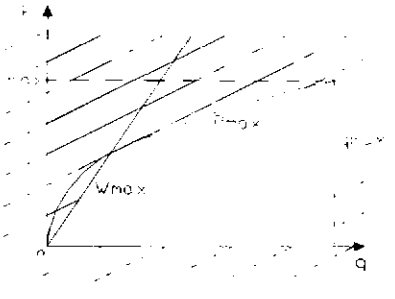
$\Gamma = F/m$;

W é a velocidade de ejeção dos gases;

P_{max} é a potência máxima.

A minimização dos valores finais destas grandezas correspondem a maximização da carga útil do veículo ou a minimização do consumo de combustível.

TABELA 2.1 - CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE PROPULSÃO

	DOMÍNIO DE OPERAÇÃO	
	VEC Velocidade de Ejeção Constante	**PL** Potência Limitada
AE Alto empuxo $F_{max}/g_0 m_E \approx$ 10 a 100 $Isp \approx$ 300 a 1000 s Pode ser usado em boosters.	 Ex. : Propulsão química ou propulsão nuclear.	
EI Empuxo Infinito $F_{max}/g_0 m_E \rightarrow +\infty$ $Isp \approx$ 300 a 1000 s É uma idealização do sistema de alto empuxo.		
BE Baixo Empuxo $F_{max}/g_0 m_E \approx 10^{-2}$ a 10^{-4} $Isp \approx$ 3000 a 10000 s Não pode ser usado em boosters. Ex. : Propulsão elétrica ou propulsão solar.	 Ex. : Propulsão elétrica quando W não pode ser modulado. Em geral F também não pode ser modulado.	 Ex. : Propulsão elétrica quando W pode ser modulado.
IND. PERFORMANCE	C_F	J_F

FONTE: Marec (1979), p. 9.

CAPÍTULO 3

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta os resultados mais conhecidos da literatura no tópico de transferências orbitais. Ele é baseado nos seguintes trabalhos: Gobetz e Doll (1969);Marec(1979); Prado (1989); Prado e Rios Neto (1993).

O primeiro a estudar o problema da trajetória ótima de um veículo espacial foi Goddard (1919), que propôs soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete a grandes altitudes da forma mais econômica possível. Depois dele vários pesquisadores contribuíram no desenvolvimento das manobras orbitais ótimas.

3.1- TRANSFERÊNCIAS COM ORIENTAÇÃO LIVRE

Podemos definir este tipo de transferência como sendo a transferência a partir de uma determinada órbita para outra onde a energia e o momento angular são especificados, mas o argumento do periapside não. A otimização deste tipo de transferência consiste em determinar o ângulo de orientação, bem como o número e a magnitude dos impulsos necessários.

Transferências com um único impulso podem ser executadas apenas se as órbitas se cruzam ou se elas são tangentes. E para quatro ou mais impulsos a transferência com orientação livre nunca é ótima (do ponto de vista de consumo de combustível) (Ting, 1960).

3.2- TRANSFERÊNCIA ENTRE ÓRBITAS CIRCULARES

Podemos considerar a transferência entre órbitas circulares como uma limitação do caso da transferência com orientação livre, pois o eixo maior na

circunferência é indefinido. Da mesma forma este problema também é uma limitação do caso da transferência entre órbitas coaxiais.

3.2.1- ÓRBITAS COPLANARES

3.2.1.1- TRANSFERÊNCIA BI-IMPULSIVA

A transferência entre órbitas circulares e coplanares foi o primeiro, e por muitos anos o único problema de transferência orbital estudado. Em 1925, Hohmann obteve a solução ótima do problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares em um campo gravitacional newtoniano. A transferência ótima ocorre por meio de uma órbita elíptica de transferência tangente nos apsides às órbitas inicial e final. Esta manobra, conhecida com transferência de Hohmann, é uma manobra bi-impulsiva entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre. Consiste na aplicação de um impulso $\Delta\vec{v}_0$ na direção do movimento, colocando assim o veículo espacial em uma órbita de transferência elíptica com periapside r_0 e apoapside r_f. Quando o veículo completa meia revolução nesta órbita e atinge o apoapside, aplica-se outro impulso $\Delta\vec{v}_f$ também na direção do movimento que faz com que ele entre em uma órbita circular de raio r_f. Os impulsos $\Delta\vec{v}_0$ e $\Delta\vec{v}_f$ e o tempo de transferência Δt foram calculados originalmente por Hohmann e se encontram reproduzidos na forma abaixo em Marec (1979).

$$\Delta v_0 = \left| \left[\frac{2\left(r_f / r_0\right)}{\left(r_f / r_0\right) + 1} \right]^{1/2} - 1 \right| v_0 \tag{3.1}$$

$$\Delta v_f = \left(\frac{r_f}{r_0} \right)^{-1/2} \left| 1 - \left[\frac{2}{\left(1 + r_f / r_0\right)} \right]^{1/2} \right| v_0 \tag{3.2}$$

$$\Delta t = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\left(r_f/r_0\right)}{2}\right]^{3/2} T_0 \tag{3.3}$$

Onde v_0 é a velocidade do veículo na órbita inicial e T_0 é o período da órbita inicial.

A magnitude destes impulsos também pode ser expressa como função da razão r_2/r_1 como é mostrado na Figura 3.1:

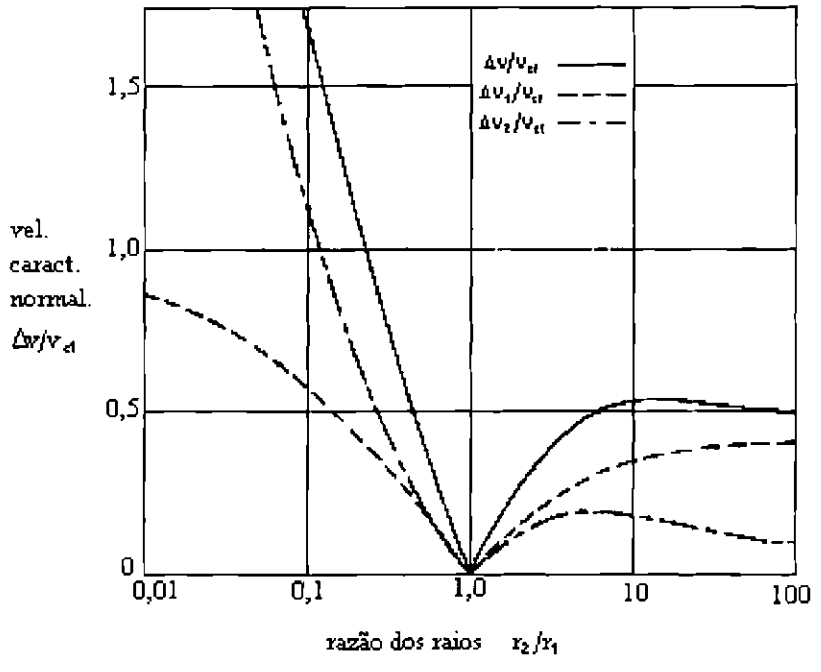


Fig. 3.1 - Sumário das Transferências de Hohmann.
FONTE: Gobetz e Doll (1969), p. 809.

3.2.1.2- TRANSFERÊNCIA TRI-IMPULSIVA

No final da década de 50 Hoelker e Silber (1959) e Shternfeld (1959) mostraram independentemente que a solução de Hohmann era a solução ótima apenas quando a razão entre os raios das órbitas final e inicial é menor que 11,94. Quando esta razão é maior ou igual a 11,94 a transferência tri-impulsiva (bi-elíptica) pode ser mais econômica, dependendo do valor do raio intermediario.

Esta transferência consiste em aplicar inicialmente um impulso $\Delta\vec{v}_0$ na direção do movimento do veículo espacial fazendo com que ele entre em uma órbita elíptica O_1 com periapside r_0 e apoapside r_i, mas é necessário que $r_i > r_f$, pois caso contrário a transferência de Hohmann é mais eficiente. Quando o veículo atinge o apoapside r_i aplica-se o segundo impulso $\Delta\vec{v}_i$, também na direção do movimento, que faz com que o veículo entre em uma órbita elíptica O_2 com apoapside em r_i e periapside em r_f. Quando o veículo atinge o periapside da órbita O_2 aplica-se o terceiro impulso $\Delta\vec{v}_f$, mas agora em sentido contrário ao do movimento do veículo espacial e com magnitude tal que faça com que o veículo entre em uma órbita circular de raio r_f.

Pode-se verificar que esta forma de transferência apresenta um menor valor na soma dos incrementos de velocidade necessários em cada etapa, quanto maior for o valor de r_i (Marec, 1979). Isto ocorre porque o segundo impulso é aplicado longe do centro de atração o que diminui o combustível necessário, pois a força de atração gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância, portanto ela é muito fraca no ponto onde é aplicado o impulso. Os impulsos $\Delta\vec{v}_0$, $\Delta\vec{v}_i$ e $\Delta\vec{v}_f$ e o tempo Δt gasto na transferência são dados pelas equações seguintes.

$$\Delta v_0 = \varepsilon_0 \left(\sqrt{\frac{2r_i}{1+r_i}} - 1 \right) \tag{3.4}$$

$$\Delta v_i = \sqrt{\frac{2r_f}{r_i(r_f + r_i)}} - \sqrt{\frac{2}{r_i(1+r_i)}} \tag{3.5}$$

$$\Delta v_f = \varepsilon_f \left(\sqrt{\frac{2r_i}{r_f(r_f + r_i)}} - r_f^{-1/2} \right) \tag{3.6}$$

onde: $\varepsilon_0 = \text{sinal}(r_i - 1)$

$\varepsilon_f = \text{sinal}(r_i - r_f)$

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\sqrt{2\mu}}\left(\sqrt{(r_0 + r_i)^3} + \sqrt{(r_i + r_f)^3}\right) \tag{3.7}$$

Esta foi a primeira solução multi-impulsiva que obteve um resultado melhor que a transferência bi-impulsiva. Além do mais, foi demonstrado por Haynes (1960) que quatro ou mais impulsos tangentes às órbitas de transferência nunca poderão obter resultados melhores que a transferência bi-elíptica.

A Figura 3.2 mostra um gráfico de $\Delta v/v_{c1}$ × razão de conjunção, para vários valores de r_2/r_1, onde a razão de conjunção é a razão entre o apoapside r_i e o raio da órbita inicial r_1. Uma conjunção exterior ocorre quando o apoapside é maior que a órbita circular exterior, enquanto que uma conjunção interior ocorre quando o apoapside é menor que a órbita circular exterior. A linha tracejada representa a transferência de Hohmann ($r_2 = r_i$). As linhas cheias representam um valor constante de r_2/r_1 para conjunções exteriores, e as linhas traço-ponto para conjunções interiores.

Se a razão dos raios r_2/r_1 é conhecida, temos da Figura 3.2 qual razão de conjunção resulta em uma transferência bi-elíptica superior à transferência de Hohmann. As conjunções exteriores são sempre superiores às conjunções interiores. Cada curva se origina em um ponto da linha referente à transferência de Hohmann e cresce ou decresce de acordo com o valor de Δv. Se ela decresce, a transferência bi-elíptica apresenta um valor de Δv menor. Usando este critério, Hoelker e Silber (1959) calcularam a razão dos raios crítica cuja transferência bi-elíptica torna-se melhor que a transferência de Hohmann. Se $r_2/r_1 < 11{,}93876$ a transferência de Hohmann é sempre superior. Se $r_2/r_1 > 15{,}58172$ a transferência bi-elíptica é sempre superior para razões de conjunção

maiores que 1,0. Entre estes dois limites a razão de conjunção deve crescer a partir de 1,0, quando $r_2/r_1 = 15{,}58172$, até ∞ quando $r_2/r_1 = 11{,}93876$, para manter a transferência bi-elíptica igual à transferência de Hohmann.

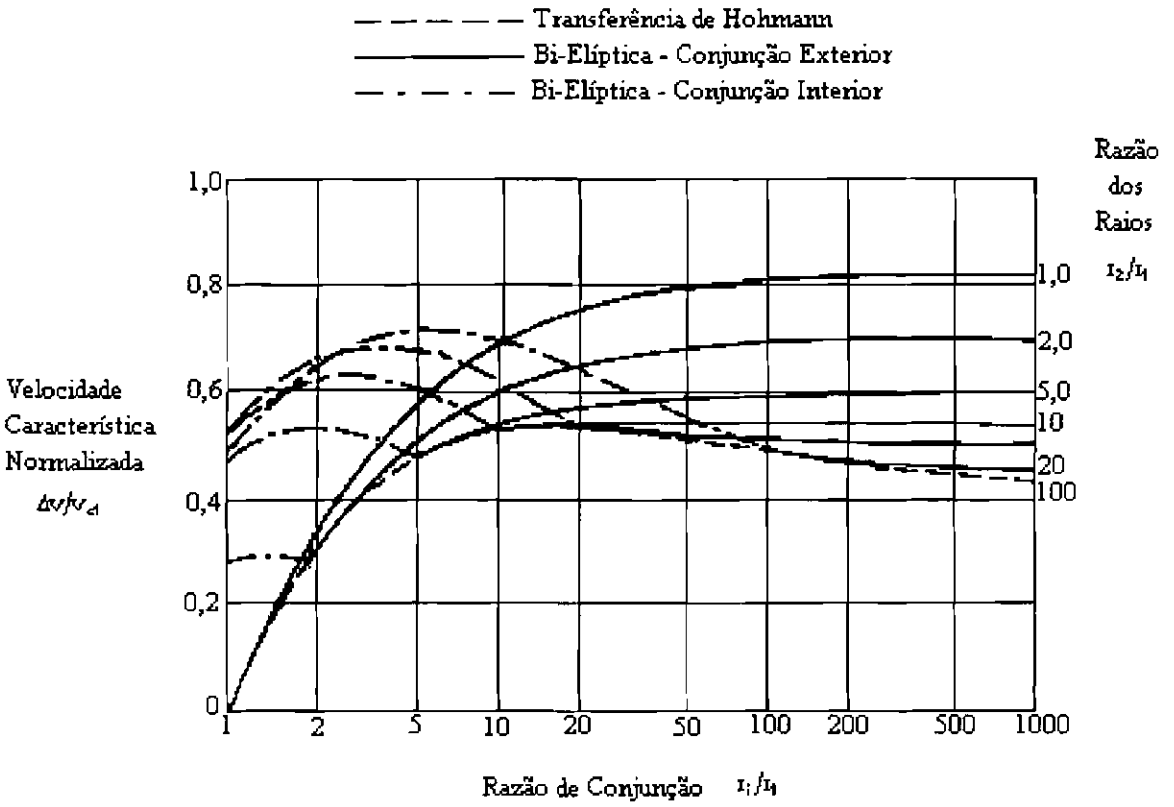


Fig. 3.2 - Sumário das Transferências Bi-Elípticas.
FONTE: Gobetz e Doll (1969), p. 810.

A transferência tri-impulsiva tem como caso limite a transferência bi-parabólica, quanto temos o objetivo de otimizar o gasto de combustível. Dessa forma, se tomarmos um r_i tendendo ao infinito teremos o mínimo gasto de combustível. Mas é claro que essa manobra não pode ser realizada na prática, pois utilizando um raio r_i infinito, o tempo gasto na transferência seria infinito. De qualquer forma, os passos que caracterizam esta manobra são os seguintes: Inicialmente, quando o veículo esta na órbita inicial O_0, aplica-se um impulso na direção do movimento com magnitude Δv_0 tal que o veículo entre em uma órbita parabólica O_1. Quando o veículo atinge o infinito,

aplica-se um impulso infinitesimal que faz com que o veículo passe da órbita O_1 para outra órbita parabólica O_2. Devido ao fato da distância entre o centro de atração gravitacional e o veículo ser infinita quando o veículo atinge o apoapside, a força de atração que atua no veículo é nula, portanto teoricamente o segundo impulso não consome combustível. Quando o veículo passa pelo periapside da órbita parabólica O_2 aplica-se o terceiro impulso na direção oposta ao movimento e com magnitude Δv_f tal que o veículo entre na órbita circular O_f.

3.2.2- ÓRBITAS NÃO COPLANARES

3.2.2.1- TRANSFERÊNCIA BI-IMPULSIVA

Para o caso de transferências bi-impulsivas entre órbitas não coplanares Hoelker e Silber (1959) mostraram que a mudança de plano deve ser dividida entre dois impulsos tangenciais e aplicados nos apsides. Mas a maior parte desta mudança deve ocorrer no segundo impulso, já que o impulso inicial nunca deve resultar em uma mudança de plano superior a 6,0°. Esta transferência é conhecida como transferência de Hohmann generalizada.

3.2.2.2- TRANSFERÊNCIA TRI-IMPULSIVA

A transferência tri-impulsiva entre órbitas não coplanares é uma extensão da transferência bi-elíptica plana. A mudança de plano é dividida em três partes, dessa forma cada impulso resulta em uma mudança de plano bem como uma mudança no periapside e no apoapside.

Roth (1967) mostrou que a mudança de plano resultante do primeiro e do terceiro impulsos deve ser pequena e nunca exceder a 5,3°. Portanto, se toda mudança de plano fosse efetuada no impulso intermediário teríamos um pequeno valor de Δv.

3.2.3- RESULTADOS GERAIS

Apenas três possíveis modos de transferência podem ser ótimos para o caso não coplanar entre órbitas circulares: tri-impulsiva, bi-impulsiva, e transferência através do infinito. Uma discussão detalhada de como proceder na escolha do melhor modo pode ser encontrada em Marchal (1967).

A Figura 3.3 apresenta um resumo da transferência entre órbitas circulares. Os parâmetros dos eixos, razão dos raios e ângulo de inclinação entre as órbitas, são suficientes para determinar a transferência ótima completamente. As linhas tracejadas representam linhas de $\Delta v/v_{c1}$ total constantes, e as linhas traço-ponto na região da transferência tri-impulsiva representam linhas de valores constantes da razão de conjunção.

Do diagrama podemos chegar às conclusões mostradas nos parágrafos seguintes.

Considerando a região da transferência através do infinito temos que se a inclinação da órbita exceder 60,185° as transferências através do infinito são ótimas para qualquer valor da razão dos raios. Similarmente, se a razão dos raios for inferior a 0,08376 ($r_2/r_1 = 11{,}93876$) a transferência através do infinito é ótima independente do ângulo de inclinação. Como na transferência tri-impulsiva através do infinito a mudança de plano ocorre quase que completamente no segundo impulso por meio de um pequeno impulso infinitesimal, o valor de Δv não é função do ângulo de inclinação.

Considerando agora a região do diagrama referente à transferência tri-impulsiva podemos notar que para inclinações maiores que 45° a inclinação das curvas de Δv é negativa. Assim, para uma dada inclinação, o valor de Δv decresce a medida que a razão dos raios decresce a partir de 1,0.

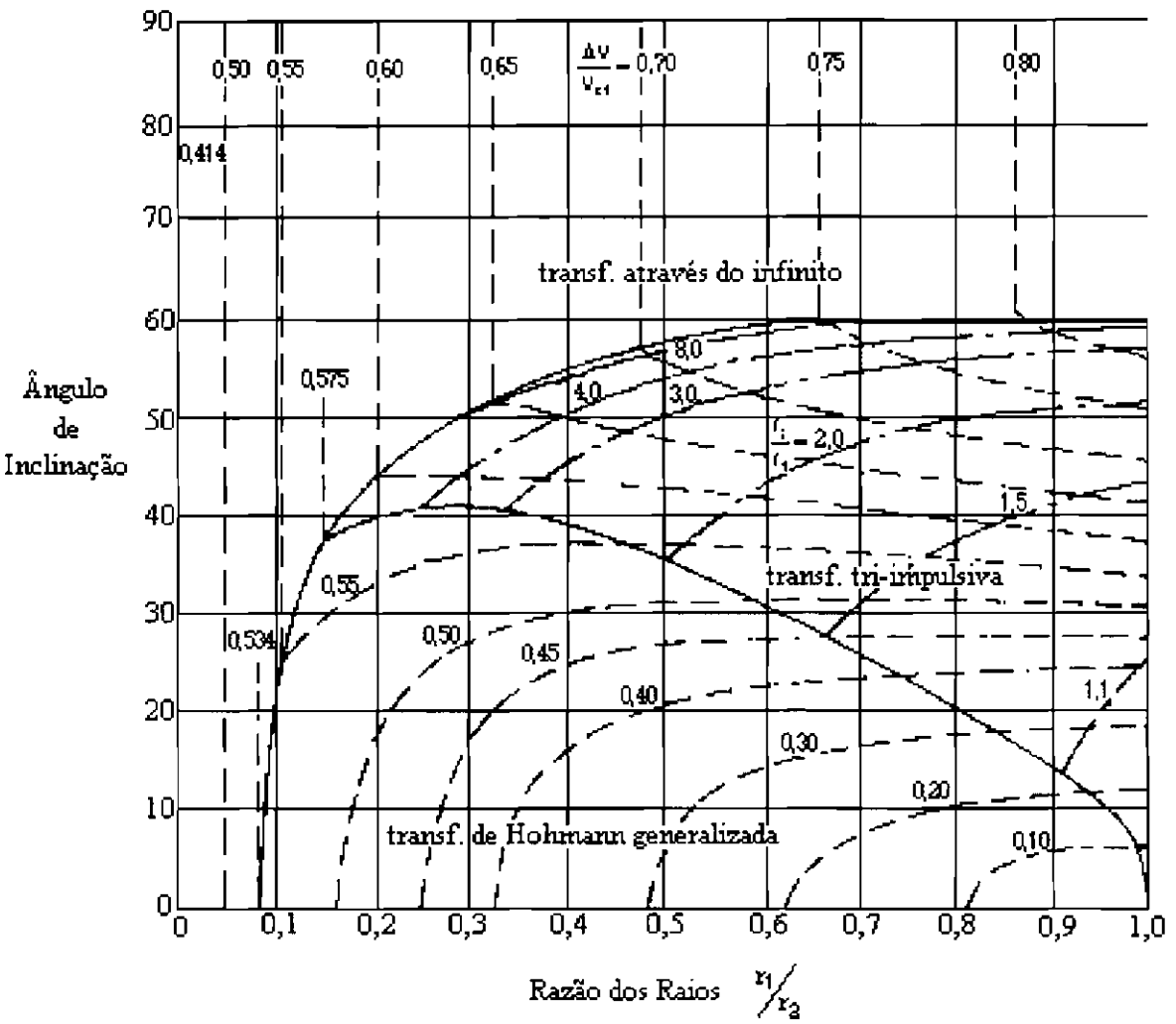


Fig. 3.3 - Sumário das Transferências Entre Órbitas Circulares.
FONTE: Gobetz e Doll (1969), p. 811.

Para a região da transferência de Hohmann generalizada temos que para razões de raios entre 0,1 e 1,0 e inclinações de 10° ou menores, todas as transferências ótimas são do tipo Hohmann. Quando a inclinação for zero apenas a transferência de Hohmann generalizada e a transferência através do infinito podem ser ótimas, enquanto que para $r_1/r_2 = 1,0$ e $i \neq 0$ apenas a transferência através do infinito e a transferência tri-impulsiva podem ser ótimas. Quando $r_1/r_2 = 0,1505$ e i = 37,54° os três modos de transferência produzem o mesmo valor de Δv.

3.3 - TEORIA DO "PRIMER-VECTOR"

Em 1953 e 1954 D. F. Lawden utilizando o multiplicador de Lagrange associado ao vetor velocidade introduziu a noção do "primer-vector". Este conceito é utilizado nas modernas teorias de trajetórias espaciais ótimas, como por exemplo nos trabalhos de McCue (1967) e Carter (1984). Nesses trabalhos, assume-se que o sistema de propulsão é do tipo VEC (Velocidade de Ejeção Constante) e o campo gravitacional é um campo central que varia com o inverso do quadrado da distância, embora possam ser encontrados trabalhos que utilizam um campo da forma $g = -\mu/r^N$ (Brookes e Smith, 1970) ou então um campo genérico da forma $g = g(r,t)$ (Marec, 1979).

O vetor estado do sistema será formado pelo vetor posição ($\vec{r}$) com três componentes, pelo vetor velocidade ($\vec{v}$) também com três componentes, e pela velocidade característica (c) com uma única componente que substitui a massa definida por:

$$c = \int \Gamma \, dt = -\int (W/m) dm = W \ln(m_0/m) \tag{3.8}$$

onde:

W é o modulo da velocidade de ejeção dos gases;

$\Gamma = \dfrac{F}{m}$ que é a aceleração devido ao empuxo e mede o gasto de combustível.

Assim, as equações de movimento são dadas por:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \tag{3.9}$$

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} + \vec{\Gamma} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} + \vec{\Gamma} \tag{3.10}$$

$$\dot{c} = \Gamma \tag{3.11}$$

e a hamiltoniana do sistema é dada por:

$$H = \vec{p} \cdot \vec{f}$$

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \left(\vec{\Gamma} - \frac{\mu \vec{r}}{r^3} \right) + p_c \ \Gamma \tag{3.12}$$

onde $\cdot$ representa o produto escalar.

As equações adjuntas do sistema podem ser obtidas a partir da Hamiltoniana e são dadas por:

$$\dot{\vec{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = +\vec{p}_v \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{p}_v \cdot \vec{G} \tag{3.13}$$

$$\dot{\vec{p}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \vec{v}} = -\vec{p}_r \tag{3.14}$$

$$\dot{p}_c = -\frac{\partial H}{\partial c} = -\left(\frac{\Gamma^*}{W} \right) \left(p_v + p_c \right) \tag{3.15}$$

onde $\vec{G}$ é o tensor gradiente de gravidade ($\partial \vec{g} / \partial \vec{r}$).

Usando $\dot{\vec{p}}_r$ e $\dot{\vec{p}}_v$ temos:

$$\ddot{\vec{p}}_v = -\dot{\vec{p}}_r \tag{3.16}$$

$$\dot{\vec{p}}_r = \vec{p}_v \cdot \vec{G} \tag{3.17}$$

e desta forma obtemos:

$$\ddot{\vec{p}}_v = \vec{p}_v \cdot \vec{G} \tag{3.18}$$

onde o vetor $\vec{p}_v$ é conhecido por "primer-vector".

Pelo princípio de máximo de Pontryagin temos:

$$H(x^*, p^*, \Gamma^*) \geq H(x^*, p^*, \Gamma) \tag{3.19}$$

onde * denota o valor ótimo da variável.

Então, para maximizar a hamiltoniana devemos escolher $\vec{\Gamma}$ na direção de $\vec{p}_v$, o que fornece:

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + p_v \Gamma - \vec{p}_v \cdot \frac{\mu \vec{r}}{r^3} + p_c \ \Gamma$$

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{v} - \vec{p}_v \cdot \frac{\mu \vec{r}}{r^3} + \Gamma(p_v + p_c) \tag{3.20}$$

Dessa forma, para maximizar H, devemos ter:

Se, $p_v + p_c < 0 \ \rightarrow \ \Gamma$ deve ter o mínimo valor possível.

Se, $p_v + p_c > 0 \ \rightarrow \ \Gamma$ deve ter o máximo valor possível.

Porém se, $p_v + p_c = 0$ temos um arco singular num intervalo finito de tempo. Esse tipo de solução não será abordado no presente trabalho.

Assim, temos a seguinte lei de controle:

$$\Gamma^* = \Gamma_{\max}(c) \frac{[1 + \text{sign}(p_v + p_c)]}{2} \tag{3.21}$$

Se $p_v + p_c < 0 \ \rightarrow \ \text{sinal}(p_v + p_c) = -1 \ \ \therefore \ \ \Gamma^* = 0$

Se $p_v + p_c > 0 \ \rightarrow \ \text{sinal}(p_v + p_c) = +1 \ \ \therefore \ \ \Gamma^* = \Gamma_{max}$

Dessa maneira temos um controle do tipo "bang-bang", ou seja arcos balísticos alternados com arcos de empuxo máximo.

Dessa forma o problema transforma-se na integração das equações adjuntas para obter os trechos com propulsão e os com arcos balísticos. As condições de contorno iniciais e algumas finais, são dadas pelo próprio enunciado do problema (massa, órbitas inicial e final), as demais são obtidas por meio das condições de transversalidade, que variam de missão para missão. Para o caso da transferência com tempo livre elas são dadas por:

$$H^* = 0 \tag{3.22}$$

$$\vec{p}_{rf} \cdot \vec{v}_f + \vec{p}_{vf} \cdot \vec{g}_f = 0 \tag{3.23}$$

$$\vec{p}_{r0} \cdot \vec{v}_0 + \vec{p}_{v0} \cdot \vec{g}_0 = 0 \tag{3.24}$$

$$p_c = -1 \tag{3.25}$$

Mas, o conjunto completo de condições de contorno em um mesmo instante não é conhecido, portanto não é possível encontrar uma solução analítica para esses problemas. Porém podem ser encontradas soluções numéricas como por exemplo em Subrahmanyam (1986). Este tipo de problema é conhecido como "Two Point Boundary Value Problem" (TPBVP).

Podemos ainda encontrar na literatura trabalhos específicos sobre integração dos multiplicadores de Lagrange, entre eles podemos citar os trabalhos de Vinh (1972); Eckenwiler (1965); Hempel (1966); Handelsman (1966).

3.3.1- O CASO IMPULSIVO

Uma solução impulsiva para uma dada missão pode ser considerada como um limite da solução "bang-bang" relativa ao sistema de alto empuxo (AE), quando F_{max} tende para $+\infty$. Dessa maneira, a duração do trecho de propulsão tende a zero ($\tau = t^+ - t^-$), mas o consumo de combustível não.

$$\int_{-}^{+} \Gamma_{max}.dt \quad \xrightarrow[\tau \to 0]{\Gamma_{max} \to \infty} \quad \Delta c \ \text{(finito)} \tag{3.26}$$

Segundo Contensou (1962), para evitar os problemas gerados pelo fato de $\dot{c}$ e $\dot{\vec{v}}$ tenderem para infinito enquanto $\dot{p}_c$ se torna indeterminado quando F_{max} tende para $+\infty$, é conveniente escolher c como variável independente ao invés do tempo. Assim obtemos que $\vec{r}$, t, $\vec{p}_r$, $\vec{p}_v$, H* e p_c são constantes durante o impulso e dessa maneira p_c é igual a -1 pois $\dot{p}_c$ é igual a 0 e em t_f p_c é igual a -1.

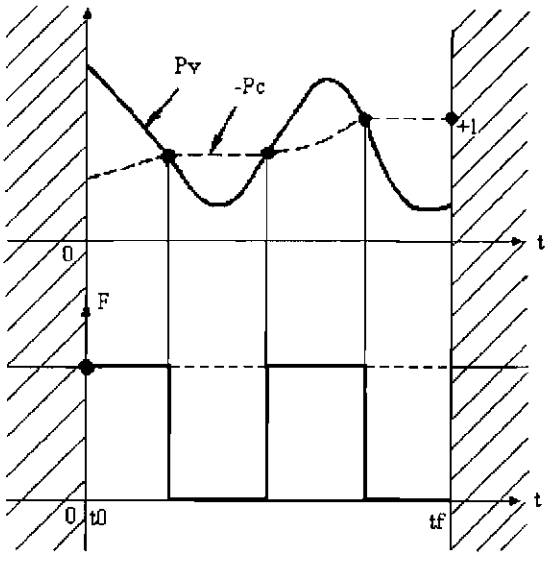


Fig. 3.4 - Lei de Controle Típica Para Sistemas de Empuxo Infinito.
FONTE: Marec (1979), p. 58.

Podemos ver na Figura 3.4 a lei de controle típica para sistemas de empuxo infinito.

3.4- TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS COM VÍNCULO DE TEMPO

A grande maioria dos trabalhos sobre transferências orbitais impulsivas concentram-se na minimização do Δv com tempo livre. O problema da transferência orbital com tempo fixo ou a minimização do tempo foi apresentado em alguns poucos trabalhos, como veremos a seguir.

O problema da minimização do tempo na transferência bi-impulsiva entre órbitas circulares e coplanares com um específico Δv total pode ser encontrado em Lee e Florence (1961) e Wang (1963). O menor Δv necessário é o da transferência de Hohmann, que gasta um determinado tempo de transferência. Para obter um tempo menor a transferência bi-impulsiva requer obrigatoriamente um maior Δv. Baseado neste fato, Wang (1963) afirmou que impulsos aproximadamente radiais resultam em um mínimo tempo de transferência e que os impulsos são praticamente iguais em magnitude.

Vários trabalhos apresentados utilizam a teoria do "primer-vector" desenvolvida por Lawden (1953, 1954) que foi resumidamente apresentada no item anterior. Entre eles, podemos citar os seguintes trabalhos.

Em Lion e Handelsman (1968) a definição do "primer-vector" é estendida ao caso de trajetórias não ótimas e ótimas. Nesse trabalho, foram desenvolvidos testes para avaliar o quanto uma dada trajetória pode ser melhorada por meio da aplicação de mais um impulso. Em Jezewski e Rozendaal (1968) uma nova técnica para calcular trajetórias de transferências ótimas é mostrada. O método desenvolvido determina a solução N-impulsiva ótima com tempo fixo, usando a teoria do "primer-vector" para determinar o número de impulsos e o vetor de estado do veículo espacial nos impulsos correspondentes. Já em Prussing (1969, 1970) as manobras de "rendezvous" com mínimo consumo de combustível e múltiplos impulsos são estudadas para o caso onde o tempo gasto na transferência é especificado. O método desenvolvido é aplicado para manobras de "rendezvous" ou para transferências orbitais entre órbitas elípticas com

baixa excentricidade. Nesse método a solução ótima é obtida satisfazendo as condições necessárias para o "primer-vector". Assume-se que as órbitas são suficientemente próximas de uma órbita circular de referência o que permite descrever a transferência por meio de equações lineares de movimento. Em Gross e Prussing (1974) temos um estudo para manobras impulsivas com mínimo consumo de combustível e tempo fixo, onde o veículo parte da superfície do planeta. Mostra-se que para certos casos a transferência tri-impulsiva é mais econômica que a bi-impulsiva. Em Ivashkin e Skorokhodov (1981) um algoritmo numérico é desenvolvido para determinar a trajetória ótima com vínculo de tempo para o caso da transferência tri-impulsiva, tomando como primeira aproximação a trajetória tri-impulsiva ótima com tempo livre mas com limitação para a distância do veículo ao planeta. Em Eckel (1982) a teoria do "primer-vector" é aplicada para resolver o problema da transferência impulsiva ótima não coplanar com um número arbitrário de impulsos, para o caso de transferências orbitais com vínculo de tempo ou para o caso de manobras de "rendezvous". A solução é obtida por meio de um conjunto formado por m equações onde m é igual ao grau de liberdade do problema. Em Eckel e Vinh (1984) a teoria de máximos e mínimos é aplicada para obter as condições ótimas para o problema da transferência orbital bi-impulsiva não coplanar entre órbitas elípticas com tempo fixo. É mostrado que todos os elementos da transferência podem ser expressos em termos de três variáveis: o semi-latus rectum da órbita de transferência e as anomalias verdadeiras dos pontos de aplicação dos impulsos medidas com relação às órbitas inicial e final respectivamente. Em termos destas três variáveis o problema é resolvido para o caso de mínimo consumo de combustível e tempo fixo e para o caso de mínimo tempo e consumo de combustível fixo. Em Prussing e Chiu (1986) é apresentado um estudo para manobras de "rendezvous" entre órbitas circulares utilizando múltiplos impulsos, mínimo consumo de combustível e tempo fixo. O caso coplanar e uma classe restrita de casos não coplanares são analisados. Em Lawden (1993) temos um método para encontrar a solução ótima para o problema da transferência orbital impulsiva entre órbitas elípticas coplanares com vínculo de tempo. O método considera ainda, as posições para o início e para o final da manobra (pontos terminais), dessa forma, podemos ter o caso em que o veículo espacial percorre um arco na órbita inicial, antes de ser aplicado o primeiro

impulso, e um outro na órbita final, após a aplicação do segundo impulso. O método utiliza a teoria do "primer-vector" para obter as condições necessárias para otimalidade resultando em um sistemas de equações cuja solução fornece os instantes de aplicação dos impulsos, a magnitude dos impulsos e os elementos keplerianos da órbita de transferência. Em Taur et al. (1995) são obtidas soluções para o problema das manobras de "rendezvous" e das manobras de interceptação para o caso impulsivo de mínimo consumo de combustível com tempo fixo mas com vínculo de posição. A teoria do "primer-vector" é estendida a este caso de forma a capacitar o método a fornecer o número ótimo de impulsos, os instantes e as posições de aplicação desses impulsos.

Para o desenvolvimento deste trabalho tomamos como base as equações apresentadas em Lawden (1993) para o caso coplanar e as equações apresentadas em Eckel e Vinh (1984) para o caso não coplanar. Lawden apresentou o método na literatura mas não apresentou soluções numéricas e apenas considerou o caso onde os pontos terminais são fixos. Já Eckel e Vinh, da mesma forma que Lawden, apresentaram o método na literatura mas não apresentaram soluções numéricas, e ainda, consideraram apenas uma determinada geometria da manobra. Portanto, nos capítulos seguintes serão mostrados os estudos realizados considerando diferentes vínculos de posição para o caso coplanar e diferentes geometrias para o caso não coplanar, além de algumas soluções numéricas obtidas por meio da implementação dos métodos para os dois casos.

CAPÍTULO 4

TRANSFERÊNCIAS BI-IMPULSIVAS ÓTIMAS COM TEMPO FIXO ENTRE ÓRBITAS COPLANARES

Este capítulo utiliza como base as equações apresentadas por Lawden (1993). Ele fornece a órbita de transferência entre duas órbitas elípticas coplanares, que executa a transferência com mínimo consumo de combustível e tempo fixo. O método é apresentado na literatura, porém nenhuma solução numérica é mostrada. Sendo assim, a obtenção de soluções numéricas e as modificações necessárias para a obtenção destas soluções são contribuições deste trabalho.

4.1- INTRODUÇÃO

Dadas duas órbitas coplanares, podemos encontrar, por métodos numéricos, a órbita de transferência bi-impulsiva ótima entre elas quando não consideramos limitações de tempo nem de posição dos pontos terminais nas órbitas de partida e de chegada.

Porém, quando consideramos o problema com tempo fixo, a posição dos pontos terminais passa a ter importância. Da definição dos pontos terminais podemos ter quatro problemas diferentes. Quando consideramos os pontos terminais fixos desejamos partir de um determinado ponto em um determinado instante da órbita inicial e atingir um outro determinado ponto em um outro determinado instante da órbita final. Dessa forma, deseja-se obter uma órbita de transferência que inicie no ponto terminal inicial ou após ele, e termine no ponto terminal final ou antes dele. Neste caso, o tempo total gasto será dado pela soma do tempo gasto na órbita de partida a partir do ponto terminal inicial até o ponto onde é aplicado o primeiro impulso, mais o tempo gasto na órbita de transferência propriamente dita, mais o tempo gasto na órbita de chegada do ponto onde é aplicado o segundo impulso até o ponto terminal final. Deseja-se também, que a

solução obtida seja a de menor consumo de combustível, ou seja, podemos obter várias soluções onde a soma dos tempos gastos nas órbitas de partida, de transferência e de chegada, apresentam o mesmo valor, mas o gasto de combustível deve ser diferente pois as posições onde os impulsos são aplicados são diferentes para cada solução, portanto estes impulsos terão magnitudes diferentes de uma solução para outra. Este tipo de problema pode ter como aplicação manobras de rendezvous, pois o tempo de transferência e as posições inicial e final são considerados como vínculos.

Outros dois tipos de problemas ocorrem quando apenas um dos pontos terminais é fixado. Neste caso o problema apresenta um vínculo a menos que o caso anterior. Quando o ponto inicial é fixado, temos que o tempo total da manobra é a soma dos tempos gastos na órbita inicial, do ponto terminal inicial até o ponto onde é aplicado o primeiro impulso, e na órbita de transferência, do ponto onde é aplicado o primeiro impulso até o ponto onde é aplicado o segundo impulso. Já quando o ponto terminal final que é fixado, o tempo total da manobra é dado por: tempo gasto na orbita de transferência, do ponto terminal inicial onde é aplicado o primeiro impulso até o ponto onde é aplicado o segundo impulso, mais o tempo gasto na órbita final, do ponto onde é aplicado o segundo impulso até o ponto terminal final.

O caso onde o ponto terminal inicial é fixado pode ter como aplicação transferências orbitais ótimas com tempo fixo, em que o local onde a manobra é realizada é determinado. Por exemplo, a necessidade da manobra ser realizada em visibilidade pode ser enquadrada neste caso.

Já quando o ponto terminal final que é determinado podemos ter como aplicação manobras de rendezvous, ou então manobras onde seja necessário ter visibilidade no momento da aplicação do segundo impulso.

Um último tipo de problema ocorre quando nenhum dos pontos terminais é fixado, sendo apenas o tempo total fixado. Nesta situação o foco de interesse não é

onde o veículo vai efetuar a manobra, mas quanto tempo ele vai permanecer na órbita de transferência. Dessa forma a solução a ser encontrada deve fornecer a órbita de transferência com menor consumo de combustível que transfere o veículo espacial da órbita inicial para a órbita final em um tempo pré-determinado. Uma possível aplicação para este caso é a transferência de satélites de sensoreamento remoto onde a manobra de transferência deve ocorrer o mais rápido possível, pois enquanto o satélite estiver na órbita de transferência os dados coletados serão de baixa qualidade e, portanto, não poderão ser utilizados.

4.2- APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

Conforme já citado, o método que será mostrado aqui utiliza as equações apresentadas por Lawden (1993) desenvolvidas a partir da teoria do "primer-vector".

Chamaremos o ponto de junção da órbita inicial com a órbita de transferência de J, onde é aplicado o primeiro impulso, e o ponto de junção da órbita de transferência e a órbita final de K, local onde é aplicado o segundo impulso. Dessa maneira, assumiremos que o tempo gasto entre o ponto terminal inicial e o ponto J é dado por Δt_1, o tempo gasto na órbita de transferência é Δt, e o tempo gasto entre o ponto K e o ponto terminal final é Δt_2.

Assim, para o caso onde os pontos terminais são fixados o vínculo de tempo é dado por:

$$\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = T \tag{4.1}$$

onde T é o tempo total gasto na manobra.

Para o caso onde apenas o ponto terminal inicial é fixado o vínculo de tempo é dado por:

$$\Delta t_1 + \Delta t = T \tag{4.2}$$

pois neste caso Δt_2 é zero.

Para o caso onde o ponto terminal final que é fixado, o vínculo de tempo é dado por:

$$\Delta t + \Delta t_2 = T \tag{4.3}$$

pois agora Δt_1 que é zero.

Para o caso onde ambos os pontos terminais não são fixados o vínculo de tempo é dado por:

$$\Delta t = T \tag{4.4}$$

pois Δt_1 e Δt_2 são iguais a zero.

Deve-se salientar que, com exceção do último caso, matematicamente podemos ter valores negativos para Δt_1 e Δt_2 na equação de vínculo.

