



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-10525-TDI/934**

## **DINÂMICA DE FLUIDOS EM DOMÍNIOS FRACTAIS**

Erwin Doescher

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Haroldo Fraga de Campos Velho e Fernando Manuel Ramos, aprovada em 26 de março de 2002.

519.7

DOESCHER, E.

Dinâmica de fluidos em domínios fractais /  
E. Doescher. – São José dos Campos: INPE, 2002.  
214 p. – (INPE.10525-TDI/934).

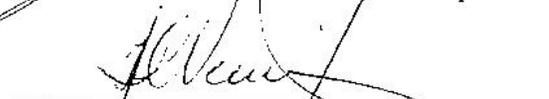
1.Escoamento de fluidos. 2.Escoamento de cavidades.  
3.geometria fractal. 4.Mecânica dos fluidos computacional.  
5.Escoamento incompressível. . Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em  
cumprimento a requisito exigido para a  
obtenção do Título de **Doutor em**  
**Computação Aplicada.**

Dr. Jerônimo dos Santos Travelho

  
\_\_\_\_\_  
Presidente/INPE-SJCampos/SP

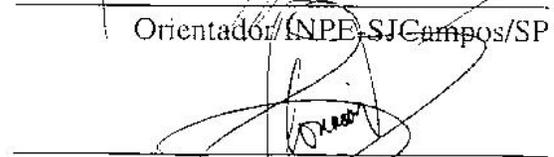
Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho

  
\_\_\_\_\_  
Orientador/INPE-SJCampos/SP

Dr. Fernando Manuel Ramos

  
\_\_\_\_\_  
Orientador/INPE-SJCampos/SP

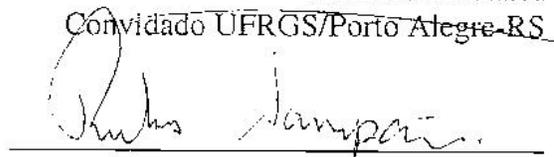
Dr. Clóvis Raimundo Maliska

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
Convidado UFSC/Florianópolis-SC

Dr. Júlio Cezar Ruiz Claeysen

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
Convidado UFRGS/Porto Alegre-RS

Dr. Rubens Sampaio

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
Convidado PUC/Rio de Janeiro-RJ

Candidato (a): Erwin Doescher



*“Observei o conjunto da criação de Deus e percebi que o homem não consegue  
entender toda obra que se faz debaixo do sol.*

*Por mais que se afadigue em pesquisar, não chega a compreendê-la, e mesmo que  
o sábio diga que a conhece, nem por isso é capaz de entendê-la.”*

*Eclesiastes 8:17*



*À minha esposa Andréa*



## AGRADECIMENTOS

A meu senhor Jesus, que transformou a minha vida e o meu coração de ateu, me deu alegria e paz e em todos os momentos deste trabalho se fez presente .

Aos professores Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho e Dr. Fernando Manuel Ramos, pela orientação e apoio na realização deste trabalho.

À minha esposa Andréa, por seu amor, compreensão e ajuda na revisão ortográfica.

À minha família, em especial à minha mãe Elza e as minhas avós Petronelle e Maria Luiza, pelo apoio e carinho dedicados.

Ao meu professor, amigo e orientador na graduação Messias Meneguette Jr., pelo incentivo e apoio dados.

Aos demais amigos da FCT/Unesp, em particular, Klaus e Elisa, que me incentivaram e apoiaram a ingressar neste doutorado.

Ao amigo Leonardo Dagnino Chiwiakovsky, por ter me permitido utilizar o computador de seu projeto com as minhas simulações.

À diretora da FATEC/UNIVALE, Profa. Dra. Fernanda Isabel Marques Argoud, pela cessão das máquinas para diversas simulações, bem como pela sua compreensão e liberação de algumas atividades acadêmicas.

Aos professores e colegas de trabalho da UNIVALE pelo apoio.

Ao Anderson, responsável pelos laboratórios da FATEC, e aos laboratoristas Igor e Hudson, pelos auxílios prestados na execução das simulações.

Aos meus sogros, Antonio e Valentina, pelo apoio e pela hospitalidade oferecida sem-

pre que necessitei.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos os irmãos em Cristo, em especial Antônio e Tereza, Maria e Satoru, Elciane e Bruno, Pr. Liberato e D. Antônia, pelas orações que me sustentaram.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho.

## RESUMO

A geometria fractal tem sido usada com sucesso para representar geometrias complexas que aparecem na natureza. Nos últimos anos também tem sido aplicada para simular domínios complexos. Neste trabalho, são analisadas as alterações no escoamento de um fluido pela introdução de um domínio fractal. A cavidade quadrada é considerada como domínio base, onde três dos lados são substituídos por pré-fractais da curva quadrada de Koch. Simulações são realizadas para escoamentos isotérmicos e não isotérmicos, utilizando o método de volumes finitos. Um esquema para verificar a condição de compatibilidade em malhas não estruturadas é apresentado. Os resultados são analisados por meio dos seguintes indicadores: energia cinética média no domínio em função do número de Reynolds; valores da energia cinética no estado estacionário, em alguns pontos do domínio, em função do número de Reynolds; superfície e isolinhas da vorticidade para o escoamento isotérmico; superfície e isolinhas da temperatura para o escoamento não isotérmico; análise do espectro e o espaço de fase da evolução da energia cinética média para escoamentos não isotérmicos. Foram detectados comportamentos não esperados na energia cinética média nas cavidades com geometria fractal e os espaços de fase indicaram possíveis estruturas de atratores estranhos.



# DYNAMIC FLUID IN FRACTAL DOMAIN

## ABSTRACT

Fractal geometry has been successfully used to represent complex geometries appearing in the nature. In the last years it has also been applied to simulate complex domains. In this work, the impact on the fluid flow is analyzed with the introducing of the fractalization of the domain. The square cavity is considered as base domain, where the sides are replaced by pre-fractals of the Koch square curve. Simulations are carried out for the isothermal and non-isothermal flows, using the method of finite volume. A scheme to verify the compability condition for the unstructured grids is presented. The results are analyzed by means of the indicators: domain average of the kinetic energy as a function of the Reynolds number; values of the kinetic energy in the stationary state, at some points in the domain, as a function of the Reynolds number; surface and contour lines of the vorticity for the isothermal flow; surface and contour lines of the temperature for the non-isothermal flow; analysis of the spectrum and the space of phase of the evolution of the average kinetic energy for non-isothermal flow. Unexpected behaviour in the average kinetic energy in the cavity with fractal geometry had been detected. The phase space had indicated possible structures of strange attractors.