As órbitas elípticas serão especificadas pelos seguintes elementos orbitais (índice 1: órbita inicial; índice 2: órbita final; sem índice: órbita de transferência):

- a = semi-eixo maior;
- e = excentricidade;
- l = semi-latus rectum;
- ω = longitude do periapside;
- $s = 1/r$;

- r = raio (distância do centro de atração ao satélite);
- $z = 1/\mu^{1/2} \operatorname{sen}\phi$, sendo que $\mu^{1/2} z \operatorname{sen}\phi$ é a componente da velocidade perpendicular ao impulso que não é afetada pela propulsão;
- ϕ = ângulo formado entre a direção circunferencial (direção perpendicular a reta que liga o centro de atração ao satélite) e a direção do impulso;
- θ = ângulo de posição do satélite. Ângulo formado entre a reta que liga o centro de atração ao nodo ascendente e a reta que liga o centro de atração ao satélite. Portanto $\theta = \omega + f$, onde f é a anomalia verdadeira;
- $\alpha = \left(l^2 C\right)/e$, onde C é uma constante definida em Lawden (1963). Se $C = 0$ temos que a solução obtida é a mesma para tempo livre;
- μ = constante gravitacional, que para a Terra vale $398600\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$;
- $\vec{v}_1$ = vetor velocidade do veículo com relação a órbita inicial no local onde é aplicado o primeiro impulso;
- $\vec{v}_i$ = vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o primeiro impulso;
- $\vec{v}_f$ = vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o segundo impulso;
- $\vec{v}_2$ = vetor velocidade do veículo com relação a órbita final no local onde é aplicado o segundo impulso;
- $\Delta v_1 = \left|\vec{v}_i - \vec{v}_1\right|$ = magnitude do primeiro impulso;
- $\Delta v_2 = \left|\vec{v}_2 - \vec{v}_f\right|$ = magnitude do segundo impulso;
- $\Delta\vec{v}_q$ = vetor impulso na direção radial;
- $\Delta\vec{v}_s$ = vetor impulso na direção circunferencial (transversal).

Com estas definições, temos que:

$$\Delta\vec{v}_1 = \Delta v_{q_1}\,\vec{q} + \Delta v_{s_1}\,\vec{s} \tag{4.5}$$

$$\Delta\vec{v}_2 = \Delta v_{q_1}\,\vec{q} + \Delta v_{s_2}\,\vec{s} \tag{4.6}$$

$$\Delta v_t = \left|\Delta\vec{v}_1\right| + \left|\Delta\vec{v}_2\right| \tag{4.7}$$

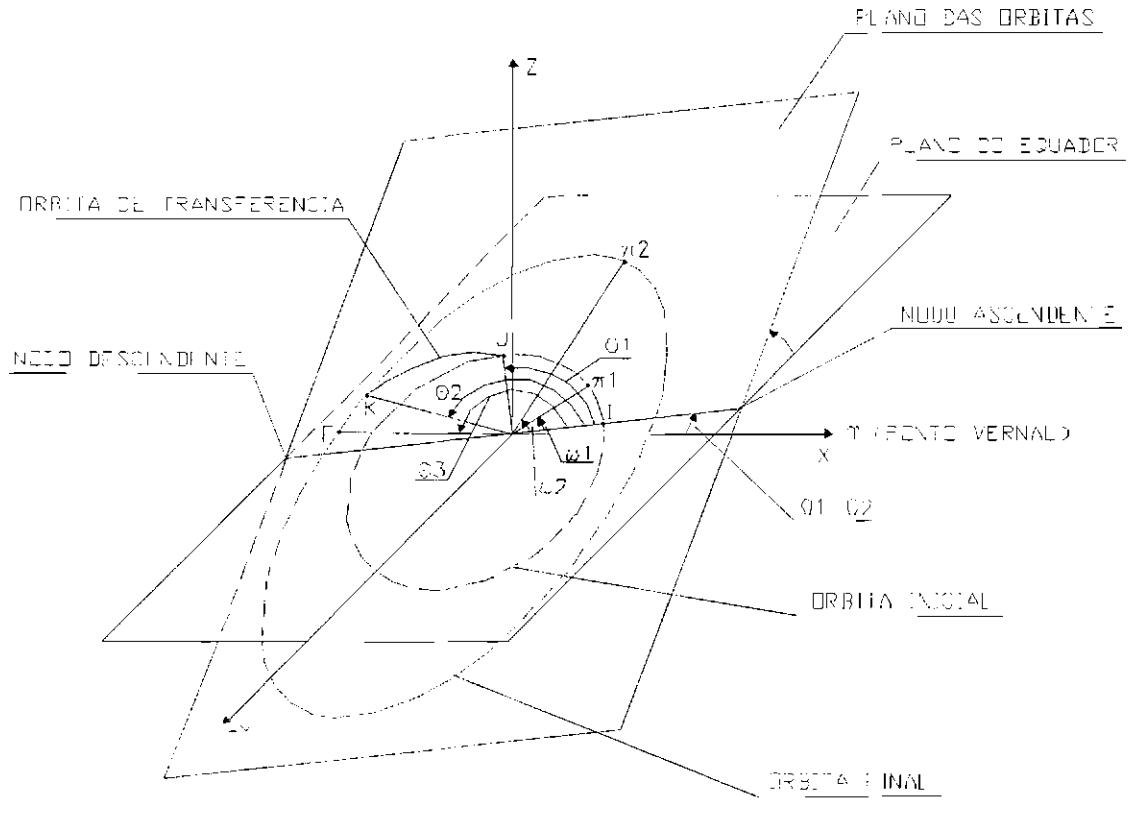


Fig. 4.1- Geometria da Manobra.

Assim a equação polar da órbita de transferência pode ser escrita da forma:

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \omega) \tag{4.8}$$

Supondo que o movimento do veículo na órbita no ponto J tem uma aceleração μ/r^2 na direção de O (centro de atração) e é sujeito a uma propulsão impulsiva I em um ângulo ϕ em relação a direção circunferencial, temos que os

elementos (l, e, ω) desta nova órbita devem continuar a satisfazer a Equação 4.8. Entretanto é mostrado em Lawden (1962) que estes novos elementos também satisfazem a equação:

$$e\,\mathrm{sen}(\theta-\omega)=\left(\frac{l}{r}-l^{1/2}z\right)\mathrm{tg}\,\phi \tag{4.9}$$

onde $\mu^{1/2} z \,\mathrm{sen}\,\phi$ representa a componente da velocidade perpendicular ao impulso que não é afetada pela propulsão. Assim, todas as possíveis órbitas que podem ser utilizadas pela aplicação de um impulso na direção ϕ devem satisfazer as Equações 4.8 e 4.9.

Se l_1, e_1, ω_1 e l, e, ω são dois grupos de elementos que satisfazem as Equações 4.8 e 4.9, temos que o incremento de velocidade necessário para mover o veículo da órbita inicial para uma outra é dado por:

$$\Delta v=\mu^{1/2}\frac{l^{1/2}-l_1^{1/2}}{r\cos\phi} \tag{4.10}$$

como é mostrado em Lawden (1993).

Temos ainda, as seguintes equações conhecidas da mecânica orbital:

$$\cos u=\frac{e+\cos f}{1+e\cos f} \tag{4.11}$$

$$\cos f=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u} \tag{4.12}$$

$$a=\frac{l}{1-e^2} \tag{4.13}$$

$$r = a(1 - e\cos u) \tag{4.14}$$

$$t = \frac{a^{3/2}(u - e\,\mathrm{sen}\,u)}{\mu^{1/2}} \tag{4.15}$$

onde:

u = anomalia excêntrica;

f = anomalia verdadeira;

t = tempo gasto pelo veículo para atingir a anomalia excêntrica u partir do periapside.

O problema da transferência de um veículo espacial entre um par de órbitas terminais (onde a velocidade é conhecida) em um dado campo gravitacional com o mínimo gasto de combustível foi resolvido por Lawden (1963) em termos do primer-vector definido ao longo de sua trajetória. Se assumirmos que não existem arcos intermediários de propulsão, a trajetória ótima consiste de arcos de balísticos separados por pontos de junção onde a propulsão impulsiva é aplicada. Para garantir a otimalidade, a magnitude do primer-vector deve assumir o valor máximo em ambas as junções, e nestes pontos o primer-vector e o vetor propulsão devem estar alinhados. Além disso, em cada junção o primer-vector e sua primeira derivada devem ser contínuas.

A partir de Lawden (1993) obtemos um sistema de doze equações com doze incógnitas, que expressam as condições necessárias para otimalidade, dadas a seguir.

Equação 1:

$$\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = T$$

ou $\Delta t_1 + \Delta t = T$ (4.16)

ou $\Delta t + \Delta t_2 = T$

ou $\Delta t = T$ dependendo do sub-problema escolhido.

Equação 2:

$$e_1 \cos(\theta_1 - \omega_1) = l_1 s_1 - 1 \tag{4.17}$$

Equação 3:

$$e \cos(\theta_1 - \omega) = l s_1 - 1 \tag{4.18}$$

Equação 4:

$$e_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \omega_1) = \left(l_1 s_1 - l_1^{1/2} z_1\right) \operatorname{tg} \phi_1 \tag{4.19}$$

Equação 5:

$$e \operatorname{sen}(\theta_1 - \omega) = \left(l s_1 - l^{1/2} z_1\right) \operatorname{tg} \phi_1 \tag{4.20}$$

Equação 6:

$$L_1 = L_2 \tag{4.21}$$

Equação 7:

$$M_1 = M_2 - \frac{3\mu^{1/2}\alpha e^2 t}{l^{3/2}\left(1-e^2\right)} \tag{4.22}$$

Equação 8:

$$N_1 = N_2 + \frac{3\mu^{1/2}\alpha e t}{l^{3/2}\left(1-e^2\right)} \tag{4.23}$$

Equação 9:

$$e_2 \cos\left(\theta_2 - \omega_2\right) = l_2 s_2 - 1 \tag{4.24}$$

Equação 10:

$$e\cos\left(\theta_2 - \omega\right) = l s_2 - 1 \tag{4.25}$$

Equação 11:

$$e_2 \operatorname{sen}\left(\theta_2 - \omega_2\right) = \left(l_2 s_2 - l_2^{1/2} z_2\right)\operatorname{tg}\phi_2 \tag{4.26}$$

Equação 12:

$$e\operatorname{sen}\left(\theta_2 - \omega\right) = \left(l s_2 - l^{1/2} z_2\right)\operatorname{tg}\phi_2 \tag{4.27}$$

Onde:

$$L_1 = \left(z_1 - \frac{s_1}{z_1} \right) \operatorname{sen} \phi_1 - \frac{e\ \alpha}{l^2\ s_1\ z_1} \tag{4.28}$$

$$L_2 = \left(z_2 - \frac{s_2}{z_2} \right) \operatorname{sen} \phi_2 - \frac{e\ \alpha}{l^2\ s_2\ z_2} \tag{4.29}$$

$$M_1 = \cos(\theta_1 - \omega - \phi_1) + \frac{1}{l^{1/2}\ z_1} \cos(\theta_1 - \omega) \cos\phi_1 + \alpha \left\{ \frac{\operatorname{cotg}(\theta_1 - \omega)}{l^{3/2}\ s_1\ z_1} + \frac{1}{1 - e^2} \left[\frac{2e}{l s_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \omega)} - \operatorname{cotg}(\theta_1 - \omega) \right] \right\} \tag{4.30}$$

$$M_2 = \cos(\theta_2 - \omega - \phi_2) + \frac{1}{l^{1/2}\ z_2} \cos(\theta_2 - \omega) \cos\phi_2 + \alpha \left\{ \frac{\operatorname{cotg}(\theta_2 - \omega)}{l^{3/2}\ s_2\ z_2} + \frac{1}{1 - e^2} \left[\frac{2\,e}{l s_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \omega)} - \operatorname{cotg}(\theta_2 - \omega) \right] \right\} \tag{4.31}$$

$$N_1 = \cos\phi_1 \left(1 + \frac{l s_1 + 1}{l^{1/2}\ z_1} \right) + \alpha \left\{ \frac{l s_1 + 1}{l^{3/2}\ s_1\ z_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \omega)} + \frac{1}{1 - e^2} \left[e \operatorname{cotg}(\theta_1 - \omega) - \frac{2}{l s_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \omega)} \right] \right\} \tag{4.32}$$

$$N_2 = \cos\phi_2 \left(1 + \frac{l s_2 + 1}{l^{1/2}\ z_2} \right) + \alpha \left\{ \frac{l s_2 + 1}{l^{3/2}\ s_2\ z_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \omega)} + \frac{1}{1 - e^2} \left[e \operatorname{cotg}(\theta_2 - \omega) - \frac{2}{l s_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \omega)} \right] \right\} \tag{4.33}$$

Tendo calculado os parâmetros s_1, θ_1, z_1, ϕ_1, s_2, θ_2, z_2, ϕ_2, l, e, ω e α, temos ainda de Lawden (1993) que estes parâmetros devem satisfazer as seguintes inequações para que a velocidade característica para a manobra seja um mínimo local:

$$|z_1| \geq \frac{\left|C r_1^{\,2} - \operatorname{sen}\phi_1\right|}{r_1^{1/2}\,|\operatorname{sen}\phi_1|\sqrt{\left(1 - 3\operatorname{sen}^2\phi_1\right)}} \tag{4.34}$$

$$|z_2| \geq \frac{\left|C r_2^{\,2} - \operatorname{sen}\phi_2\right|}{r_2^{1/2}\,|\operatorname{sen}\phi_2|\sqrt{\left(1 - 3\operatorname{sen}^2\phi_2\right)}} \tag{4.35}$$

Se estas condições não forem satisfeitas temos, segundo Lawden (1993), que a solução obtida pode ser apenas a solução ótima para o caso bi-impulsivo sendo provável que existam soluções mais econômicas para três ou mais impulsos. Lawden ainda afirma, que a não satisfação dessas condições de fato ocorrem. Como o escopo deste trabalho é limitado a manobras bi-impulsivas, a busca dessas manobras mais econômicas não é feita neste trabalho.

4.3- IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

Para implementação do método foi necessário encontrar a solução do sistema de equações não lineares apresentadas no item anterior. Para isto, foram utilizadas as rotinas encontradas em Press et al. (1992) que utilizam o método de Newton-Raphson para sistemas de equações não lineares, que será resumidamente apresentado a seguir. Devemos salientar que a solução deste sistema de equações não foi apresentada por Lawden sendo, portanto, uma contribuição deste trabalho.

4.3.1- DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Segundo Press et al. (1992), o método Newton-Raphon pode ser descrito resumidamente da seguinte forma:

Considere o caso bi-dimensional, onde queremos resolver simultaneamente

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

As funções f e g são arbitrárias e apresentam cada uma linhas de contorno zero (local onde a função torna-se zero) que dividem o plano (x,y) em regiões positivas ou negativas. Estas linhas de contorno zero representam as regiões de interesse. As soluções que procuramos são aqueles pontos, se existirem, que são comuns às linhas de contorno zero de f e g. Com o objetivo de encontrar todos os pontos comuns, que são as soluções das nossas equações não lineares, devemos fazer um mapa completo das linhas de contorno zero de ambas as funções (Figura 4.2).

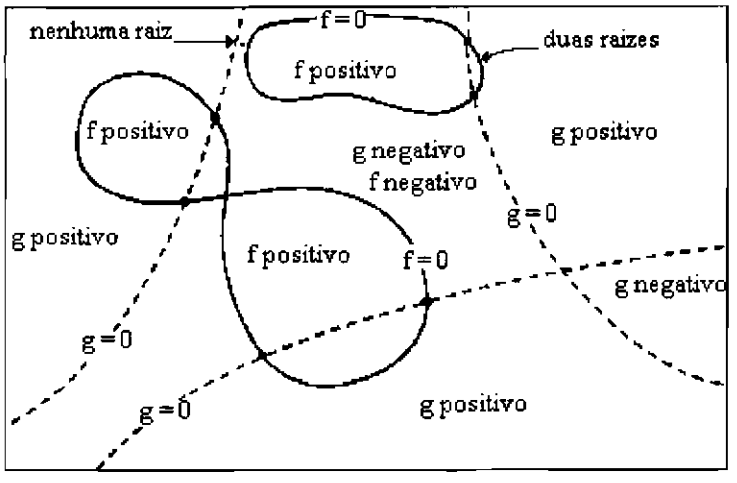


Fig. 4.2- Solução de Duas Equações não Lineares.
FONTE: Press et al. (1992), p. 373.

Quando temos mais de duas dimensões, devemos achar pontos comuns para as N superfícies de contorno zero, portanto podemos ver que neste caso a solução do problema torna-se praticamente impossível sem o conhecimento prévio de informações adicionais específicas do problema, como por exemplo: Espera-se uma única solução? Aproximadamente onde?

O método multidimensional simples de Newton-Raphson fornece um meio eficiente de convergência para as raízes das equações se forem fornecidos valores iniciais suficientemente próximos das raízes. O problema típico apresenta N funções para serem zeradas, envolvendo N variáveis x_i, $i = 1,2,\ldots,N$.

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{4.36}$$

Iremos chamar $\bar{x}$ como o vetor dos valores x_i e $\bar{F}$ o vetor das funções F_i. Na vizinhança de $\bar{x}$, cada função F_i pode ser expandida em séries de Taylor:

$$F_i(\bar{x} + \delta\bar{x}) = F_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + 0(\delta\bar{x}^2) \tag{4.37}$$

A matriz de derivadas parciais mostrada na Equação 4.37 é chamada de matriz Jacobiana $\bar{J}$ dada por:

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \tag{4.38}$$

Em notação matricial a Equação 4.37 é dada por:

$$\bar{F}(\bar{x} + \delta\bar{x}) = \bar{F}(\bar{x}) + \bar{J}\,\delta\bar{x} + 0(\delta\bar{x}^2) \tag{4.39}$$

Desprezando os termos de ordem $\delta\bar{x}^2$ e maiores e fazendo $\bar{F}(\bar{x} + \delta\bar{x}) = 0$ obtemos um sistema de equações lineares para as correções $\delta\bar{x}$ que faz com que cada função se aproxime de zero simultaneamente, dado por:

$$\bar{J}\,\delta\bar{x} = -\bar{F} \tag{4.40}$$

Resolvendo a equação matricial 4.40 e somando as correções $\delta\bar{x}$ ao vetor solução temos:

$$\bar{x}_{novo} = \bar{x}_{velho} + \delta\bar{x} \tag{4.41}$$

que gera um processo iterativo convergente. Em geral é recomendado checar se as funções e as variáveis convergem. Infelizmente, como já foi dito, este método pode não convergir se os valores iniciais não forem suficientemente próximos da solução. Dessa forma, utilizamos o método descrito em Press et al. (1992) pág. 376, para garantir a convergência a partir de uma gama maior de valores iniciais. Este método combina a rapidez do método de Newton-Raphson com a estratégia de convergência mostrada a seguir.

O método de Newton-Raphson utiliza como passo $\delta\bar{x}$ mas devemos decidir se este passo é aceitável. Para isto, uma estratégia razoável é obrigar que o passo diminua de $|\bar{F}|^2 = \bar{F}\,\bar{F}$, que é o mesmo que minimizar

$$f = \frac{1}{2}\bar{F}\,\bar{F} \tag{4.42}$$

onde $\frac{1}{2}$ é utilizado por conveniência.

Toda solução para (4.36) minimiza (4.42), mas podem haver mínimos locais de (4.42) que não são soluções para (4.36).

Para desenvolver uma estratégia melhor devemos notar que o passo do método de Newton $\delta\bar{x}$ tem uma direção descendente para f.

$$\nabla f\,\delta\bar{x} = \left(\bar{F}\,\bar{J}\right).\left(-\bar{J}^{-1}\,\bar{F}\right) = -\bar{F}\,\bar{F} < 0 \tag{4.43}$$

Assim, a estratégia a ser utilizada considera inicialmente o passo do método de Newton, e quando suficientemente próximo da solução utiliza uma convergência quadrática. Entretanto, devemos checar a cada iteração se o passo usado reduz f. Caso contrário devemos usar um passo mais próximo do passo do método de Newton até encontrarmos um passo aceitável. Dessa maneira, este método essencialmente minimiza f tomando o passo do método de Newton-Raphson.

4.3.2- ROTINAS UTILIZADAS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

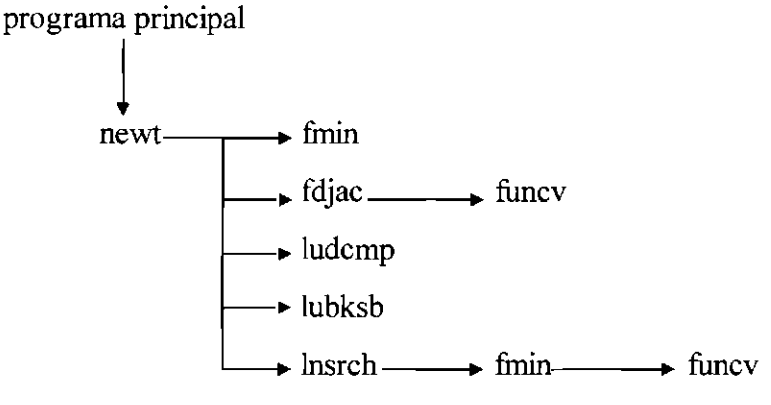
Todas as rotinas utilizadas na solução do problema são mostradas nos apêndices A, B e E.

Nos quatro casos analisados foram utilizadas as mesmas sub-rotinas extraídas de Press et al. (1992) e o mesmo programa principal,. mas com pequenas alterações devido aos diferentes vínculos de tempo utilizados em cada caso.

As sub-rotinas extraídas de Press et al. (1992) são listadas abaixo:

- **sub-rotina newt**: assume valores para $\bar{x}$ e para $\bar{F}$.
- **sub-rotina fmin**: altera o valor de $\bar{x}$ considerando a função $f = \bar{F}\,\bar{F}/2$.
- **sub-rotina fdjac**: calcula a matriz Jacobiana $\bar{J}$.
- **sub-rotina ludcmp e sub-rotina lubksb**: fornecem a solução para um sistema de equações lineares na forma $Ax = B$.
- **sub-rotina lnsrch**: dado um ponto n-dimensional x_{velho} o valor da função e o gradiente da função são avaliados a fim de encontrar um novo ponto x_{novo}.

A ordem de utilização das sub-rotinas é mostrada a seguir:



onde a sub-rotina funcv fornece o vetor formado pelas funções a serem zeradas.

4.3.3- APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO

O programa tem como entrada os seguintes parâmetros:

mi	=	constante gravitacional, que para a Terra vale 398600 km^3 / s^2;
tempo	=	tempo total gasto na manobra de transferência (s);
*teta*3	=	posição do ponto terminal final em coordenadas polares (rad);

Órbita Inicial:

*e*1	=	excentricidade;
*l*1	=	semi-latus rectum (km), obtido da expressão $l_1 = a_1(1 - e_1)$;
*w*1	=	longitude do periapside (rad);
*a*1	=	semi-eixo maior (km).

Órbita Final:

*e*2	=	excentricidade;
*l*2	=	semi-latus rectum (km), obtido da expressão $l_2 = a_2(1 - e_2)$;
*w*2	=	longitude do periapside (rad);
*a*2	=	semi-eixo maior (km).

Os casos 2 e 4 não necessitam que seja fornecida a posição do ponto terminal final pois este ponto é livre nestes casos.

A saída do programa apresenta os seguintes dados com relação a órbita de transferência:

e	=	excentricidade da órbita de transferência;
l	=	semi-latus rectum da órbita de transferência (km);

w	=	longitude do periapside da órbita de transferência (rad);
$s1$	=	$1/r1$;
$teta1$	=	local onde é aplicado o primeiro impulso (rad);
$z1$	=	sqrt[mi].z.sen fi é a componente da velocidade perpendicular ao impulso que não é afetada pela propulsão;
$fi1$	=	direção do primeiro impulso (rad);
$s2$	=	$1/r2$;
$teta2$	=	local onde é aplicado o segundo impulso (rad);
$z2$	=	sqrt[mi].z.sen fi é a componente da velocidade perpendicular ao impulso que não é afetada pela propulsão;
$fi2$	=	direção do segundo impulso (rad);
$alfa$	=	$l^2.C/e$ onde C é uma constante definida em Lawden (1963);
$Dv1$	=	variação de velocidade necessária no primeiro impulso (km/s);
$Dv2$	=	variação de velocidade necessária no segundo impulso (km/s);
Dvt	=	variação de velocidade total $Dv1 + Dv2$ (km/s);
$teta$	=	ângulo de transferência $teta2 - teta1$ (rad);
$Dt1$	=	tempo gasto na órbita inicial (s);
Dt	=	tempo gasto na órbita de transferência (s);
$Dt2$	=	tempo gasto na órbita final (s);
T	=	tempo total gasto na manobra de transferência $Dt1 + Dt + Dt2$ (s).

O caso 2 não apresenta o tempo gasto na órbita final pois o ponto terminal final não é especificado neste caso. O caso 3 não apresenta o tempo gasto na órbita inicial pois agora o ponto terminal inicial não é especificado. Já o caso 4 não apresenta o tempo gasto na órbita inicial nem o tempo gasto na órbita final, pois neste caso os pontos terminais não são especificados.

Como exemplo, apresentamos abaixo a folha original de resultados obtida com a execução do programa para um conjunto de dados de entrada.

PROGRAM TCLOSED1
*Dt*1+*Dt*+*Dt*2=*T*

Ultima atualização : 28/11/96

VALORES DE ENTRADA

mi	=	398600.00000000
tempo	=	5000.00000000
*teta*3	=	3.14150000

Órbita Inicial

*e*1	=	0.00000000
*l*1	=	7000.00000000
*w*1	=	0.00000000
*a*1	=	7000.00000000

Órbita Final

*e*2	=	0.00000000
*l*2	=	7100.00000000
*w*2	=	0.00000000
*a*2	=	7100.00000000

RESULTADOS

Obs.: Todos os ângulos estão em radianos.

a	=	7049.99591450
e	=	0.00708790
l	=	7049.64173410
w	=	1.09667780
*s*1	=	0.00014286
*teta*1	=	1.09557884
*z*1	=	-0.01523331
*fi*1	=	0.00000041
*s*2	=	0.00014085
*teta*2	=	4.23947576
*z*2	=	-0.01425885
*fi*2	=	0.00000049
alfa	=	-0.00011652
*Dv*1	=	0.02670980
*Dv*2	=	0.02661927
Dvt	=	0.05332907
teta	=	3.14389693
*Dt*1	=	1016.30028794
Dt	=	2943.37696449
*Dt*2	=	1040.25134136
T	=	4999.92859379

Erros absolutos na satisfação das equações :

-0.07140621
0.00000000
-0.00000378
-0.00000094
-0.00000873
0.00000000
0.00000481
-0.00000108
-0.00000961
0.00000000
0.01661991
0.07787145

4.4- RESULTADOS OBTIDOS

Neste item serão apresentados alguns resultados obtidos com o programa apresentado nos itens anteriores para os quatro casos considerados.

Os gráficos foram construídos em função da variação do tempo total gasto na manobra. Dessa maneira, cada ponto dos gráficos foi obtido por meio da execução do programa para um determinado tempo. Estes pontos foram unidos por meio de uma linha cheia formando assim uma curva que mostra o comportamento do elemento orbital em questão. Porém, nos casos onde os resultados obtidos não formam uma curva contínua, pois os pontos são distantes uns dos outros, decidimos não unir os pontos pois teríamos uma falsa interpolação do comportamento do elemento orbital, pois realizamos um estudo discretizado onde nem todo domínio foi analisado, portanto, a curva real pode conter particularidades que seriam assim desconsideradas.

4.4.1- CASO 1: PONTOS TERMINAIS FIXOS

Neste caso tomamos como exemplo a transferência de órbita que irá ser efetuada na ocasião do lançamento do satélite de sensoreamento remoto "China Brazil Earth Resources Satellites" (CBERS), em que o lançador colocara o satélite em uma órbita de injeção com semi-eixo maior de 7122,237 km, excentricidade de 0,0014161 e argumento do perigeu de 98,69375°, mas a órbita nominal do satélite deve apresentar semi-eixo maior de 7148,865 km, excentricidade de 0,0011 e argumento do perigeu de 90°. Portanto, se faz necessária a utilização de uma manobra de transferência, que deve ser executada com o mínimo gasto de combustível. Para efeito de testes do programa desenvolvido acrescentaremos vínculos de tempo nesta manobra. Consideraremos ainda, que o ponto terminal final forma um ângulo de 180° com relação à linha dos nodos.

Variando o tempo total gasto na manobra a partir de 1785 até 2500 segundos obtemos os resultados mostrados a seguir.

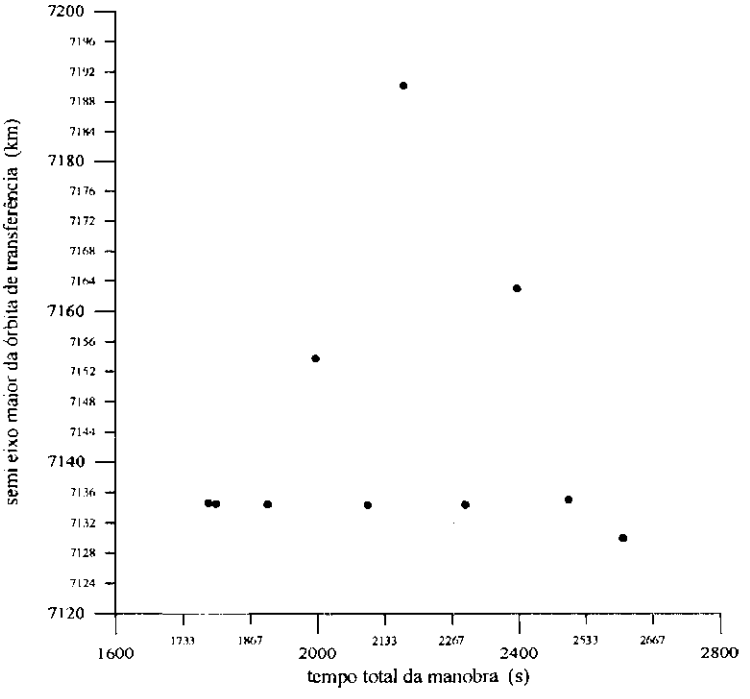


Fig. 4.3- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 1).

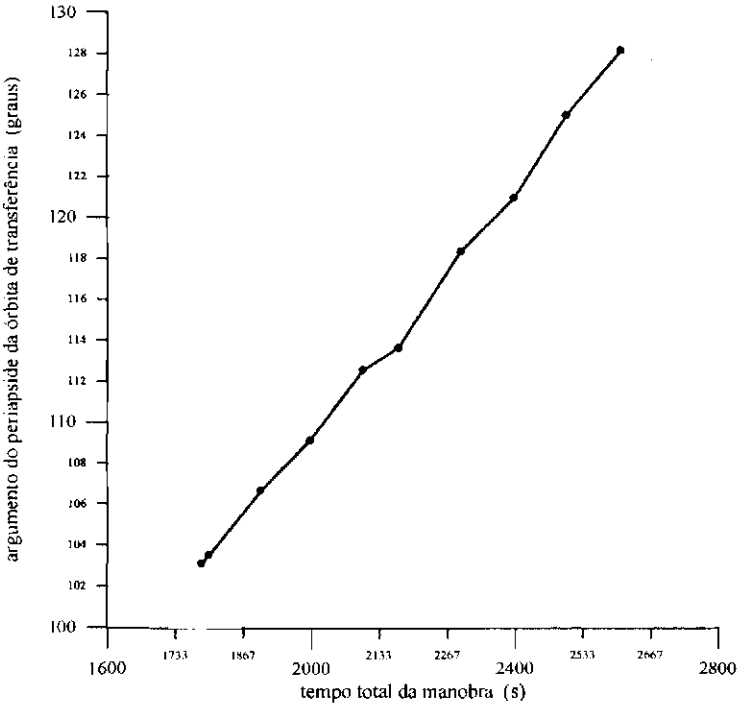


Fig. 4.4- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 1).

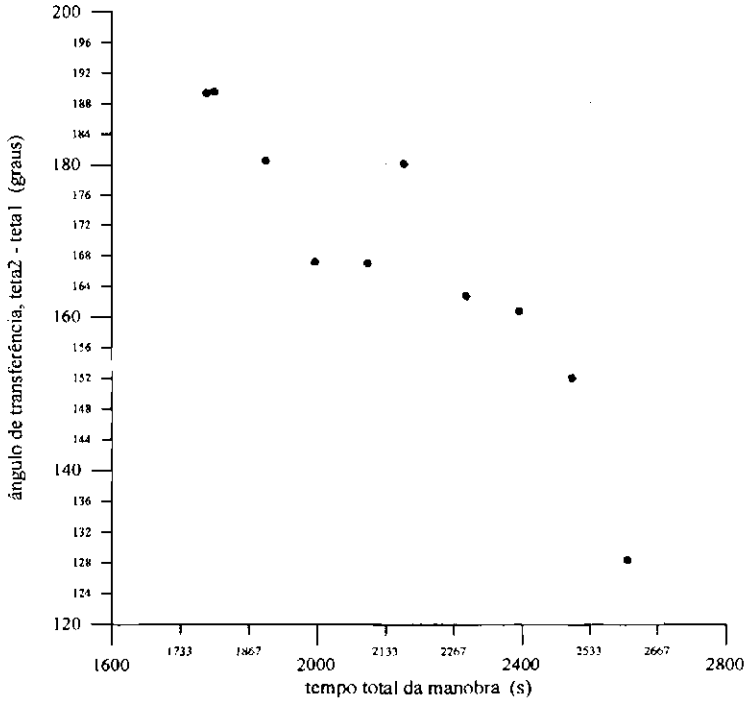


Fig. 4.5- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 1).

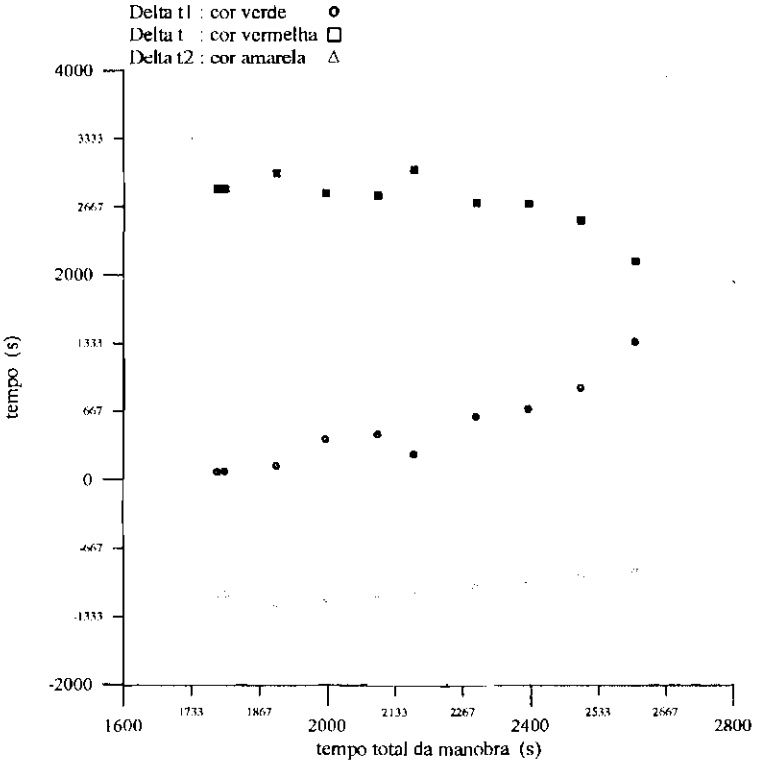


Fig. 4.6- Delta T vs. Tempo (Caso 1).

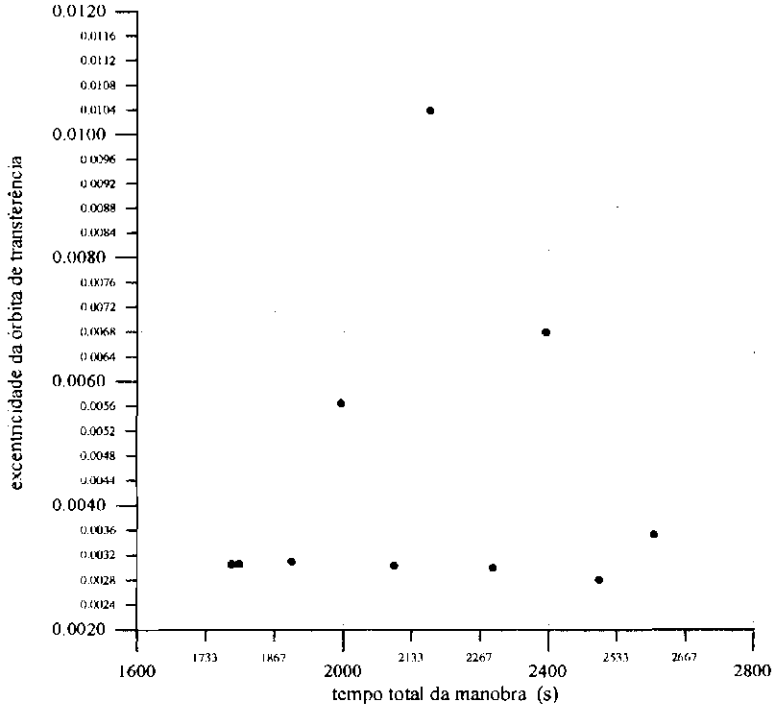


Fig. 4.7- Excentricidade vs. Tempo (Caso 1).

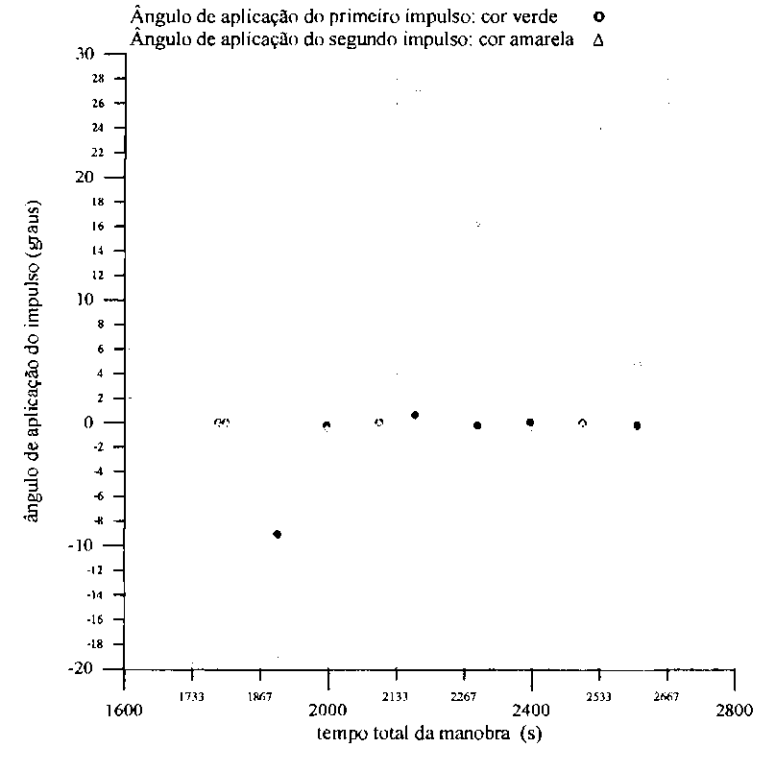


Fig. 4.8- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 1).

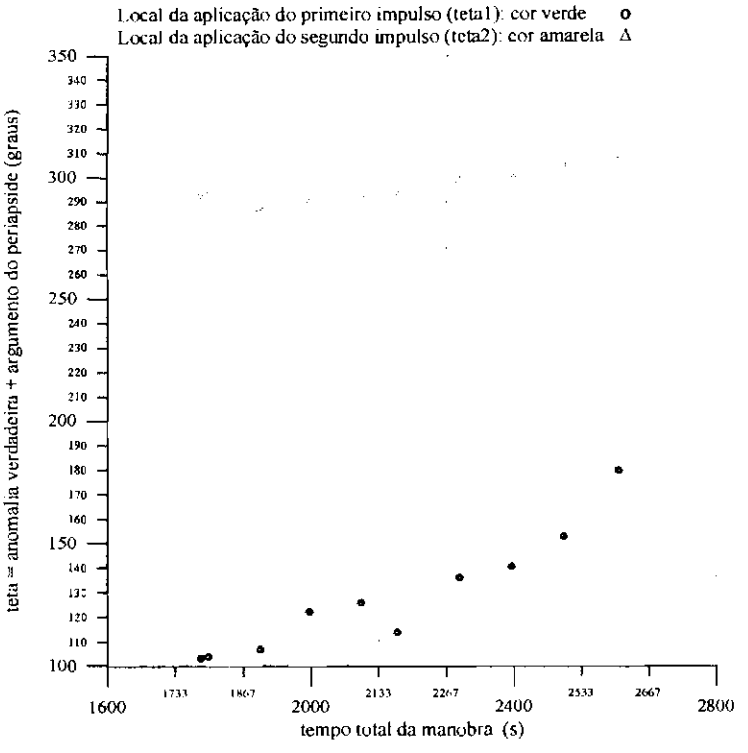


Fig. 4.9- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 1).

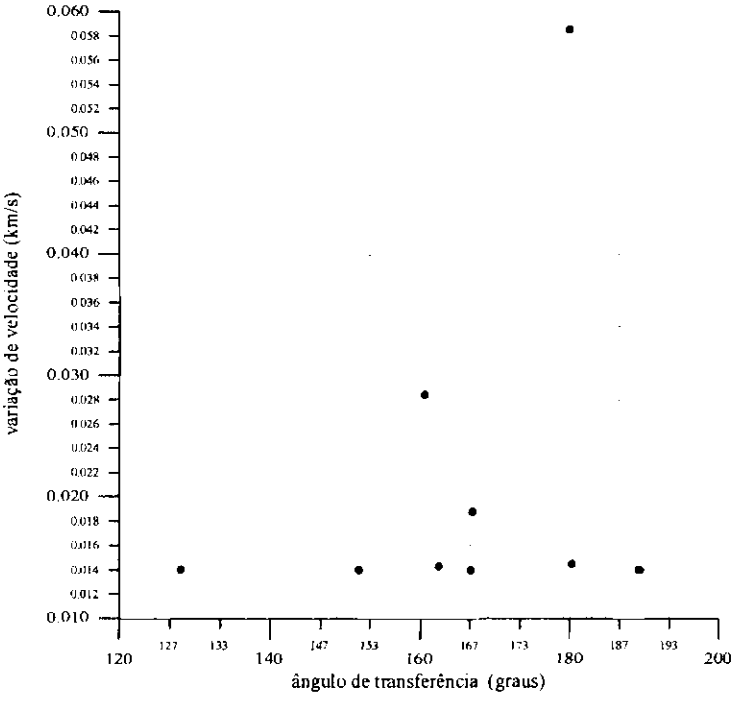


Fig. 4.10- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 1).

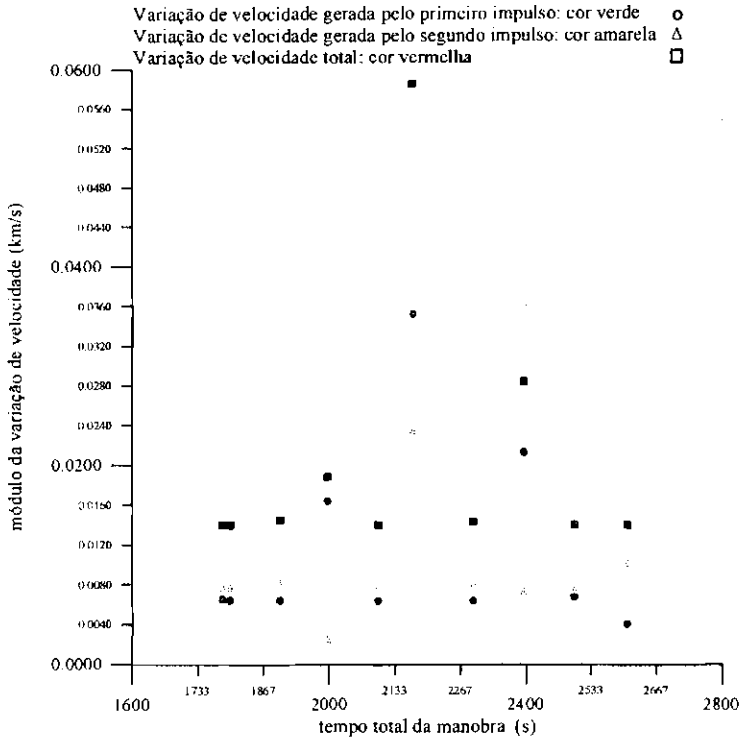


Fig. 4.11- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 1).

Podemos notar nos gráficos apresentados nas Figuras 4.3, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11, que os pontos são distantes uns dos outros, e dessa maneira é difícil traçar uma curva contínua. Uma tentativa de obter uma curva contínua poderia gerar resultados falsos. Entretanto, testes foram feitos para verificar se a órbita de transferência obtida como solução realmente existe e verificamos que os pontos de aplicação dos impulsos, a direção de aplicação dos impulsos e a magnitude dos impulsos fornecidos pelo método estão corretos, portanto as transferências existem. Uma possível explicação para isto é que a solução de um sistema de equações não lineares composto por doze equações não é trivial, ainda mais quando uma das equações deve satisfazer um vínculo tão complexo quanto o vínculo de tempo utilizado neste caso ($\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = T$). Portanto, as curvas podem conter singularidades ou tevem ter um comportamento de difícil compreensão.

4.4.2- CASO 2: PONTO TERMINAL INICIAL FIXO

Usamos novamente a manobra de transferência do caso anterior, mas agora o ponto terminal final é livre.

Órbita inicial:

$e_1 =$ 0,0014161;
$l_1 =$ 7122,2227175 km;
$\omega_1 =$ 1,7225309 rad;
$a_1 =$ 7122,2370000 km.

Órbita final:

$e_2 =$ 0,0011000;
$l_2 =$ 7148,8563499 km;
$\omega_2 =$ 1,5707963 rad;
$a_2 =$ 7148,8650000 km.

Variando o tempo total gasto na manobra a partir de 1800 até 3000 segundos obtemos os resultados mostrados a seguir.

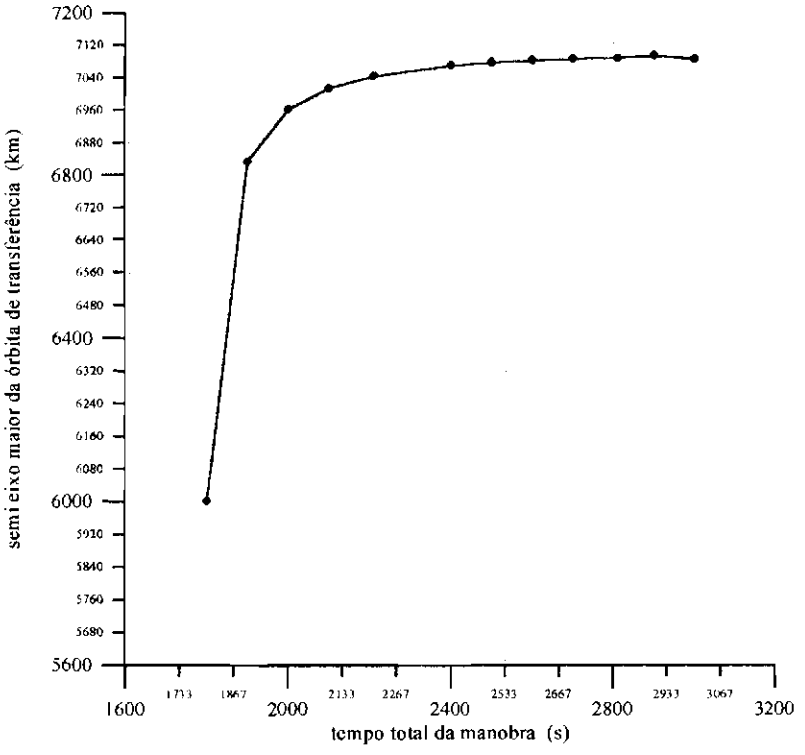


Fig. 4.12- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 2).

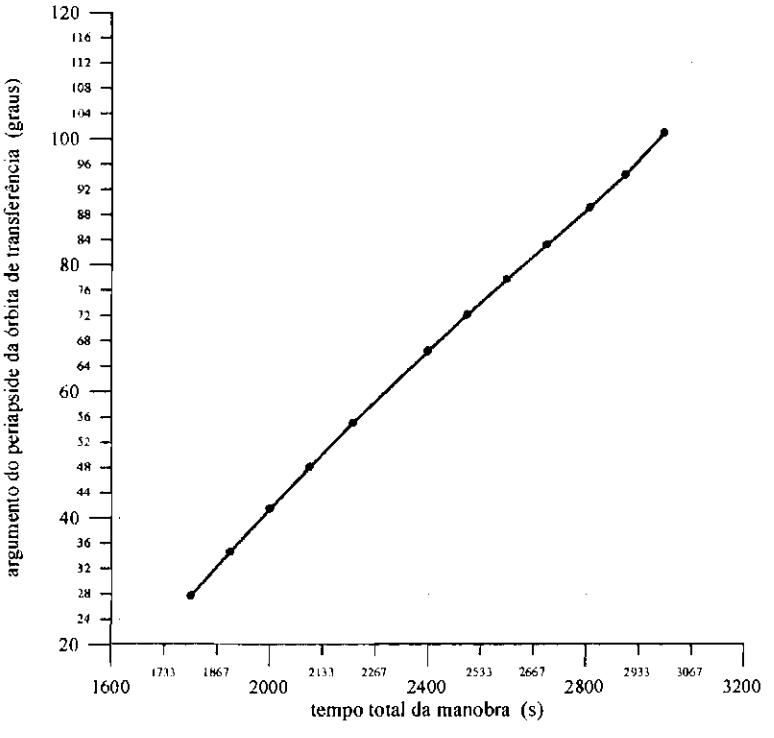


Fig. 4.13- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 2).

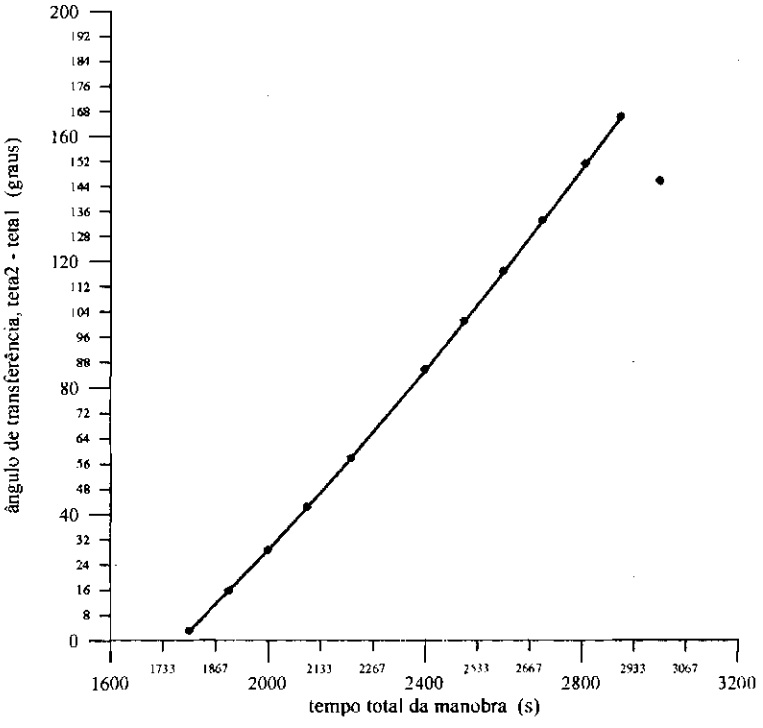


Fig. 4.14- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 2).

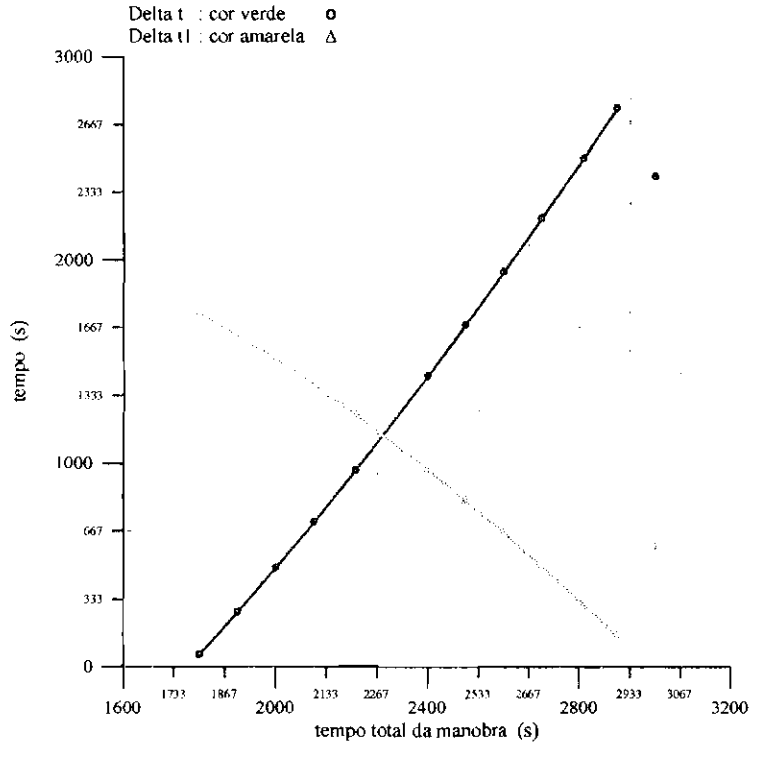


Fig. 4.15- Delta T vs. Tempo (Caso 2).

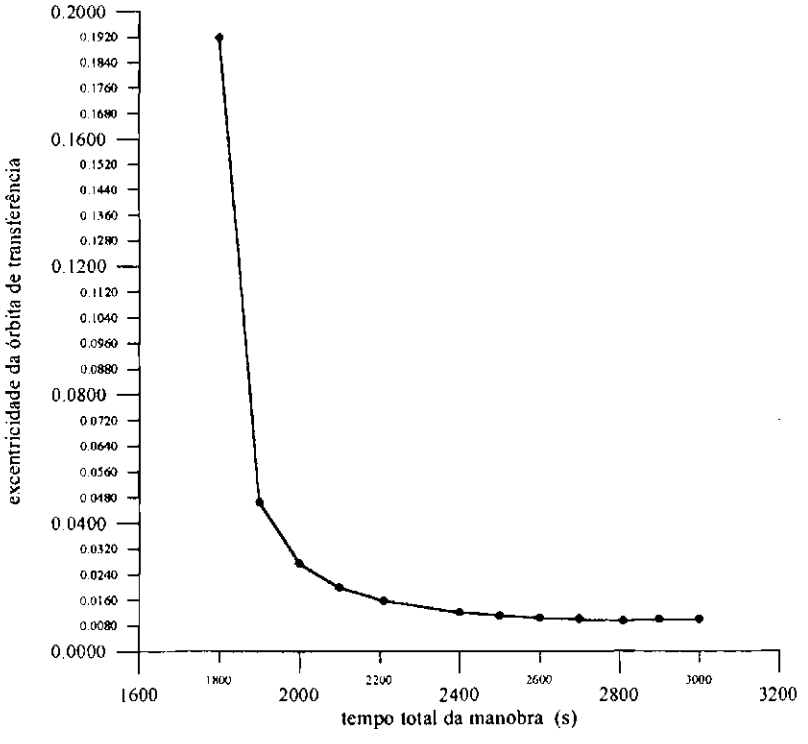


Fig. 4.16- Excentricidade vs. Tempo (Caso 2).

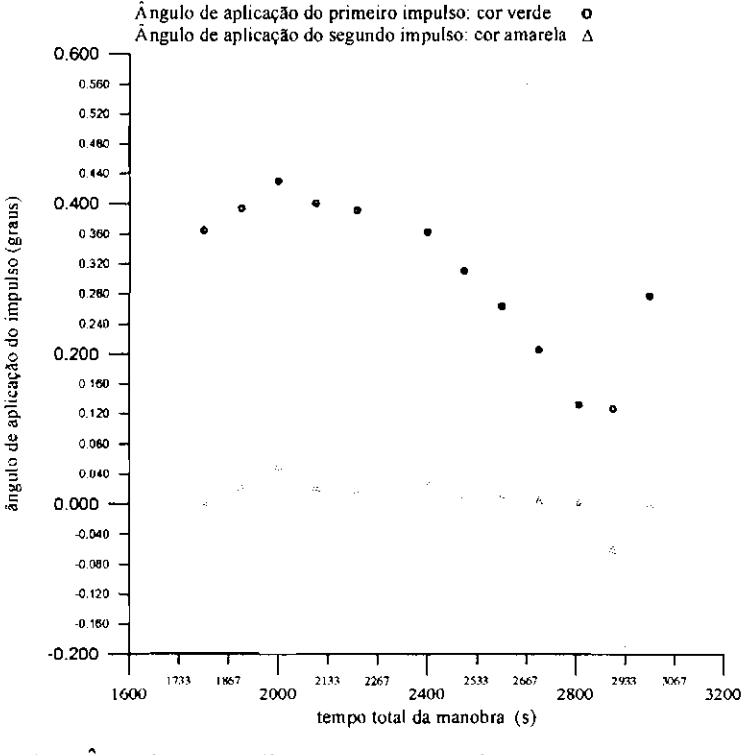


Fig. 4.17- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 2).

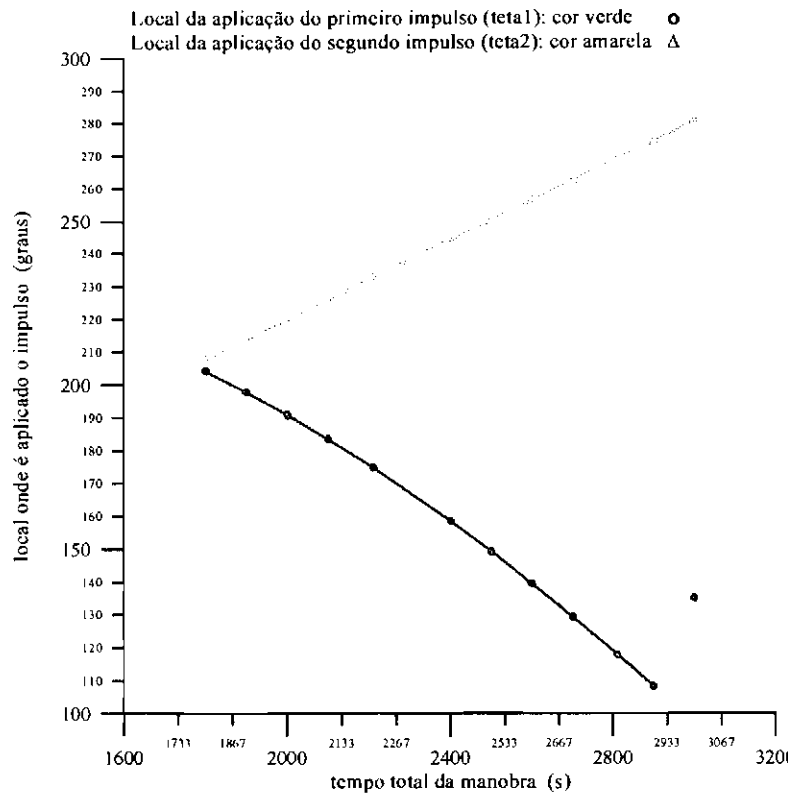


Fig. 4.18- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 2).

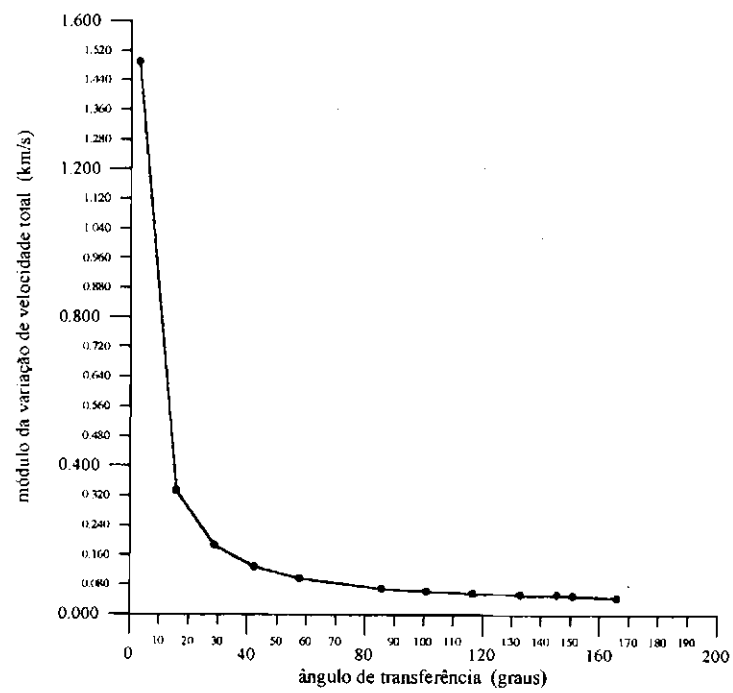


Fig. 4.19- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 2).

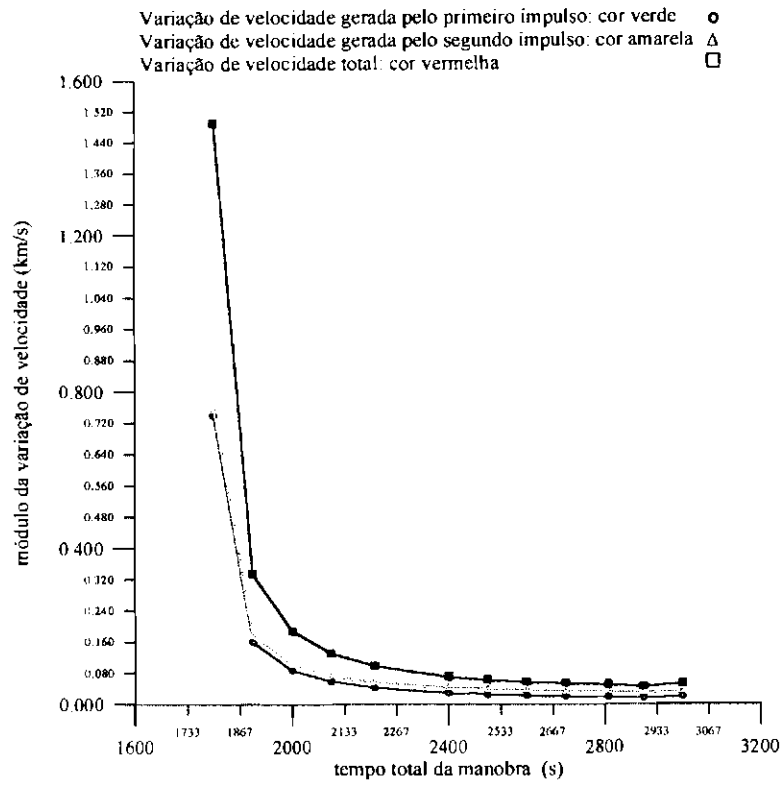


Fig. 4.20- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 2).

Para este caso, podemos notar que os resultados obtidos são mais próximos do esperado que no caso anterior, pois temos em todos os gráficos, com exceção do gráfico mostrado na Figura 4.17, curvas contínuas e de comportamento esperado. Isto deve-se ao fato de que o problema estudado neste caso é mais simples que o problema do caso anterior, já que o vínculo de tempo usado neste caso é dado por: $\Delta t_1 + \Delta t = T$. Dessa maneira, a solução do sistema de equações torna-se mais fácil.

Na Figura 4.12 temos o comportamento do semi-eixo maior da órbita de transferência com relação ao tempo. Podemos ver que o semi eixo maior diminui com a diminuição do tempo. Era esperado o contrário, porém, a Figura 4.16 mostra que a excentricidade aumenta com a diminuição do tempo, como era esperado. Dessa forma o fato do semi-eixo maior diminuir com a diminuição do tempo não apresenta nenhuma irregularidade, sendo provocada provavelmente pelo arranjo geométrico da manobra.

A Figura 4.14 mostra o ângulo de transferência (arco percorrido pelo veículo espacial na órbita de transferência) com relação ao tempo. Verificamos que quanto menor o tempo menor é o ângulo de transferência, como era esperado. Porém, quando o ângulo de transferência aproxima-se de 180^{o} ocorre uma descontinuidade, sendo que logo após a esta descontinuidade, obtivemos resultados quando fixamos o tempo em 3000 segundos, e neste ponto podemos observar que o ângulo de transferência diminui e a variação de velocidade necessária, mostrada na Figura 4.20, sofre um pequeno aumento. Esta descontinuidade também aparece nas Figuras 4.15 e 4.18 e provavelmente deve-se ao fato de que existe uma descontinuidade quando o ângulo de transferência torna-se 180^{o}, ou então, que os valores iniciais utilizados estão longe demais da solução do problema e portanto não fazem o algoritmo convergir para a solução verdadeira.

Nas Figuras 4.19 e 4.20 temos a variação de velocidade necessária para realização da manobra com relação ao ângulo de transferência e com relação ao tempo respectivamente. Podemos observar na Figura 4.19 que quanto menor o tempo menor é o ângulo de transferência e portanto maior é a variação de velocidade necessária. O mesmo ocorre na Figura 4.20 que mostra a variação de velocidade gerada pelo primeiro e pelo segundo impulsos e também o módulo da variação de velocidade total, quanto menor o tempo maior é a magnitude dos impulsos aplicados, porém, como já foi dito anteriormente, para o tempo de 3000 segundos temos um pequeno aumento da variação da velocidade necessária pois este ponto foi obtido após a descontinuidade.

4.4.3- CASO 3: PONTO TERMINAL FINAL FIXO

Tomamos como exemplo a manobra de transferência entre as órbitas hipotéticas listadas abaixo.

Órbita inicial:

$e_1 =$ 0,100;
$l_1 =$ 6930,000 km;
$w_1 =$ 0,700 rad;
$a_1 =$ 7000,000 km.

Órbita final:

$e_2 =$ 0,300;
$l_2 =$ 6461,000 km;
$w_2 =$ 2,500 rad;
$a_2 =$ 7100,000 km.

Consideramos ainda que o ponto terminal final se encontra a um ângulo de 5,5 radianos com relação a linha dos nodos.

Neste caso as órbitas inicial e final não são coaxiais, porém também conseguimos obter resultados com a utilização do programa desenvolvido, como podemos observar nos resultados mostrados abaixo:

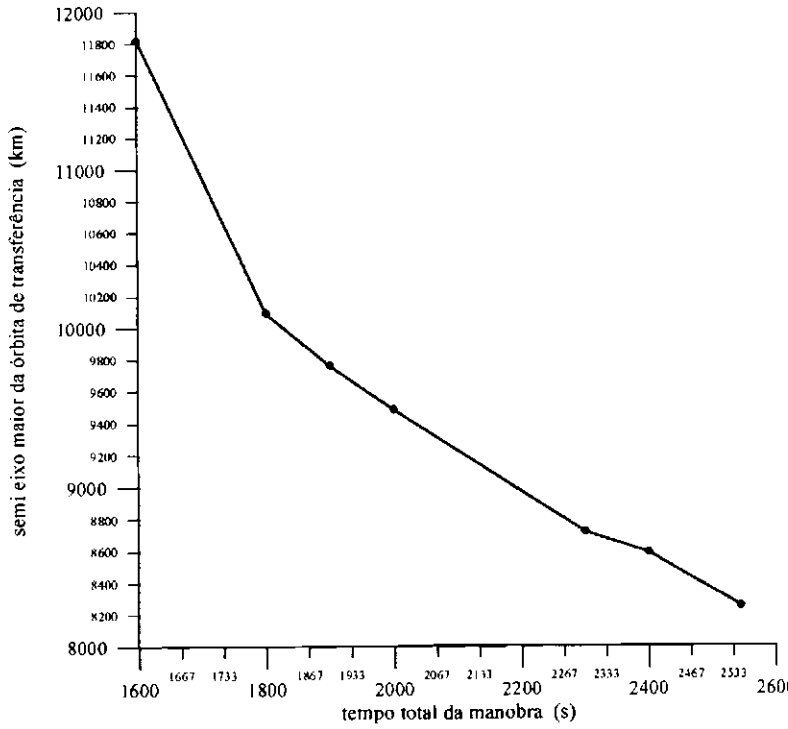


Fig. 4.21- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 3).

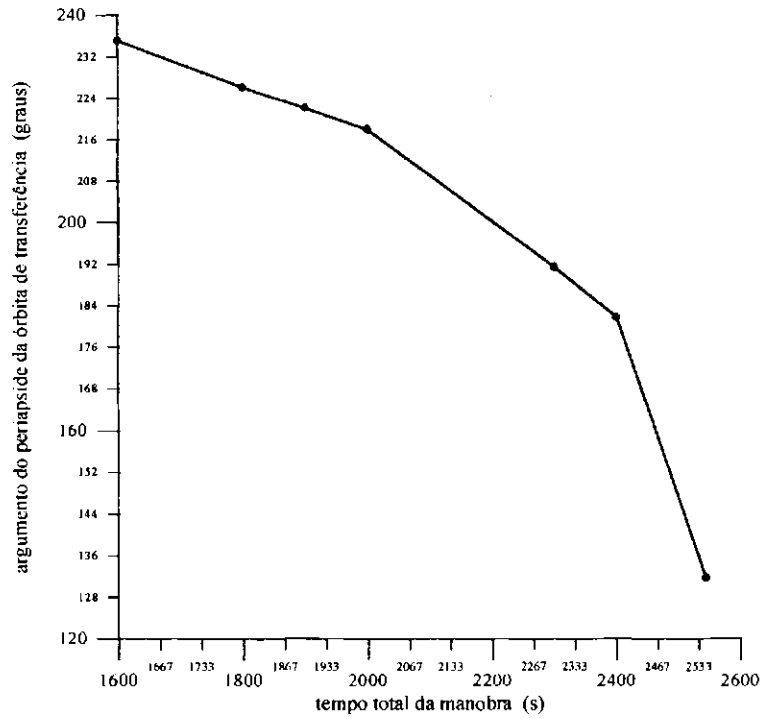


Fig. 4.22- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 3).

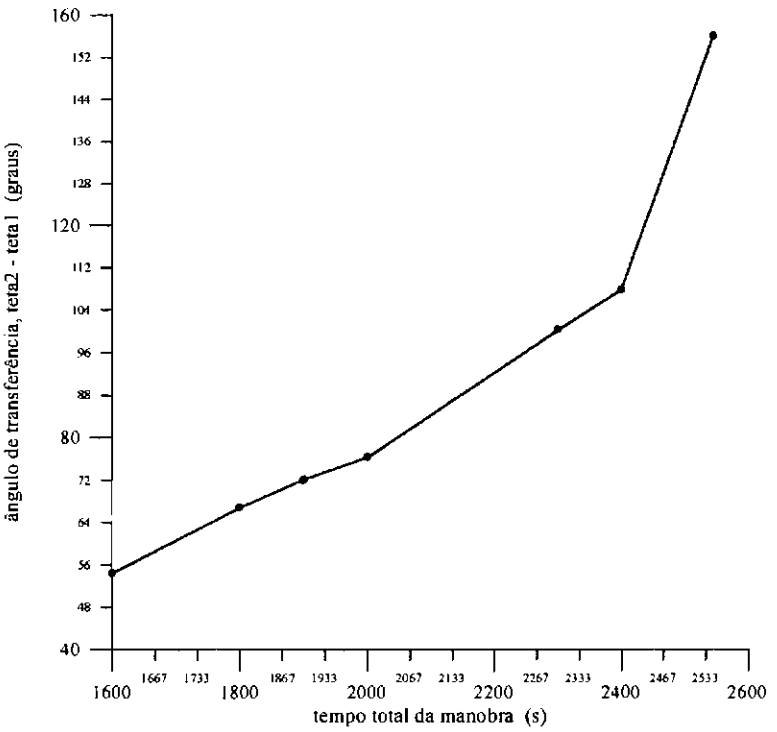


Fig. 4.23- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 3).

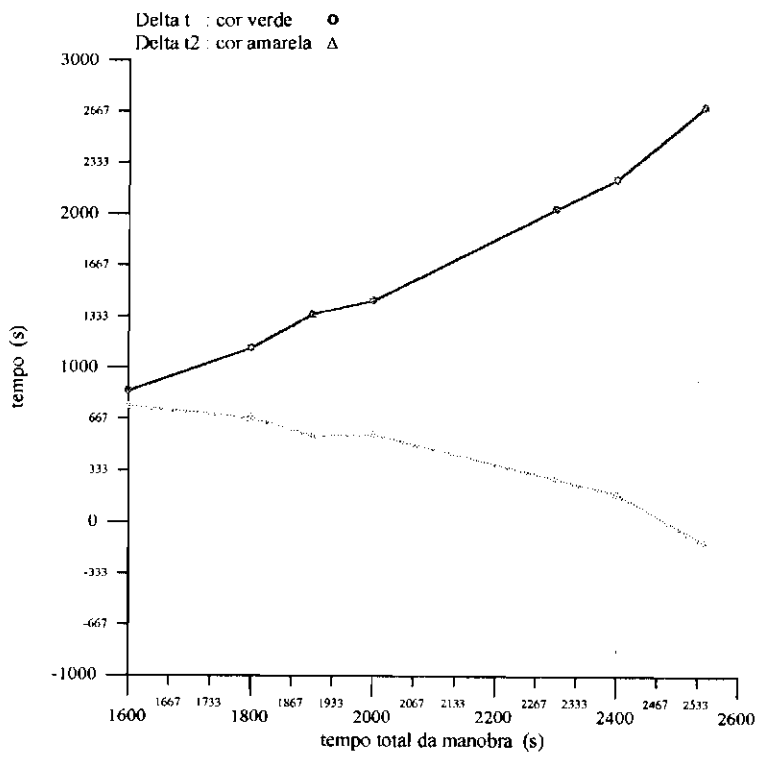


Fig. 4.24- Delta T vs. Tempo (Caso 3).

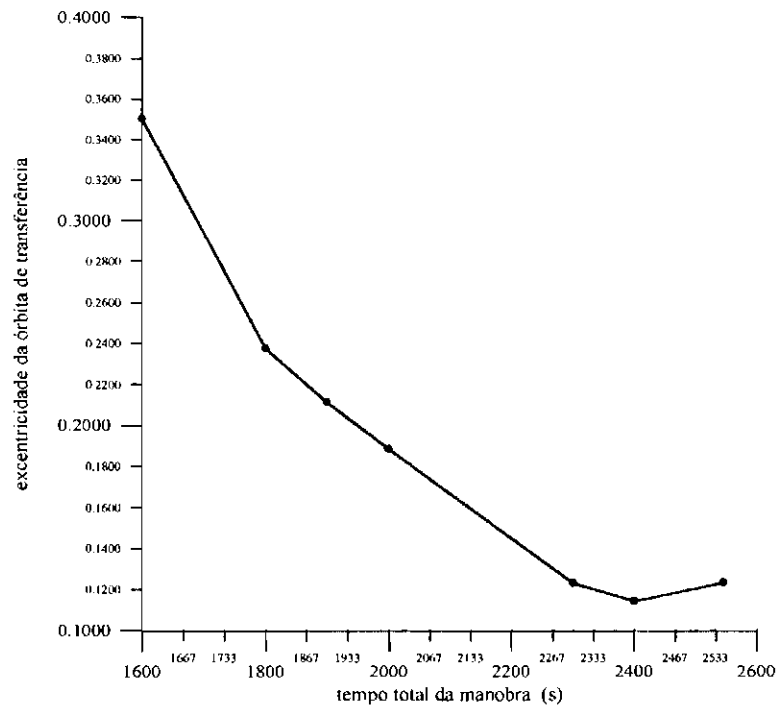


Fig. 4.25- Excentricidade vs. Tempo (Caso 3).

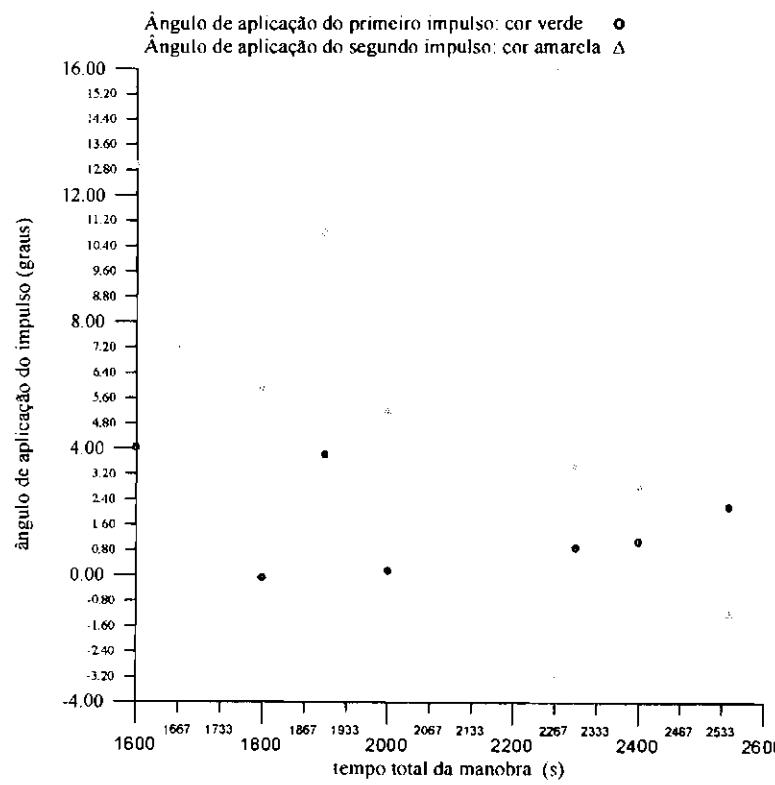


Fig. 4.26- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 3).

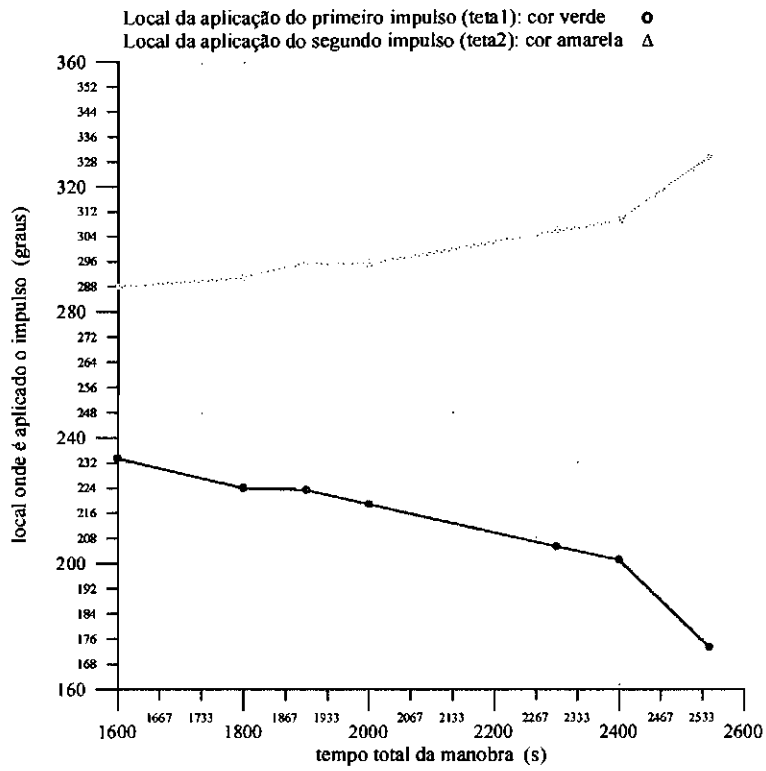


Fig. 4.27- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 3).

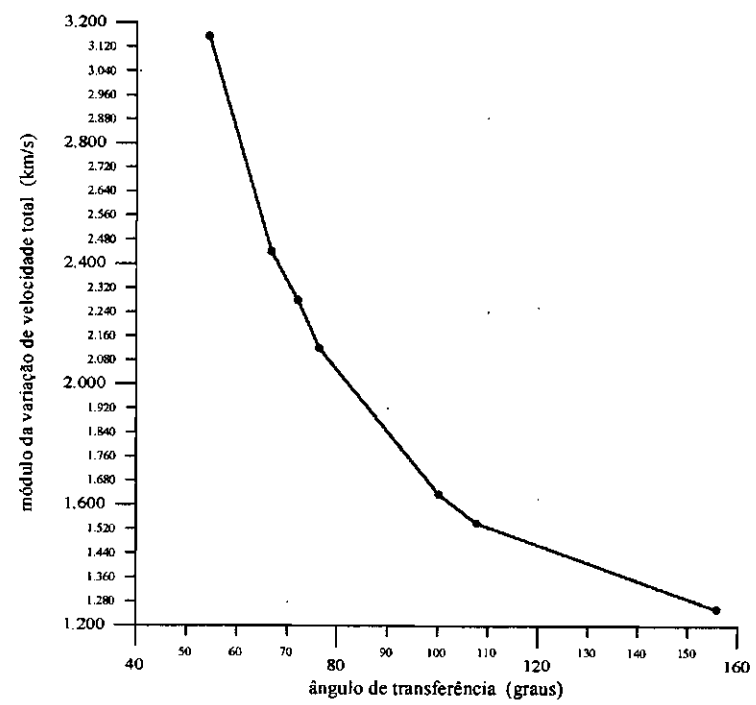


Fig. 4.28- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 3).

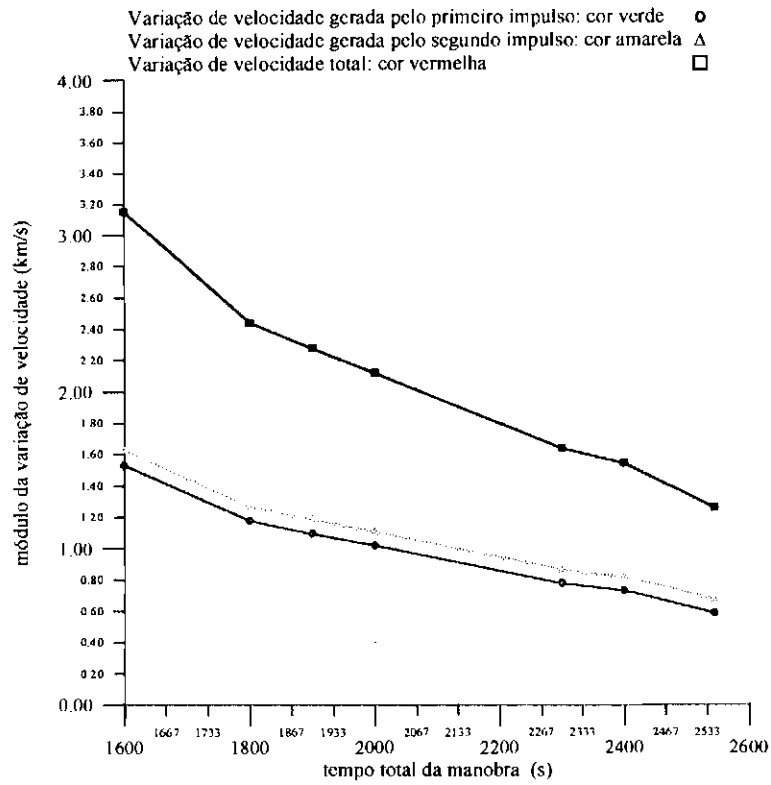


Fig. 4.29- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 3).

Neste caso, da mesma forma que no caso anterior, os resultados obtidos são satisfatórios. O vínculo de tempo utilizado ($\Delta t + \Delta t_2 = T$) torna o problema mais simples que o problema estudado no primeiro caso, portanto a solução do sistema de equações torna-se mais fácil.

Podemos observar que as curvas que mostram a variação da excentricidade da órbita de transferência, do ângulo de transferência e da variação de velocidade necessária (Figuras 4.25,4.23 e 4.29), comportam-se da mesma forma que no caso anterior, como era esperado. A curva da variação do semi-eixo maior, neste caso, mostra que o semi-eixo maior aumenta com a diminuição do tempo de transferência, o que também era esperado já que a excentricidade da órbita de transferência aumenta com a diminuição de tempo.

4.4.4- CASO 4: PONTOS TERMINAIS LIVRES

Agora tomaremos como exemplo a manobra de transferência entre as órbitas hipotéticas que se seguem.

Órbita inicial:

$e_1 =$ 0,100;
$l_1 =$ 6930,000 km;
$w_1 =$ 2,500 rad;
$a_1 =$ 7000,000 km.

Órbita final:

$e_2 =$ 0,300;
$l_2 =$ 6461,000 km;
$w_2 =$ 2,500 rad;
$a_2 =$ 7100,000 km.

As órbitas inicial e final são as mesmas do caso anterior, mas agora elas estão alinhadas e o vínculo de tempo é dado por $\Delta t = T$, pois os ponto terminais são livres.

Os gráficos obtidos para diversos valores de tempo total gasto na manobra são apresentados a seguir.