# SUMÁRIO

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ALGORÍTMOS

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>33</b>
1.1 Motivação .....	34
1.2 Objetivos .....	37
1.3 Organização do Trabalho .....	37
<b>2 - GEOMETRIA FRACTAL</b> .....	<b>39</b>
2.1 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch .....	40
2.2 Formas Alternativas para a Dimensão de um Fractal .....	42
2.2.1 Dimensão de Contagem .....	42
2.2.2 Dimensão de Similaridade .....	44
2.3 Fractais Auto-Similares .....	45
2.4 Fractais Auto-Afins .....	46
2.5 Gráficos de Funções Fractais .....	47
2.5.1 Curvas Auto-Afins .....	48
2.6 Gerando Fractais com Cadeias de Caracteres .....	50
<b>3 - MÉTODOS NUMÉRICOS EM DINÂMICA DOS FLUÍDOS</b> .....	<b>57</b>
3.1 Diferenças Finitas .....	58
3.2 Volumes Finitos .....	61
3.2.1 Volumes Finitos em Malhas Retangulares .....	62
3.2.2 Acoplamento Velocidade-Pressão .....	63
3.2.2.1 Método de Chorin .....	63
3.2.2.2 Método SIMPLE .....	64
3.2.2.3 Método SIMPLER .....	66
3.2.2.4 Método PRIME .....	67

3.2.2.5	Método Velocidade-Pressão .....	68
3.2.3	Volumes Finitos em Malhas Triangulares .....	68
3.3	Métodos de Correção da Pressão .....	73
3.3.1	Métodos Iterativo e de Passo .....	74
3.3.2	Método Usando Decomposição em Valores Singulares .....	77
3.4	Escoamentos Não Isotérmicos .....	79
3.5	Malhas para Domínios Fractais .....	82
3.5.1	Malhas Não Estruturadas .....	83
3.5.2	Malhas Estruturadas .....	84
3.5.3	Malhas Compostas .....	85
3.5.3.1	União Pontual .....	85
3.5.3.2	União por Sobreposição .....	86
3.5.3.3	Desempenho de Malhas Mistas .....	87
3.6	Critérios de Convergência para a Pressão .....	90
3.6.1	Condição de Compatibilidade .....	91
3.7	Definições e Algoritmos Utilizados nas Simulações Numéricas .....	92
3.7.1	Indicadores da Dinâmica do Escoamento .....	93
3.7.1.1	Visualização de Escoamentos .....	94
3.7.1.2	Medidas de Escoamento .....	94
<b>4</b>	<b>- ESCOAMENTOS EM DOMÍNIOS FRACTAIS .....</b>	<b>97</b>
4.1	O Problema da Cavidade .....	97
4.2	Indicadores do Escoamento .....	98
4.3	Escoamentos Isotérmicos .....	98
4.3.1	Gráficos da Vorticidade .....	107
4.4	Escoamentos Não Isotérmicos .....	108
4.4.1	Convecção Natural .....	115
4.4.2	Gráficos do Campo de Temperatura .....	122
4.4.3	Oscilações na Evolução da Energia Cinética Média .....	130
4.4.4	Espectros da Evolução da Energia Cinética Média .....	136
4.4.4.1	Espectros da Evolução de $\langle E_c \rangle$ na Cavidade .....	139
4.4.4.2	Espectros da Evolução de $\langle E_c \rangle$ na Cavidade Fractal de Nível 1 .....	142
4.4.4.3	Espectros da Evolução de $\langle E_c \rangle$ na Cavidade Fractal de Nível 2 .....	145

4.4.5	Análise de Espaço de Fase .....	145
<b>5</b>	<b>- CONCLUSÕES</b> .....	<b>157</b>
5.1	Trabalhos Futuros .....	161
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>- SOLUÇÃO EXATA PARA O PROBLEMA NÃO ISOTÉRMICO</b> .	<b>171</b>
<b>B</b>	<b>- PROPRIEDADES FÍSICAS DO AR</b> .....	<b>177</b>
<b>C</b>	<b>- GRÁFICOS DO ESCOAMENTO ISOTÉRMICO</b> .....	<b>179</b>
C.1	Gráficos da Energia Cinética .....	179
C.2	Gráficos da Pressão .....	186
<b>D</b>	<b>- GRÁFICOS DO ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO</b> .....	<b>189</b>
D.1	Gráficos da Energia Cinética .....	189
D.2	Gráficos da Pressão .....	189
D.3	Gráficos da Vorticidade .....	197
<b>E</b>	<b>- ESPECTRO DE FUNÇÕES</b> .....	<b>205</b>
E.1	Resolução e Frequência Máxima de um Espectro .....	206
E.2	Exemplos de Espectros de Funções .....	207
<b>ÍNDICE</b>	.....	<b>213</b>



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos de domínios complexos.....	33
1.2	Ondas em canal raso com fundo variável .....	35
2.1	Figuras-teste para a dimensão de contagem .....	43
2.2	Gráfico de contagem para curva de Koch.....	44
2.3	Gráfico de contagem para a costa da Noruega. ....	45
2.4	Gerador da curva de Koch .....	46
2.5	Fractal auto-afim .....	48
2.6	Função de Weierstrass com $s = 1.1$ e $s = 1.3$ .....	49
2.7	Função de Weierstrass com $s = 1.5$ e $s = 1.7$ .....	50
2.8	Curva auto-afim .....	51
2.9	Interpolação fractal.....	53
2.10	Fractais de Sierpinski .....	54
2.11	Curva de Peano e curva de Hilbert.....	54
2.12	Fractais semelhantes à árvores .....	54
2.13	Evolução dos pré-fractais para árvore 2 .....	55
2.14	Ilha quadrada de Koch .....	55
3.1	Malha alternada. ....	62
3.2	Malha de velocidade e volume de controle .....	69
3.3	(a) Volume de controle (b) Triângulo adjacente à $v$ . ....	71

3.4	Evolução de $P(1/2, 1/2)$ com os métodos de correção da pressão. ....	76
3.5	Cavidade com fronteira fractal .....	83
3.6	Malha triangular para cavidade fractal 2. ....	84
3.7	União pontual. ....	86
3.8	União por sobreposição. ....	87
3.9	Transformação malha chimera para pontual. ....	88
3.10	Malha mista usada para teste de desempenho. ....	89
3.11	Tempo gasto (em segundos) na inicialização da pressão. ....	89
3.12	Tempo gasto (em segundos) na simulação. ....	90
3.13	Condição de compatibilidade: malha quadrada e triangular.....	92
3.14	Condição de compatibilidade: malhas triangulares.....	92
4.1	Problema da cavidade.....	97
4.2	Condição de contorno para a velocidade.....	99
4.3	Comparação do escoamento isotérmico para $Re = 400$ .....	100
4.4	Comparação do escoamento isotérmico para $Re = 1000$ .....	100
4.5	Comparação do escoamento isotérmico para $Re = 5000$ .....	100
4.6	Variação de $\langle E_c \rangle_S$ com a dimensão da malha. ....	101
4.7	Energia cinética média (isotérmico). ....	102
4.8	Variação absoluta da energia cinética média (isotérmico).....	106
4.9	Variação relativa da energia cinética média (isotérmico). ....	107
4.10	Pontos do domínio para cálculo de valores .....	108

4.11	Valores de $\mathcal{E}_c$ na simulação isotérmica .....	109
4.12	Superfície de vorticidade na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) .....	110
4.13	Isolinhas da vorticidade na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) .....	110
4.14	Superfície de vorticidade na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) .....	110
4.15	Isolinhas da vorticidade na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) .....	111
4.16	Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) ....	111
4.17	Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) ....	112
4.18	Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) ..	112
4.19	Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) ..	113
4.20	Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) ....	113
4.21	Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) ....	114
4.22	Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) ..	114
4.23	Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) ..	115
4.24	Condição de contorno para a temperatura .....	116
4.25	Energia cinética média (não isotérmico). .....	118
4.26	Varição absoluta da energia cinética média (não isotérmico). .....	122
4.27	Varição relativa da energia cinética média (não isotérmico). .....	123
4.28	Superfície de temperatura na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) .....	124
4.29	Isotermas na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) .....	124
4.30	Superfície de temperatura na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) .....	124
4.31	Isotermas na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) .....	125
4.32	Superfície de temperatura na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) ...	125

4.33	Isotermas na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) .....	126
4.34	Superfície de temperatura na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ )	126
4.35	Isotermas na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) .....	127
4.36	Superfície de temperatura na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) ...	127
4.37	Isotermas na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) .....	128
4.38	Superfície de temperatura na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ )	128
4.39	Isotermas na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) .....	129
4.40	Ampliação do gráfico de isolinhas para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ) .	129
4.41	Ampliação do gráfico de isotermas para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ )	130
4.42	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade ( $Re = 4500$ ) .....	131
4.43	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade ( $Re = 5000$ ) .....	131
4.44	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade ( $Re = 5500$ ) .....	132
4.45	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade ( $Re = 6000$ ) .....	132
4.46	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 4500$ ) .....	132
4.47	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ) .....	133
4.48	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ) .....	133
4.49	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ) .....	133
4.50	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 4500$ ) .....	134
4.51	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ) .....	134
4.52	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ) .....	135
4.53	Evolução de $\langle E_c \rangle$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ) .....	135

4.54	Variação de $\langle E_c \rangle$ com dimensão da malha na cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ).	136
4.55	Variação de $\langle E_c \rangle$ com dimensão da malha na cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ).	137
4.56	Variação de $\langle E_c \rangle$ com dimensão da malha na cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ).	137
4.57	Variação de $\langle E_c \rangle$ com dimensão da malha na cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ).	138
4.58	Variação de $\langle E_c \rangle$ com dimensão da malha na cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ).	138
4.59	Variação de $\langle E_c \rangle$ com dimensão da malha na cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ).	139
4.60	Espectro para cavidade ( $Re = 4500$ ).	140
4.61	Espectro para cavidade ( $Re = 5000$ ).	141
4.62	Espectro para cavidade ( $Re = 5500$ ).	141
4.63	Espectro para cavidade ( $Re = 6000$ ).	142
4.64	Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 4500$ ).	143
4.65	Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ).	143
4.66	Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ).	144
4.67	Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ).	145
4.68	Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 4500$ ).	146
4.69	Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ).	147
4.70	Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ).	147
4.71	Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ).	148

4.72	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade quadrada ( $Re = 4500$ ).....	149
4.73	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 1 ( $Re = 4500$ ).....	149
4.74	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 2 ( $Re = 4500$ ).....	150
4.75	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade quadrada ( $Re = 5000$ ).....	150
4.76	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ).....	151
4.77	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ).....	151
4.78	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade quadrada ( $Re = 5500$ ).....	152
4.79	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ).....	152
4.80	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ).....	153
4.81	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade quadrada ( $Re = 6000$ ).....	153
4.82	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ).....	154
4.83	Espaço de fase de $\langle E_c \rangle$ para a cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ).....	154
5.1	Geradores da fronteira fractal.....	157
5.2	Outras Fronteiras fractais.....	158
C.1	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ).....	180
C.2	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ).....	180
C.3	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ).....	180
C.4	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ).....	181
C.5	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ).....	181
C.6	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ).....	182
C.7	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ).....	182

C.8	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	183
C.9	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	183
C.10	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	184
C.11	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	184
C.12	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	185
C.13	Superfície de pressão na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	186
C.14	Superfície de pressão na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	186
C.15	Superfície de pressão na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	187
C.16	Superfície de pressão na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	187
C.17	Superfície de pressão na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	187
C.18	Superfície de pressão na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	188
D.1	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	190
D.2	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	190
D.3	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	190
D.4	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	191
D.5	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	191
D.6	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	192
D.7	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	192
D.8	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	193
D.9	Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	193
D.10	Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	194

D.11 Superfície de $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	194
D.12 Isolinhas da $\mathcal{E}_c$ na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	195
D.13 Superfície de pressão na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	195
D.14 Superfície de pressão na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	195
D.15 Superfície de pressão na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	196
D.16 Superfície de pressão na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	196
D.17 Superfície de pressão na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	197
D.18 Superfície de pressão na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	197
D.19 Superfície de vorticidade na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	198
D.20 Isolinhas da vorticidade na cavidade ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	198
D.21 Superfície de vorticidade na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	198
D.22 Isolinhas da vorticidade na cavidade ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	199
D.23 Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	199
D.24 Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	200
D.25 Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	200
D.26 Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	201
D.27 Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	201
D.28 Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 10$ e $Re = 400$ ) . . . . .	202
D.29 Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	202
D.30 Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2 ( $Re = 1400$ e $Re = 5000$ ) . . . . .	203
E.1 Função janela de Welch ( $N = 1024$ ) . . . . .	206

E.2	Função e espectro de $y_1$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 20Hz$ ).....	208
E.3	Função e Espectro de $y_2$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 20Hz$ e $f_2 = 30Hz$ ) .....	208
E.4	Função e espectro de $y_2$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 20Hz$ e $f_2 = 22Hz$ ).....	209
E.5	Função e espectro de $y_3$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 20Hz$ , $f_2 = 5Hz$ e $c_m = 0.2$ ) .....	209
E.6	Função e espectro de $y_3$ sobre $T_2$ ( $f_1 = 0.18Hz$ , $f_2 = 0.03Hz$ e $c_m = 0.1$ )	210
E.7	Função e espectro de $y_4$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 30Hz$ , $f_2 = 5Hz$ e $c_m = 0.2$ ) .....	210
E.8	função e espectro de $y_5$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 30Hz$ , $f_2 = 5Hz$ e $c_m = 0.2$ ) .....	212
E.9	Função e espectro de $y_6$ sobre $T_1$ ( $f_1 = 30Hz$ , $f_2 = 5Hz$ , $f_3 = 3Hz$ e $c_m = 0.2$ ).....	212