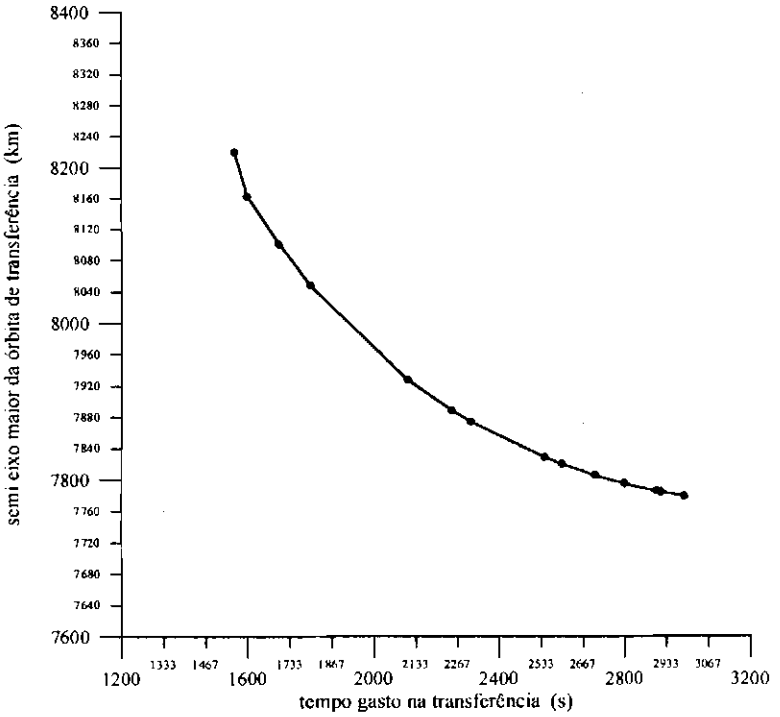


Fig. 4.30- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Caso 4).

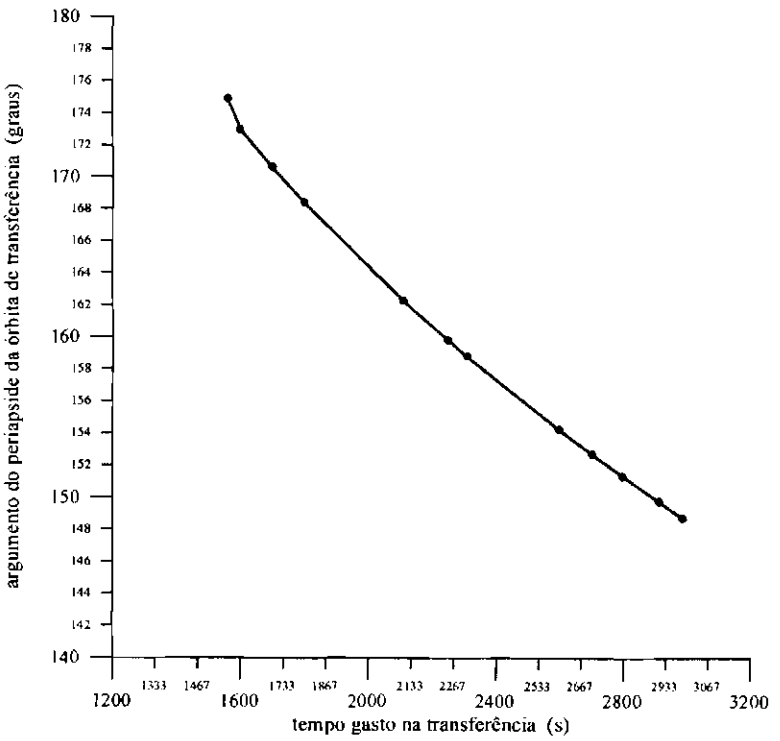


Fig. 4.31- Argumento do Periapside vs. Tempo (Caso 4).

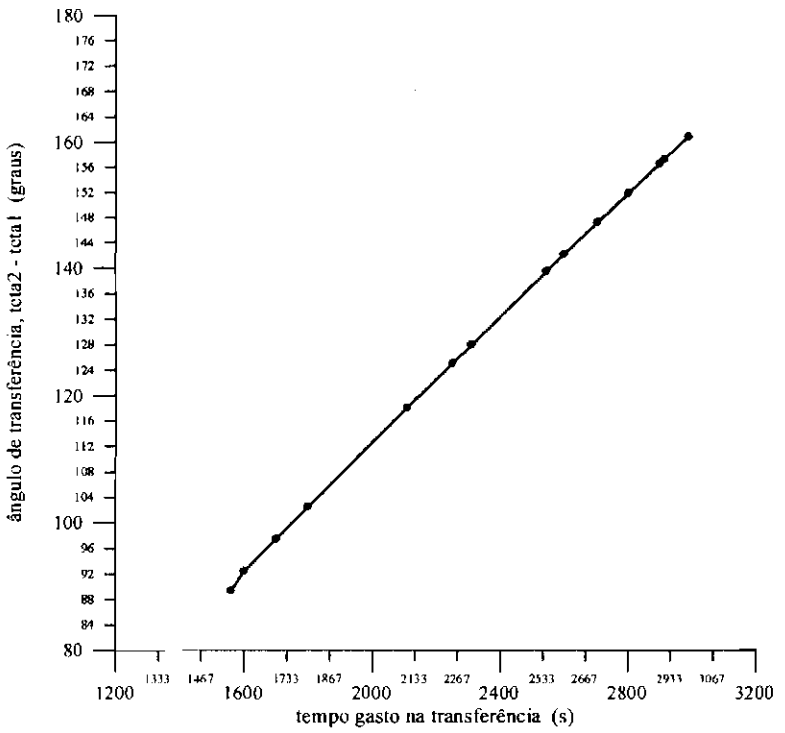


Fig. 4.32- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Caso 4).

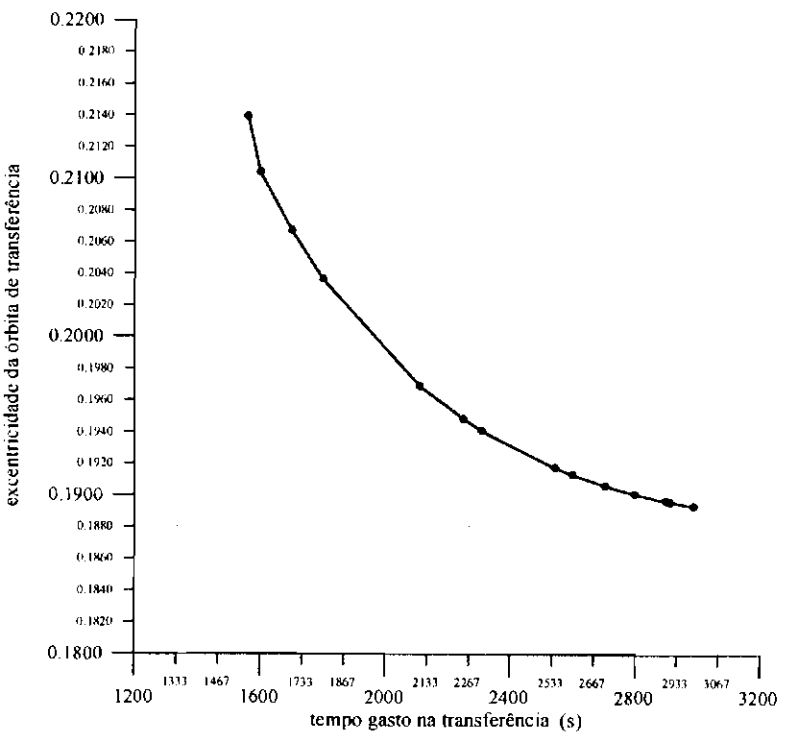


Fig. 4.33- Excentricidade vs. Tempo (Caso 4).

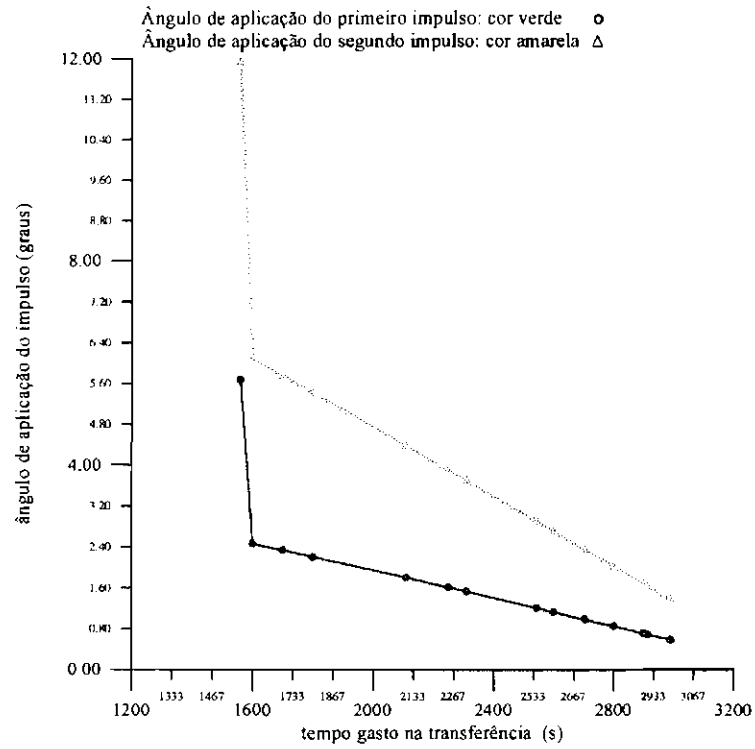


Fig. 4.34- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Caso 4).

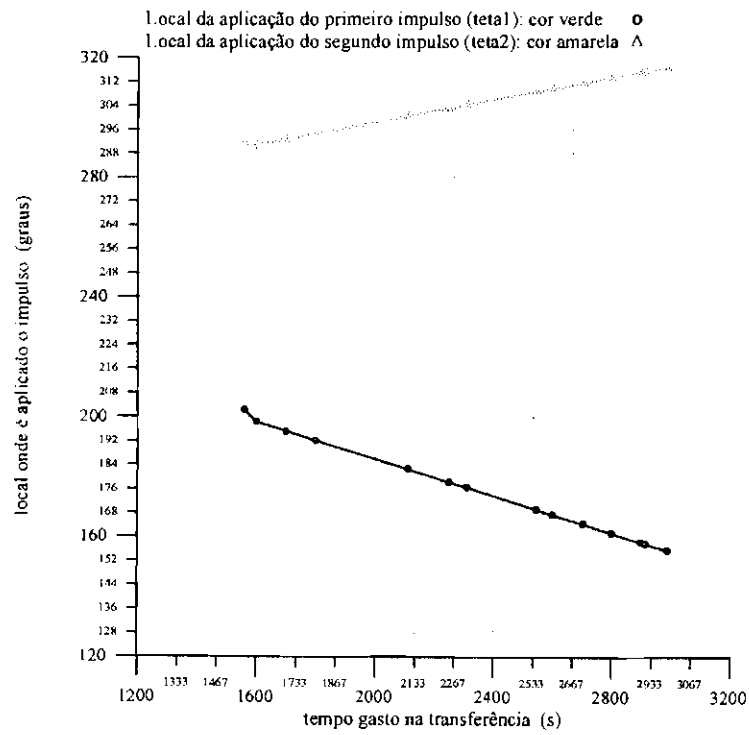


Fig. 4.35- Localização dos Impulsos vs. Tempo (Caso 4).

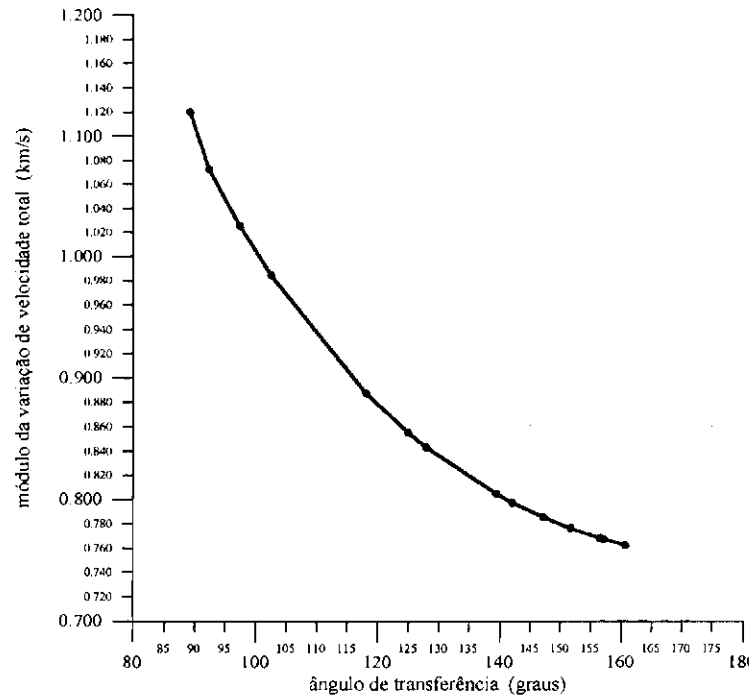


Fig. 4.36- Variação de Velocidade vs. Ângulo de Transferência (Caso 4).

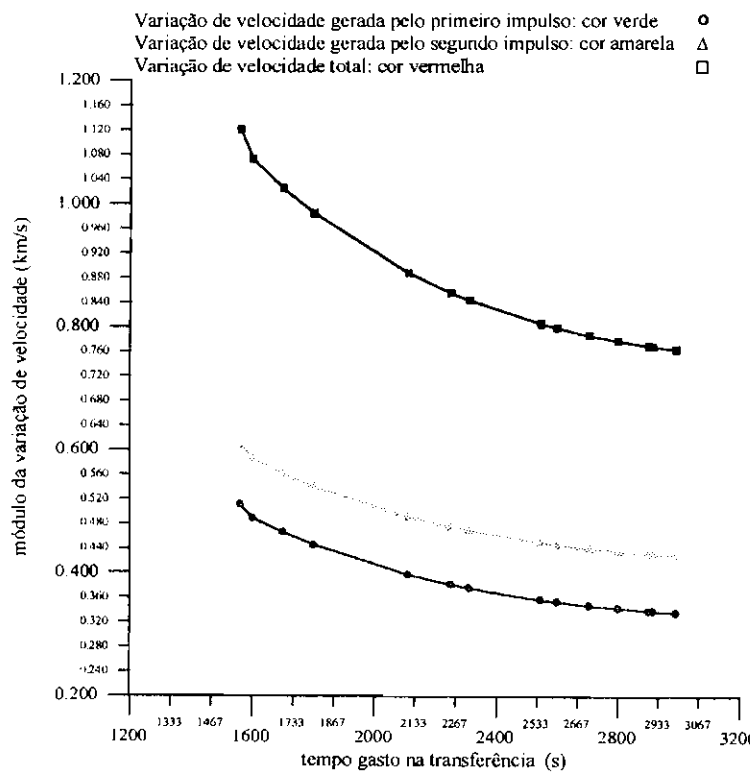


Fig. 4.37- Variação de Velocidade vs. Tempo (Caso 4).

4.5- COMENTÁRIOS

Nos gráficos mostrados podemos verificar que quanto maior for o tempo permitido menor é a variação de velocidade necessária, como era esperado pois quanto maior for o tempo permitido mais a direção dos impulsos aplicados se aproxima da direção do movimento. No caso em que as órbitas inicial e final são coaxiais (quando a linha dos semi eixos maiores das órbitas são alinhadas), quanto maior for o tempo permitido mais a transferência se aproxima da transferência do tipo Hohmann (onde o ângulo de transferência é de 180°) portanto menor será a variação de velocidade necessária, como podemos verificar na Figura 4.37. Porém deve-se ressaltar que quando o tempo fixado for superior ao tempo necessário para a transferência do tipo Hohmann a variação de velocidade necessária torna-se superior à de Hohmann, pois o ângulo de transferência torna-se maior que 180° e dessa forma a direção dos impulsos aplicados deixa de se aproximar da direção do movimento para se afastar.

Podemos verificar ainda que o quarto caso, onde o vínculo de tempo é dado por $\Delta t = T$, é o que apresenta melhores resultados pois a curva encontrada é contínua e se comporta da forma esperada. Isso se deve ao fato do vínculo de tempo ser o mais simples possível, portanto a resolução do sistema de equações mostrado anteriormente, se torna mais fácil. Já quando o vínculo de tempo é mais complexo a resolução do sistema também torna-se mais complexa. Podemos observar isso nos três primeiros casos. Quando o vínculo de tempo é dado por $\Delta t_1 + \Delta t = T$ ou por $\Delta t + \Delta t_2 = T$ os resultados são razoáveis, mas quando o vínculo de tempo é dado por $\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = T$, como foi proposto por Lawden (1993), o resultado é ruim e para alguns valores de tempo não se obteve solução, pois o algoritmo utilizado para a solução do sistema de equações não convergiu. Entretanto, isto também ocorreu nos outros casos, principalmente quando o tempo fixado foi muito pequeno ou muito grande, mas como o número de vínculos é menor nestes casos fica mais fácil ajustar o tempo de transferência para fazer o algoritmo convergir.

CAPÍTULO 5

TRANSFERÊNCIAS BI-IMPULSIVAS ÓTIMAS COM TEMPO FIXO ENTRE ÓRBITAS NÃO COPLANARES

Este capítulo utiliza como base as equações apresentadas por Eckel e Vinh (1984). Ele fornece a órbita de transferência entre duas órbitas elípticas não coplanares, que executa a transferência com mínimo consumo de combustível e tempo fixo ou com tempo mínimo e consumo de combustível fixo, porém só será tratado aqui o caso com tempo fixo. O método de cálculo é apresentado na literatura, porém nenhuma solução numérica é mostrada. Sendo a obtenção de soluções numéricas e as modificações necessárias para a obtenção destas soluções contribuições deste trabalho.

5.1- INTRODUÇÃO

Dadas duas órbitas O_1 e O_2 (Figura 5.1) em um campo central, deseja-se encontrar a órbita de transferência de mínimo consumo de combustível para um dado tempo de transferência pré determinado.

Especificaremos as órbitas envolvidas pelos elementos keplerianos dados por (órbita inicial: índice 1; órbita final: índice 2; órbita de transferência: sem índice):

- a = semi-eixo maior;
- e = excentricidade;
- p = semi-latus rectum;
- i = inclinação;
- ω = argumento do periapside;
- Ω = longitude do nodo ascendente;
- M = anomalia média;
- E = anomalia excêntrica.

Utilizamos ainda os seguintes elementos:

- λ = ângulo entre os planos das órbitas inicial e final;
- β_1 = anomalia verdadeira do nodo N medida no plano da órbita inicial;
- β_2 = anomalia verdadeira do nodo N medida no plano da órbita final;
- I_1 = localização do primeiro impulso;
- I_2 = localização do segundo impulso;
- Δ = ângulo de transferência, medido no plano da órbita de transferência;
- γ_1 = ângulo de mudança de plano gerado pelo primeiro impulso;
- γ_2 = ângulo de mudança de plano gerado pelo segundo impulso;
- V_1 = magnitude do primeiro impulso;
- V_2 = magnitude do segundo impulso;
- V = velocidade característica;
- T = tempo gasto na manobra;
- α_1 = anomalia verdadeira do ponto I_1 medida no plano da órbita inicial;
- α_2 = anomalia verdadeira do ponto I_2 medida no plano da órbita final;
- r_1 = distância radial do ponto I_1;
- r_2 = distância radial do ponto I_2;
- f_1 = anomalia verdadeira do ponto I_1 medida no plano da órbita de transf.;
- f_2 = anomalia verdadeira do ponto I_2 medida no plano da órbita de transf.;
- x_1 = componente radial do primeiro impulso;
- x_2 = componente radial do segundo impulso;
- y_1 = componente transversal do primeiro impulso;
- y_2 = componente transversal do segundo impulso;
- z_1 = componente do primeiro impulso ortogonal ao plano da órbita de transf.;
- z_2 = componente do segundo impulso ortogonal ao plano da órbita de transf.;
- h_i = componente horizontal de V_i.

Dependendo do local onde ocorre a interseção dos planos das órbitas temos quatro geometrias possíveis e dessa maneira quatro formas diferentes de calcular β_1, β_2 e λ como pode ser visto nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3, e 5.4.

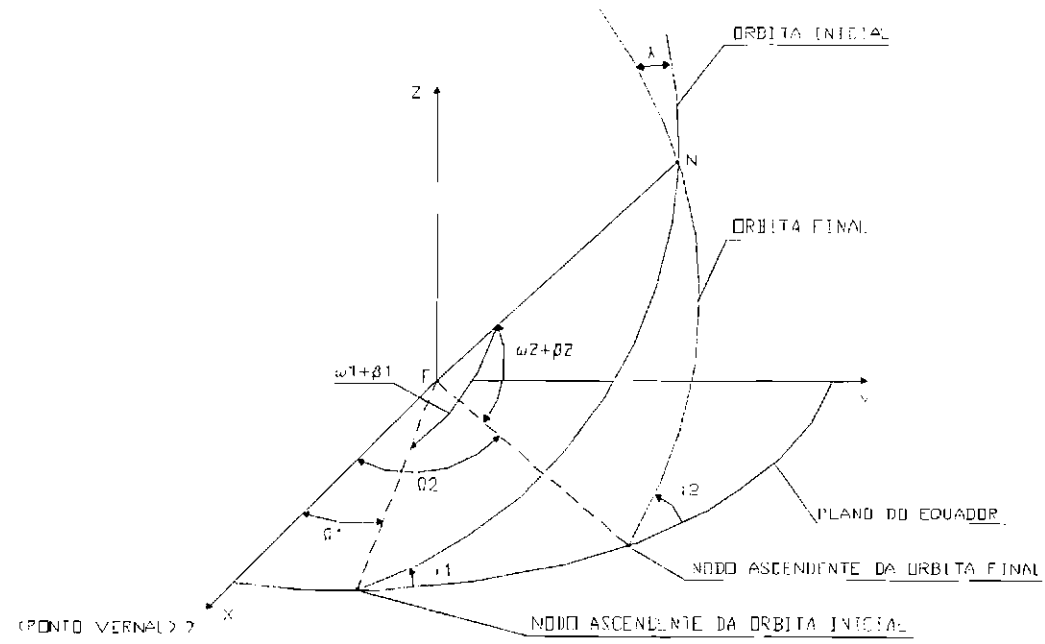


Fig. 5.1- Geometria da Manobra Quando $\Omega_2 > \Omega_1$ e $i_2 > i_1$.

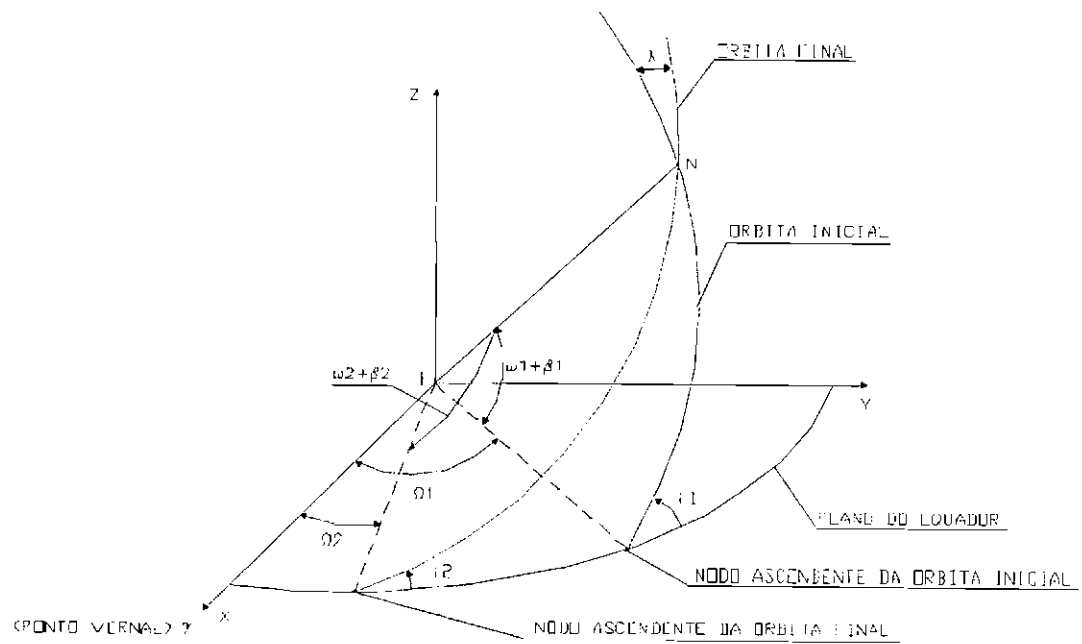


Fig. 5.2- Geometria da Manobra Quando $\Omega_1 > \Omega_2$ e $i_1 > i_2$.

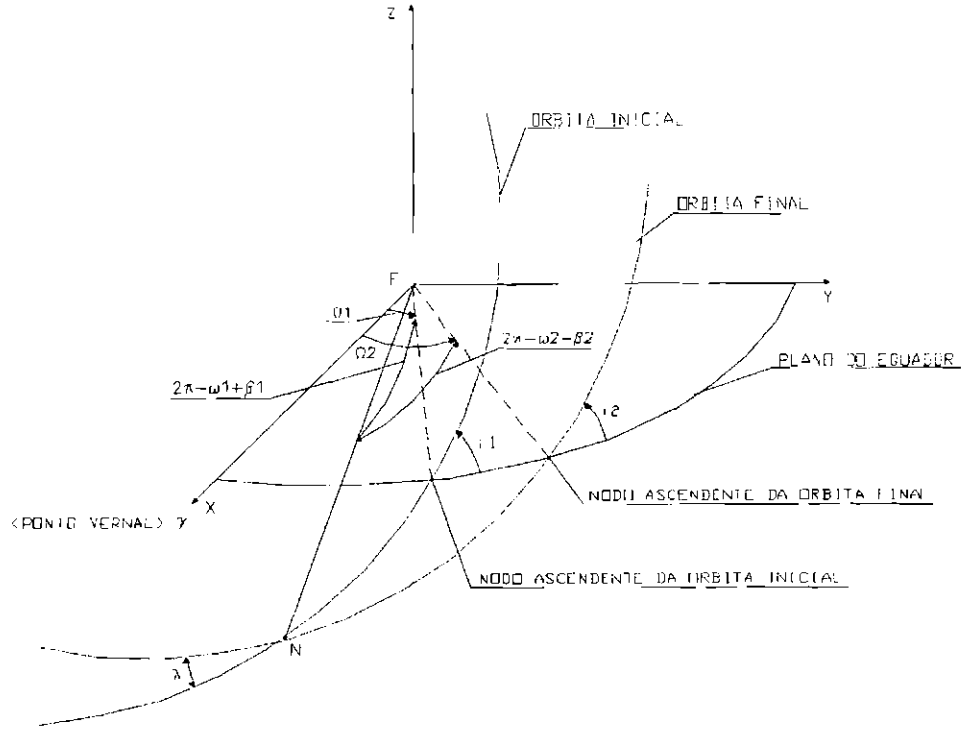


Fig. 5.3- Geometria da Manobra Quando $\Omega_2 > \Omega_1$ e $i_1 > i_2$.

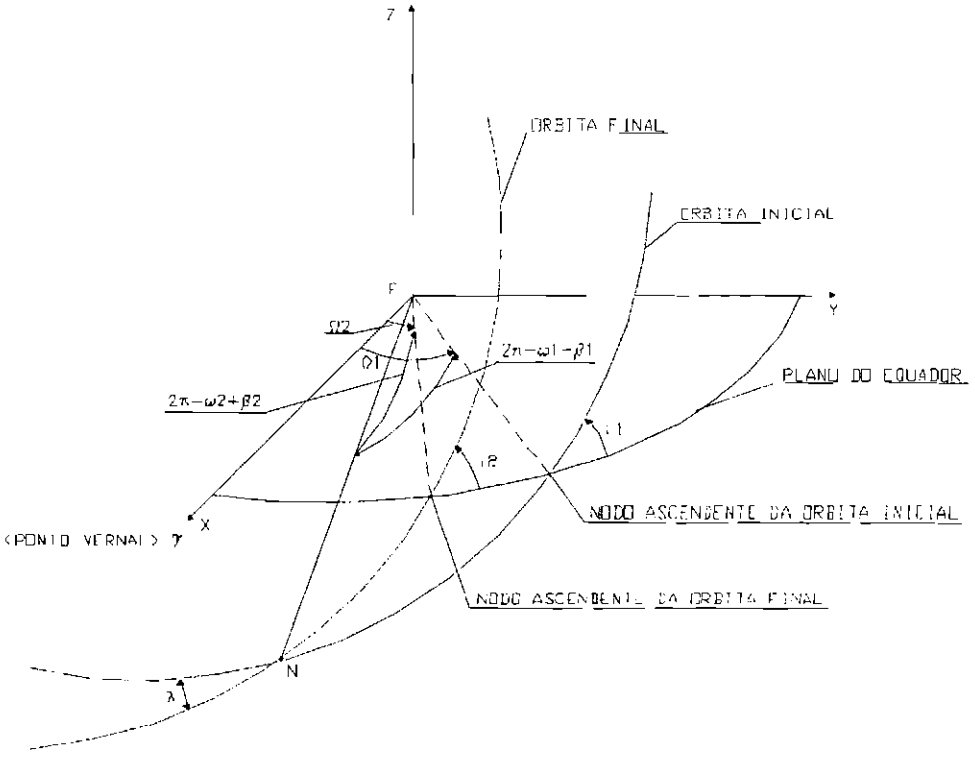


Fig. 5.4- Geometria da Manobra Quando $\Omega_1 > \Omega_2$ e $i_2 > i_1$.

Das Figuras anteriores obtemos as seguintes expressões para o cálculo de β_1, β_2 e λ:

$$\beta_1 = \text{arc tg}\left[\frac{\text{sen}(\Omega_2 - \Omega_1)\,\text{tg}(180^\circ - i_2)}{\text{sen}\, i_1 + \text{tg}(180^\circ - i_2)\cos i_1 \cos(\Omega_2 - \Omega_1)}\right] - \omega_1 \tag{5.1}$$

$$\beta_2 = \text{arc tg}\left[\frac{\text{sen}(\Omega_2 - \Omega_1)\,\text{tg}\, i_1}{\text{sen}\, i_2 + \text{tg}\, i_1 \cos(180^\circ - i_2)\cos(\Omega_2 - \Omega_i)}\right] - \omega_2 \tag{5.2}$$

$$\lambda = \text{arc sen}\left[\frac{\text{sen}(\Omega_2 - \Omega_1)\,\text{sen}\, i_1}{\text{sen}(\omega_2 + \beta 2)}\right] = \text{arc sen}\left[\frac{\text{sen}(\Omega_2 - \Omega_1)\,\text{sen}\, i_2}{\text{sen}(\omega_1 + \beta_1)}\right] \tag{5.3}$$

Entretanto, deve ser feita uma análise de quadrante pois o sinal de β_1, β_2 e λ pode variar quando consideramos diferentes geometrias.

Dependendo do local onde a manobra é realizada podemos ter ainda três casos possíveis. Quando a aplicação do primeiro impulso ocorre antes do ponto N e a aplicação do segundo impulso após o ponto N, como pode ser visto na Figura 5.2, o valor do ângulo de transferência Δ pode ser calculado a partir do triângulo esférico mostrado na Figura 5.6.

Quando os dois impulsos são aplicados após o ponto N, como pode ser visto na Figura 5.4, o valor do ângulo de transferência Δ pode ser calculado a partir do triângulo esférico mostrado na Figura 5.8.

Quando os dois impulsos são aplicados antes do ponto N, como pode ser visto na Figura 5.6, o valor do ângulo de transferência Δ pode ser calculado a partir do triângulo esférico mostrado na Figura 5.10.

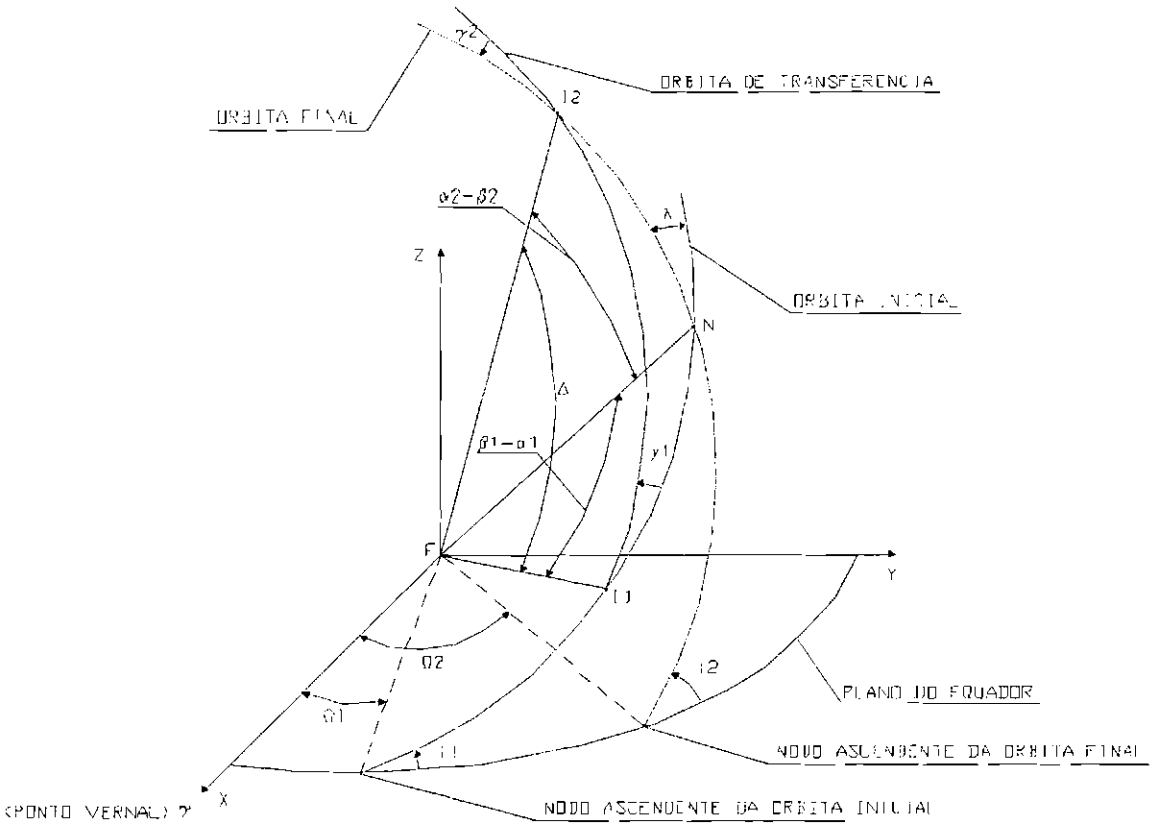


Fig. 5.5- Caso 1: Impulso I_1 Aplicado Antes do Ponto N e I_2 Após N.

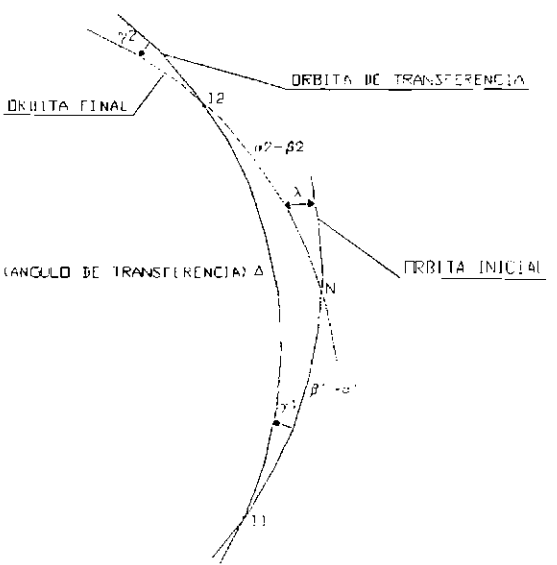


Fig. 5.6- Triângulo Esférico Referente ao Caso 1.

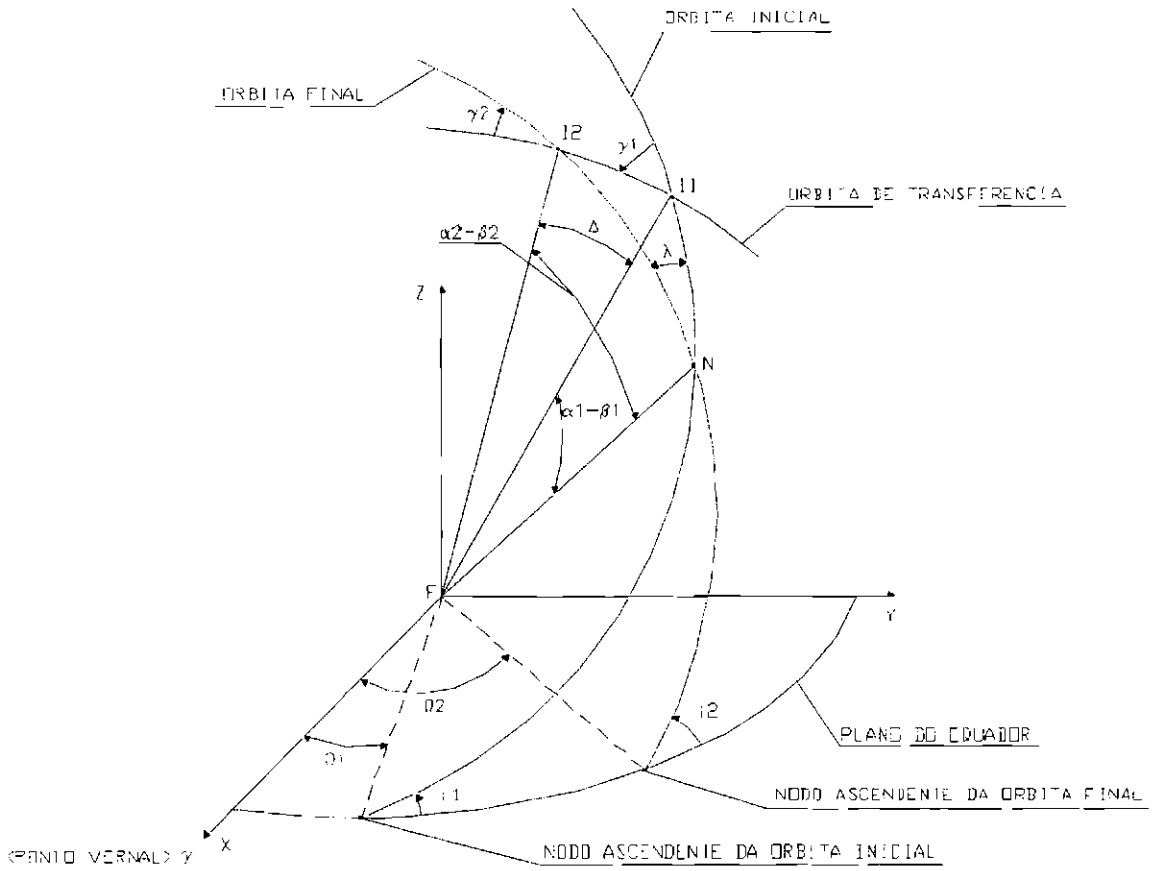


Fig. 5.7- Caso 2: Ambos os Impulsos Aplicados Após o Ponto N.

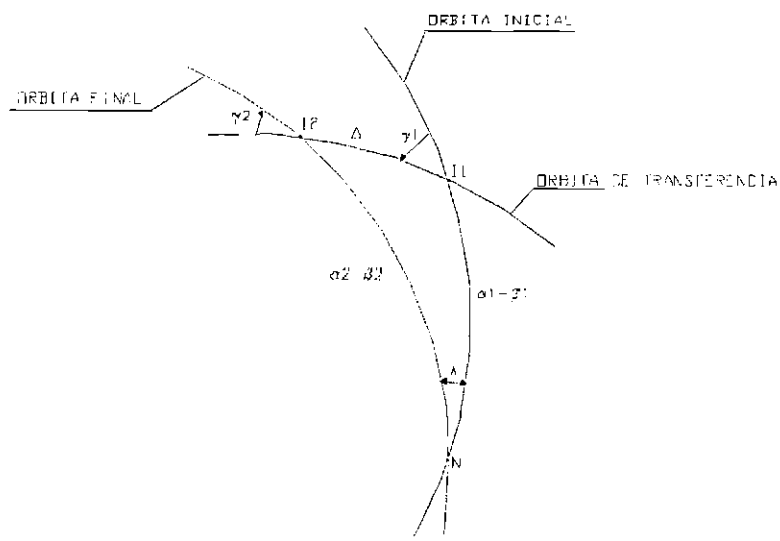


Fig. 5.8- Triângulo Esférico Referente ao Caso 2.

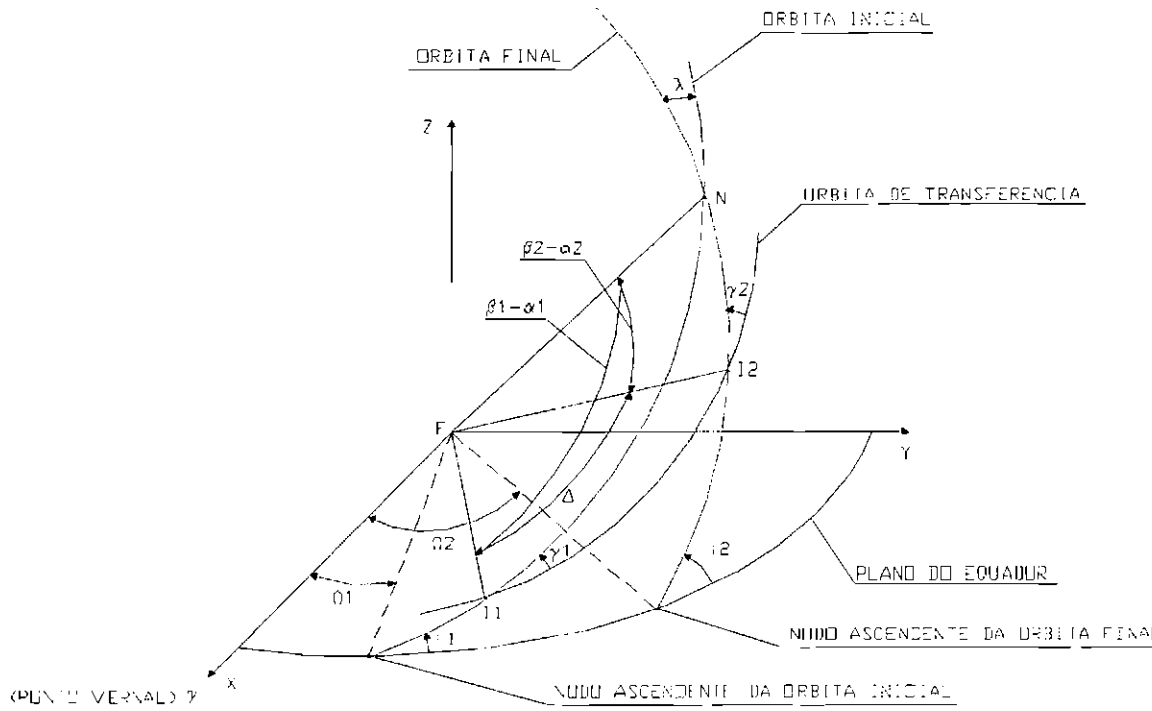


Fig. 5.9- Caso 3: Ambos os Impulsos Aplicados Antes do Ponto N.