## LISTA DE TABELAS

2.1	Dimensões de contagem.....	44
2.2	Sintaxe de caracteres para L-system .....	52
2.3	Definição de fractais por meio do L-system .....	52
3.1	Métodos de diferenças finitas para a equação de difusão .....	60
3.2	Métodos de diferenças finitas para a equação de convecção .....	60
3.3	Tempo de cpu para diversos métodos de correção da pressão .....	76
3.4	Definição L-system para a fronteira fractal .....	82
4.1	Relação das simulações isotérmicas para a cavidade .....	103
4.2	Relação das simulações isotérmicas para a cavidade fractal 1 .....	104
4.3	Relação das simulações isotérmicas para a cavidade fractal 2 .....	105
4.4	Coordenadas dos pontos do domínio para cálculo de valores .....	106
4.5	Relação entre as adimensionalizações no escoamento não isotérmico .....	117
4.6	Relação das simulações não isotérmicas para a cavidade .....	119
4.7	Relação das simulações não isotérmicas para a cavidade fractal 1 .....	120
4.8	Extremos de $\langle E_c \rangle$ para simulação não isotérmica na cavidade fractal 1.	120
4.9	Relação das simulações não isotérmicas para a cavidade fractal 2 .....	121
4.10	Extremos de $\langle E_c \rangle$ para simulação não isotérmica na cavidade fractal 2.	121
4.11	Freqüência principal para a cavidade quadrada .....	140
4.12	Freqüência de modulação na cavidade quadrada .....	141

4.13	Frequência principal para a cavidade fractal 1 .....	142
4.14	Frequências de modulação na cavidade fractal 1 .....	144
4.15	Frequência principal para a cavidade fractal 2 .....	146
B.1	Valores das propriedades físicas do ar .....	177

## LISTA DE ALGORÍTMOS

3.1	Cálculo do escoamento incompressível. ....	58
3.2	Método de Chorin. ....	64
3.3	Método SIMPLE ....	66
3.4	Método SIMPLER ....	67
3.5	Método PRIME ....	67
3.6	Método Velocidade-Pressão. ....	68
3.7	Resolução de $Ap = b$ usando método iterativo. ....	74



## LISTA DE SÍMBOLOS

$Gr$	número de Grashof .....	81
$H^s(F)$	medida s-dimensional de Hausdorff .....	41
$P(f)$	amplitude do espectro na frequência $f$ .....	142
$Pr$	número de Prandtl .....	80
$Ra$	número de Rayleigh .....	81
$Re$	número de Reynolds .....	57
$T$	temperatura.....	79
$V_{ec}$	variação absoluta da energia cinética.....	102
$V_{ec}^r$	variação relativa da energia cinética.....	102
$Z_2$	enstrofia .....	95
$\Delta t$	passo de tempo.....	63
$\Delta x$	espaçamento da malha na direção $x$ .....	63
$\Delta y$	espaçamento da malha na direção $y$ .....	63
$\Delta_f$	resolução do espectro .....	140
$\Gamma = \partial\Omega$	fronteira do domínio $\Omega$ .....	57
$\Omega$	domínio do problema .....	57
$\alpha$	constante de difusividade térmica .....	79
$\beta$	coeficiente de expansão térmica .....	80
$\dim_B(F)$	dimensão de contagem.....	42
$\langle E_c \rangle_S$	energia cinética média no estado estacionário .....	99

$\mu$	viscosidade dinâmica .....	79
$\nu$	viscosidade cinemática.....	57
$\psi$	função corrente.....	93
$\rho$	densidade .....	79
$\vec{g}$	gravidade .....	79
$\vec{u}(\vec{x}, t)$	campo de velocidades.....	57
$\zeta$	vorticidade.....	93
$f_c$	freqüência de corte .....	206
$f_p$	freqüência do pico de maior amplitude do espectro .....	140
$p(\vec{x}, t)$	pressão cinemática .....	57
$t$	tempo.....	57
$\mathcal{E}_c$	energia cinética.....	93
$E_c(\vec{u}, \Omega)$	energia cinética total .....	95
$\langle E_c(\vec{u}, \Omega) \rangle$	energia cinética média .....	95

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Na modelagem de um determinado problema é comum se fazer uma simplificação do domínio, buscando facilitar a resolução do problema em questão. Esta simplificação pode resultar na perda de determinadas propriedades ou características do problema original. Resolver problemas sem simplificações no domínio pode levar a descoberta de comportamentos não previstos no modelo simplificado.

Basicamente, um problema pode apresentar três tipos diferentes de complexidade em seu domínio:

- **Domínio com fronteira complexa** — Neste caso, apenas a fronteira do domínio é complexa, isto é, não pode ser especificada de forma simples e direta.
- **Domínio com interior complexo** — Aqui tem-se uma fronteira simples, mas o interior do domínio apresenta regiões onde determinadas propriedades do problema variam em relação ao resto do domínio.
- **Domínio com fronteira e interior complexo** — Esta situação resulta da união das duas situações anteriores.

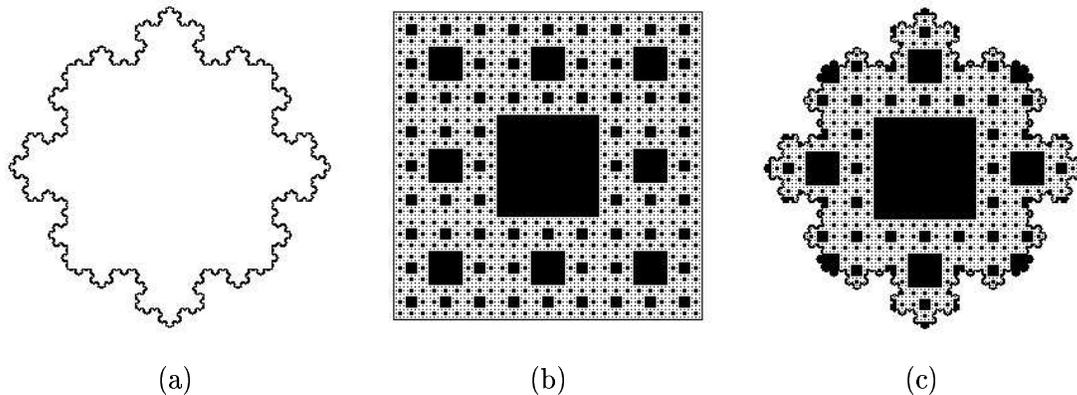


Fig. 1.1 – Exemplos de domínios complexos:(a) Fronteira complexa (b) Interior complexo  
(c) Interior e fronteira complexos.

Estes três tipos de domínios complexos são bastante comuns em qualquer modelagem

de um problema natural. Por exemplo, domínios com fronteira complexa aparecem em modelos de escoamento e dispersão de poluentes sobre um terreno montanhoso ou ainda, na modelagem do escoamento de um rio sobre um leito acidentado. Domínios com interior complexo aparecem quando se considera meios porosos ou heterogêneos. A modelagem de uma nuvem envolve, por sua vez, um domínio cuja fronteira e o interior são complexos. Um exemplo de cada um destes tipos de domínios complexos utilizando uma curva de Koch para fronteira e um tapete de Sierpinski invertido para o interior pode ser visto na Figura 1.1.

## 1.1 Motivação

A introdução de domínios complexos para alguns tipos de problemas tem sido vista nos últimos anos. Entretanto, é mais comum encontrar na literatura trabalhos em que, a partir de domínios com geometria simples, apresentem resultados com alguma característica fractal, dentre eles, os seguintes trabalhos:

- Kivotides et al. (2001) desenvolvem um modelo cinemático de turbulência para estudar entrelaçamento de vórtices superfluidos e mostram numericamente que o sistema de filamentos tem dimensão fractal maior do que um e que a dimensão fractal é diretamente relacionada com a densidade da linha de vórtices e independente da temperatura.
- Francisco e Santos (2001) simulam numericamente o experimento de Reynolds para a transição de um escoamento laminar para turbulento em um tubo. Os resultados são discutidos na perspectiva de sistemas dinâmicos. Os expoentes de Lyapunov e a dimensão fractal para o atrator são calculados.

Embora a análise do comportamento fractal de resultados possa ser aplicada neste trabalho, a principal motivação é a introdução de características fractais na definição do problema, ou mais especificamente, no domínio das equações que modelam o problema. Neste contexto, encontram-se os seguintes trabalhos:

- Sapoval et al. (1991) estudaram as vibrações induzidas em uma membrana limitada por um contorno fractal rígido e observaram modos de vibração não identificados

em domínios mais simples.

- Nachbin e Papanicolau (1992) analisaram o caso das ondas de superfície na água de um canal raso, cuja topografia do fundo variava bruscamente (Figura 1.2). Eles propõem uma teoria para as ondas refletidas baseada em uma análise assintótica para as equações diferenciais estocásticas.

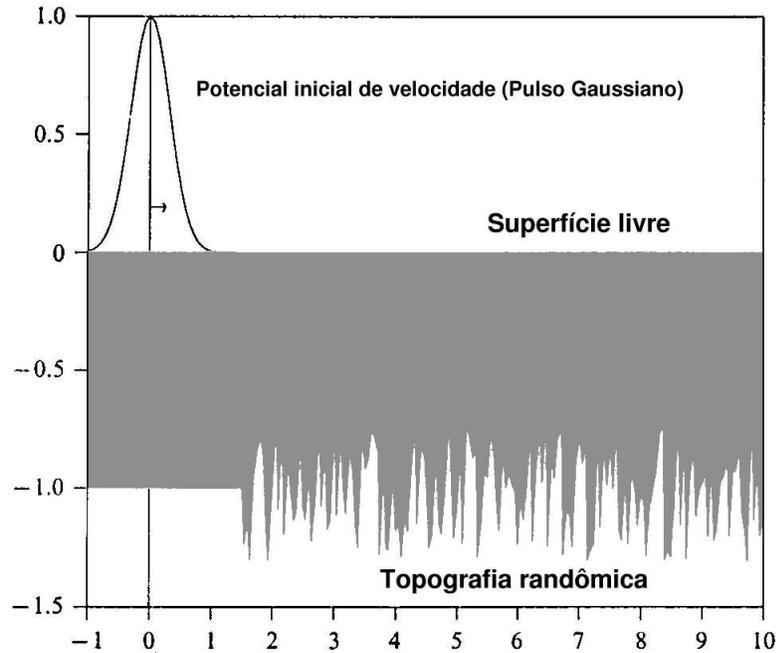


Fig. 1.2 – Ondas em canal raso com fundo variável.

FONTE: Nachbin e Papanicolau (1992).

- Jones et al. (1994) apresentam um algoritmo rápido para resolver a equação:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= 0 & \text{para } x \in \mathbb{R}^2 - C_a \\ u|_{C_a} &= f\end{aligned}$$

onde  $C_a$  é o conjunto de Cantor associado a um número real  $a$ , com  $0 < a < \frac{1}{2}$ .

- Panagiotopoulos e Panagouli (1996) examinam a influência da geometria fractal sobre os campos de tensão em corpos planos deformáveis.
- Panagouli (1997) investiga a influência da geometria fractal em mecânica sólida e estrutural.

- Ramos (1997, 1999) considera o problema de resolver a equação de difusão em um domínio heterogêneo bidimensional, ou seja, um domínio de interior complexo. É apresentada uma metodologia de resolução que consiste em mapear as complexidade morfológicas e geométricas do problema no modelo numérico, através de uma matriz, que determina a qual meio o nó  $(i, j)$  pertence, através de uma relação do tipo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } (i, j) \in \Omega_1 \cup \partial\Omega_1 - \partial\Omega_2 \\ 2 & \text{se o nó } (i, j) \in \Omega_2 \cup \partial\Omega_2 - \partial\Omega_1 \\ 3 & \text{se o nó } (i, j) \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo  $a_{ij}$  é o elemento da matriz na posição  $(i, j)$  e  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são os meios homogêneos que compõem o domínio heterogêneo.

- Giona (1999) desenvolve a definição de integral de contorno sobre curvas fractais no plano através da noção de sistemas de função iterada orientada e de pseudo-medidas direcionais. O teorema de Green é estendido para curvas fractais no plano.
- Gonzalez et al. (2001) resolvem as equações de escoamento sobre o fractal de Bernasconi, incluindo as forças viscosas e de capilaridade. A estrutura recursiva do fractal é aproveitada para calcular as propriedades do escoamento, tornando o método muito mais rápido que os métodos convencionais. A interação entre a desordem ou a heterogeneidade da condutância local do escoamento e os efeitos da pressão de capilaridade é estudada como função do comprimento de escala.

Os trabalhos citados acima se restringem à resolução da equação de difusão em domínios complexos (Ramos (1997, 1999)) ou sobre um determinado fractal (Gonzalez et al. (2001)). Para este trabalho, busca-se resolver o problema do escoamento de um fluido incompressível, governado pelas equações de Navier-Stokes, sobre domínios com fronteira fractal. Estes domínios são obtidos a partir do problema da cavidade, pela substituição de três dos lados da cavidade por pré-fractais. Desta forma, pode-se analisar as alterações do comportamento do escoamento do fluido surgidas com o aumento do nível de fractalização da fronteira da cavidade. Esta análise permitirá definir a relevância do uso de fractais em problemas de escoamento de fluido.

## 1.2 Objetivos

O propósito geral do presente trabalho é modelar o escoamento de fluido em cavidades com fronteira fractal e detectar possíveis alterações no escoamento quando comparado com os resultados para a cavidade quadrada. Serão considerados os casos isotérmico e não isotérmico.

Pretende-se, com este trabalho, demonstrar a importância de uma adequada modelagem da geometria complexa do domínio na simulação de escoamentos.

## 1.3 Organização do Trabalho

Este primeiro capítulo apresentou o contexto dentro do qual o trabalho foi desenvolvido, seus aspectos relevantes e um resumo dos objetivos a serem alcançados. O capítulo 2 apresenta algumas definições e conceitos sobre fractais, bem como alguns métodos para gerar curvas fractais. O capítulo 3 apresenta diversos métodos numéricos usados em dinâmica dos fluidos, os métodos de correção de pressão, malhas estruturadas, não estruturadas e compostas, e também traz os principais indicadores para um escoamento e um critério suficiente para condição de compatibilidade em malhas não estruturadas. O capítulo 4 relaciona os resultados numéricos das simulações realizadas. O capítulo 5 indica as conclusões obtidas e propõem sugestões para trabalhos futuros.



## CAPÍTULO 2

### GEOMETRIA FRACTAL

Na modelagem matemática de fenômenos naturais, a geometria constitui uma parte importante da descrição do problema. A geometria pode aparecer de diversas formas, tais como: na descrição da forma ou da constituição do objeto, na trajetória por ele desenvolvida, na definição de um domínio de restrição do objeto, etc.