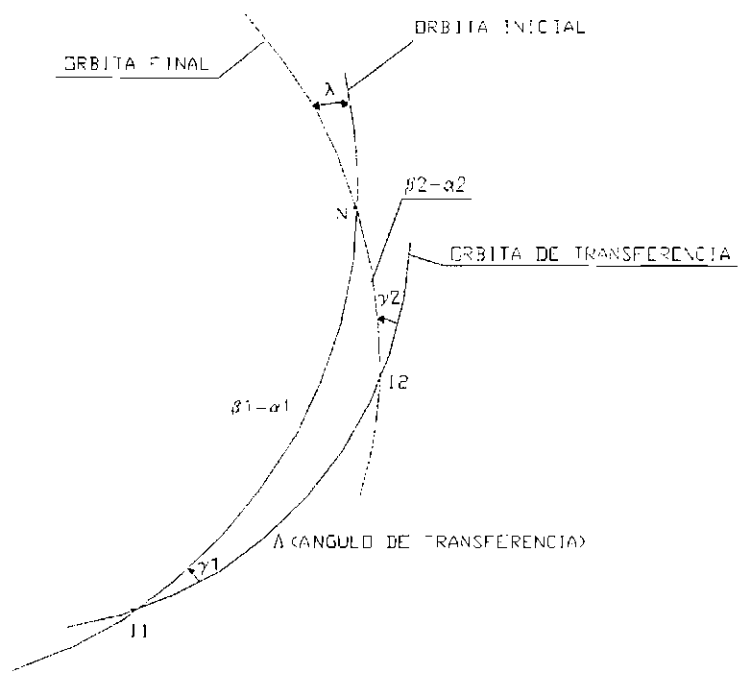


Fig. 5.10- Triângulo Esférico Referente ao Caso 3.

Das Figuras anteriores obtemos as seguintes expressões para o cálculo do ângulo de transferência Δ:

$$\begin{aligned}\cos\Delta = &\cos(\beta_1 - \alpha_1)\cos(\alpha_2 - \beta_2) + \\ &\operatorname{sen}(\beta_1 - \alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2 - \beta_2)\cos(180^\circ - \lambda)\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\operatorname{sen}\Delta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \beta_2)\operatorname{sen}(180^\circ - \lambda)}{\operatorname{sen} B} \tag{5.5}$$

$$B = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \lambda)}{\operatorname{sen}(\beta_1 - \alpha_1)\operatorname{cotg}(\alpha_2 - \beta_2) - \cos(\beta_1 - \alpha_1)\cos(180^\circ - \lambda)}\right] \tag{5.6}$$

Entretanto, novamente deve ser feita uma análise de quadrante para definir corretamente o ângulo de transferência Δ.

5.2- APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

Consideramos que os propulsores utilizados são capazes de aplicar empuxos instantâneos e de magnitude infinita e que a manobra será efetuada por meio de duas mudanças impulsivas de velocidade com magnitudes V_1 e V_2. Assim, a velocidade característica é dada por:

$$V = V_1 + V_2 = F(X) \tag{5.7}$$

onde X é uma variável arbitrária definida para a transferência.

O tempo de transferência é dado por:

$$T = G(X) \tag{5.8}$$

Portanto, o problema consiste em minimizar V para um dado T.

Se a velocidade característica para a transferência é dada e é igual a V_0, temos a seguinte relação de vínculo:

$$V - V_0 = 0 \tag{5.9}$$

Por outro lado, se o tempo de transferência é dado e é igual a T_0, temos a seguinte relação de vínculo:

$$T - T_0 = 0 \tag{5.10}$$

Dessa forma, devemos considerar o índice de performance dado por:

$$J = k_1(V - V_0) + k_2(T - T_0) \tag{5.11}$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Se ξ é qualquer uma das variáveis independentes a minimização de J conduz as condições necessárias.

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = k_1 \frac{\partial V}{\partial \xi} + k_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \tag{5.12}$$

A partir de Eckel e Vinh (1984) vemos que a solução do problema depende de três variáveis: o semi-latus rectum p da órbita de transferência e as anomalias verdadeiras α_1 e α_2 que definem a localização dos impulsos nas órbitas inicial e final. Portanto, temos as seguintes condições de otimalidade:

$$\frac{\partial V}{\partial p} + k\frac{\partial T}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + k\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = 0 \qquad (5.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} + k\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = 0$$

Eliminando o multiplicador de Lagrange temos:

$$\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\frac{\partial T}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial \alpha_{21}} - \frac{\partial V}{\partial \alpha_{21}}\frac{\partial T}{\partial p} = 0 \qquad (5.14)$$

Analisando as derivadas parciais e substituindo nas equações anteriores temos, após simplificações, as seguintes condições finais de otimalidade.

$$\left(X_1 + Y Z e \operatorname{sen} f_2\right)\left(S_1 q_1 - T_1 e \operatorname{sen} f_1\right) + S_1 T_1 +$$

$$W_1\left(\frac{W_1 - W_2}{\operatorname{sen}\Delta} q_2 - W_1 \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\right) - \frac{W_1 Z e r_1 e_1 \operatorname{sen}\alpha_1}{q_1 p_1 \operatorname{sen} f_1 \operatorname{sen}\gamma_1} = 0 \qquad (5.15)$$

$$\left(X_2 + Y Z e \operatorname{sen} f_1\right)\left(S_2 q_2 - T_2 e \operatorname{sen} f_2\right) + S_2 T_2 +$$

$$W_2\left(\frac{W_2 - W_1}{\operatorname{sen}\Delta} q_1 - W_2 \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\right) + \frac{W_2 Z e r_2 e_2 \operatorname{sen} a_2}{q_2 p_2 \operatorname{sen} f_2 \operatorname{sen}\gamma_2} = 0 \qquad (5.16)$$

que utilizam as seguintes relações:

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos\alpha_1} \tag{5.17}$$

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos\alpha_2} \tag{5.18}$$

$$f_1 = \text{arc tg}\left[\cot\Delta - \frac{r_1(p - r_2)}{r_2(p - r_1)\,\text{sen}\,\Delta}\right] \tag{5.19}$$

$$f_2 = \text{arc tg}\left[\frac{r_2(p - r_1)}{r_1(p - r_2)\,\text{sen}\,\Delta} - \text{cotg}\,\Delta\right] \tag{5.20}$$

$$p = \frac{r_1 r_2 (\cos f_1 - \cos f_2)}{r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2} \tag{5.21}$$

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2} \tag{5.22}$$

$$\gamma_1 = \text{arc sen}\left[-\frac{\text{sen}(\beta_2 - \alpha_2)}{\text{sen}\,\Delta}\,\text{sen}\,\phi\right] \tag{5.23}$$

$$\gamma_2 = \text{arc sen}\left[-\frac{\text{sen}(\beta_1 - \alpha_1)}{\text{sen}\,\Delta}\,\text{sen}\,\phi\right] \tag{5.24}$$

$$x_1 = \sqrt{\mu}\left(\frac{e}{\sqrt{p}}\,\text{sen}\,f_1 - \frac{e_1}{\sqrt{p_1}}\,\text{sen}\,\alpha_1\right) \tag{5.25}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1}\left(\sqrt{p} - \sqrt{p_1}\cos\gamma_1\right) \tag{5.26}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\mu . p_1}}{r_1} \operatorname{sen} \gamma_1 \tag{5.27}$$

$$x_2 = \sqrt{\mu}\left(\frac{e_2}{\sqrt{p_2}} \operatorname{sen} \alpha_2 - \frac{e}{\sqrt{p}} \operatorname{sen} f_2 \right) \tag{5.28}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_2}\left(\sqrt{p_2} \cos \gamma_2 - \sqrt{p} \right) \tag{5.29}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{\mu\, p_2}}{r_2} \operatorname{sen} \gamma_2 \tag{5.30}$$

$$h_1 = \left(y_1^{\,2} + z_1^{\,2} \right)^{1/2} \tag{5.31}$$

$$h_2 = \left(y_2^{\,2} + z_2^{\,2} \right)^{1/2} \tag{5.32}$$

$$V_1 = \left(x_1^{\,2} + h_1^{\,2} \right)^{1/2} \tag{5.33}$$

$$V_2 = \left(x_2^{\,2} + h_2^{\,2} \right)^{1/2} \tag{5.34}$$

$$S_1 = \frac{x_1}{V_1} \tag{5.35}$$

$$S_2 = \frac{x_2}{V_2} \tag{5.36}$$

$$T_1 = \frac{y_1}{V_1} \tag{5.37}$$

$$T_2 = \frac{y_2}{V_2} \tag{5.38}$$

$$W_1 = \frac{z_1}{V_1} \tag{5.39}$$

$$W_2 = \frac{z_2}{V_2} \tag{5.40}$$

$$q_1 = \frac{p}{r_1} \tag{5.41}$$

$$q_2 = \frac{p}{r_2} \tag{5.42}$$

$$E_1 = \arccos\left(\frac{e + \cos f_1}{1 + e\cos f_1}\right) \tag{5.43}$$

$$E_2 = \arccos\left(\frac{e + \cos f_2}{1 + e\cos f_2}\right) \tag{5.44}$$

$$\operatorname{sen} E_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2}\,\operatorname{sen} f_1}{1 + e\cos f_1} \tag{5.45}$$

$$\operatorname{sen} E_2 = \frac{\sqrt{1 - e^2}\,\operatorname{sen} f_2}{1 + e\cos f_2} \tag{5.46}$$

$$M_1 = E_1 - e \operatorname{sen} E_1 \tag{5.47}$$

$$M_2 = E_2 - e \operatorname{sen} E_2 \tag{5.48}$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \tag{5.49}$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(M_2 - M_1 + 2\pi N \right) \tag{5.50}$$

$$X_1 = \frac{S_1 \cos \Delta - S_2}{\operatorname{sen} \Delta} + T_1 \tag{5.51}$$

$$X_2 = \frac{S_1 - S_2 \cos \Delta}{\operatorname{sen} \Delta} + T_2 \tag{5.52}$$

$$Y = \frac{1}{\left(1 - e^2\right) \operatorname{sen} \Delta} \left[3e^2 T \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} - 2e \left(\frac{1}{q_2 \operatorname{sen} f_2} - \frac{1}{q_1 \operatorname{sen} f_1} \right) + \operatorname{cotg} f_2 - \operatorname{cotg} f_1 \right] \tag{5.53}$$

$$Z = \frac{q_2 X_2 - q_1 X_1 + \left(S_1 + S_2\right) \operatorname{tg} \Delta/2}{\operatorname{cotg} f_1 - \operatorname{cotg} f_2 + Y \left[\left(1 + e^2\right) \operatorname{sen} \Delta + 2e \left(\operatorname{sen} f_2 - \operatorname{sen} f_1 \right) \right]} \tag{5.54}$$

Portanto temos um sistema de três equações com três incógnitas formado pelas Equações 5.17, 5.22 e 5.23 cuja resolução fornece a solução para o problema da transferência orbital bi-impulsiva não coplanar com restrição de tempo e mínimo consumo de combustível.

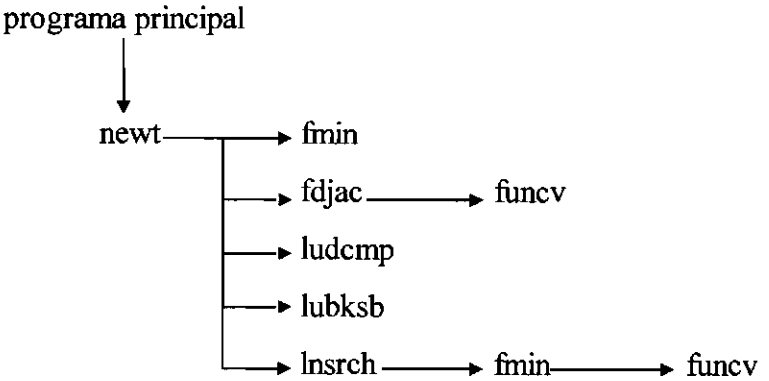
5.3- IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

Para a implementação do método foi necessário encontrar a solução de um sistema de equações não lineares mostradas no item anterior. Para isto, da mesma forma que o método de Lawden, foram utilizadas as rotinas encontradas em Press et al. (1992) que utilizam o método de Newton-Raphson para sistemas de equações não lineares, que já foi apresentado resumidamente no Capítulo 4.

5.3.1- ROTINAS UTILIZADAS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Todas as rotinas utilizadas na solução do problema são mostradas nos apêndices C e D.

As sub-rotinas extraídas de Press et al. (1992) são as mesmas sub-rotinas que fora apresentadas no Capítulo 4. A ordem de utilização das sub-rotinas é mostrada a seguir:



onde a sub-rotina funcv fornece o vetor formado pelas funções a serem zeradas.

5.3.2- APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO

O programa tem como entrada os seguintes parâmetros:

mi = constante gravitacional, que para a Terra vale 398600 km^3 / s^2;

tempo = tempo total gasto na manobra de transferência (s).

Órbita Inicial:

*e*1 = excentricidade;

*l*1 = semi-latus rectum (km), obtido da expressão $l_1 = a_1(1 - e_1)$;

*w*1 = longitude do periapside (rad);

*a*1 = semi-eixo maior (km);

*i*1 = inclinação (rad);

*O*1 = longitude do nodo ascendente (rad).

Órbita Final:

*e*2 = excentricidade;

*l*2 = semi-latus rectum (km), obtido da expressão $l_2 = a_2(1 - e_2)$;

*w*2 = longitude do periapside (rad);

*a*2 = semi-eixo maior (km);

*i*2 = inclinação (rad);

*O*2 = longitude do nodo ascendente (rad).

A saída do programa apresenta os seguintes dados com relação a órbita de transferência:

e = excentricidade;

l = semi-latus rectum da (km);

w	=	longitude do periapside (rad);
a	=	semi-eixo maior (km);
i	=	inclinação (rad);
O	=	longitude do nodo ascendente (rad);
*alfa*1	=	anomalia verdadeira do ponto de aplicação do primeiro impulso medida no plano da órbita inicial (rad);
*alfa*2	=	anomalia verdadeira do ponto de aplicação do segundo impulso medida no plano da órbita final (rad);
*f*1	=	anomalia verdadeira do ponto de aplicação do primeiro impulso medida no plano da órbita de transferência (rad);
*f*2	=	anomalia verdadeira do ponto de aplicação do segundo impulso medida no plano da órbita de transferência (rad);
*gama*1	=	rotação gerada pelo primeiro impulso (rad);
*gama*2	=	rotação gerada pelo segundo impulso (rad);
*Dv*1	=	variação de velocidade necessária no primeiro impulso (km/s);
*Dv*2	=	variação de velocidade necessária no segundo impulso ((km/s);
Dvt	=	variação de velocidade total *Dv*1 + *Dv*2 (km/s);
tempo	=	tempo total gasto na manobra de transferência (s).

Como exemplo, apresentamos abaixo a folha de resultados original obtida com a execução do programa para um conjunto de dados de entrada qualquer.

PROGRAM FIX_T_T

Ultima atualizacao : 17/6/1997

VALORES DE ENTRADA

mi	=	398600.00000000
tempo	=	1500.00000000

Órbita Inicial

*e*1	=	0.50000000
*I*1	=	3375.00000000
*w*1	=	4.00000000
*a*1	=	4500.00000000
*I*1	=	0.13963000
*O*1	=	3.75246000

Órbita Final

*e*2	=	0.12200000
*I*2	=	7324.34000000
*w*2	=	5.93412000
*a*2	=	7435.00000000
*I*2	=	0.03997000
*O*2	=	4.00000000

RESULTADOS

Obs.: Todos os ângulos estão em radianos.

e	=	0.43054388
I	=	4324.48837209
w	=	5.71079471
a	=	5308.51793753
I	=	0.23999339
O	=	1.57079632
*alfa*1	=	2.36454888
*alfa*2	=	4.86110422
*f*1	=	1.99053874
*f*2	=	3.52737889
*gama*1	=	0.10036339
*gama*2	=	-0.01795411
*Dv*1	=	1.18744533
*Dv*2	=	1.86611413
Dvt	=	3.05355946
tempo	=	1500.00002185

Erros absolutos na satisfação das equações: 0.00002185
0.00000000
0.00000000

5.4- RESULTADOS OBTIDOS

Neste item serão mostrados alguns resultados obtidos com o programa apresentado nos itens anteriores. Os gráficos foram construídos em função da variação do tempo total gasto na manobra. Dessa maneira, cada ponto dos gráficos foi obtido por meio da execução do programa para um determinado tempo. Estes pontos foram unidos por meio de uma linha cheia formando assim uma curva que mostra o comportamento do elemento orbital em questão. Tomaremos inicialmente como exemplo a manobra de transferência a ser efetuada entre duas órbitas terminais com as seguintes características.

Órbita Inicial:

$e1$ = 0,02000000;
$l1$ = 12025,19000000 km;
$w1$ = 3,17649000 rad;
$a1$ = 12030,00000000 km;
$i1$ = 0,00873000 rad;
$O1$ = 0,00000000 rad.

Órbita Final:

$e2$ = 0,01600000;
$l2$ = 11991,63000000 km;
$w2$ = 3,05171000 rad;
$a2$ = 11994,70000000 km;
$i2$ = 0,00602000 rad;
$O2$ = 0,15568000 rad.

Variando o tempo total gasto na manobra a partir de 175,4 até 3050 segundos obtemos os resultados mostrados abaixo.

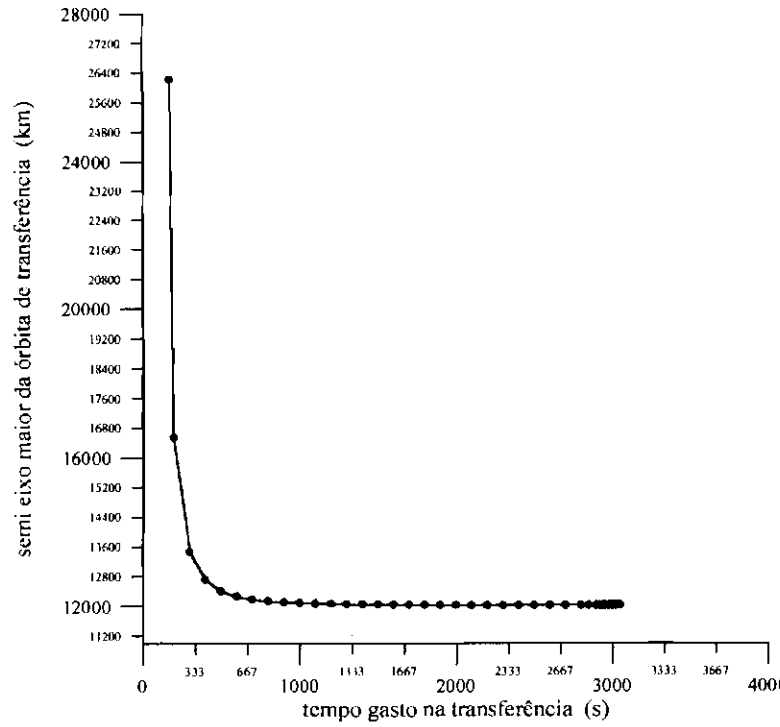


Fig. 5.11- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Exemplo 1).

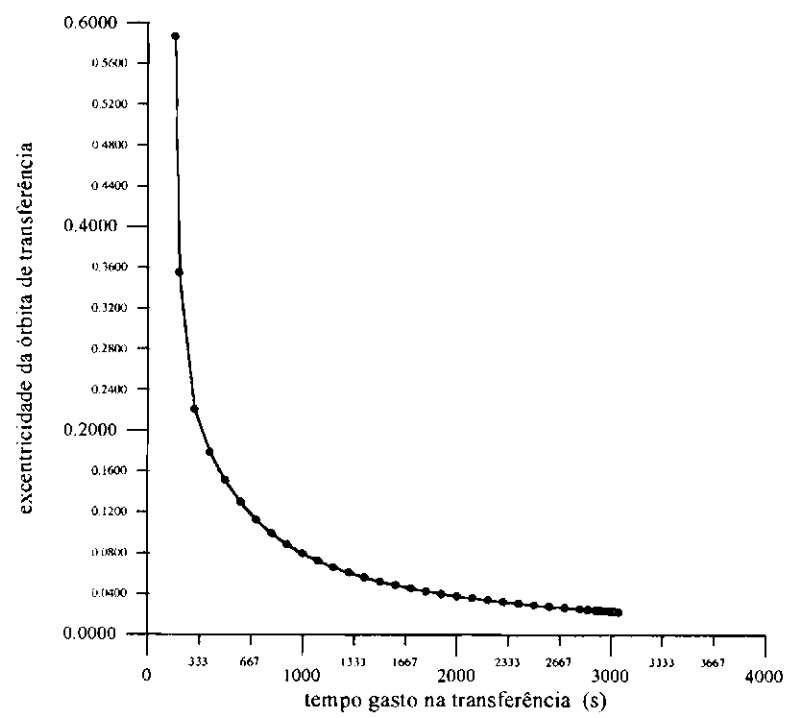


Fig. 5.12- Excentricidade vs. Tempo (Exemplo 1).

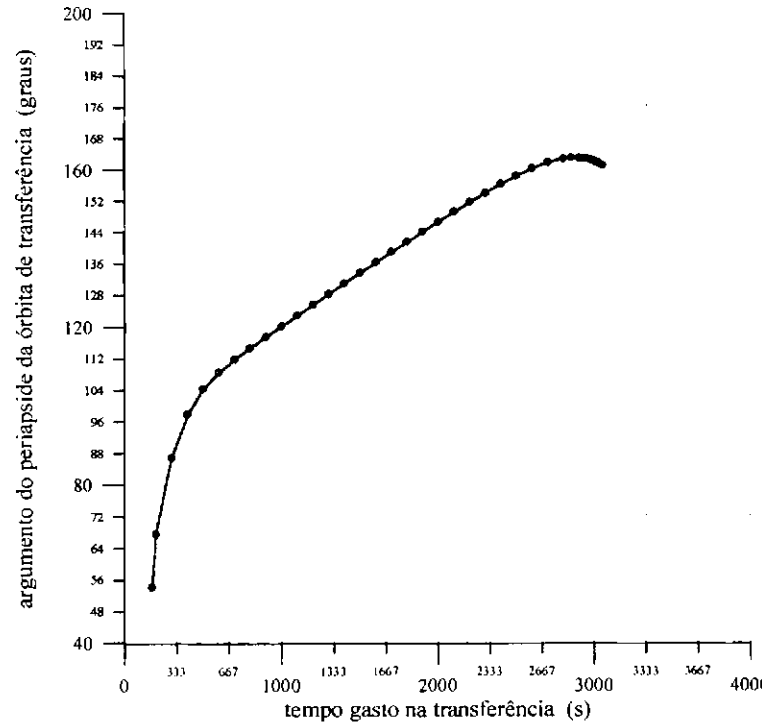


Fig. 5.13- Argumento do Periapside vs. Tempo (Exemplo 1).

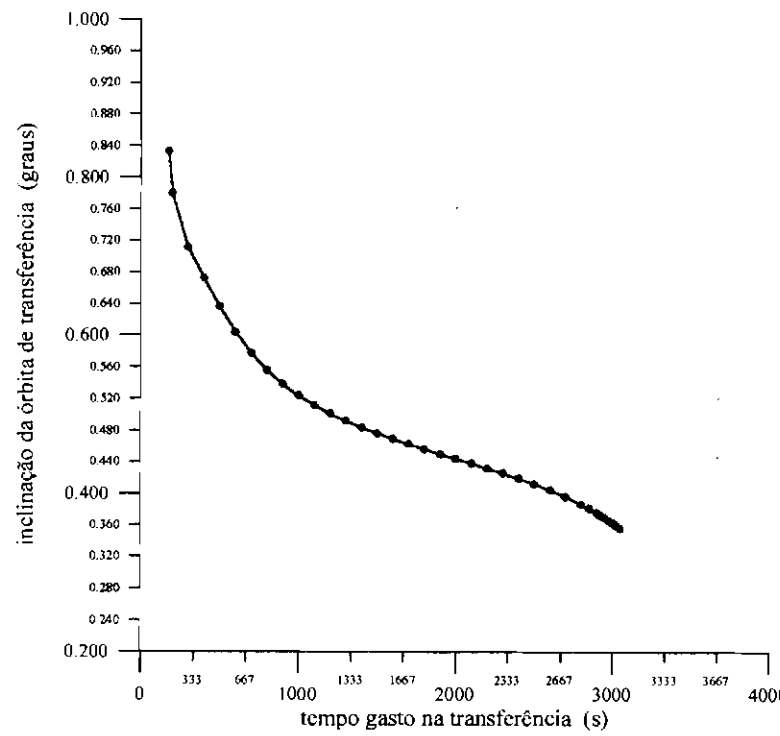


Fig. 5.14- Inclinação vs. Tempo (Exemplo 1).

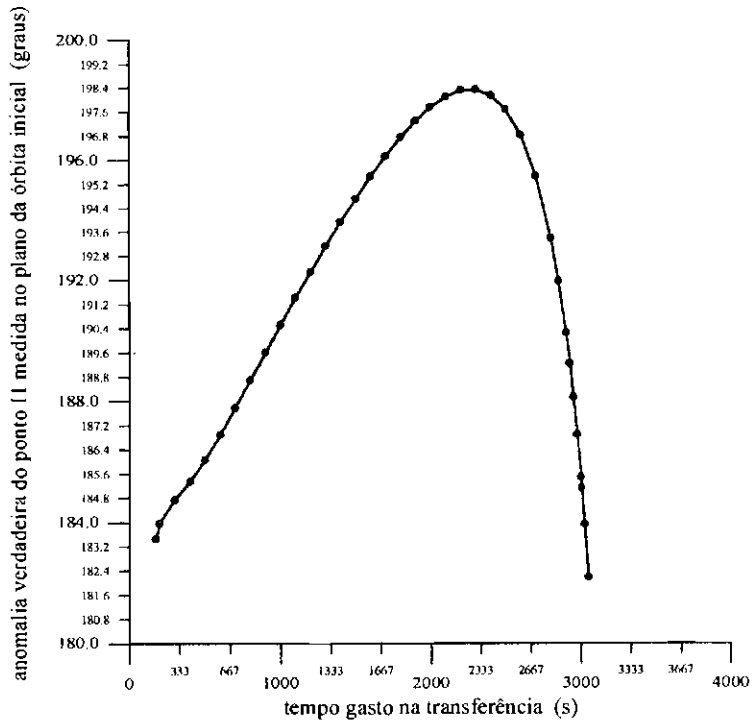


Fig. 5.15- Alfa1 vs. Tempo (Exemplo 1).

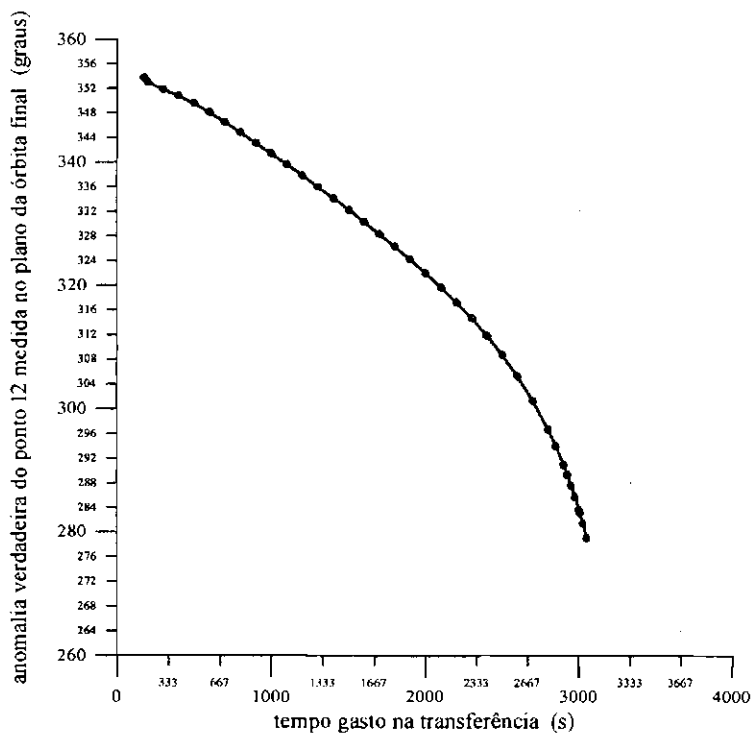


Fig. 5.16- Alfa2 vs. Tempo (Exemplo 1).

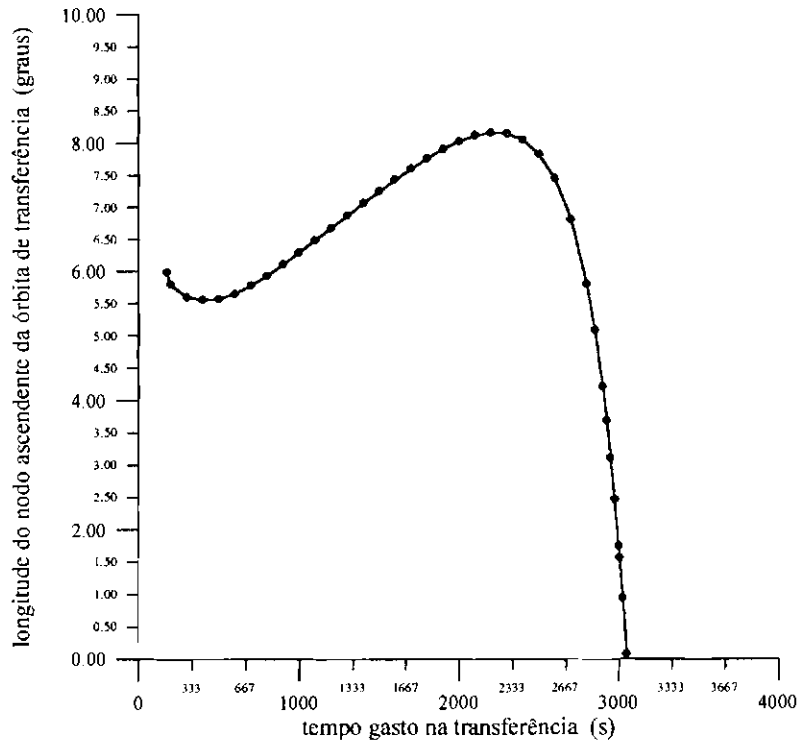


Fig. 5.17- Longitude do Nodo Ascendente vs. Tempo (Exemplo 1).

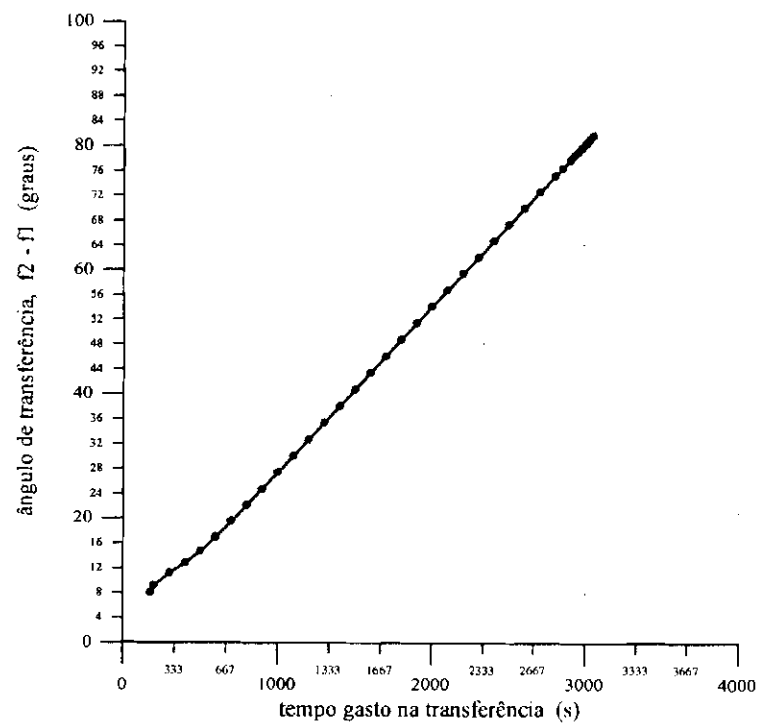


Fig. 5.18- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Exemplo 1).

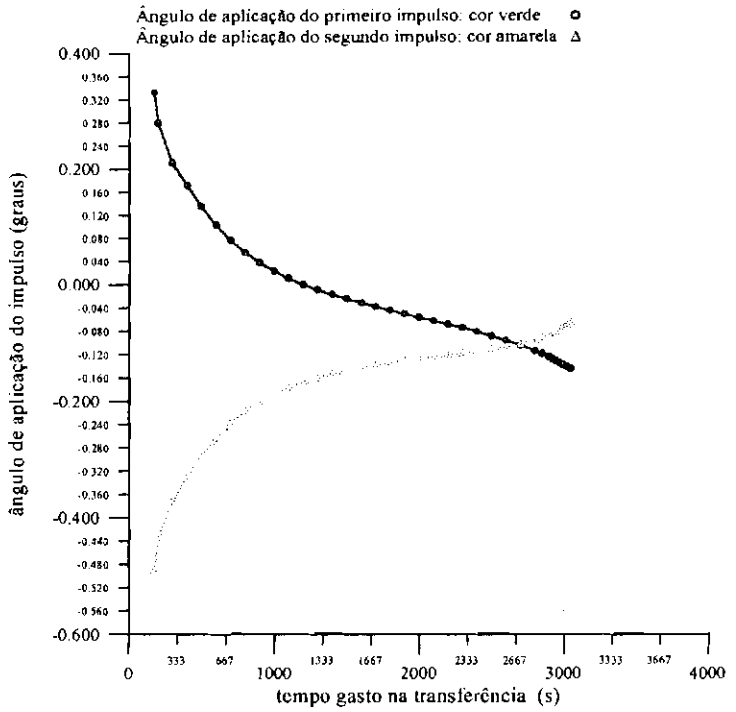


Fig. 5.19- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Exemplo 1).

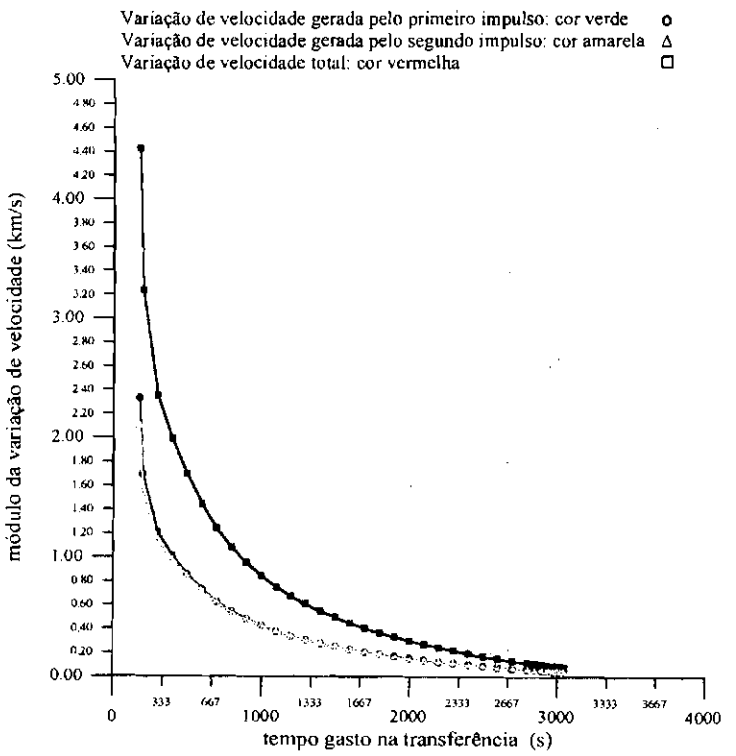


Fig. 5.20- Variação de Velocidade Necessária vs. Tempo (Exemplo 1).

Um outro exemplo estudado, é a manobra de transferência a ser efetuada entre as seguintes órbitas:

Órbita Inicial:

$e1$ = 0,50000000;
$l1$ = 14962,50000000 km;
$w1$ = 0,52359878 rad;
$a1$ = 15000,00000000 km;
$i1$ = 0,08726646 rad;
$O1$ = 0,17453293 rad.

Órbita Final:

$e2$ = 0,06000000;
$l2$ = 19928,00000000 km;
$w2$ = 0,78539816 rad;
$a2$ = 20000,00000000 km;
$i2$ = 0,17453293 rad;
$O2$ = 0,34906585 rad.

Variando o tempo total gasto na manobra a partir de 2100 até 3400 segundos observamos que existe uma descontinuidade entre 2400 e 2455 segundos pois neste intervalo de tempo não foi possível obter resultados. Porém, tanto antes quanto após esta descontinuidade, foi possível obter resultados confiáveis, que são mostrados a seguir inicialmente para o intervalo de tempo entre 2100 a 2400 segundos (intervalo *a*) e na seqüência, para o intervalo de tempo entre 2455 a 3400 segundos (intervalo *b*).

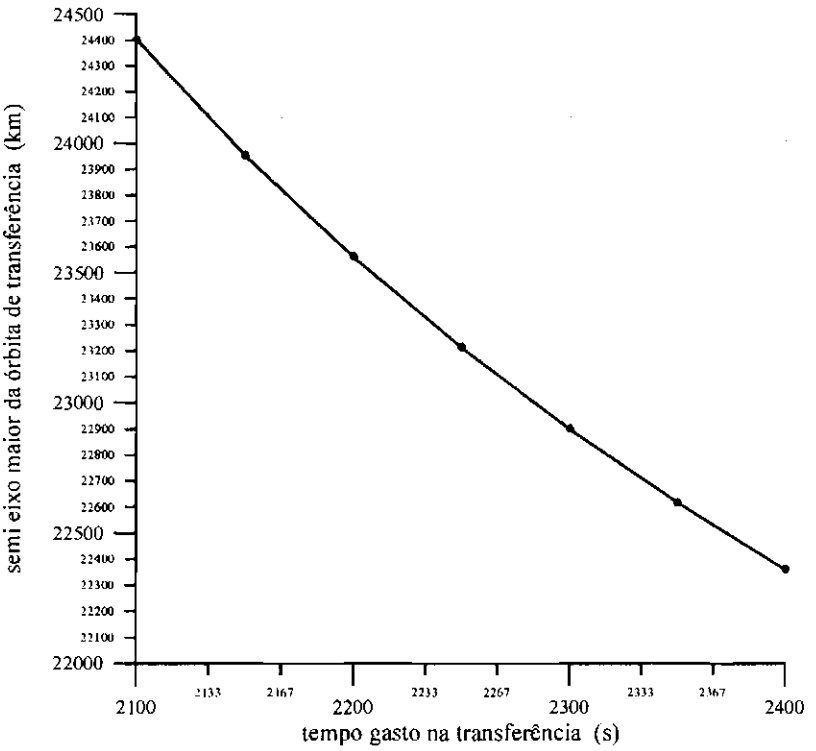


Fig. 5.21- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

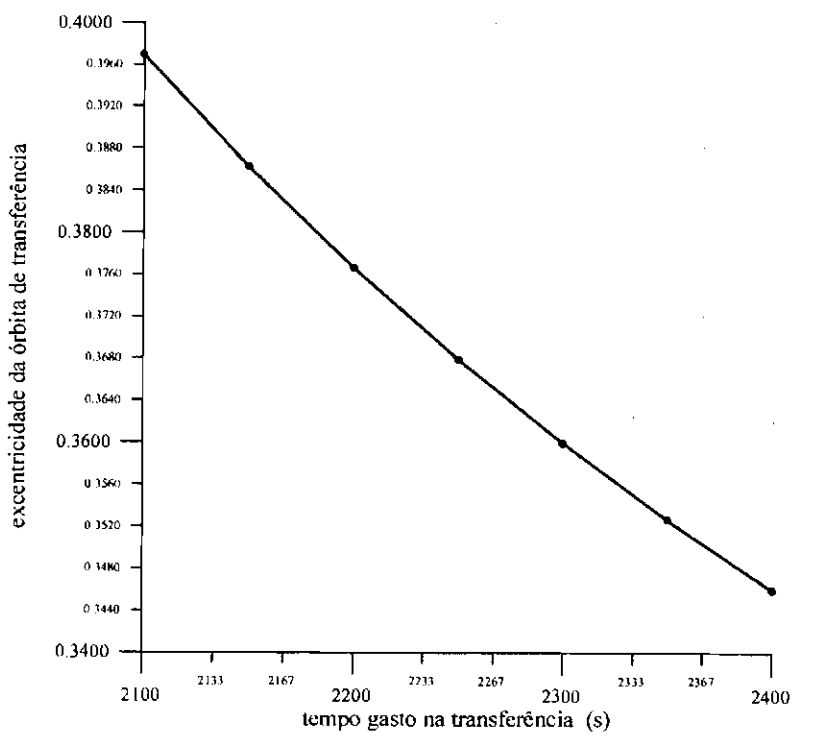


Fig. 5.22- Excentricidade vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

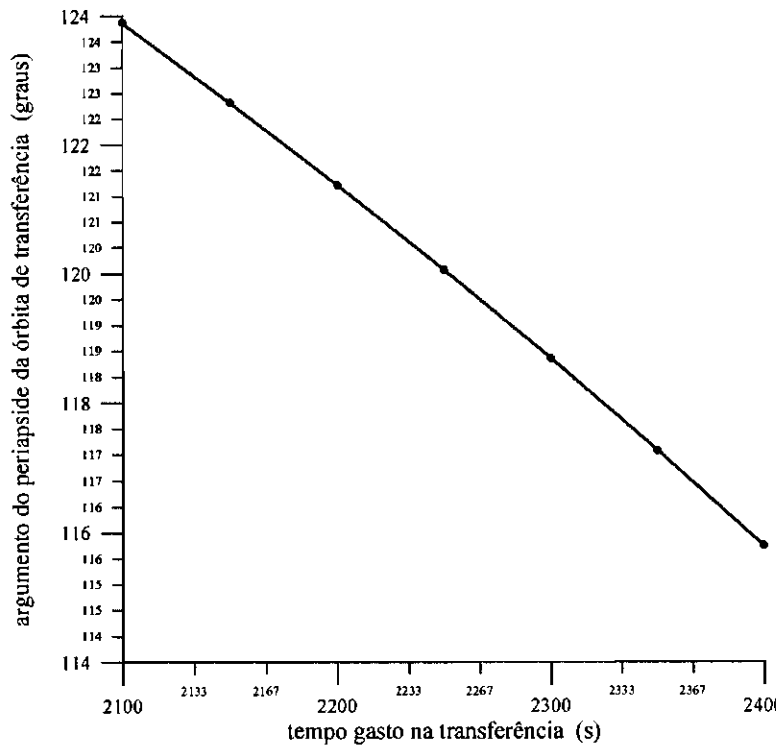


Fig. 5.23- Argumento do Periapside vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

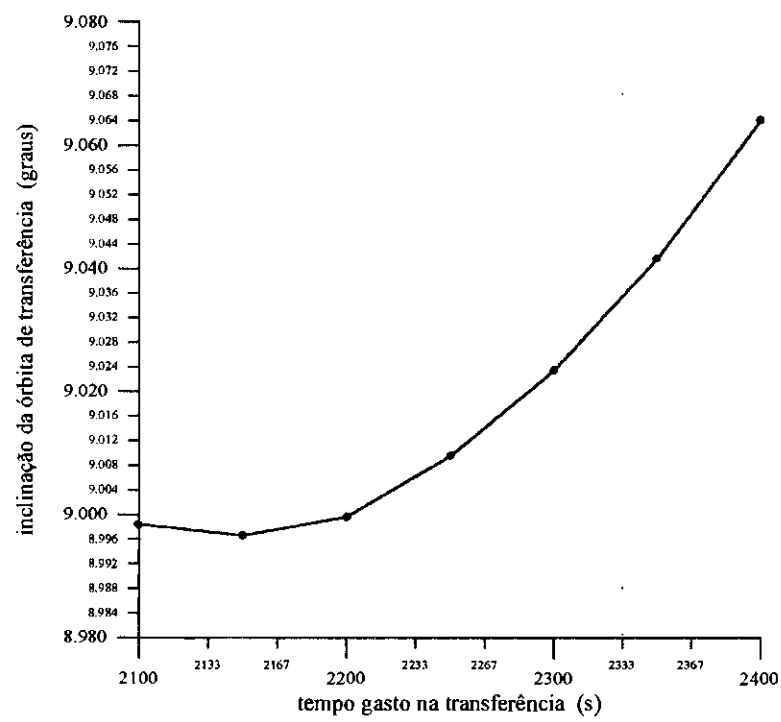


Fig. 5.24- Inclinação vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

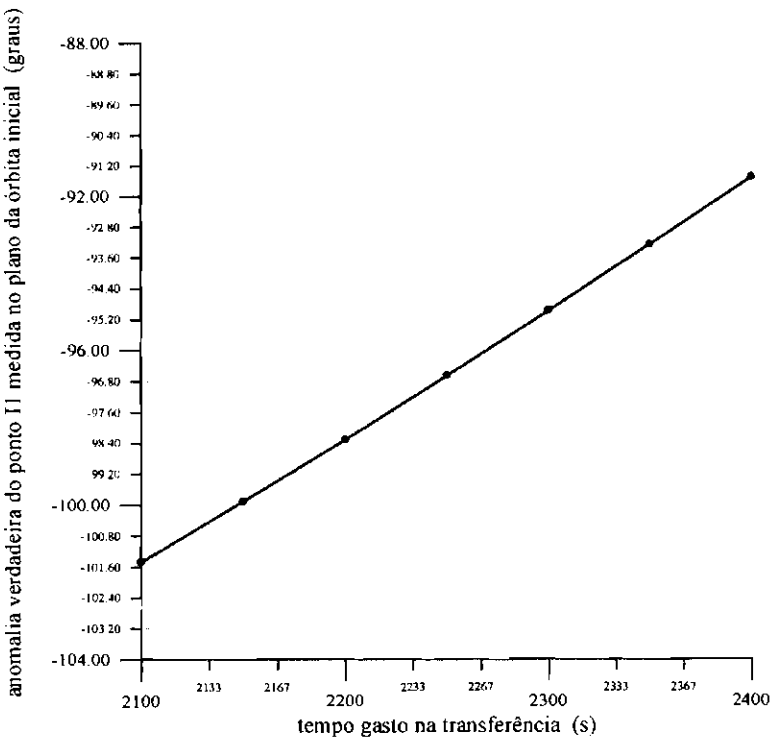


Fig. 5.25- Alfa1 vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

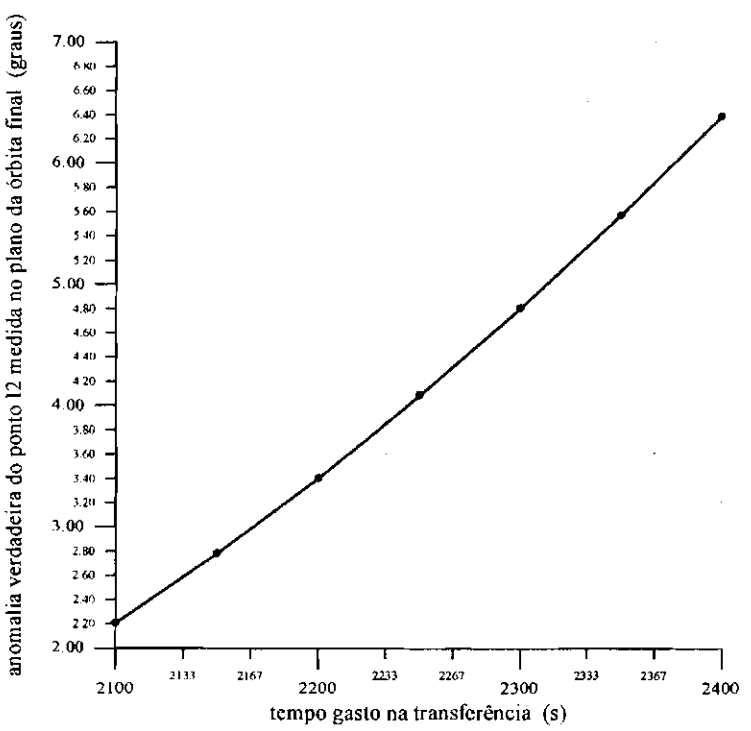


Fig. 5.26- Alfa2 vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

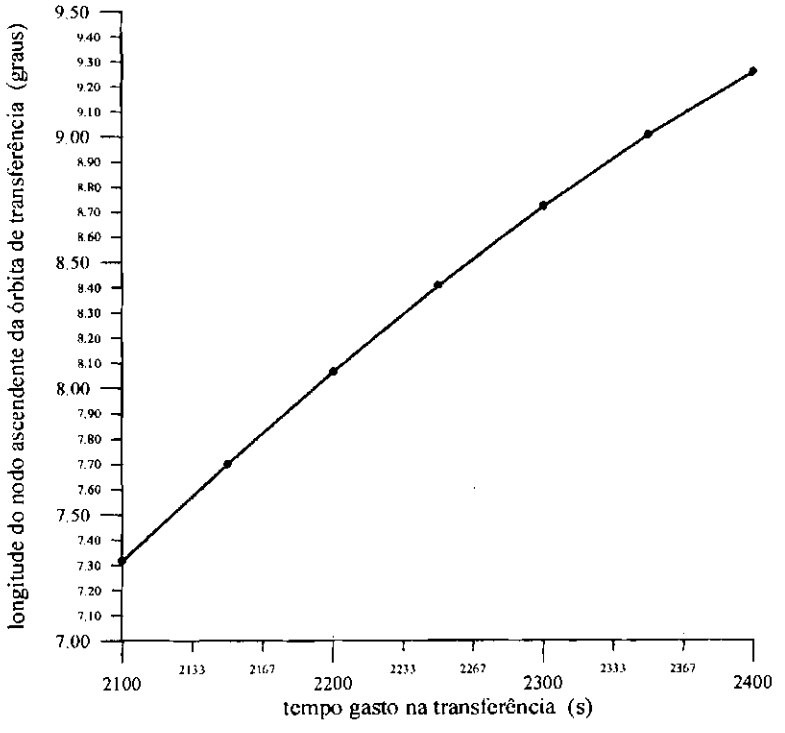


Fig. 5.27- Longitude do Nodo Ascendente vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

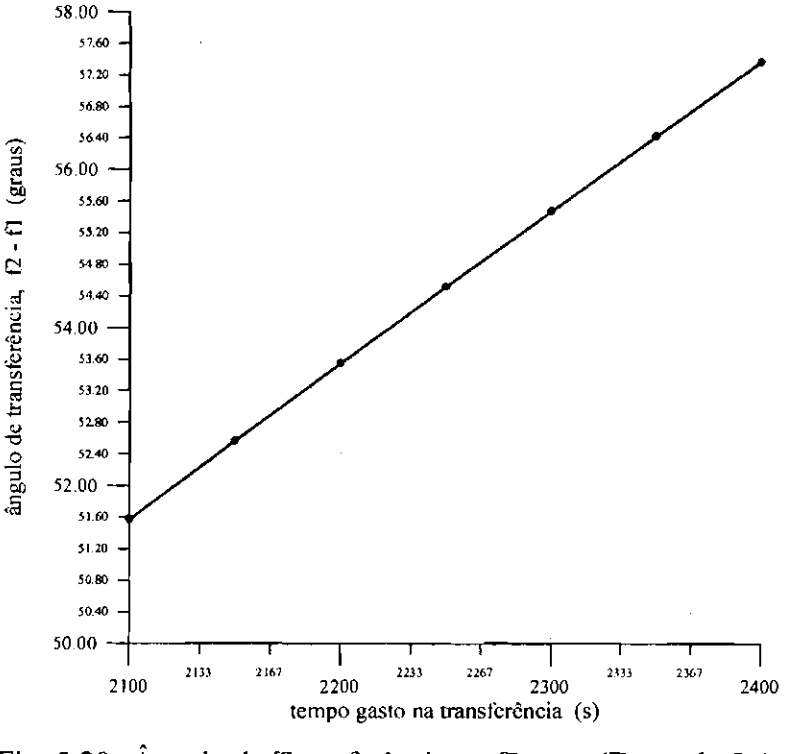


Fig. 5.28- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

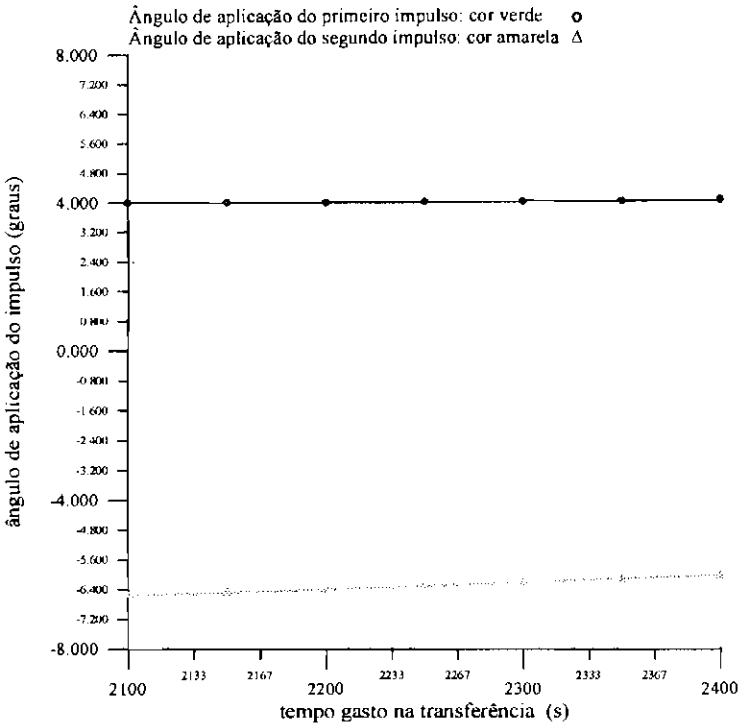


Fig. 5.29- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

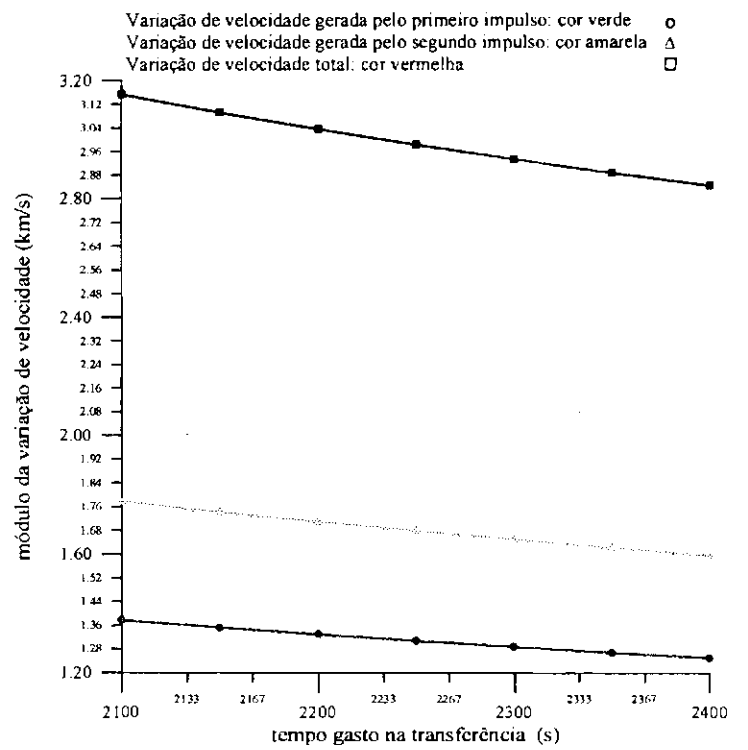


Fig. 5.30- Variação de Velocidade Necessária vs. Tempo (Exemplo 2*a*).

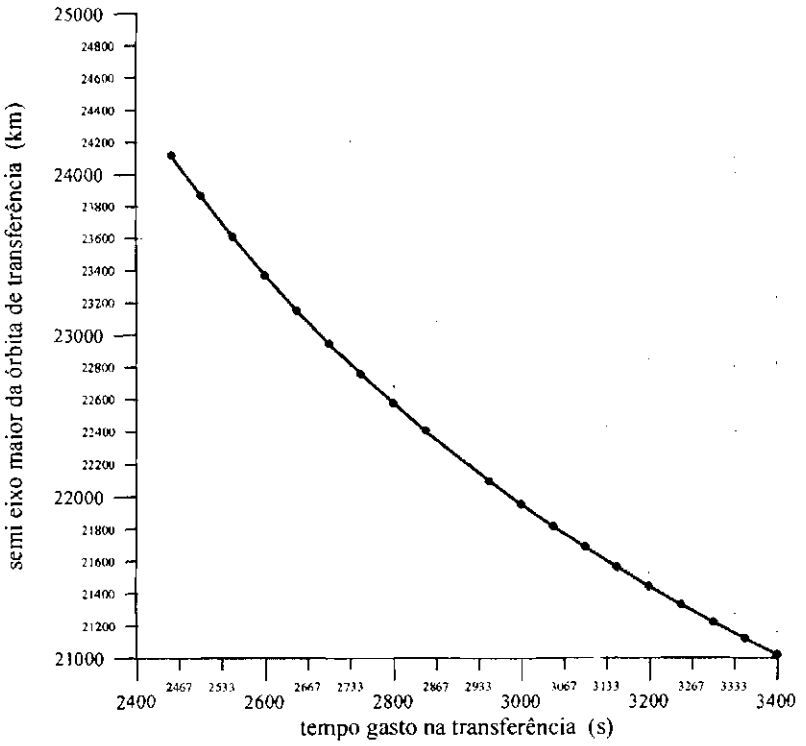


Fig. 5.31- Semi-Eixo Maior vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

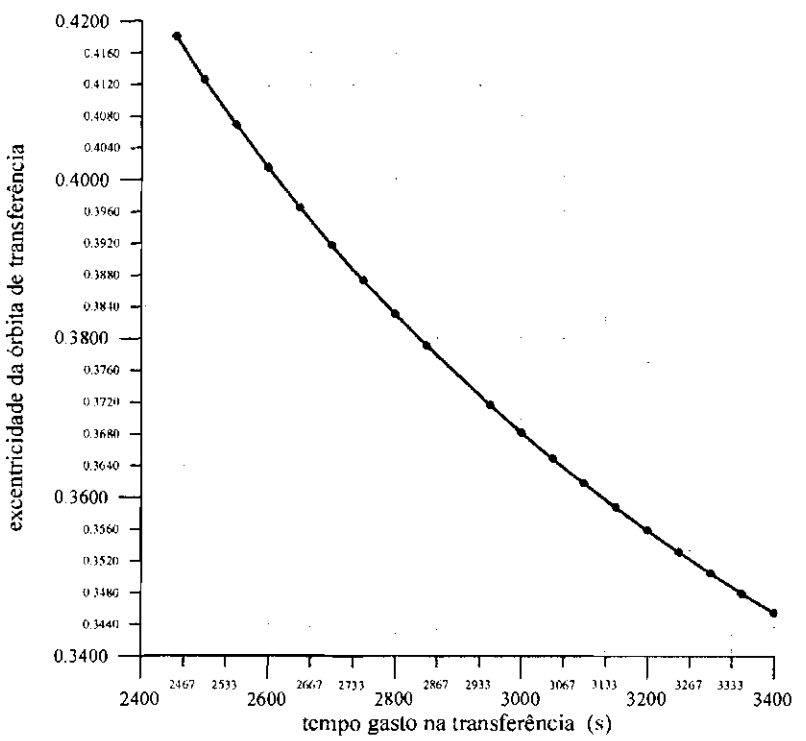


Fig. 5.32- Excentricidade vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

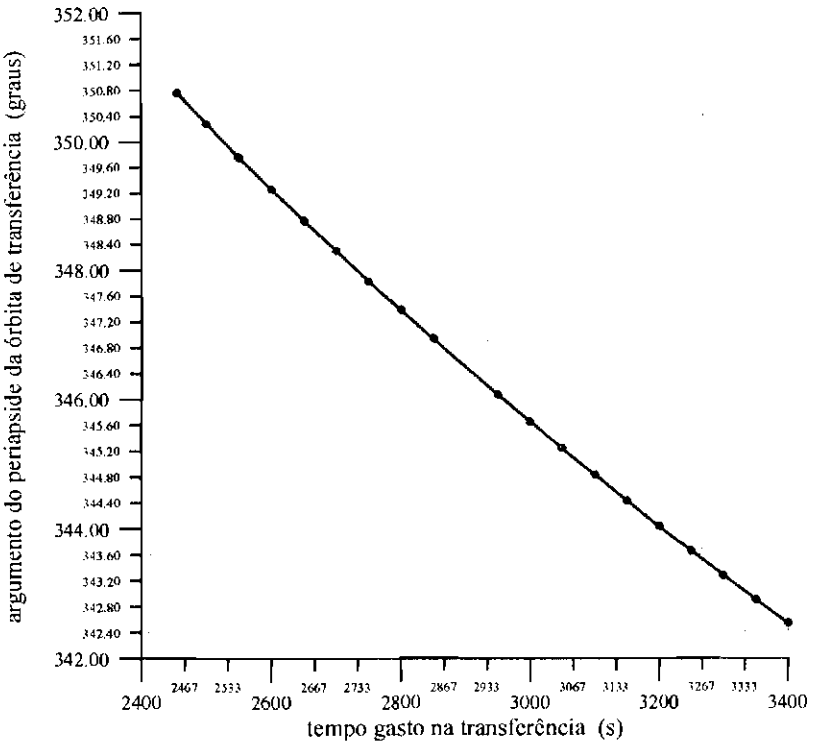


Fig. 5.33- Argumento do Periapside vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

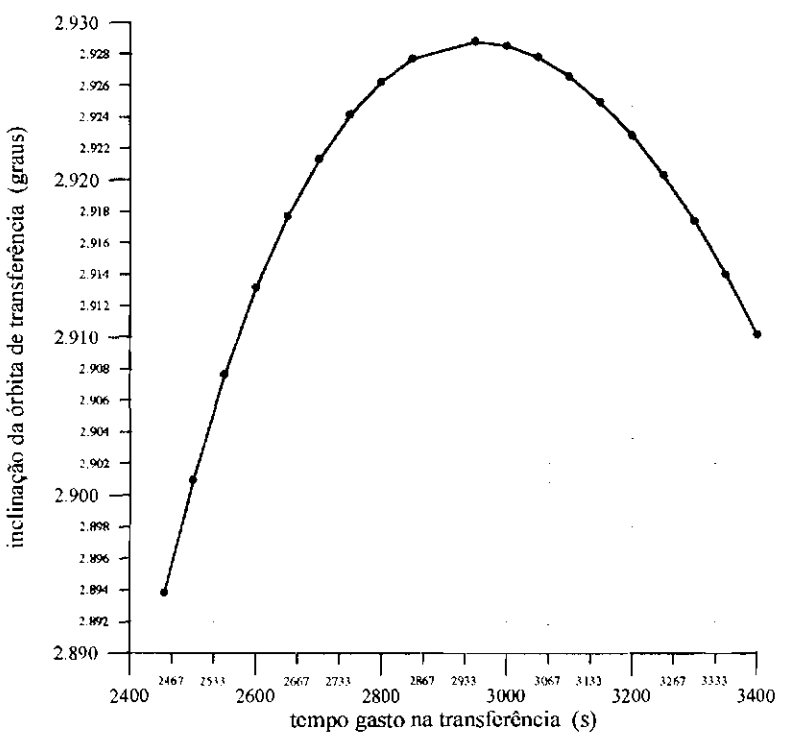


Fig. 5.34- Inclinação vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

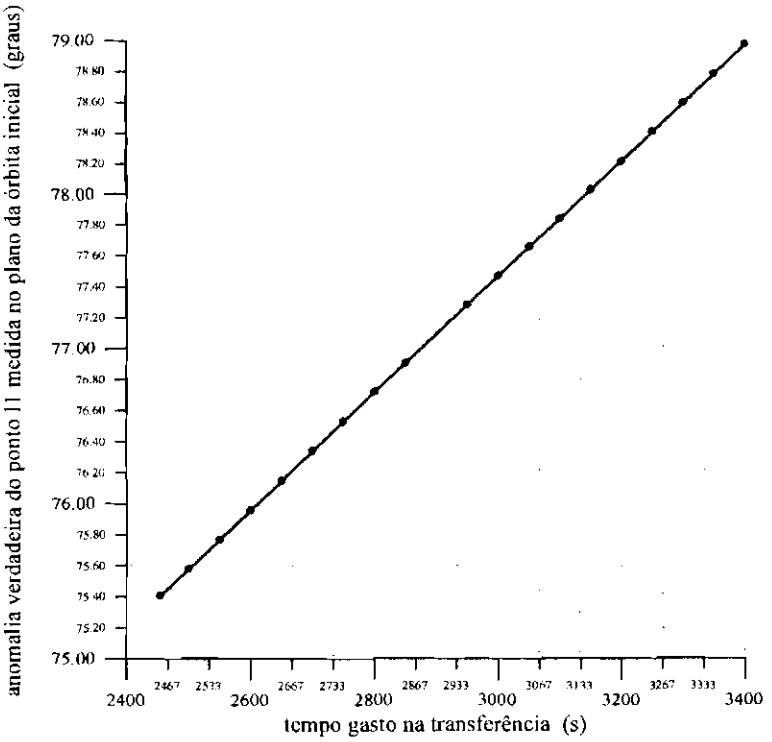


Fig. 5.35- Alfa1 vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

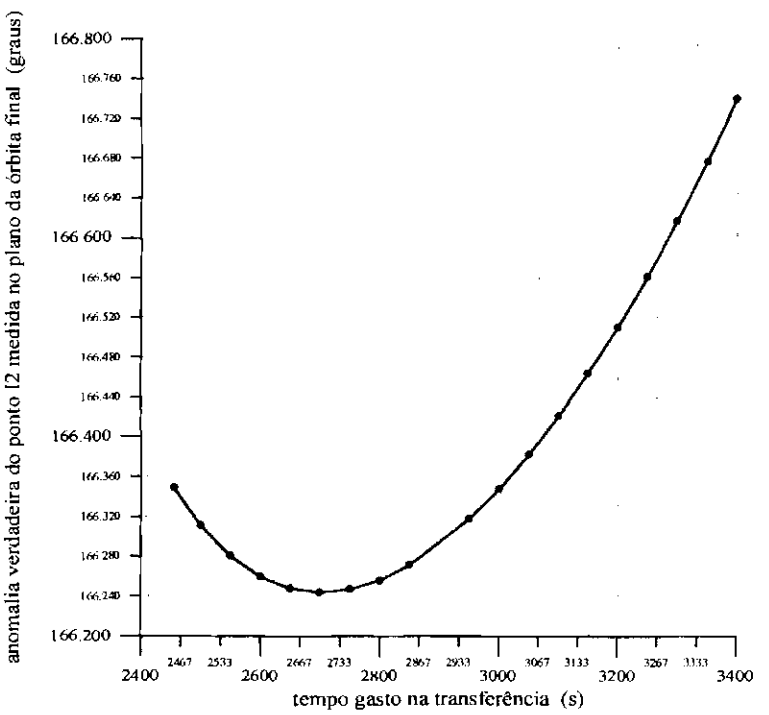


Fig. 5.36- Alfa2 vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

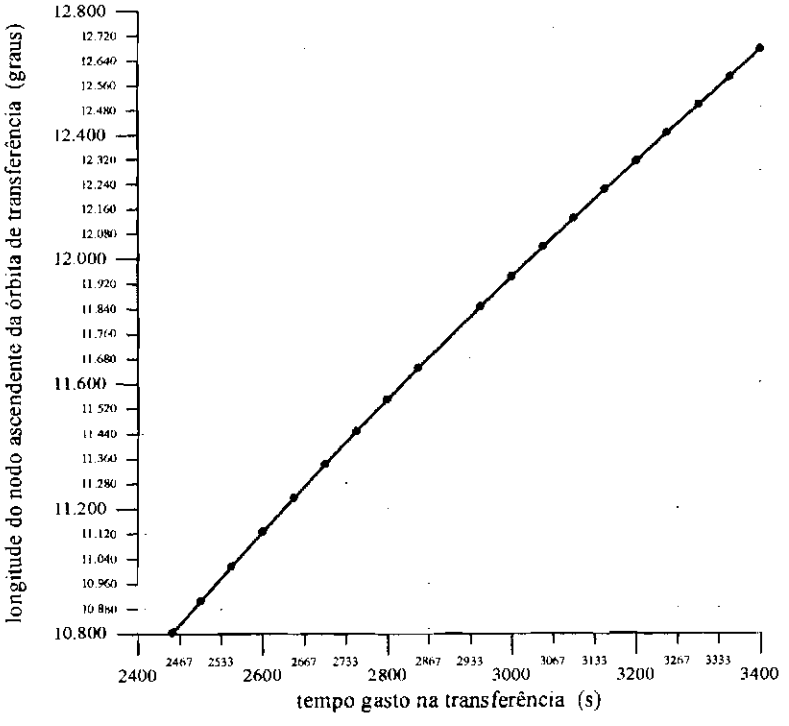


Fig. 5.37- Longitude do Nodo Ascendente vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

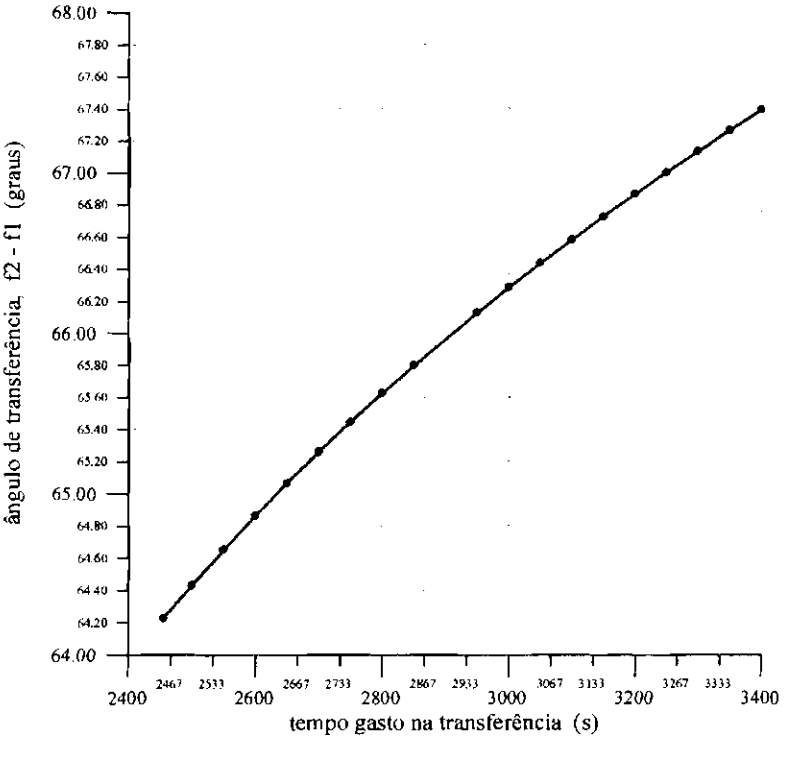


Fig. 5.38- Ângulo de Transferência vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

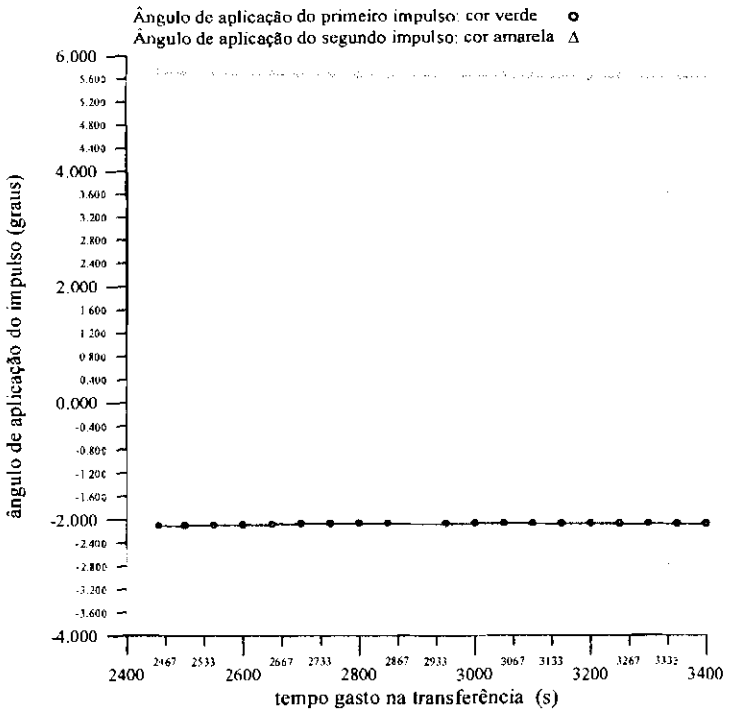


Fig. 5.39- Ângulo de Aplicação dos Impulsos vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

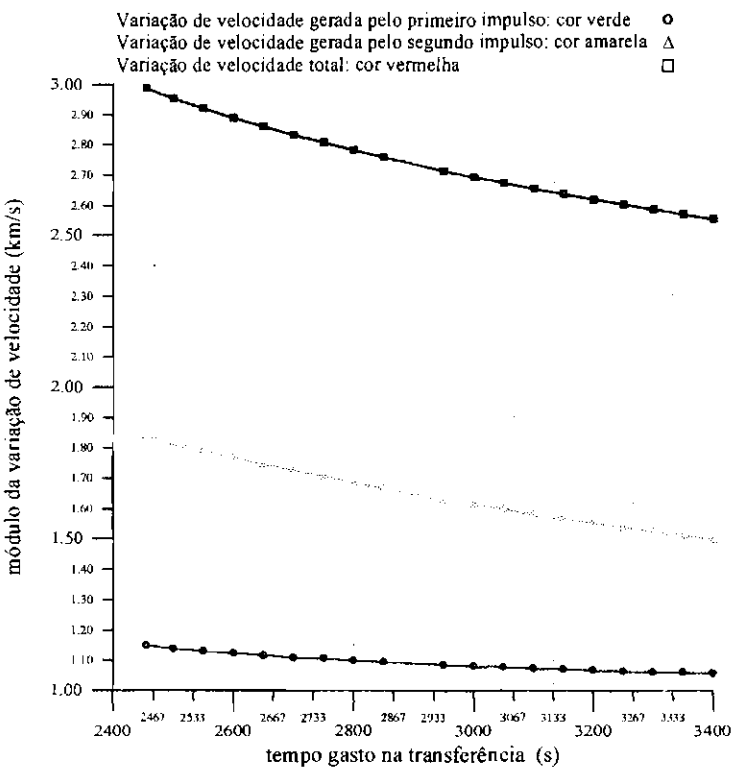


Fig. 5.40- Variação de Velocidade Necessária vs. Tempo (Exemplo 2*b*).

5.5- COMENTÁRIOS

Nos gráficos mostrados, de uma forma geral, da mesma maneira que no caso coplanar tratado no Capítulo 4, quanto maior o tempo permitido menor é a variação de velocidade necessária. Como era esperado pois quanto maior for o tempo permitido mais a direção de aplicação dos impulsos se aproxima da direção do movimento. Porém, como estamos lidando com o caso não coplanar, a direção dos impulsos nunca será na direção do movimento, pois sempre teremos um componente na direção ortogonal ao plano da órbita, que é responsável pela mudança de plano.

Podemos verificar também que quanto menor for o tempo permitido mais excêntrica se torna a órbita de transferência e maior se torna o semi-eixo maior. Já o ângulo de transferência decresce com a diminuição do tempo, como era esperado.

No segundo exemplo, mesmo com a descontinuidade encontrada entre 2400 e 2455 segundos, fora deste intervalo as curvas comportam-se da forma esperada, embora exista um degrau entre o último valor obtido antes da descontinuidade e o primeiro valor após a descontinuidade. Uma possível explicação para esta descontinuidade é que no local da descontinuidade a geometria da manobra muda. Podemos perceber isto analisando os gráficos mostrados nas Figuras 5.29 e 5.30 que mostram o ângulo de aplicação dos impulsos com relação ao tempo. Na Figura 5.29 o ângulo de aplicação do primeiro impulso é positivo e o ângulo de aplicação do segundo impulso é negativo. Na Figura 5.30 a situação se inverte, o ângulo de aplicação do primeiro impulso é negativo e o ângulo de aplicação do segundo impulso é positivo, o que comprova a mudança da geometria da manobra.

Os casos em que as órbitas inicial e final são coplanares ou quando as longitudes do nodo ascendente das duas órbitas coincidem, foram testados mas não obtivemos resultados pois esta é uma limitação do programa desenvolvido, sendo que a adaptação para estes casos pode ser sugerida como um trabalho futuro.

CAPITULO 6

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

6.1- CONCLUSÕES

Dois métodos de transferência orbital foram estudados, um para o caso coplanar e outro para o caso não coplanar. Estes métodos foram modificados e implementados o que gerou cinco programas para manobras orbitais bi-impulsivas com tempo fixo, quatro para o caso coplanar e um para o caso não coplanar.

Deve-se salientar, mais uma vez, que as soluções dos sistemas de equações extraídos de Lawden (1993) e de Eckel e Vinh (1984) não foram apresentadas por eles, sendo que as soluções destes sistemas de equações, as modificações realizadas e o estudo de diferentes casos são contribuições deste trabalho.

Os programas foram testados e constatou-se que eles são capazes de gerar resultados confiáveis. De uma forma geral, quanto menor o tempo gasto na manobra maior é o consumo de combustível e maior é a excentricidade da órbita de transferência, como era esperado, pois conforme o tempo diminui, a órbita de transferência tende a se tornar hiperbólica, portanto temos o aumento do consumo de combustível. Mas, se o tempo for muito grande, existe a possibilidade de encontrarmos soluções onde o consumo de combustível aumenta com o aumento do tempo. Isto geralmente ocorre quando o veículo espacial percorre um arco maior que 180° na órbita de transferência. Isto é facilmente visualizado quando consideramos órbitas coaxiais coplanares, onde a solução de mínimo consumo de combustível ocorre quando temos a transferência do tipo Hohmann, que realiza a manobra utilizando meio período da órbita de transferência, para um tempo maior teriamos um maior comsumo de combustível pois os impulsos aplicados deixam de ser na direção do movimento do veículo espacial.

Entretanto, devido ao fato dos sistemas de equações, presentes tanto no caso coplanar quanto no caso não coplanar, depender de métodos numéricos para sua solução, para alguns valores de tempo a solução obtida é apenas a solução numérica e não a solução física do problema. Dessa forma, antes de aceitar os resultados como solução deve-se analisar fisicamente se a manobra é possível.

Outra grande dificuldade foi obter os valores iniciais para a solução do problema, se esses valores não forem suficientemente próximos da solução o método não converge para ela, como foi comentado no Item 4.3.1. Portanto, novamente torna-se necessária uma análise física da manobra para poder avaliar quais são os valores iniciais mais adequados.

Contudo, podemos observar que no caso não coplanar, mesmo apresentando uma geometria mais complexa, o método converge mais facilmente e mais rapidamente que o método utilizado no caso coplanar. Isto é perfeitamente compreensível pois no caso coplanar lidamos com um sistema de equações composto por doze equações e doze incógnitas, já no caso não coplanar lidamos com um sistema de equações composto por três equações e três incógnitas, portanto muito mais simples de resolver. Alem disto, o vínculo de tempo utilizado no caso coplanar é muito mais complexo pois considera o tempo gasto nas órbita inicial e final e também o tempo gasto na órbita de transferência o que permitiu a obtenção de valores negativos de tempo gerando soluções numéricas sem significado físico. Já o caso não coplanar considera apenas o tempo gasto na órbita de transferência. Entretanto, como pode ser visto no Capítulo 4, o problema original foi desmembrado em quatro casos onde utilizamos diferentes vínculos de tempo, sendo que no caso mais simples consideramos apenas o tempo gasto na órbita de transferência e neste caso a obtenção de soluções tornou-se mais fácil.

Podemos observar também que, em alguns gráficos não foi possível traçar uma curva contínua pois os pontos são distantes uns dos outros sendo que poderiamos

ter uma falsa interpolação do comportamento do elemento orbital se unissemos estes pontos, já que realizamos um estudo discretizado onde nem todo domínio foi analisado. Portanto, a curva real pode conter particularidades que seriam assim desconsideradas.

Para poder entender este comportamento inesperado mostrado nestes gráficos, devemos nos questionar em primeiro lugar se a solução obtida existe. Se ela existe devemos investigar se ela é única e se ela é ótima. Porém, tanto Lawden quanto Eckel e Vinh afirmam em seus trabalhos que as soluções fornecidas pelos respectivos métodos são as soluções ótimas para a transferência bi-impulsiva com tempo fixo. Mas da análise dos resultados obtidos percebemos que uma investigação mais detalhada a este respeito se faz necessária. No gráfico mostrado na Figura 4.10 temos, se unirmos os pontos, para um mesmo valor de tempo mais de um valor da variação da velocidade. Isto nos faz questionar se o problema tem mais de uma solução e se a solução obtida é realmente a solução ótima. Entretanto, durante o desenvolvimento do presente trabalho, utilizando os mesmos valores iniciais não encontramos duas soluções para um mesmo valor de tempo. Desta forma deveriamos encontrar outros valores iniciais e verificar se é possível a obtenção de soluções diferentes para um mesmo valor de tempo quando utilizamos estes valores iniciais. Porém, este estudo ficará como sugestão para trabalhos futuros pois a análise necessária para encontrar esses valores iniciais não é trivial e portanto não haveria tempo suficiente para a realização deste estudo.

Entretanto, devemos salientar que a utilização dos programas desenvolvidos pode não fornecer a solução. Para determinados valores de tempo pode ser impossível obter solução pois para valores muito pequenos ou muito grandes do tempo gasto na manobra a solução pode não existir, ou então os algoritmos utilizados nos programas não convergem para a solução pois os valores iniciais utilizados podem estar longe demais da solução. Potanto, recomenda-se mais uma vez, uma análise física do problema, que leve em conta os períodos das órbitas em questão, para poder assim, estimar a faixa de valores para o tempo gasto na manobra na qual seja possível realizar a manobra.

6.2- SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para trabalhos futuros podemos citar as seguintes possibilidades.

Devido a dificuldade encontrada na obtenção dos valores iniciais para a solução do problemas, recomendamos a utilização da teoria de algoritmo genético para encontrar estes valores, tanto para o caso coplanar quanto para o caso não coplanar.

Recomendamos também, o emprego de redes neurais como um possível trabalho futuro.

No caso coplanar temos, além do vínculo de tempo, um vínculo de posição do veículo espacial que determina o local de início da manobra na órbita inicial e o local do término da manobra na órbita final. Isto permitiu o desmembramento do problema original em quatro problemas diferentes. Já no caso não coplanar, isto não ocorre. Portanto um possível trabalho futuro poderia ser a utilização de vínculos de posição além do vínculo de tempo.

Uma outra possibilidade, seria estudar o problema da minimização do tempo para um gasto de combustível fixo.

Uma última sugestão seria o estudo das transferências orbitais ótimas com tempo fixo porém considerando empuxo contínuo e possivelmente com erros nos propulsores

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brookes, C. J.; Smith, J. Optimal Rocket Trajectories in General Force-Fild. *Astronautica Acta,* 15 (3): 129-132, Feb. 1970.

Carter, T. E. Fuel-Optimal maneuvers of a Spacecraft Relative to a point in Circular Orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 7 (6): 710-716, 1984.

Contensou, P. Etude Théorique des Trajectoires Optimales dans un Champ de Gravitation. Application au cas d'un Centre D'attraction Unique. *Astronautica Acta,* 8 (2-3): 134-150, 1962.

Eckel, K. G. Optimal Impulsive Transfer with Time Constraint. *Acta Astronautica,* 9 (3): 139-146,1982.

Eckel, K. G. e VINH, N. X. Optimal Swtitching Conditions for Minimum Fuel Fixed Time Transfer Between non Coplanar Elliptical Orbits. *Acta Astronautica,* 11 (10/11): 621-631, 1984.

Eckenwiler, M. W. Closed-Form Lagrangian Multipliers for Coast Periods of Optimum Trajectories. *AIAA Journal,* 3 (6):1149-1151, June 1965.

Felipe, G. *Estudo de Trajetórias Espaciais.* (Relatório de Iniciação Científica) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, INPE, 1997.

Gobetz, F. W.; Doll, J. R. A Survey of Impulsive Trajectories. *AIAA Journal,* 7 (5): 801-834, May 1969.

Goddard, R. H. A Method of Reaching Extreme Altitudes. *Smithsonian Inst. Publ. Misc.* Collect. Vol. 71, 1919. Apud. Prado, 1989.

Gross, L. R.; Prussing, J. E. Optimal Multiple-Impulse Direct Ascent Fixed-Time Rendezvous. *AIAA Journal,* 12 (7): 885-889, July 1974.

Handelsman, M. Optimal Free-Space Fixed-Thrust Trajectories Using Impulsive Trajectories as Starting Iteratives. *AIAA Journal,* 4 (6): 1077-1082, June 1966.

Haynes, G. W. *Minimum Velocity Transfer Between Coplanar Circular Orbits Employing an Arbitrary Number of Impulses.* Martin Co, Set. 1960. (Rept. R-60-47)

Hempel, P. R. Representation of the Lagrangian Multipliers for Coast Periods of Optimum Trajectories. *AIAA Journal,* 4 (4): 729-730, April 1966.

Hoelker, R. F.; Silber, R. *The Bi-Elliptical Transfer Between Circular Co-Planar Orbits*. Alabama, Army Ballistic Missiles Agency, Redstone Arsenal, EUA, 1959.

Hohmann, W. *Die Erreichbarkeit Der Himmelskoprper.* Oldenbourg, Munique, 1925. Apud. Prado, 1989.

Ivashkin, V. V.; Skorokhodov, A. P. Definition and Analysis of Properties of Optimal Three-Impulse Point-to-Orbit Transfers Under Time Constraint. *Acta Astronautica,* 8 (1): 11-23, 1981.