De modo geral, adotou-se o princípio de simplificar a geometria utilizada em tais modelos, aproximando-as por objetos elementares da geometria euclidiana, tais como retas, círculos, elipses, entre outros. Este princípio permitiu a criação de modelos de geometrias simples, buscando concentrar os esforços na compreensão das leis que governavam o fenômeno.

Estando estas leis bem compreendidas e estudadas, a melhoria do modelo só poderia ser realizada sobre uma melhor descrição geométrica dos objetos envolvidos. Além disso, alguns objetos como linhas costeiras, montanhas e nuvens apresentam enormes dificuldades para serem representadas por meio de objetos geométricos simples.

As geometrias não euclidianas, desenvolvidas no início do século XIX independentemente por Lobatchevski e Bolyai, e a geometria riemanniana, desenvolvida por Riemann na metade do mesmo século, foram importantes em alguns problemas, como por exemplo, a aplicação dos métodos da geometria riemanniana à Teoria da Relatividade em 1916. Para muitas aplicações, entretanto, tais geometrias pecam pela alta generalização envolvida.

Por outro lado, o surgimento de máquinas capazes de efetuar processos iterativos rapidamente, permitiu que objetos anteriormente descritos por meio de fórmulas algébricas simples, o que por sua vez resultava em objetos geometricamente simples, passassem a ser descritos por meio destes processos iterativos. Um dos primeiros objetos descritos desta forma é a conhecida Curva Floco de Neve de Koch ou, simplesmente, Curva de Koch, por volta de 1904.

O grande salto na definição de modelos de objetos mais complexos foi dado pelo trabalho desenvolvido por Mandelbrot (1982, 1986), dando origem ao que se conhece como geometria fractal.

O conceito de dimensão de Hausdorff-Besicovitch, a ser introduzido na seção 2.1, estende o conceito de dimensão topológica usual, pois coincide com a dimensão topológica para objetos simples. Portanto, pode-se pensar em definir um fractal da seguinte forma:

*Um fractal é um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.*

Esta definição, embora correta e precisa, é muito restritiva e exclui muitos fractais importantes da física. Uma definição mais ampla, baseada em uma característica importante dos fractais observadas na prática:

*Um fractal é um objeto feito de partes similares, de algum modo, ao todo.*

Embora para alguns fractais o conceito de auto-similaridade seja exato, de modo geral deve ser considerado uma auto-similaridade estatística, isto é, a parte é similar ao todo, mas não é exatamente igual. Neste trabalho não serão abordados este tipo de fractais.

Além dos conceitos de auto-similaridade exata e estatística, observa-se um terceiro conceito denominado auto-afinidade. Este conceito é muito usado para fazer interpolação fractal, de acordo com Falconer (1990).

## 2.1 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch

Para enunciar o conceito de dimensão de Hausdorff-Besicovitch, são necessárias algumas definições auxiliares:

**Definição 2.1.1** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio. O diâmetro de  $F$  é definido por  $|F| = \sup \{|x - y| : x, y \in F\}$*

**Definição 2.1.2** *Seja  $\{U_i\}$  uma coleção enumerável de conjuntos, com  $|U_i| < \delta, \forall i$  e  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Diz-se então que  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ .*

**Definição 2.1.3 (Medida de Hausdorff)** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto e  $s$  um número não negativo. A medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $F$  é o limite:*

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (2.1)$$

sendo que  $H_\delta^s(F) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \}$

A medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de um conjunto  $F$  pode ser qualquer valor entre 0 e  $\infty$ . Na verdade, mostra-se (Falconer (1990)) que existe um valor crítico de  $s$  para o qual a medida  $s$ -dimensional de Hausdorff varia de  $\infty$  para 0. Este valor crítico é denominado de dimensão de Hausdorff-Besicovitch do conjunto  $F$  e será denotado por  $\dim_H F$ . Assim:

**Definição 2.1.4 (Dimensão de Hausdorff-Besicovitch)** *A dimensão de Hausdorff-Besicovitch de um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é dada por:*

$$\dim_H F = \inf \{ s : H^s(F) = 0 \} = \sup \{ s : H^s(F) = \infty \} \quad (2.2)$$

O valor da medida  $s$ -dimensional do conjunto  $F$ , para  $s = \dim_H F$ , pode ser 0 ou  $\infty$ , ou ainda  $0 < H^s(F) < \infty$ . Além disso, como a medida  $s$ -dimensional de Hausdorff satisfaz a relação:

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F \end{cases} \quad (2.3)$$

segue que quando um conjunto  $F$  apresenta uma medida  $s$ -dimensional finita e não nula para um determinado valor de  $s$ , então  $\dim_H F = s$ .

No caso de objetos simples (euclidianos), é possível mostrar que a medida  $s$ -dimensional coincide com a medida de comprimento (para  $s = 1$ ), área ( $s = 2$ ) e volume ( $s = 3$ ). Desta modo, curvas euclidianas tradicionais possuem dimensão de Hausdorff-Besicovitch igual a 1. Superfícies simples terão dimensão 2 e volumes comuns, dimensão 3. Ou seja, no caso de objetos simples a dimensão de Hausdorff-Besicovitch coincide com a dimensão topológica usual.

## 2.2 Formas Alternativas para a Dimensão de um Fractal

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch apresenta o seguinte inconveniente para aplicações práticas: é preciso calcular o ínfimo dos diâmetros de todas as  $\delta$ -coberturas do conjunto, para cada valor de  $s$ . Isto envolve muitas dificuldades, considerando um fractal arbitrário. Uma alternativa é a chamada *dimensão de contagem*. Deve-se destacar que nem sempre as dimensões de contagem e de Hausdorff-Besicovitch coincidem. Martinez-Lopez et al. (2001) apresentam um algoritmo para o cálculo da dimensão fractal baseado na definição de Hausdorff. Segundo os autores, o resultado independe do grau de definição do conjunto fractal, o que o torna adequado para fractais físicos reais de baixa definição.

### 2.2.1 Dimensão de Contagem

Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto e  $\{U_i\}$  uma  $\delta$ -cobertura de bolas <sup>1</sup> de mesmo diâmetro. Por simplificação suponha que  $|U_i| = \delta$ . Seja  $N(\delta)$  o número de bolas necessárias para cobrir  $F$ . Desta forma, tem-se:

$$B_\delta^s(F) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} |U_i|^s = N(\delta)\delta^s \quad (2.4)$$

Se  $D$  é a dimensão de  $F$  e a medida  $D$ -dimensional de Hausdorff de  $F$  tem valor finito, segue que  $N(\delta) = \alpha\delta^{-D}$ , sendo  $\alpha$  uma constante. Assim  $\log N(\delta) = \log \alpha - D \log \delta$ , ou seja, a dimensão de  $F$  pode ser obtida pela inclinação da reta de um gráfico de  $\log N(\delta)$  por  $\log \delta$ . À dimensão obtida por este processo atribuí-se o nome de *dimensão de contagem*, que será denotada por  $\dim_B(F)$ .