Jesus, A. D. C. *Otimização de Manobras Orbitais com Propulsão Finita Sujeita a Perturbações na Dinâmica e a Não-Idealidade dos Propulsores.* (Tese de Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, INPE, 1997. Em andamento.

Jezewski, D. J.; Rozendaal, H. L. An Efficient Method for Calculating Optimal Free-Space N-Impulse Trajectories. *AIAA Journal,* 6 (11): 2160-2165, Nov. 1968.

Lawden, D. F. Minimal Rocket Trajectories. *ARS Journal,* 23 (6): 360-382, Nov.–Dec. 1953.

Lawden, D. F. Fundamentals of Space Navigation. *JBIS,* 13 (2): 87-101, 1954.

Lawden, D. F. Impulsive Transfer Between Elliptical Orbits. In: Leitmann, G. ed *Optimization Techniques*, New York, Academic Press, 1962, p. 323-351.

Lawden, D. F. *Optimal Trajectories for Space Navigation.* Butterworths, London, 1963.

Lawden, D. F. Time-Closed Optimal Transfer by Two Impulses Between Coplanar Elliptical Orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 16 (3): 585-587, May-June 1993.

Lee, V. A.; Florence, D. E. Minimum Time Ballistic Interplanetary Trajectories, *ARS Journal,* 31 (3): 435-437, March 1961.

Lion, P. M.; Handelsnman, M. Primer Vector on Fixed-Time Impulsive Trajectories, *AIAA Journal,* 6 (1): 127-132, Jan. 1968.

McCue, G. A. Quasilinearization Determination of Optimum Finite-Thrust Orbital Transfers. *AIAA Journal,* 5 (4): 755-763, April 1967.

Marchal, C. *Synthesis of the Analytical Results on Optimal Transfers Between Keplerian Orbits (time-free case).* Chatillon, ONERA, 1967. (TP 482)

Marec, J. P. *Optimal Space Trajectories.* New York, NY, Elsevier, 1979. 329p.

Prado, A. F. B. A. *Análise, Seleção e Implementação de Procedimentos que Visem Manobras Ótimas de Satélites Artificiais.* (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, INPE, 1989. 246p. (INPE-5003-TDL/397)

Prado, A. F. B. A.; Rios Neto, A. Um Estudo Bibliográfico sobre o Problema de Transferência de Órbitas. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas,* 15 (1): 65-78, 1993

Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P. *Numerical Recipes in FORTRAN (The Art of Scientific Computing)*, 2 ed. Cambridge University Press, 1992.

Prussing, J. E. Optimal Four-Impulse Fixed-Time Rendezvous in the Vicinity of a Circular Orbit. *AIAA Journal,* 7 (5): 928-935, May 1969.

Prussing, J. E. Optimal Two and Three Impulse Fixed-Time Rendezvous in the Vicinity of a Circular Orbit. *AIAA Journal,* 8 (7): 1221-1228, July 1970.

Prussing, J. E. e CHIU, J. H. Optimal Multiple-Impulse Time-Fixed Rendezvous Between Circular Orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 9 (1):17-22, Jan.-Feb. 1986.

Rodrigues, D. L. F. *Análise Dinâmica da Transferência Orbital.* (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, INPE, 1991. 187p. (INPE-5352-TDI/461).

Roth, H. L. Minimization of the Velocity Increment for a Bi-Elliptic Transfer with Plane Change. *Astronautica Acta,* 13 (2): 119-130, Mar.-Apr. 1967.

Santos, M. M. N. *Estudo da Influência dos Erros dos Propulsores em Manobras Orbitais Tridimensionais.* (Dissertação de Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, INPE, 1997. Em andamento.

Schulz, W. *Transferências Bi-Impulsivas Entre Órbitas Elípticas Não Coplanares Com Consumo Mínimo de Combustível.* (Dissertação de Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, INPE, 1997. 112p. (INPE-6385-TDI/604)

Shternfeld, *A.Soviet Space Science.* New York, Basil Books, 1959.

Subrahmanyam, M. B.Computation of Optimal Controls by Newton's Method Using a Discretized Jacobian. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* 9 (3): 371-374, May-June 1986.

Szebehely, V. G. *Theory of Orbits*. New York, Academic Press, 1967.

Taur, D. R.; Carroll, V. C.; Prussing, J. E. Optimal Impulsive Time-Fixed Orbital Rendezvous and Interception with Path Constraints. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18 (1): 54-60, Jan.-Feb. 1995.

Ting, L. Optimum Orbital Transfer by Several Impulses, *Astronautica Acta*, 6 (5): 256-265, May 1960.

Vinh, N. X., Integration of Primer Vector in a Central Force Fild. *Journal of the Optimization Theory and Applications*, 9 (1): 51-58, Jan. 1972.

Wang, K. Minimum Time Transfer Between Coplanar Circular Orbits by Two Impulses and Propulsion Requirements. *Astronautica Acta*, 9 (1): 12-19, 1963.

APÊNDICE A

PROGRAMA PRINCIPAL UTILIZADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA COPLANAR

O programa principal mostrado abaixo é o programa utilizado no caso 1, quando os pontos terminais são fixados, porém, os outros três casos utilizam este mesmo programa mas com pequenas alterações. Na realidade, é a sub-rotina funcv, mostrada no apêndice B, que muda conforme o caso estudado.

```
PROGRAM TCLOSED1
C
C   Última atualização : 28/11/96
C
C   ********** TCLOSED1 (Time Closed) **********
C                          Dt1+Dt+Dt2=T
C
C     Este programa fornece a solução para o problema da transferência
C   orbital bi-impulsiva ótima com tempo fixo (pontos terminais fixos),
C   utilizando as equações apresentadas por D. F. Lawden em "Time
C   Closed Optimal Transfer by Two Impulses Between Coplanar
C   Elliptical Orbits", Journal of Guidance, Control and Dynamics,
C   Vol.16, May-June 1993.
C
C     Obs.: Este programa utiliza sete arquivos de dados que devem ser
C   criados no formato F16.8, antes da execução do programa, com
C   exceção dos arquivos r.dat e g.dat que são gerados automaticamente.
C
C   1.Valores iniciais para a solução do problema. Arquivo x.dat, onde:
C
C   x(1) = e (excentricidade da órbita de transferência)
C   x(2) = l (semi-latus rectum da órbita de transferência)
C   x(3) = w (longitude do periapside da órbita de transferência)
C   x(4) = s1 (1/r1)
C   x(5) = teta1 (local onde aplica-se o primeiro impulso)
C   x(6) = z1 (sqrt[mi].z.sen fi é a componente da velocidade perpendi-
C        cular ao impulso que não é afetada pela propulsão)
C   x(7) = fi1 (direção do primeiro impulso)
C   x(8) = s2 (1/r2)
C   x(9) = teta2 (local onde aplica-se o segundo impulso)
C   x(10)= z2 (sqrt[mi].z.sen fi é a componente da velocidade perpendi-
C        cular ao impulso que não é afetada pela propulsão)
C   x(11)= fi2 (direção do segundo impulso)
C   x(12)= alfa (alfa=l^2.C/e onde C é uma constante definida por
C        Lawden em "Optimal Trajectories for Space Navigation",1963)
```

```
C
C    2.Valores de entrada, órbita inicial. Arquivo y.dat, onde:
C
C    y(1) = e1 (excentricidade da órbita inicial)
C    y(2) = l1 (semi-latus rectum da órbita inicial)
C    y(3) = w1 (longitude do periapside da órbita inicial)
C    y(4) = a1 (semi-eixo maior da órbita inicial)
C
C    3.Valores de entrada, órbita final. Arquivo z.dat, onde:
C
C    z(1) = e2 (excentricidade da órbita final)
C    z(2) = l2 (semi-latus rectum da órbita final)
C    z(3) = w2 (longitude do periapside da órbita final)
C    z(4) = a2 (semi-eixo maior da órbita final)
C
C    4.Valores de entrada. Arquivo k.dat, onde:
C
C    k(1) = mi (constante gravitacional)
C    k(2) = tempo (tempo gasto na execução da transferência)
C    k(3) = teta3 (posição final)
C
C    obs.: dependendo dos valores de tempo e u3, o problema pode não
C          ter solução!
C
C    5.Resultados. Arquivo r.dat, onde são mostrados todos os valores
C    de entrada e saída do programa, e também o teste que determina
C    se os resultados obtidos são validos ou não. Onde:
C
C    teta = teta2 - teta1
C    Dv1  = variação de velocidade gerada pelo primeiro impulso
C    Dv2  = variação de velocidade gerada pelo segundo impulso
C    Dvt  = Dv1 + Dv2
C
C    6.Valores numéricos das doze equações (vetor fvec), utilizando
C    para o cálculo os valores de saída ( r(i) = x(i) ). Arquivo f.dat.
C
C    7.Arquivo g.dat. Arquivo de dados para ser usado no programa
C    gráfico GRAPHER 1.09.
C
C    ****************************************************************
C
     INTEGER n,l,esc
     REAL*8 x,y,z,k,mi,tempo,u1,u2,u3,ui,uf,C,r1,r2,teste1,teste2,Dv1,
    &Dv2,Dvt,Dt1,Dt,Dt2,T,a,teta
     DIMENSION x(12),y(4),z(4),k(3),valin(12),valen1(4),valen2(4),
    &orb1(4),orb2(4),orb3(3)
     CHARACTER*100 text1,text2,text3,text4,text5,text6,text7,text8,
    &text9,text10,text11,text12,text13,text14,text15,text16,text17,
    &text18,text19,text20,text21,text22,text23,text24,text25,text26,
    &text27,text28,text29,text30,text31,text32,text33,text34,text35,
    &text36,text37,text38,text39,valin,valen1,valen2,orb1,orb2,orb3
     LOGICAL check
     COMMON /mycom/ y, z, mi, tempo, u1, u2, u3, ui, uf, Dt1, Dt, Dt2
```

```
      n=12
      OPEN (UNIT=1, FILE='x.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
     &RECL=16)
      OPEN (UNIT=2, FILE='y.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
     &RECL=16)
      OPEN (UNIT=3, FILE='z.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
     &RECL=16)
      OPEN (UNIT=4, FILE='k.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
     &RECL=16)
      OPEN (UNIT=5, FILE='r.DAT')
      OPEN (UNIT=6, FILE='f.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
     &RECL=16)
      OPEN (UNIT=7, FILE='g.DAT')
      REWIND (UNIT=1)
      REWIND (UNIT=2)
      REWIND (UNIT=3)
      REWIND (UNIT=4)
      REWIND (UNIT=5)
      REWIND (UNIT=6)
      REWIND (UNIT=7)
C
C     Vetores Texto das Órbitas Inicial e Final
C
      valen1(1)='e1 ( excentricidade da orbita inicial )'
      valen1(2)='l1 ( semi-latus rectum da orbita inicial)'
      valen1(3)='w1 (argumento do periapside da orbita inicial)'
      valen1(4)='a1 ( semi-eixo maior da orbita inicial )'
      valen2(1)='e2 ( excentricidade da orbita final )'
      valen2(2)='l2 ( semi-latus rectum da orbita final )'
      valen2(3)='w2 (argumento do periapside da orbita final)'
      valen2(4)='a2 ( semi-eixo maior da orbita final )'
      orb1(1)=' e1 '
      orb1(2)=' l1 '
      orb1(3)=' w1 '
      orb1(4)=' a1 '
      orb2(1)=' e2 '
      orb2(2)=' l2 '
      orb2(3)=' w2 '
      orb2(4)=' a2 '
      orb3(1)=' mi '
      orb3(2)='tempo'
      orb3(3)='teta3'
C
C     Vetor Texto dos Elementos da Órbita de Transferência
C
      valin(1)=' e '
      valin(2)=' l '
      valin(3)=' w '
      valin(4)=' s1 '
      valin(5)='teta1'
      valin(6)=' z1 '
      valin(7)=' fi1 '
      valin(8)=' s2 '
```

```
      valin(9)='teta2'
      valin(10)='  z2 '
      valin(11)=' fi2 '
      valin(12)=' alfa'
C
C     Variáveis de Texto
C
      text1=' Dados de Entrada'
      text2=' Orbita Inicial'
      text3=' Qual e o valor de '
      text4='? '
      text5=' Orbita Final'
      text6='Qual e o valor da constante gravitacional mi?'
      text7='Qual e o valor do tempo total gasto na manobra?'
      text8='Qual e a posicao final?'
      text9=' Valores Iniciais'
      text10=' Qual e o valor inicial de '
      text11='  RESULTADOS  '
      text12=' = '
      text13=' Dv1 '
      text14=' Dv2 '
      text15='  C  '
      text16='teste1'
      text17='teste2'
      text18='Como z1 e z2 satisfazem o teste os valores obtidos sao val
     &idos.'
      text19='Como z1 e\ou z2 nao satisfazem o teste os valores obtidos
     &nao sao validos.'
      text20=' Dvt '
      text21=' Obs.: Todos os angulos estao em radianos.'
      text22=' Dt1 '
      text23='  Dt '
      text24=' Dt2 '
      text25='  T  '
      text26=' |z1|'
      text27=' |z2|'
      text28='  VALORES DE ENTRADA'
      text29=' Orbita Inicial'
      text30=' Orbita Final'
      text31='                    PROGRAM TCLOSED1'
      text32='  a  '
      text33='Deseja alterar algum valor inicial ?'
      text34='Deseja alterar as orbitas inicial e final?'
      text35='Deseja alterar o valor de mi, de teta3, ou do tempo total
     &gasto na manobra?'
      text36='Aguarde.'
      text37='teta'
      text38='                        Dt1+Dt+Dt2=T'
      text39='Ultima atualizacao : 28/11/96'
C
C     Entrada dos Elementos das Órbitas Inicial e Final
C
      PRINT *,'                    PROGRAM TCLOSED1'
```

```
      PRINT *,'                    Dt1+Dt+Dt2=T'
      WRITE (5,'(A39)') text31
      WRITE (5,'(A39)') text38
      WRITE (*,*)
      WRITE (5,*)
      WRITE (*,*) text39
      WRITE (5,'(A39)') text39
      WRITE(*,*)
      WRITE(5,*)
      PRINT *,'  Este programa calcula transferencias  bi-impulsivas'
      PRINT *,'coplanares otimas com tempo fixo.'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text1
      WRITE(*,*)
      PRINT *,'  Para alterar o valor digite 1, caso contrario digite'
      PRINT *,'qualquer numero.'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text34
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       WRITE(*,*) text2
       WRITE(*,*)
       DO 20,I=1,4
        WRITE(*,'(A20,A47,A3)') text3,valen1(I),text4
        READ(2,10,REC=I) y(I)
10       FORMAT(F16.8)
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*) y(I)
        READ(*,*) esc
        IF (esc.EQ.1) THEN
         READ(*,*) y(I)
         WRITE(2,10,REC=I) y(I)
         WRITE(*,*)
        ENDIF
20      CONTINUE
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*) text5
       WRITE(*,*)
       DO 40 I=1,4
        WRITE(*,'(A20,A45,A3)') text3,valen2(I),text4
        READ(3,30,REC=I) z(I)
30       FORMAT(F16.8)
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*) z(I)
        READ(*,*) esc
        IF (esc.EQ.1) THEN
         READ(*,*) z(I)
         WRITE(3,30,REC=I) z(I)
         WRITE(*,*)
        ENDIF
40      CONTINUE
```

```
      ENDIF
      DO 44,I=1,4
       READ(2,43,REC=I) y(I)
43     FORMAT(F16.8)
44    CONTINUE
      DO 48,I=1,4
       READ(3,47,REC=I) z(I)
47     FORMAT(F16.8)
48    CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text35
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*) text6
       READ(4,50,REC=1) k(1)
50     FORMAT(F16.8)
       WRITE(*,*) k(1)
       READ(*,*) esc
       IF (esc.EQ.1) THEN
        READ(*,*) k(1)
        WRITE(4,50,REC=1) k(1)
        WRITE(*,*)
       ENDIF
       WRITE(*,*) text7
       READ(4,60,REC=2) k(2)
60     FORMAT(F16.8)
       WRITE(*,*) k(2)
       READ(*,*) esc
       IF (esc.EQ.1) THEN
        READ(*,*) k(2)
        WRITE(4,60,REC=2) k(2)
        WRITE(*,*)
       ENDIF
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*) text8
       READ(4,62,REC=3) k(3)
62     FORMAT(F16.8)
       WRITE(*,*) k(3)
       READ(*,*) esc
       IF (esc.EQ.1) THEN
        READ(*,*) k(3)
        WRITE(4,70,REC=3) k(3)
        WRITE(*,*)
       ENDIF
      ENDIF
      READ(4,63,REC=1) k(1)
63    FORMAT(F16.8)
      READ(4,67,REC=2) k(2)
67    FORMAT(F16.8)
      READ(4,70,REC=3) k(3)
70    FORMAT(F16.8)
      mi=k(1)
```

```
      tempo=k(2)
      u3=DACos((DCos(k(3)-z(3))+z(1))/(1+z(1)*DCos(k(3)-z(3))))
      WRITE(*,*)
C
C     Entrada dos Valores Iniciais Para a Resolução do Problema
C                       (vetor x(n))
C
      DO 85,I=1,12
       READ(1,80,REC=I) x(I)
 80    FORMAT(F16.8)
 85   CONTINUE
      WRITE(*,*) text33
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       WRITE(*,*) text9
       WRITE(*,*)
       DO 90,I=1,12
        WRITE(*,'(A27,A6,A3)') text10,valin(I),text4
        READ(1,80,REC=I) x(I)
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*) x(I)
        READ(*,*) esc
        IF (esc.EQ.1) THEN
         READ(*,*) x(I)
         WRITE(1,80,REC=I) x(I)
        ENDIF
 90     CONTINUE
      ENDIF
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text36
C
      CALL newt(x,n,check)
C
      C=x(12)*x(1)/x(2)**2
      a=x(2)/(1-x(1)**2)
      cosu1=(DCos(x(5)-y(3))+y(1))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3)))
      cosu2=(DCos(x(9)-x(3))+x(1))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3)))
      r1=y(4)*(1-y(1)*cosu1)
      r2=x(2)/(1-x(1)**2)*(1-x(1)*cosu2)
      teste1=ABS(C*r1**2-DSin(x(7)))/(DSqrt(r1)*ABS(DSin(x(7)))*DSqrt(
     &1-3*DSin(x(7))**2))
      teste2=ABS(C*r2**2-DSin(x(11)))/(DSqrt(r2)*ABS(DSin(x(11)))*DSqr
     &t(1-3*DSin(x(11))**2))
      Dv1=DSqrt(k(1))*(DSqrt(x(2))-DSqrt(y(2)))/(r1*DCos(x(7)))
      Dv2=DSqrt(k(1))*(DSqrt(z(2))-DSqrt(x(2)))/(r2*DCos(x(11)))
      Dvt=ABS(Dv1)+ABS(Dv2)
      T=Dt1+Dt+Dt2
      teta=x(9)-x(5)
C
      WRITE(5,*) text28
      DO 94,I=1,3
       WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') orb3(I),text12,k(I)
 94   CONTINUE
```

```
      WRITE(5,*)
      WRITE(5,*) text29
      DO 96,I=1,4
       WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') orb1(I),text12,y(I)
 96   CONTINUE
      WRITE(5,*)
      WRITE(5,*) text30
      DO 98,I=1,4
       WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') orb2(I),text12,z(I)
 98   CONTINUE
      WRITE(5,*)
C
C       Resultados
C
      WRITE(*,*)
      WRITE(5,*)
      WRITE(*,*) text11
      WRITE(5,*) text11
      WRITE(*,*)
      WRITE(5,*)
      WRITE(5,*) text21
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text32,text12,a
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text32,text12,a
      DO 110,I=1,12
       WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(I),text12,x(I)
C     (x.dat=1;r.dat=5)
       WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(I),text12,x(I)
*      WRITE(1,100,REC=I) x(I)
*100    FORMAT(F16.8)
 110  CONTINUE
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text13,text12,Dv1
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text13,text12,Dv1
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text14,text12,Dv2
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text14,text12,Dv2
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text20,text12,Dvt
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text20,text12,Dvt
*     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text15,text12,C
*     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text15,text12,C
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text37,text12,teta
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text37,text12,teta
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text22,text12,Dt1
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text22,text12,Dt1
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text23,text12,Dt
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text23,text12,Dt
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text24,text12,Dt2
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text24,text12,Dt2
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') text25,text12,T
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') text25,text12,T
      WRITE(*,*)
      WRITE(5,*)
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8,3x,A7,A4,F16.8)') text26,text12,ABS(x(6))
     &,text16,text12,teste1
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8,3x,A7,A4,F16.8)') text26,text12,ABS(x(6))
```

```
     &,text16,text12,teste1
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8,3x,A7,A4,F16.8)') text27,text12,ABS(x(10)
     &),text17,text12,teste2
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8,3x,A7,A4,F16.8)') text27,text12,ABS(x(10)
     &),text17,text12,teste2
      WRITE(*,*)
      WRITE(5,*)
      IF (ABS(x(6)).GE.teste1) THEN
        IF (ABS(x(10)).GE.teste2) THEN
          WRITE(*,*) text18
          WRITE(5,*) text18
        ENDIF
      ENDIF
      IF (ABS(x(6)).LE.teste1) THEN
        WRITE(*,*) text19
        WRITE(5,*) text19
      ENDIF
      IF (ABS(x(6)).GE.teste1) THEN
        IF (ABS(x(10)).LE.teste2) THEN
          WRITE(*,*) text19
          WRITE(5,*) text19
        ENDIF
      ENDIF
      WRITE(7,'(F13.7,1x,F10.8,1x,F13.7,1x,F11.8,1x,F10.8,1x,F11.8,1x,
     &F10.8,1x,F10.8,1x,F10.8,F11.8,1x,F10.8,1x,F10.8,1x,F10.8,1x,F10.8,
     &1x,F10.8,1x,F10.8,1x,F11.8,1x,F13.7,F13.7,1x,F13.7,1x,F13.7)') a,
     &x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),x(7),x(8),x(9),x(10),x(11),x(12),Dv1
     &,Dv2,Dvt,teta,Dt1,Dt,Dt2,T
C
      CLOSE (1)
      CLOSE (2)
      CLOSE (3)
      CLOSE (4)
      CLOSE (5)
      CLOSE (6)
      CLOSE (7)
      END
C
C     Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C
```

APÊNDICE B

SUB-ROTINA FUNCV (CASO COPLANAR)

A sub-rotina funcv fornece o vetor formado pelas doze equações que expressam as condições necessárias para optimalidade.

CASO 1: PONTOS TERMINAIS FIXOS

Neste caso, o vínculo de tempo é dado pela soma do tempo gasto na órbita inicial mais o tempo gasto na órbita de transferência mais o tempo gasto na órbita de chegada, portanto, a sub-rotina funcv é dada por:

```
SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
C
C     Esta subrotina fornece o vetor fvec(12) onde cada elemento
C    representa uma das equações do problema da transferência
C    bi-impulsiva com restrição de tempo proposto por Lawden(1993).
C
     INTEGER n,I
     REAL*8 x,y,z,fvec,mi,tempo,senui,senuf,senu1,senu2,ui,uf,u1,u2,
    &u3,Dt1,Dt,Dt2,h1,h2,m1,m2,n1,n2
     DIMENSION x(n),y(4),z(4),fvec(n)
     COMMON /mycom/ y, z, mi, tempo, u1, u2, u3, ui, uf, Dt1, Dt, Dt2
C
C
C     Equações Secundarias
C
     senui=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3)))
C
     senuf=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(9)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3)))
C
     senu1=DSqrt(1-y(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3)))
C
     senu2=DSqrt(1-z(1)**2)*DSin(x(9)-z(3))/(1+z(1)*DCos(x(9)-z(3)))
C
     ui=DACos((x(1)+DCos(x(5)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3))))
C
     uf=DACos((x(1)+DCos(x(9)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3))))
C
     u1=DACos((y(1)+DCos(x(5)-y(3)))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3))))
C
     u2=DACos((z(1)+DCos(x(9)-z(3)))/(1+z(1)*DCos(x(9)-z(3))))
```

```
C
      Dt1=y(4)**(1.5)*(u1-y(1)*senu1)/DSqrt(mi)
C
      Dt=(x(2)/(1-x(1)**2))**(1.5)*((uf-x(1)*senuf)-(ui-x(1)*senui))/DSq
     &rt(mi)
C
      Dt2=z(4)**(1.5)*((u3-z(1)*DSin(u3))-(u2-z(1)*senu2))/DSqrt(mi)
C
      h1=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(4)*x(6)))+(x(6)-(x(4)/x(6)))*DSin(x(7))
C
      h2=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(8)*x(10)))+(x(10)-(x(8)/x(10)))*DSin(x(
     &11))
C
      m1=DCos(x(5)-x(3)-x(7))+1/(DSqrt(x(2))*x(6))*DCos(x(5)-x(3))*DCos(
     &x(7))+x(12)*(1/DTan(x(5)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6))+1/(1-x(1)**
     &2)*(2*x(1)/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))-1/DTan(x(5)-x(3))))
C
      m2=DCos(x(9)-x(3)-x(11))+1/(DSqrt(x(2))*x(10))*DCos(x(9)-x(3))*DCo
     &s(x(11))+x(12)*(1/DTan(x(9)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10))+1/(1-x(
     &1)**2)*(2*x(1)/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))-1/DTan(x(9)-x(3))))
C
      n1=DCos(x(7))*(1+(x(2)*x(4)+1)/(DSqrt(x(2))*x(6)))+x(12)*((x(2)*x(
     &4)+1)/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6)*DSin(x(5)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(1)*
     &1/DTan(x(5)-x(3))-2/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))))
C
      n2=DCos(x(11))*(1+(x(2)*x(8)+1)/(DSqrt(x(2))*x(10)))+x(12)*((x(2)*
     &x(8)+1)/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10)*DSin(x(9)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(
     &1)*1/DTan(x(9)-x(3))-2/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))))
C
C     Vetor de Equações (sistema de equações 12x12, vetor fvec(n))
C
      fvec(1)=Dt1+Dt+Dt2-tempo
      fvec(2)=1-y(2)*x(4)+y(1)*DCos(x(5)-y(3))
      fvec(3)=1-x(2)*x(4)+x(1)*DCos(x(5)-x(3))
      fvec(4)=y(1)*DSin(x(5)-y(3))-(y(2)*x(4)-DSqrt(y(2))*x(6))*DTan(x(7
     &))
      fvec(5)=x(1)*DSin(x(5)-x(3))-(x(2)*x(4)-DSqrt(x(2))*x(6))*DTan(x(7
     &))
      fvec(6)=1-z(2)*x(8)+z(1)*DCos(x(9)-z(3))
      fvec(7)=1-x(2)*x(8)+x(1)*DCos(x(9)-x(3))
      fvec(8)=z(1)*DSin(x(9)-z(3))-(z(2)*x(8)-DSqrt(z(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(9)=x(1)*DSin(x(9)-x(3))-(x(2)*x(8)-DSqrt(x(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(10)=h1-h2
      fvec(11)=m1-m2+3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)**2*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**
     &2))
      fvec(12)=n1-n2-3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**2))
C
      DO 20,I=1,12
        WRITE(6,10,REC=I) fvec(I)
 10     FORMAT(F16.8)
 20   CONTINUE
```

```
C
      RETURN
      END
C
C     Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C
```

CASO 2: PONTO TERMINAL INICIAL FIXO

Neste caso, o vínculo de tempo é dado pela soma do tempo gasto na órbita inicial mais o tempo gasto na órbita de transferência, e a sub-rotina funcv é dada por:

```
SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
C
C     Esta subrotina fornece o vetor fvec(12) onde cada elemento
C    representa uma das equações do problema da transferência
C    bi-impulsiva com restrição de tempo proposto por Lawden(1993).
C
      INTEGER n,I
      REAL*8 x,y,z,fvec,mi,tempo,senui,senuf,senu1,ui,uf,u1,Dt1,Dt,h1,h2
     &,m1,m2,n1,n2
      DIMENSION x(n),y(4),z(4),fvec(n)
      COMMON /mycom/ y, z, mi, tempo, u1, ui, uf, Dt1, Dt
C
C     Equações Secundarias
C
      senui=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3)))
C
      senuf=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(9)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3)))
C
      senu1=DSqrt(1-y(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3)))
C
      senu2=DSqrt(1-z(1)**2)*DSin(x(9)-z(3))/(1+z(1)*DCos(x(9)-z(3)))
C
      ui=DACos((x(1)+DCos(x(5)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3))))
C
      uf=DACos((x(1)+DCos(x(9)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3))))
C
      u1=DACos((y(1)+DCos(x(5)-y(3)))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3))))
C
      Dt1=y(4)**(1.5)*(u1-y(1)*senu1)/DSqrt(mi)
C
      Dt=(x(2)/(1-x(1)**2))**(1.5)*((uf-x(1)*senuf)-(ui-x(1)*senui))/DSq
     &rt(mi)
C
```

```
      h1=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(4)*x(6)))+(x(6)-(x(4)/x(6)))*DSin(x(7))
C
      h2=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(8)*x(10)))+(x(10)-(x(8)/x(10)))*DSin(x(
     &11))
C
      m1=DCos(x(5)-x(3)-x(7))+1/(DSqrt(x(2))*x(6))*DCos(x(5)-x(3))*DCos(
     &x(7))+x(12)*(1/DTan(x(5)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6))+1/(1-x(1)**
     &2)*(2*x(1)/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))-1/DTan(x(5)-x(3))))
C
      m2=DCos(x(9)-x(3)-x(11))+1/(DSqrt(x(2))*x(10))*DCos(x(9)-x(3))*DCo
     &s(x(11))+x(12)*(1/DTan(x(9)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10))+1/(1-x(
     &1)**2)*(2*x(1)/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))-1/DTan(x(9)-x(3))))
C
      n1=DCos(x(7))*(1+(x(2)*x(4)+1)/(DSqrt(x(2))*x(6)))+x(12)*((x(2)*x(
     &4)+1)/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6)*DSin(x(5)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(1)*
     &1/DTan(x(5)-x(3))-2/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))))
C
      n2=DCos(x(11))*(1+(x(2)*x(8)+1)/(DSqrt(x(2))*x(10)))+x(12)*((x(2)*
     &x(8)+1)/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10)*DSin(x(9)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(
     &1)*1/DTan(x(9)-x(3))-2/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))))
C
C     Vetor de Equações (sistema de equações 12x12, vetor fvec(n))
C
      fvec(1)=Dt1+Dt-tempo
      fvec(2)=1-y(2)*x(4)+y(1)*DCos(x(5)-y(3))
      fvec(3)=1-x(2)*x(4)+x(1)*DCos(x(5)-x(3))
      fvec(4)=y(1)*DSin(x(5)-y(3))-(y(2)*x(4)-DSqrt(y(2))*x(6))*DTan(x(7
     &))
      fvec(5)=x(1)*DSin(x(5)-x(3))-(x(2)*x(4)-DSqrt(x(2))*x(6))*DTan(x(7
     &))
      fvec(6)=1-z(2)*x(8)+z(1)*DCos(x(9)-z(3))
      fvec(7)=1-x(2)*x(8)+x(1)*DCos(x(9)-x(3))
      fvec(8)=z(1)*DSin(x(9)-z(3))-(z(2)*x(8)-DSqrt(z(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(9)=x(1)*DSin(x(9)-x(3))-(x(2)*x(8)-DSqrt(x(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(10)=h1-h2
      fvec(11)=m1-m2+3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)**2*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**
     &2))
      fvec(12)=n1-n2-3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**2))
C
      DO 20,I=1,12
        WRITE(6,10,REC=I) fvec(I)
 10     FORMAT(F16.8)
 20   CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C     Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C
```

CASO 3: PONTO TERMINAL FINAL FIXO

Agora o vínculo de tempo é dado pela soma do tempo gasto na órbita de transferência mais o tempo gasto na órbita final, e a sub-rotina funcv é dada por:

```
SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
C
C     Esta subrotina fornece o vetor fvec(12) onde cada elemento
C    representa uma das equações do problema da transferência
C    bi-impulsiva com restrição de tempo proposto por Lawden(1993).
C
     INTEGER n,I
     REAL*8 x,y,z,fvec,mi,tempo,senui,senuf,senu1,senu2,ui,uf,u1,u2,u3,
    &Dt,Dt2,h1,h2,m1,m2,n1,n2
     DIMENSION x(n),y(4),z(4),fvec(n)
     COMMON /mycom/ y, z, mi, tempo, u1, u2, u3, ui, uf, Dt, Dt2
C
C     Equações Secundarias
C
     senui=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3)))
C
     senuf=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(9)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3)))
C
     senu1=DSqrt(1-y(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3)))
C
     senu2=DSqrt(1-z(1)**2)*DSin(x(9)-z(3))/(1+z(1)*DCos(x(9)-z(3)))
C
     ui=DACos((x(1)+DCos(x(5)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3))))
C
     uf=DACos((x(1)+DCos(x(9)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3))))
C
     u1=DACos((y(1)+DCos(x(5)-y(3)))/(1+y(1)*DCos(x(5)-y(3))))
C
     u2=DACos((z(1)+DCos(x(9)-z(3)))/(1+z(1)*DCos(x(9)-z(3))))
C
     Dt=(x(2)/(1-x(1)**2))**(1.5)*((uf-x(1)*senuf)-(ui-x(1)*senui))/DSq
    &rt(mi)
C
     Dt2=z(4)**(1.5)*((u3-z(1)*DSin(u3))-(u2-z(1)*senu2))/DSqrt(mi)
C
     h1=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(4)*x(6)))+(x(6)-(x(4)/x(6)))*DSin(x(7))
C
     h2=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(8)*x(10)))+(x(10)-(x(8)/x(10)))*DSin(x(
    &11))
C
     m1=DCos(x(5)-x(3)-x(7))+1/(DSqrt(x(2))*x(6))*DCos(x(5)-x(3))*DCos(
    &x(7))+x(12)*(1/DTan(x(5)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6))+1/(1-x(1)**
    &2)*(2*x(1)/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))-1/DTan(x(5)-x(3))))
C
```

```
      m2=DCos(x(9)-x(3)-x(11))+1/(DSqrt(x(2))*x(10))*DCos(x(9)-x(3))*DCo
     &s(x(11))+x(12)*(1/DTan(x(9)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10))+1/(1-x(
     &1)**2)*(2*x(1)/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))-1/DTan(x(9)-x(3))))
C
      n1=DCos(x(7))*(1+(x(2)*x(4)+1)/(DSqrt(x(2))*x(6)))+x(12)*((x(2)*x(
     &4)+1)/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6)*DSin(x(5)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(1)*
     &1/DTan(x(5)-x(3))-2/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))))
C
      n2=DCos(x(11))*(1+(x(2)*x(8)+1)/(DSqrt(x(2))*x(10)))+x(12)*((x(2)*
     &x(8)+1)/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10)*DSin(x(9)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(
     &1)*1/DTan(x(9)-x(3))-2/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))))
C
C       Vetor de Equações (sistema de equações 12x12, vetor fvec(n))
C
      fvec(1)=Dt+Dt2-tempo
      fvec(2)=1-y(2)*x(4)+y(1)*DCos(x(5)-y(3))
      fvec(3)=1-x(2)*x(4)+x(1)*DCos(x(5)-x(3))
      fvec(4)=y(1)*DSin(x(5)-y(3))-(y(2)*x(4)-DSqrt(y(2))*x(6))*DTan(x(7
     &))
      fvec(5)=x(1)*DSin(x(5)-x(3))-(x(2)*x(4)-DSqrt(x(2))*x(6))*DTan(x(7
     &))
      fvec(6)=1-z(2)*x(8)+z(1)*DCos(x(9)-z(3))
      fvec(7)=1-x(2)*x(8)+x(1)*DCos(x(9)-x(3))
      fvec(8)=z(1)*DSin(x(9)-z(3))-(z(2)*x(8)-DSqrt(z(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(9)=x(1)*DSin(x(9)-x(3))-(x(2)*x(8)-DSqrt(x(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(10)=h1-h2
      fvec(11)=m1-m2+3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)**2*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**
     &2))
      fvec(12)=n1-n2-3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**2))
C
      DO 20,I=1,12
        WRITE(6,10,REC=I) fvec(I)
 10     FORMAT(F16.8)
 20   CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C       Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C
```

CASO 4: PONTOS TERMINAIS LIVRES

Neste último caso o vínculo de tempo é dado apenas pelo tempo gasto na órbita de transferência, e a sub-rotina funcv é dada por:

```
SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
C
C     Esta subrotina fornece o vetor fvec(12) onde cada elemento
C    representa uma das equações do problema da transferência
C    bi-impulsiva com restrição de tempo proposto por Lawden(1993).
C
     INTEGER n,I
     REAL*8 x,y,z,fvec,mi,tempo,senui,senuf,ui,uf,Dt,h1,h2,m1,m2,n1,n2
     DIMENSION x(n),y(4),z(4),fvec(n)
     COMMON /mycom/ y, z, mi, tempo, ui, uf, Dt
C
C     Equações Secundarias
C
     senui=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(5)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3)))
C
     senuf=DSqrt(1-x(1)**2)*DSin(x(9)-x(3))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3)))
C
     ui=DACos((x(1)+DCos(x(5)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(5)-x(3))))
C
     uf=DACos((x(1)+DCos(x(9)-x(3)))/(1+x(1)*DCos(x(9)-x(3))))
C
     Dt=(x(2)/(1-x(1)**2))**(1.5)*((uf-x(1)*senuf)-(ui-x(1)*senui))/DSq
    &rt(mi)
C
     h1=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(4)*x(6)))+(x(6)-(x(4)/x(6)))*DSin(x(7))
C
     h2=-(x(12)*x(1)/(x(2)**2*x(8)*x(10)))+(x(10)-(x(8)/x(10)))*DSin(x(
    &11))
C
     m1=DCos(x(5)-x(3)-x(7))+1/(DSqrt(x(2))*x(6))*DCos(x(5)-x(3))*DCos(
    &x(7))+x(12)*(1/DTan(x(5)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6))+1/(1-x(1)**
    &2)*(2*x(1)/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))-1/DTan(x(5)-x(3))))
C
     m2=DCos(x(9)-x(3)-x(11))+1/(DSqrt(x(2))*x(10))*DCos(x(9)-x(3))*DCo
    &s(x(11))+x(12)*(1/DTan(x(9)-x(3))/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10))+1/(1-x(
    &1)**2)*(2*x(1)/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))-1/DTan(x(9)-x(3))))
C
     n1=DCos(x(7))*(1+(x(2)*x(4)+1)/(DSqrt(x(2))*x(6)))+x(12)*((x(2)*x(
    &4)+1)/(x(2)**(1.5)*x(4)*x(6)*DSin(x(5)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(1)*
    &1/DTan(x(5)-x(3))-2/(x(2)*x(4)*DSin(x(5)-x(3)))))
C
     n2=DCos(x(11))*(1+(x(2)*x(8)+1)/(DSqrt(x(2))*x(10)))+x(12)*((x(2)*
    &x(8)+1)/(x(2)**(1.5)*x(8)*x(10)*DSin(x(9)-x(3)))+1/(1-x(1)**2)*(x(
    &1)*1/DTan(x(9)-x(3))-2/(x(2)*x(8)*DSin(x(9)-x(3)))))
C
C     Vetor de Equações (sistema de equações 12x12, vetor fvec(n))
C
     fvec(1)=Dt-tempo
     fvec(2)=1-y(2)*x(4)+y(1)*DCos(x(5)-y(3))
     fvec(3)=1-x(2)*x(4)+x(1)*DCos(x(5)-x(3))
     fvec(4)=y(1)*DSin(x(5)-y(3))-(y(2)*x(4)-DSqrt(y(2))*x(6))*DTan(x(7
    &))
     fvec(5)=x(1)*DSin(x(5)-x(3))-(x(2)*x(4)-DSqrt(x(2))*x(6))*DTan(x(7
```

```
     &))
      fvec(6)=1-z(2)*x(8)+z(1)*DCos(x(9)-z(3))
      fvec(7)=1-x(2)*x(8)+x(1)*DCos(x(9)-x(3))
      fvec(8)=z(1)*DSin(x(9)-z(3))-(z(2)*x(8)-DSqrt(z(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(9)=x(1)*DSin(x(9)-x(3))-(x(2)*x(8)-DSqrt(x(2))*x(10))*DTan(x(
     &11))
      fvec(10)=h1-h2
      fvec(11)=m1-m2+3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)**2*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**
     &2))
      fvec(12)=n1-n2-3*DSqrt(mi)*x(12)*x(1)*Dt/(x(2)**(1.5)*(1-x(1)**2))
C
      DO 20,I=1,12
        WRITE(6,10,REC=I) fvec(I)
 10     FORMAT(F16.8)
 20   CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C       Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C
```

APÊNDICE C

PROGRAMA PRINCIPAL UTILIZADO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO COPLANAR

```
PROGRAM FIX_T_T
C
C   Última atualização : 22/6/1997
C
C   ********************** FIX_T_T (Fixed Time) **********************
C
C     Este programa fornece a solução para o problema da transferência
C   orbital bi-impulsiva não coplanar com restrição de tempo e mínimo
C   combustível (entre pontos terminais livres), utilizando as
C   equações apresentadas por K. G. Eckel e N. X. Vinh em "Optimal
C   Switching Conditions for Minimum Fuel Fixed Time Transfer Between
C   Non Coplanar Elliptical Orbits", Acta Astronautica, Vol. 11,
C   No. 10/11 pp 621-631, 1984.
C
C     Obs.: Este programa utiliza sete arquivos de dados que devem ser
C   criados no formato F16.8, antes da execução do programa, com
C   exceção do arquivo r.dat que é gerado automaticamente.
C
C   1.Valores iniciais para a solução do problema. Arquivo x.dat, onde:
C
C   x(1) =  l  (semi-latus rectum da órbita de transferência)
C   x(2) = alfa1 (anomalia verdadeira no plano da órbita inicial)
C   x(3) = alfa2 (anomalia verdadeira no plano da órbita final)
C
C   2.Valores de entrada, órbita inicial. Arquivo y.dat, onde:
C
C   y(1) = e1 (excentricidade da órbita inicial)
C   y(2) = l1 (semi-latus rectum da órbita inicial)
C   y(3) = w1 (longitude do periapside da órbita inicial)
C   y(4) = a1 (semi-eixo maior da órbita inicial)
C   y(5) = i1 (inclinacao da orbita inicial)
C   y(6) = O1 (longitude do nodo ascendente da orbita inicial)
C
C   3.Valores de entrada, órbita final. Arquivo z.dat, onde:
C
C   z(1) = e2 (excentricidade da órbita final)
C   z(2) = l2 (semi-latus rectum da órbita final)
C   z(3) = w2 (longitude do periapside da órbita final)
C   z(4) = a2 (semi-eixo maior da órbita final)
C   z(5) = i2 (inclinacao da orbita inicial)
C   z(6) = O2 (longitude do nodo ascendente da órbita inicial)
C
C   4.Valores de entrada. Arquivo k.dat, onde:
C
C   k(1) = mi (constante gravitacional)
```

```
C    k(2) = t0 (tempo máximo gasto na execução da transf.)
C
C    obs.: dependendo do valor de t0, o problema pode não ter
C          solução!
C
C    5.Resultados. Arquivo r.dat, onde são mostrados todos os valores
C    de entrada e saída do programa.
C
C    6.Valores numéricos das três equações (vetor fvec), utilizando
C    para o cálculo os valores de saída ( r(i) = x(i) ).
C
C    7.Arquivo g.dat. Arquivo de dados para ser usado no programa
C    gráfico GRAPHER 1.09.
C
C    ************************************************************************
C
     INTEGER n,I,esc,P,Q,R
     REAL*8 x,y,z,k,mi,r1,r2,beta1,beta2,delta,f1,f2,e,gama1,gama2,inc,
    &u1,u1a,u2,u2a,x1,x2,y1,y2,t,RT1,RT2,R1VR2,MODULO,vnt,vdz,vdx,
    &vntVvdz,Ot,RT1EM,MODRT1,MODM,w,M,A,B,C,t0,fi,semieixo,V1,V2,DVt,
    &senu1,senu2,cosu1,cosu2
     DIMENSION x(3),y(6),z(6),k(2),valin(16),valen1(6),valen2(6),
    &orb1(6),orb2(6),orb3(2),orb4(3),RT1(3),RT2(3),R1VR2(3),vnt(3),
    &vdz(3),vntVvdz(3),vdx(3),M(3),A(3,3),B(3,3),C(3,3)
     CHARACTER*100 text1,text2,text3,text4,text5,text6,text7,text8,
    &text9,text10,text11,text12,text13,text14,text15,text16,text17,
    &text18,text19,text20,text21,valin,valen1,valen2,orb1,orb2,orb3,
    &orb4
     LOGICAL check
     COMMON /mycom/ y,z,mi,t0,semieixo,t,beta1,beta2,r1,r2,fi,f1,f2,e,
    &delta,gama1,gama2,V1,V2
     n=3
     OPEN (UNIT=1, FILE='x.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
    &RECL=16)
     OPEN (UNIT=2, FILE='y.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
    &RECL=16)
     OPEN (UNIT=3, FILE='z.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
    &RECL=16)
     OPEN (UNIT=4, FILE='k.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
    &RECL=16)
     OPEN (UNIT=5, FILE='r.DAT')
     OPEN (UNIT=6, FILE='f.DAT',ACCESS='DIRECT',FORM='FORMATTED',
    &RECL=16)
     OPEN (UNIT=7, FILE='g.DAT')
     REWIND (UNIT=1)
     REWIND (UNIT=2)
     REWIND (UNIT=3)
     REWIND (UNIT=4)
     REWIND (UNIT=5)
     REWIND (UNIT=6)
     REWIND (UNIT=7)
C
C      Vetores Texto das Órbitas Inicial e Final
```

```
C
      valen1(1)='e1 ( excentricidade da orbita inicial )'
      valen1(2)='l1 ( semi-latus rectum da orbita inicial)'
      valen1(3)='w1 (argumento do periapside da orbita inicial)'
      valen1(4)='a1 ( semi-eixo maior da orbita inicial )'
      valen1(5)='i1 ( inclinacao da orbita inicial )'
      valen1(6)='O1 ( longitude do nodo ascendente )'
      valen2(1)='e2 ( excentricidade da orbita final )'
      valen2(2)='l2 ( semi-latus rectum da orbita final )'
      valen2(3)='w2 (argumento do periapside da orbita final)'
      valen2(4)='a2 ( semi-eixo maior da orbita final )'
      valen2(5)='i2 ( inclinacao da orbita final )'
      valen2(6)='O2 ( longitude do nodo ascendente )'
      orb1(1)=' e1 '
      orb1(2)=' l1 '
      orb1(3)=' w1 '
      orb1(4)=' a1 '
      orb1(5)=' i1 '
      orb1(6)=' O1 '
      orb2(1)=' e2 '
      orb2(2)=' l2 '
      orb2(3)=' w2 '
      orb2(4)=' a2 '
      orb2(5)=' i2 '
      orb2(6)=' O2 '
      orb3(1)=' mi '
      orb3(2)='tempo'
      orb4(1)=' do semi-latus rectum da orbita de transferencia '
      orb4(2)=' da anomalia verdadeira do ponto I1 na orbita inicial '
      orb4(3)=' da anomalia verdadeira do ponto I2 na orbita final '
C
C     Vetor Texto dos Elementos da Órbita de Transferência
C
      valin(1)=' e '
      valin(2)=' l '
      valin(3)=' w '
      valin(4)=' a '
      valin(5)=' i '
      valin(6)=' O '
      valin(7)='alfa1'
      valin(8)='alfa2'
      valin(9)=' f1 '
      valin(10)=' f2 '
      valin(11)=' Dv1 '
      valin(12)=' Dv2 '
      valin(13)=' Dvt '
      valin(14)='tempo'
      valin(15)='gama1'
      valin(16)='gama2'
C
C     Variáveis de Texto
C
      text1=' Dados de Entrada'
```

```
      text2=' Orbita Inicial'
      text3=' Qual e o valor de '
      text4='? '
      text5=' Orbita Final'
      text6='Qual e o valor da constante gravitacional mi?'
      text7='Qual e o valor do maximo tempo de transferencia?'
      text8=' Valores Iniciais'
      text9=' Qual e o valor inicial'
      text10=' RESULTADOS '
      text11=' = '
      text12=' Obs.: Todos os angulos estao em radianos.'
      text13=' VALORES DE ENTRADA'
      text14=' Orbita Inicial'
      text15=' Orbita Final'
      text16='                    PROGRAM FIX_T_T'
      text17='Deseja alterar algum valor inicial ?'
      text18='Deseja alterar as orbitas inicial e final?'
      text19='Deseja alterar a constante gravitacional ou o tempo total
     &gasto na manobra?'
      text20='Aguarde.'
      text21=' Ultima atualizacao : 22/6/1997'
C
C     Entrada dos Elementos das Órbitas Inicial e Final
C
      PRINT *,'                    PROGRAM FIX_T_T'
      WRITE (5,'(A39)') text16
      WRITE(*,*)
      WRITE (*,*) text21
      WRITE(*,*)
      WRITE(5,*)
      WRITE (5,'(A39)') text21
      WRITE(5,*)
      PRINT *,' Este programa calcula transferencias  bi-impulsivas'
      PRINT *,' nao coplanares otimas com limite de tempo.'
      WRITE(*,*)
      PRINT *,' Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text1
      WRITE(*,*)
      PRINT *,'Para alterar o valor digite 1, caso contrario digite'
      PRINT *,'qualquer numero.'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text18
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*) text2
       WRITE(*,*)
       DO 20,I=1,6
        WRITE(*,'(A20,A47,A3)') text3,valen1(I),text4
        READ(2,10,REC=I) y(I)
10      FORMAT(F16.8)
```

```
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) y(I)
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       READ(*,*) y(I)
       WRITE(2,10,REC=I) y(I)
       WRITE(*,*)
      ENDIF
20    CONTINUE
     WRITE(*,*)
     WRITE(*,*) text5
     WRITE(*,*)
     DO 40 I=1,6
      WRITE(*,'(A20,A45,A3)') text3,valen2(I),text4
      READ(3,30,REC=I) z(I)
30     FORMAT(F16.8)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) z(I)
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       READ(*,*) z(I)
       WRITE(3,30,REC=I) z(I)
       WRITE(*,*)
      ENDIF
40    CONTINUE
    ENDIF
    DO 44,I=1,6
     READ(2,43,REC=I) y(I)
43    FORMAT(F16.8)
44   CONTINUE
    DO 48,I=1,6
     READ(3,47,REC=I) z(I)
47    FORMAT(F16.8)
48   CONTINUE
    WRITE(*,*)
    WRITE(*,*) text19
    READ(*,*) esc
    IF (esc.EQ.1) THEN
     WRITE(*,*)
     WRITE(*,*) text6
     READ(4,50,REC=1) k(1)
50    FORMAT(F16.8)
     WRITE(*,*) k(1)
     READ(*,*) esc
     IF (esc.EQ.1) THEN
      READ(*,*) k(1)
      WRITE(4,50,REC=1) k(1)
      WRITE(*,*)
     ENDIF
     WRITE(*,*) text7
     READ(4,60,REC=2) k(2)
60    FORMAT(F16.8)
     WRITE(*,*) k(2)
```

```
      READ(*,*) esc
      IF (esc.EQ.1) THEN
       READ(*,*) k(2)
       WRITE(4,60,REC=2) k(2)
       WRITE(*,*)
      ENDIF
     ENDIF
     READ(4,63,REC=1) k(1)
 63  FORMAT(F16.8)
     READ(4,67,REC=2) k(2)
 67  FORMAT(F16.8)
     mi=k(1)
     t0=k(2)
C
C     Entrada dos Valores Iniciais Para a Resolução do Problema
C                    (vetor x(n))
C
     DO 75,I=1,3
      READ(1,80,REC=I) x(I)
 70   FORMAT(F16.8)
 75  CONTINUE
     WRITE(*,*) text17
     READ(*,*) esc
     IF (esc.EQ.1) THEN
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) text8
      WRITE(*,*)
      DO 90,I=1,3
       WRITE(*,'(A24,A53,A3)') text9,orb4(I),text4
       READ(1,80,REC=I) x(I)
 80     FORMAT(F16.8)
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*) x(I)
       READ(*,*) esc
       IF (esc.EQ.1) THEN
        READ(*,*) x(I)
        WRITE(1,80,REC=I) x(I)
       ENDIF
 90    CONTINUE
     ENDIF
C
     CALL newt(x,n,check)
C
     WRITE(5,*) text13
     DO 94,I=1,2
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') orb3(I),text11,k(I)
 94  CONTINUE
     WRITE(5,*)
     WRITE(5,*) text14
     DO 96,I=1,6
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') orb1(I),text11,y(I)
 96  CONTINUE
     WRITE(5,*)
```

```
      WRITE(5,*) text15
      DO 98,I=1,6
       WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') orb2(I),text11,z(I)
 98   CONTINUE
      WRITE(5,*)
C
      inc=y(5)+gama1
      DVt=V1+V2
C
C     Transformação dos Elementos Keplerianos em Cartesianos
C
C
C     Vetor Posição do Ponto de Aplicação do Primeiro Impulso
C              no Referêncial Inercial
C
      cosu1=(DCos(x(2))+y(1))/(1+y(1)*DCos(x(2)))
      senu1=DSqrt(1-y(1)**2)*DSin(x(2))/(1+y(1)*DCos(x(2)))
      u1a=DATan2(senu1,cosu1)
      IF (u1a.LT.0) THEN
       u1=2*3.1415926536+u1a
      ELSE
       u1=u1a
      ENDIF
      x1=y(4)*(DCos(u1)-y(1))
      y1=y(4)*DSqrt(1-y(1)**2)*DSin(u1)
C
C     ROT1:
C
      A(1,1)=DCos(-y(6))*DCos(-y(3))-DSin(-y(6))*DCos(-y(5))*DSin(-y(3))
      A(1,2)=-DCos(-y(6))*DSin(-y(3))-DSin(-y(6))*DCos(-y(5))*DCos(-y(3
     &)
      A(1,3)=DSin(-y(6))*DSin(-y(5))
      A(2,1)=DSin(-y(6))*DCos(-y(3))+DCos(-y(6))*DCos(-y(5))*DSin(-y(3))
      A(2,2)=-DSin(-y(6))*DSin(-y(3))+DCos(-y(6))*DCos(-y(5))*DCos(-y(3
     &)
      A(2,3)=-DCos(-y(6))*DSin(-y(5))
      A(3,1)=DSin(-y(5))*DSin(-y(3))
      A(3,2)=DSin(-y(5))*DCos(-y(3))
      A(3,3)=DCos(-y(5))
C
C     X1
C
      B(1,1)=x1
      B(2,1)=y1
      B(3,1)=0
C
      P=3
      Q=3
      R=1
C
      CALL multi(A,B,C,P,Q,R)
C
      RT1(1)=C(1,1)
```

```
      RT1(2)=C(2,1)
      RT1(3)=C(3,1)
C
C     Vetor Posição do Ponto de Aplicação do Segundo Impulso
C              no Referêncial Inercial
C
      cosu2=(DCos(x(3))+z(1))/(1+z(1)*DCos(x(3)))
      senu2=DSqrt(1-z(1)**2)*DSin(x(3))/(1+z(1)*DCos(x(3)))
      u2a=DATan2(senu2,cosu2)
      IF (u2a.LT.0) THEN
        u2=2*3.1415926536+u2a
      ELSE
        u2=u2a
      ENDIF
      x2=z(4)*(DCos(u2)-z(1))
      y2=z(4)*DSqrt(1-z(1)**2)*DSin(u2)
C
C     ROT2:
C
      A(1,1)=DCos(-z(6))*DCos(-z(3))-DSin(-z(6))*DCos(-z(5))*DSin(-z(3))
      A(1,2)=-DCos(-z(6))*DSin(-z(3))-DSin(-z(6))*DCos(-z(5))*DCos(-z(3)
     &)
      A(1,3)=DSin(-z(6))*DSin(-z(5))
      A(2,1)=DSin(-z(6))*DCos(-z(3))+DCos(-z(6))*DCos(-z(5))*DSin(-z(3))
      A(2,2)=-DSin(-z(6))*DSin(-z(3))+DCos(-z(6))*DCos(-z(5))*DCos(-z(3)
     &)
      A(2,3)=-DCos(-z(6))*DSin(-z(5))
      A(3,1)=DSin(-z(5))*DSin(-z(3))
      A(3,2)=DSin(-z(5))*DCos(-z(3))
      A(3,3)=DCos(-z(5))
C
C     X2
C
      B(1,1)=x2
      B(2,1)=y2
      B(3,1)=0
C
      P=3
      Q=3
      R=1
C
      CALL multi(A,B,C,P,Q,R)
C
      RT2(1)=C(1,1)
      RT2(2)=C(2,1)
      RT2(3)=C(3,1)
C
C     Versor Normal ao Plano da Órbita de Transferência
C
C     vnt= (RT1 vetotial RT2) / módulo de (RT1 vetorial RT2)
C
C     RT1 vetorial RT2 = transposta de RT1 * matriz skew simétrica de RT2
C
```

```
C    Transposta de RT1
C
     A(1,1)=RT1(1)
     A(1,2)=RT1(2)
     A(1,3)=RT1(3)
C
C    Matriz Skew Simétrica de RT2
C
     B(1,1)=0
     B(1,2)=-RT2(3)
     B(1,3)=RT2(2)
     B(2,1)=RT2(3)
     B(2,2)=0
     B(2,3)=-RT2(1)
     B(3,1)=-RT2(2)
     B(3,2)=RT2(1)
     B(3,3)=0
C
     P=3
     Q=3
     R=3
C
     CALL multi(A,B,C,P,Q,R)
C
     R1VR2(1)=C(1,1)
     R1VR2(2)=C(1,2)
     R1VR2(3)=C(1,3)
C
     MODULO=DSqrt(R1VR2(1)**2+R1VR2(2)**2+R1VR2(3)**2)
C
     vnt(1)=R1VR2(1)/MODULO
     vnt(2)=R1VR2(2)/MODULO
     vnt(3)=R1VR2(3)/MODULO
C
C    Longitude do Nodo Ascendente da Óbita de Transferência
C
C    Ot = ArcCos(M escalar vdx)
C
C    onde M = (vnt vetorial vdz) / módulo de (vnt vetorial vdz)
C
C    Transposta de vnt
C
     A(1,1)=vnt(1)
     A(1,2)=vnt(2)
     A(1,3)=vnt(3)
C
     vdz(1)=0
     vdz(2)=0
     vdz(3)=1
C
C    Matriz Skew Simétrica de vdz
C
     B(1,1)=0
```

```
      B(1,2)=-vdz(3)
      B(1,3)=vdz(2)
      B(2,1)=vdz(3)
      B(2,2)=0
      B(2,3)=-vdz(1)
      B(3,1)=-vdz(2)
      B(3,2)=vdz(1)
      B(3,3)=0
C
      P=1
      Q=3
      R=3
C
      CALL multi(A,B,C,P,Q,R)
C
      vntVvdz(1)=C(1,1)
      vntVvdz(2)=C(1,2)
      vntVvdz(3)=C(1,3)
C
      MODULO=DSqrt(vntVvdz(1)**2+vntVvdz(2)**2+vntVvdz(3)**2)
C
      M(1)=vntVvdz(1)/MODULO
      M(2)=vntVvdz(2)/MODULO
      M(3)=vntVvdz(3)/MODULO
C
C     M escalar vdx = transposta de M * vdx
C
C     Transposta de M
C
      A(1,1)=M(1)
      A(1,2)=M(2)
      A(1,3)=M(3)
C
      vdx(1)=1
      vdx(2)=0
      vdx(3)=0
C
      B(1,1)=vdx(1)
      B(2,1)=vdx(2)
      B(3,1)=vdx(3)
C
      P=1
      Q=3
      R=1
C
      CALL multi(A,B,C,P,Q,R)
C
      Ot=ACos(C(1,1))
C
C     Argumento do Periapside da Órbita de Transferência
C
C     w = ArcCos[(RT1 escalar M) / (módulo de RT1 * módulo de M)] - f1
C
```

```
C    Transposta de RT1
C
     A(1,1)=RT1(1)
     A(1,2)=RT1(2)
     A(1,3)=RT1(3)
C
     B(1,1)=M(1)
     B(2,1)=M(2)
     B(3,1)=M(3)
C
     P=1
     Q=3
     R=1
C
     CALL multi(A,B,C,P,Q,R)
C
     RT1EM=C(1,1)
     MODRT1=DSqrt(RT1(1)**2+RT1(2)**2+RT1(3)**2)
     MODM=DSqrt(M(1)**2+M(2)**2+M(3)**2)
C
     w=ACos(RT1EM/(MODRT1*MODM))-f1
     IF (w.LT.0) THEN
      w=2*3.1415926536+w
     ENDIF
C
C      Resultados
C
     WRITE(*,*)
     WRITE(5,*)
     WRITE(*,*) text10
     WRITE(5,*) text10
     WRITE(*,*)
     WRITE(5,*)
     WRITE(5,*) text12
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(1),text11,e
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(1),text11,e
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(2),text11,x(1)
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(2),text11,x(1)
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(3),text11,w
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(3),text11,w
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(4),text11,semieixo
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(4),text11,semieixo
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(5),text11,inc
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(5),text11,inc
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(6),text11,Ot
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(6),text11,Ot
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(7),text11,x(2)
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(7),text11,x(2)
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(8),text11,x(3)
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(8),text11,x(3)
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(9),text11,f1
     WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(9),text11,f1
     WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(10),text11,f2
```

```
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(10),text11,f2
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(15),text11,gama1
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(15),text11,gama1
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(16),text11,gama2
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(16),text11,gama2
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(11),text11,V1
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(11),text11,V1
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(12),text11,V2
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(12),text11,V2
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(13),text11,DVt
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(13),text11,DVt
      WRITE(*,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(14),text11,t
      WRITE(5,'(1x,A7,A4,F16.8)') valin(14),text11,t
C
C     (x.dat=1;r.dat=5)
*     DO 110,I=1,3
*       WRITE(1,100,REC=I) x(I)
*100    FORMAT(F16.8)
*110  CONTINUE
C
      WRITE(7,'(F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,1x,
     &F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,1x,F15.8,
     &1x,F15.8)')e,x(1),w,semieixo,inc,Ot,x(2),x(3),V1,V2,DVt,t,f2-f1,
     &gama1,gama2
C
      CLOSE (1)
      CLOSE (2)
      CLOSE (3)
      CLOSE (4)
      CLOSE (5)
      CLOSE (6)
      CLOSE (7)
      END
C
C       Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C
```

APÊNDICE D

SUB-ROTINA FUNCV E SUB-ROTINA MULTI
CASO NÃO COPLANAR

A sub-rotina funcv fornece o vetor formado pelas três equações que expressam as condições necessárias para optimalidade. E a sub-rotina multi efetua a multiplicação de duas matrizes.

```
SUBROUTINE funcv(n,x,fvec)
C
C     Esta subrotina fornece o vetor fvec(3) onde cada elemento
C    representa uma das equações do problema da transferência
C    bi-impulsiva não coplanar com restrição de tempo proposto por
C    Eckel e Vinh (1984).
C
     INTEGER n,I,Rev
     REAL*8 x,y,z,mi,r1,r2,beta1,beta2,delta,f1,f2,e,gama1,gama2,
    &rx1,rx2,sy1,sy2,pz1,pz2,h1,h2,V,t0,V1,V2,semieixo,S1,S2,T1,T2,W1,
    &W2,q1,q2,E1,E2,M1,M2,t,XM1,XM2,YM,ZM,fvec,fi,senf1,senf2,cosf1,
    &cosf2,senw1B1,senw2B2,cosw1B1,cosw2B2,beta1a,beta1b,beta1c,beta2a,
    &beta2b,beta2c,f1a,f2a,E1a,E2a,lambda
     DIMENSION x(3),y(6),z(6),fvec(3)
     COMMON /mycom/ y,z,mi,t0,semieixo,t,beta1,beta2,r1,r2,fi,f1,f2,e,
    &delta,gama1,gama2,V1,V2
C
     n=3
C
C      Equações Secundarias
C

C
C    O2 > O1   e   i2 > i1
C
     IF ((z(6).GT.y(6)) .AND. (z(5).GT.y(5))) THEN
      senw1B1=DSin(z(6)-y(6))*DTan(3.1415926536-z(5))
      cosw1B1=DSin(y(5))+DTan(3.1415926536-z(5))*DCos(y(5))*DCos(z(6)-
    & y(6))
      beta1a=DATan2(senw1B1,cosw1B1)
      IF (beta1a.LT.0) THEN
       beta1b=2*3.1415926536+beta1a
      ELSE
       beta1b=beta1a
      ENDIF
      beta1c=beta1b-y(3)
      IF (beta1c.LT.0) THEN
       beta1=2*3.1415926536+beta1c
```

```
      ELSE
       beta1=beta1c
      ENDIF
C
      senw2B2=DSin(z(6)-y(6))*DTan(y(5))
      cosw2B2=DSin(z(5))+DTan(y(5))*DCos(3.1415926536-z(5))*DCos(z(6)-
     & y(6))
      beta2a=DATan2(senw2B2,cosw2B2)
      IF (beta2a.LT.0) THEN
       beta2b=2*3.1415926536+beta2a
      ELSE
       beta2b=beta2a
      ENDIF
      beta2c=beta2b-z(3)
      IF (beta2c.LT.0) THEN
       beta2=2*3.1415926536+beta2c
      ELSE
       beta2=beta2c
      ENDIF
      lambda=DSqrt(DASin(DSin(z(6)-y(6))*DSin(y(5))/DSin(z(3)+beta2))*
     & *2)
     ENDIF
C
C    O1 > O2   e   i1 > i2
C
     IF ((y(6).GT.z(6)) .AND. (y(5).GT.z(5))) THEN
      senw1B1=DSin(y(6)-z(6))*DTan(z(5))
      cosw1B1=DSin(y(5))+DTan(z(5))*DCos(3.1415926536-y(5))*DCos(y(6)-
     & z(6))
      beta1a=DATan2(senw1B1,cosw1B1)
      IF (beta1a.LT.0) THEN
       beta1b=2*3.1415926536+beta1a
      ELSE
       beta1b=beta1a
      ENDIF
      beta1c=beta1b-y(3)
      IF (beta1c.LT.0) THEN
       beta1=2*3.1415926536+beta1c
      ELSE
       beta1=beta1c
      ENDIF
C
      senw2B2=DSin(y(6)-z(6))*DTan(3.1415926536-y(5))
      cosw2B2=DSin(z(5))+DTan(3.1415926536-y(5))*DCos(z(5))*DCos(y(6)-
     & z(6))
      beta2a=DATan2(senw2B2,cosw2B2)
      IF (beta2a.LT.0) THEN
       beta2b=2*3.1415926536+beta2a
      ELSE
       beta2b=beta2a
      ENDIF
      beta2c=beta2b-z(3)
      IF (beta2c.LT.0) THEN
```

```
        beta2=2*3.1415926536+beta2c
       ELSE
        beta2=beta2c
       ENDIF
       lambda=DSqrt(DASin(DSin(y(6)-z(6))*DSin(y(5))/DSin(z(3)+beta2))*
     & *2)
      ENDIF
C
C    O2 > O1   e   i1 > i2
C
      IF ((z(6).GT.y(6)) .AND. (y(5).GT.z(5))) THEN
       senw1B1=DSin(z(6)-y(6))*DTan(z(5))
       cosw1B1=DSin(y(5))+DTan(z(5))*DCos(3.1415926536-y(5))*DCos(z(6)-
     & y(6))
       beta1a=DATan2(senw1B1,cosw1B1)
       IF (beta1a.LT.0) THEN
        beta1b=2*3.1415926536+beta1a
       ELSE
        beta1b=beta1a
       ENDIF
       beta1c=2*3.1415926536-beta1b-y(3)
       IF (beta1c.LT.0) THEN
        beta1=2*3.1415926536+beta1c
       ELSE
        beta1=beta1c
       ENDIF
C
       senw2B2=DSin(z(6)-y(6))*DTan(3.1415926536-y(5))
       cosw2B2=DSin(z(5))+DTan(3.1415926536-y(5))*DCos(z(5))*DCos(z(6)-
     & y(6))
       beta2a=DATan2(senw2B2,cosw2B2)
       IF (beta2a.LT.0) THEN
        beta2b=2*3.1415926536+beta2a
       ELSE
        beta2b=beta2a
       ENDIF
       beta2c=2*3.1415926536-beta2b-z(3)
       IF (beta2c.LT.0) THEN
        beta2=2*3.1415926536+beta2c
       ELSE
        beta2=beta2c
       ENDIF
       lambda=DSqrt(DASin(DSin(z(6)-y(6))*DSin(y(5))/DSin(2*3.141592653
     & 6-z(3)-beta2))**2)
      ENDIF
C
C    O1 > O2   e   i2 > i1
C
      IF ((y(6).GT.z(6)) .AND. (z(5).GT.y(5))) THEN
       senw1B1=DSin(z(6)-y(6))*DTan(3.1415926536-z(5))
       cosw1B1=DSin(y(5))+DTan(3.1415926536-z(5))*DCos(y(5))*DCos(y(6)-
     & z(6))
       beta1a=DATan2(senw1B1,cosw1B1)
```

```
      IF (beta1a.LT.0) THEN
       beta1b=2*3.1415926536+beta1a
      ELSE
       beta1b=beta1a
      ENDIF
      beta1c=2*3.1415926536-beta1b-y(3)
      IF (beta1c.LT.0) THEN
       beta1=2*3.1415926536+beta1c
      ELSE
       beta1=beta1c
      ENDIF
C
      senw2B2=DSin(y(6)-z(6))*DTan(y(5))
      cosw2B2=DSin(z(5))+DTan(y(5))*DCos(3.1415926536-z(5))*DCos(y(6)-
     & z(6))
      beta2a=DATan2(senw2B2,cosw2B2)
      IF (beta2a.LT.0) THEN
       beta2b=2*3.1415926536+beta2a
      ELSE
       beta2b=beta2a
      ENDIF
      beta2c=2*3.1415926536-beta2b-z(3)
      IF (beta2c.LT.0) THEN
       beta2=2*3.1415926536+beta2c
      ELSE
       beta2=beta2c
      ENDIF
      lambda=DSqrt(DASin(DSin(y(6)-z(6))*DSin(y(5))/DSin(2*3.141592653
     & 6-z(3)-beta2))**2)
     ENDIF
C
     r1=y(2)/(1+y(1)*DCos(x(2)))
C
     r2=z(2)/(1+z(1)*DCos(x(3)))
C
     fi=DSqrt((z(5)-y(5))**2)
C
     IF ((x(2).LT.(y(3)+beta1)) .AND. (x(3).GT.z(3)+beta2)) THEN
      delta=DACos(DCos(beta1-x(2))*DCos(beta2-x(3))+DSin(beta1-x(2))*
     & DSin(beta2-x(3))*DCos(lambda))
     ENDIF
C
     IF ((x(2).GT.(y(3)+beta1)) .AND. (x(3).GT.z(3)+beta2)) THEN
      delta=DACos(DCos(x(3)-beta2)*DCos(x(2)-beta1)+DSin(x(3)-beta2)*
     & DSin(x(2)-beta1)*DCos(lambda))
     ENDIF
C
     IF ((x(2).LT.(y(3)+beta1)) .AND. (x(3).LT.z(3)+beta2)) THEN
      delta=DACos(DCos(beta2-x(3))*DCos(beta1-x(2))+DSin(beta2-x(3))*
     & DSin(beta1-x(2))*DCos(lambda))
     ENDIF
C
     senf1=DCos(delta)*r2*(x(1)-r1)-r1*(x(1)-r2)
```

```
      cosf1=r2*(x(1)-r1)*DSin(delta)
      f1a=DATan2(senf1,cosf1)
      IF (f1a.LT.0) THEN
        f1=2*3.1415926536+f1a
      ELSE
        f1=f1a
      ENDIF
C
      senf2=r2*(x(1)-r1)-DCos(delta)*r1*(x(1)-r2)
      cosf2=r1*(x(1)-r2)*DSin(delta)
      f2a=DATan2(senf2,cosf2)
      IF (f2a.LT.0) THEN
        f2=2*3.1415926536+f2a
      ELSE
        f2=f2a
      ENDIF
C
      e=(r2-r1)/(r1*DCos(f1)-r2*DCos(f2))
C
      gama1=DASin(-DSin(beta2-x(3))*DSin(lambda)/DSin(delta))
C
      gama2=DASin(DSin(beta1-x(2))*DSin(lambda)/DSin(delta))
C
      rx1=DSqrt(mi)*(e*DSin(f1)/DSqrt(x(1))-y(1)*DSin(x(2))/DSqrt(y(2)))
C
      rx2=DSqrt(mi)*(z(1)*DSin(x(3))/DSqrt(z(2))-e*DSin(f2)/DSqrt(x(1)))
C
      sy1=DSqrt(mi)*(DSqrt(x(1))-DSqrt(y(2))*DCos(gama1))/r1
C
      sy2=DSqrt(mi)*(DSqrt(z(2))*DCos(gama2)-DSqrt(x(1)))/r2
C
      pz1=DSqrt(mi*y(2))*DSin(gama1)/r1
C
      pz2=DSqrt(mi*z(2))*DSin(gama2)/r2
C
      h1=DSqrt(sy1**2+pz1**2)
C
      h2=DSqrt(sy2**2+pz2**2)
C
      V1=DSqrt(rx1**2+h1**2)
C
      V2=DSqrt(rx2**2+h2**2)
C
      V=V1+V2
C
      S1=rx1/V1
C
      S2=rx2/V2
C
      T1=sy1/V1
C
      T2=sy2/V2
C
```

```
      W1=pz1/V1
C
      W2=pz2/V2
C
      q1=x(1)/r1
C
      q2=x(1)/r2
C
      senE1=(DSqrt(1-e**2)*DSin(f1))/(1-e*DCos(f1))
      cosE1=(e+DCos(f1))/(1+e*DCos(f1))
      E1a=DATan2(senE1,cosE1)
      IF (E1a.LT.0) THEN
       E1=2*3.1415926536+E1a
      ELSE
       E1=E1a
      ENDIF
C
      senE2=(DSqrt(1-e**2)*DSin(f2))/(1-e*DCos(f2))
      cosE2=(e+DCos(f2))/(1+e*DCos(f2))
      E2a=DATan2(senE2,cosE2)
      IF (E2a.LT.0) THEN
       E2=2*3.1415926536+E2a
      ELSE
       E2=E2a
      ENDIF
C
      M1=E1-e*DSin(E1)
C
      M2=E2-e*DSin(E2)
C
      semieixo=x(1)/(1-e**2)
C
      Rev=0
C
      t=DSqrt(semieixo**3/mi)*(M2-M1+2*3.14159265*Rev)
C
      XM1=(S1*DCos(delta)-S2)/DSin(delta)+T1
C
      XM2=(S1-S2*DCos(delta))/DSin(delta)+T2
C
      YM=(3*(e**2)*t*DSqrt(mi/x(1)**3)-2*e*(1/(q2*DSin(f2))-1/(q1*DSin(f
     &1)))+1/DTan(f2)-1/DTan(f1))/((1-e**2)*DSin(delta))
C
      ZM=(q2*XM2-q1*XM1+(S1+S2)*DTan(delta/2))/(1/DTan(f1)-1/DTan(f2)+YM
     &*((1+e**2)*DSin(delta)+2*e*(DSin(f2)-DSin(f1))))
C
C     Vetor de Equações (sistema de equações 3x3, vetor fvec(n))
C
      fvec(1)=t-t0
C
      fvec(2)=(XM1+YM*ZM*e*DSin(f2))*(S1*q1-T1*e*DSin(f1))+S1*T1+W1*((W1
     &-W2)*q2/DSin(delta)-W1*DTan(delta/2))-(W1*ZM*e*r1*y(1)*DSin(x(2)))
     &/(q1*y(2)*DSin(f1)*DSin(gama1))
```

```
C
     fvec(3)=(XM2+YM*ZM*e*DSin(f1))*(S2*q2-T2*e*DSin(f2))+S2*T2-W2*((W2
    &-W1)*q1/DSin(delta)-W2*DTan(delta/2))+(W2*ZM*e*r2*z(1)*DSin(x(3)))
    &/(q2*z(2)*DSin(f2)*DSin(gama2))
C
     DO 20,I=1,3
      WRITE(6,10,REC=I) fvec(I)
 10    FORMAT(F16.8)
 20   CONTINUE
C
     RETURN
     END
C
C      Evandro Marconi Rocco  INPE - 1996
C
C******
C


SUBROUTINE multi(A,B,C,P,Q,R)
C
C    MULTIPLICACAO DE DUAS MATRIZES   A*B = C
C
C      P = número de linhas de A
C      Q = número de colunas de A, ou número de linhas de B
C      R = número de colunas de B
C
     INTEGER P,Q,R,J
     REAL*8 A,B,C,D
     DIMENSION A(3,3),B(3,3),C(3,3),D(3,3)
     DO 22 I=1,P
       DO 23 J=1,R
         D(I,J) = 0.0
 23     CONTINUE
 22   CONTINUE
     DO 10 I=1,P
       DO 20 J=1,R
         DO 30 K=1,Q
           D(I,J) = D(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
 30      CONTINUE
 20     CONTINUE
 10   CONTINUE
     DO 42 I=1,P
       DO 43 J=1,R
         C(I,J) = D(I,J)
 43     CONTINUE
 42   CONTINUE
     RETURN
     END
C
C         Antonio F. Bertachini de A. Prado
C
C******
C
```

APÊNDICE E

SUB-ROTINAS EXTRAÍDAS DE PRESS ET AL. (1992)

```
      SUBROUTINE newt(x,n,check)
      INTEGER n,nn,NP,MAXITS
          LOGICAL check
          REAL x(n),fvec,TOLF,TOLMIN,TOLX,STPMX
          PARAMETER (NP=40,MAXITS=200,TOLF=1.e-4,TOLMIN=1.e-6,TOLX=1.e-7,
         *STPMX=100.)
          COMMON /newtv/ fvec(NP),nn
          SAVE /newtv/
CU        USES fdjac,fmin,lnsrch,lubksb,ludcmp
          INTEGER i,its,j,indx(NP)
          REAL d,den,f,fold,stpmax,sum,temp,test,fjac(NP,NP),g(NP),p(NP),
         *xold(NP),fmin
          EXTERNAL fmin
          nn=n
          f=fmin(x)
          test=0.
          do 11 i=1,n
            if(abs(fvec(i)).gt.test)test=abs(fvec(i))
11        continue
          if(test.lt..01*TOLF)return
          sum=0.
          do 12 i=1,n
            sum=sum+x(i)**2
12        continue
          stpmax=STPMX*max(sqrt(sum),float(n))
          do 21 its=1,MAXITS
            call fdjac(n,x,fvec,NP,fjac)
            do 14 i=1,n
              sum=0.
              do 13 j=1,n
                sum=sum+fjac(j,i)*fvec(j)
13            continue
              g(i)=sum
14          continue
            do 15 i=1,n
              xold(i)=x(i)
15          continue
            fold=f
            do 16 i=1,n
              p(i)=-fvec(i)
16          continue
            call ludcmp(fjac,n,NP,indx,d)
            call lubksb(fjac,n,NP,indx,p)
            call lnsrch(n,xold,fold,g,p,x,f,stpmax,check,fmin)
            test=0.
            do 17 i=1,n
              if(abs(fvec(i)).gt.test)test=abs(fvec(i))
```

```
17     continue
       if(test.lt.TOLF)then
        check=.false.
        return
       endif
       if(check)then
        test=0.
        den=max(f,.5*n)
        do 18 i=1,n
         temp=abs(g(i))*max(abs(x(i)),1.)/den
         if(temp.gt.test)test=temp
18      continue
       if(test.lt.TOLMIN)then
        check=.true.
       else
        check=.false.
       endif
       return
      endif
      test=0.
      do 19 i=1,n
       temp=(abs(x(i)-xold(i)))/max(abs(x(i)),1.)
       if(temp.gt.test)test=temp
19    continue
      if(test.lt.TOLX)return
21   continue
     pause 'MAXITS exceeded in newt'
     END
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software =41.)10i$1.



FUNCTION fmin(x)
     INTEGER n,NP
     REAL fmin,x(*),fvec
     PARAMETER (NP=40)
     COMMON /newtv/ fvec(NP),n
     SAVE /newtv/
CU   USES funcv
     INTEGER i
     REAL sum
     call funcv(n,x,fvec)
     sum=0.
     do 11 i=1,n
      sum=sum+fvec(i)**2
11   continue
     fmin=0.5*sum
     return
     END
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software =41.)10i$1.
```

```
      SUBROUTINE fdjac(n,x,fvec,np,df)
          INTEGER n,np,NMAX
          REAL df(np,np),fvec(n),x(n),EPS
          PARAMETER (NMAX=40,EPS=1.e-4)
      CU   USES funcv
          INTEGER i,j
          REAL h,temp,f(NMAX)
          do 12 j=1,n
           temp=x(j)
           h=EPS*abs(temp)
           if(h.eq.0.)h=EPS
           x(j)=temp+h
           h=x(j)-temp
           call funcv(n,x,f)
           x(j)=temp
           do 11 i=1,n
            df(i,j)=(f(i)-fvec(i))/h
      11    continue
      12   continue
          return
          END
      C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software =41.)10i$1.



      SUBROUTINE ludcmp(a,n,np,indx,d)
          INTEGER n,np,indx(n),NMAX
          REAL d,a(np,np),TINY
          PARAMETER (NMAX=500,TINY=1.0e-20)
          INTEGER i,imax,j,k
          REAL aamax,dum,sum,vv(NMAX)
          d=1.
          do 12 i=1,n
           aamax=0.
           do 11 j=1,n
            if (abs(a(i,j)).gt.aamax) aamax=abs(a(i,j))
      11    continue
           if (aamax.eq.0.) pause 'singular matrix in ludcmp'
           vv(i)=1./aamax
      12   continue
          do 19 j=1,n
           do 14 i=1,j-1
            sum=a(i,j)
            do 13 k=1,i-1
             sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
      13     continue
            a(i,j)=sum
      14    continue
           aamax=0.
           do 16 i=j,n
            sum=a(i,j)
            do 15 k=1,j-1
             sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
```

```
15      continue
        a(i,j)=sum
        dum=vv(i)*abs(sum)
        if (dum.ge.aamax) then
         imax=i
         aamax=dum
        endif
16      continue
       if (j.ne.imax)then
        do 17 k=1,n
         dum=a(imax,k)
         a(imax,k)=a(j,k)
         a(j,k)=dum
17      continue
        d=-d
        vv(imax)=vv(j)
       endif
       indx(j)=imax
       if(a(j,j).eq.0.)a(j,j)=TINY
       if(j.ne.n)then
        dum=1./a(j,j)
        do 18 i=j+1,n
         a(i,j)=a(i,j)*dum
18      continue
       endif
19     continue
      return
      END
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software =41.)10i$1.



SUBROUTINE lubksb(a,n,np,indx,b)
      INTEGER n,np,indx(n)
      REAL a(np,np),b(n)
      INTEGER i,ii,j,ll
      REAL sum
      ii=0
      do 12 i=1,n
       ll=indx(i)
       sum=b(ll)
       b(ll)=b(i)
       if (ii.ne.0)then
        do 11 j=ii,i-1
         sum=sum-a(i,j)*b(j)
11      continue
       else if (sum.ne.0.) then
        ii=i
       endif
       b(i)=sum
12    continue
      do 14 i=n,1,-1
       sum=b(i)
```

```
      do 13 j=i+1,n
        sum=sum-a(i,j)*b(j)
13    continue
      b(i)=sum/a(i,i)
14    continue
      return
      END
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software =41.)10i$1.


SUBROUTINE lnsrch(n,xold,fold,g,p,x,f,stpmax,check,func)
      INTEGER n
      LOGICAL check
      REAL f,fold,stpmax,g(n),p(n),x(n),xold(n),func,ALF,TOLX
      PARAMETER (ALF=1.e-4,TOLX=1.e-7)
      EXTERNAL func
CU    USES func
      INTEGER i
      REAL a,alam,alam2,alamin,b,disc,f2,fold2,rhs1,rhs2,slope,sum,temp,
     *test,tmplam
      check=.false.
      sum=0.
      do 11 i=1,n
        sum=sum+p(i)*p(i)
11    continue
      sum=sqrt(sum)
      if(sum.gt.stpmax)then
        do 12 i=1,n
          p(i)=p(i)*stpmax/sum
12      continue
      endif
      slope=0.
      do 13 i=1,n
        slope=slope+g(i)*p(i)
13    continue
      test=0.
      do 14 i=1,n
        temp=abs(p(i))/max(abs(xold(i)),1.)
        if(temp.gt.test)test=temp
14    continue
      alamin=TOLX/test
      alam=1.
1     continue
        do 15 i=1,n
          x(i)=xold(i)+alam*p(i)
15      continue
        f=func(x)
        if(alam.lt.alamin)then
          do 16 i=1,n
            x(i)=xold(i)
16        continue
          check=.true.
```

```
        return
      else if(f.le.fold+ALF*alam*slope)then
        return
      else
        if(alam.eq.1.)then
          tmplam=-slope/(2.*(f-fold-slope))
        else
          rhs1=f-fold-alam*slope
          rhs2=f2-fold2-alam2*slope
          a=(rhs1/alam**2-rhs2/alam2**2)/(alam-alam2)
          b=(-alam2*rhs1/alam**2+alam*rhs2/alam2**2)/(alam-alam2)
          if(a.eq.0.)then
            tmplam=-slope/(2.*b)
          else
            disc=b*b-3.*a*slope
            tmplam=(-b+sqrt(disc))/(3.*a)
          endif
          if(tmplam.gt..5*alam)tmplam=.5*alam
        endif
      endif
      alam2=alam
      f2=f
      fold2=fold
      alam=max(tmplam,.1*alam)
    goto 1
    END
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software =41.)10i$1.
```