As Figuras 2.1 (a) e (b) ilustram o processo de obtenção da dimensão de contagem, sendo que a Figura (a) é um pré-fractal <sup>2</sup> de nível 9 da curva de Koch. Este pré-fractal foi gerado em um bitmap de  $4096 \times 4096$  pixels. A contagem foi realizada inicialmente da seguinte forma: Para cada  $c = 1, 2, \dots, 1024$ , subdividiu-se o bitmap em quadrados de  $c \times c$  pixels, disjuntos dois a dois, sendo então realizada uma contagem do número  $N(c)$  de quadrados não vazios. Ajustando uma reta ao gráfico  $\log N(c) \times \log c$ , mostrado na Figura 2.2 (a), obtém-se a dimensão de 1.238640. Entretanto, como será visto, a curva de Koch tem uma

---

<sup>1</sup>Podem ser usados quadrados, cubos, etc., desde que tenham o mesmo diâmetro.

<sup>2</sup>Ver definição na pág. 47

dimensão de similaridade (e de contagem) igual a  $\log 4 / \log 3 = 1.2618\dots$ . Esta diferença é devida, em parte, ao fato da Figura ser um pré-fractal da curva de Koch e em parte ao posicionamento dos quadrados sobre o bitmap.

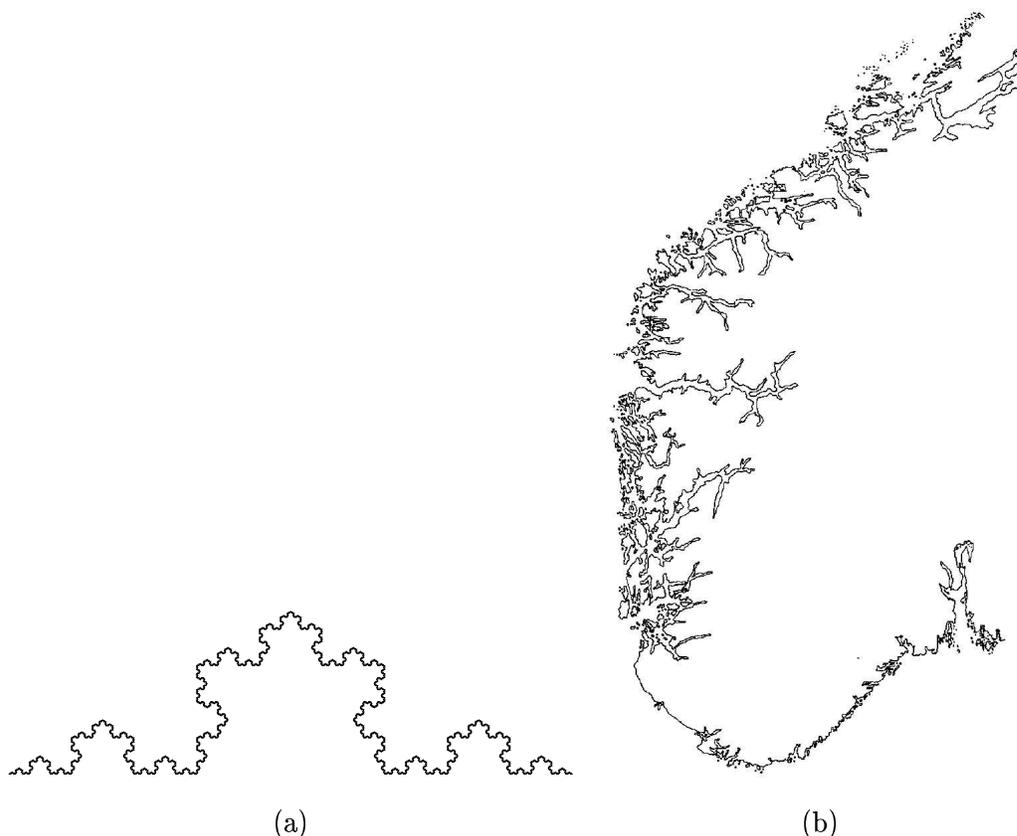


Fig. 2.1 – (a) Pré-fractal 9 da curva de Koch (b) Costa da Noruega.

FONTE: Feder (1988).

Para  $c > 33$ , o posicionamento inadequado introduz uma oscilação na contagem, conforme pode ser visto na Figura 2.2 (a). Para reduzir a oscilação foi realizada, para cada  $c$ , diversas contagens partindo de um quadrado inicial deslocado com relação à origem do bitmap. A Figura 2.2 (b) mostra os resultados obtidos considerando a média e os valores mínimo e máximo das contagens. As dimensões obtidas estão especificadas na Tabela 2.1 (a).

Na Figura 2.1 (b) tem-se uma digitalização da costa da Noruega, obtida de Feder (1988). Na Figura 2.3 tem-se o gráfico da contagem deslocada. As dimensões obtidas estão descritas na Tabela 2.1 (b).

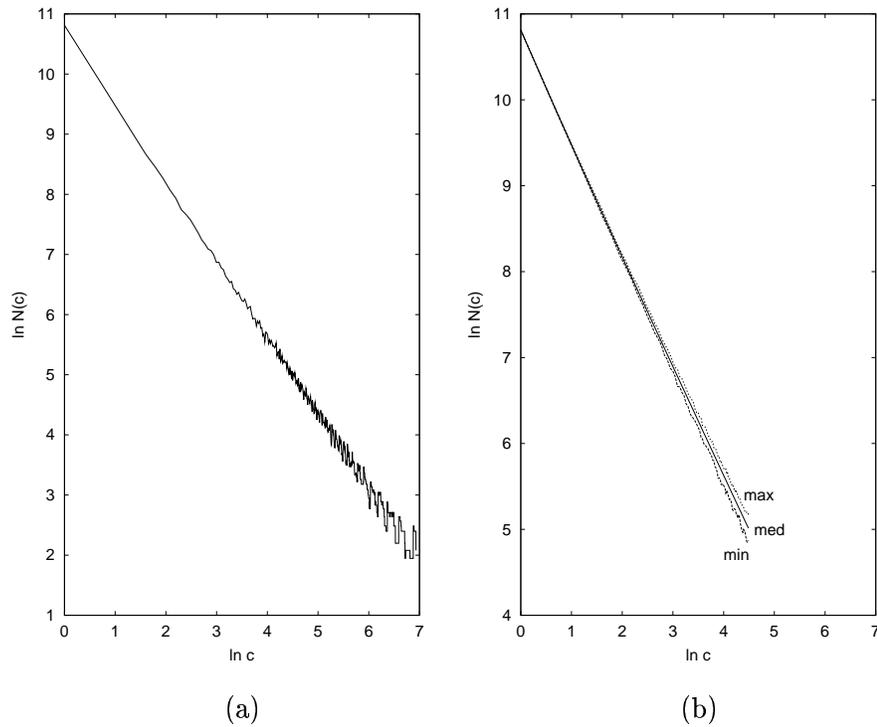


Fig. 2.2 – Gráfico de contagem para pré-fractal 9 da curva de Koch: (a) Contagem simples  
(b) Contagem deslocada.

TABELA 2.1 – DIMENSÕES DE CONTAGEM PARA: (a) CURVA DE KOCH  
(PRÉ-FRACTAL DE NÍVEL 9) (b) COSTA DA NORUEGA

Contagem	Dimensão	Contagem	Dimensão
mínimo	1.32080	mínimo	1.51524
média	1.27785	média	1.46473
máximo	1.24444	máximo	1.41871

(a)

(b)

### 2.2.2 Dimensão de Similaridade

A dimensão de similaridade é aplicada à conjuntos exatamente auto-similares, tais como a curva de Koch, o tapete de Sierpinski, entre outros. Uma definição precisa destes conjuntos será dada na seção 2.3. Para o momento, considera-se que as partes de um fractal auto-similar é idêntico ao fractal inicial a menos de um fator de escala. Sejam  $c_i$  os fatores de escala das similaridades. Então a *dimensão de similaridade* do fractal é o número positivo

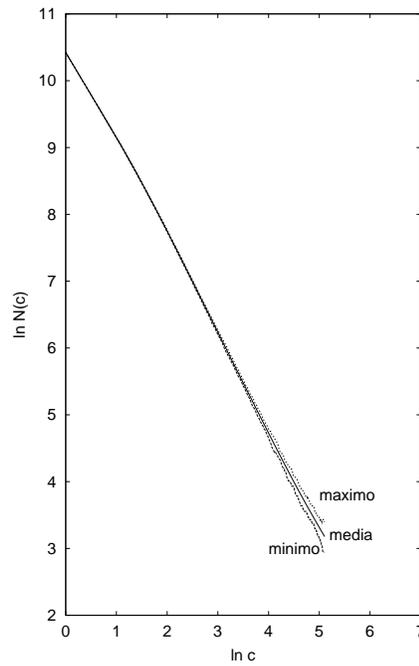


Fig. 2.3 – Gráfico de contagem para a costa da Noruega.

$s$  tal que:

$$\sum_{i=1}^n c_i^s = 1 \quad (2.5)$$

Por exemplo, para a curva de Koch, cujo gerador está exibido na Figura 2.4(a), tem-se os fatores  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{3}$ , donde é obtido que  $s = \log 4 / \log 3 = 1.2618\dots$  é a dimensão de similaridade da curva de Koch da Figura 2.4(b).

De acordo com Falconer (1990), sobre determinadas condições, um conjunto auto-similar têm dimensões de Hausdorff-Beiscovitch idêntica à dimensão de similaridade.

### 2.3 Fractais Auto-Similares

A aplicação  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $|S(x) - S(y)| = c|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  e para  $0 < c < 1$  é denominada *similaridade*.

Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é dito *auto-similar* se existirem similaridades  $S_1, S_2, \dots, S_m$  tais

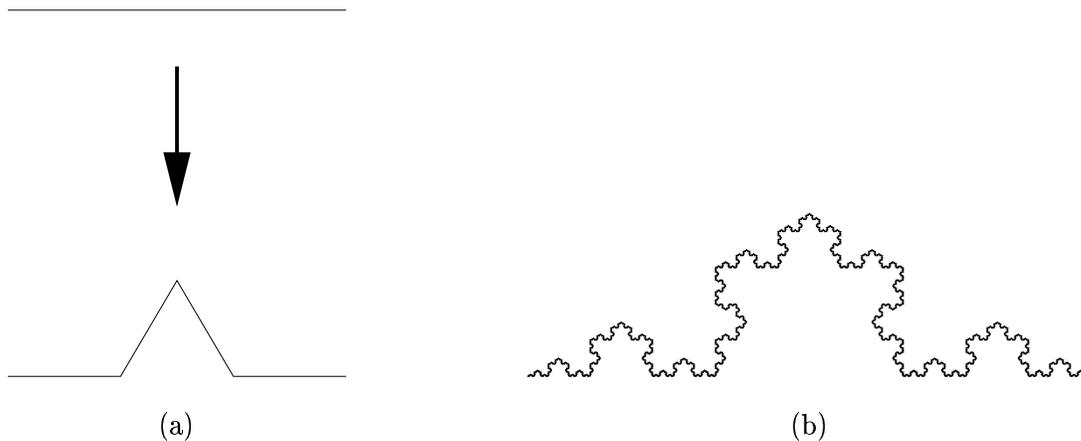


Fig. 2.4 – (a) Gerador da curva de Koch (b) Pré-fractal 9 da curva de Koch.

que:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \quad (2.6)$$

Se as similaridades satisfizerem as condições do conjunto aberto, isto é, se existir um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  limitado tal que:

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V) \quad (2.7)$$

então é possível provar que  $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$ , sendo  $s$  dado pela equação 2.5 da dimensão similar (Falconer (1990)).

## 2.4 Fractais Auto-Afins

Os fractais auto-afins formam uma classe de fractais obtidas pela aplicação de transformações afins. Desta forma, os fractais auto-afins englobam os fractais auto-similares.

Em uma similaridade, o raio de contração é o mesmo em todas as direções. Na transformação afim, tem-se a liberdade de especificar diferentes raios de contração para cada direção considerada.

Uma *transformação afim*  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação da forma:

$$S(x) = T(x) + b$$

sendo  $T$  uma transformação linear no  $\mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Desta forma,  $S$  é uma combinação de uma translação, rotação, dilatação e, possivelmente, uma reflexão.

Sejam  $S_1, \dots, S_m$  contrações afins em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, transformações afins que satisfazem a condição  $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|$ , com  $0 < c_i < 1$ . O conjunto  $F$  invariante pelas transformações  $S_i$  pode ser obtido recursivamente através do seguinte processo: dado um conjunto de pontos iniciais  $E_0$ , obtenha sucessivamente os conjuntos  $E_1, E_2, \dots$ , através da fórmula:

$$E_{k+1} = \bigcup_{i=1}^m S_i(E_k) \quad (2.8)$$

O conjunto  $F$ , gerado pelo processo recursivo acima, não pode ser representado graficamente ou através de um conjunto discreto de pontos. Os conjuntos  $E_1, E_2, \dots$ , são usados para aproximar o conjunto  $F$  e cada  $E_k$  é denominado *pré-fractal de nível  $k$*  ou simplesmente *pré-fractal  $k$* .

A Figura 2.5 mostra a construção de um fractal auto-afim, usando três transformações aplicadas a um quadrado inicial.

Uma importante aplicação de conjunto auto-afins é a interpolação fractal, a ser vista na seção 2.5.1.

## 2.5 Gráficos de Funções Fractais

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujo gráfico é o conjunto:

$$G(f) = \{(t, f(t)) : a \leq t \leq b\} \quad (2.9)$$

Se  $f$  possui derivada contínua, então é possível provar que  $\dim_H G(f) = 1$ . Entretanto, algumas funções suficientemente irregulares apresentam um gráfico cuja dimensão de contagem é superior a 1. Um exemplo bem conhecido é a função de Weierstrass:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t) \quad (2.10)$$

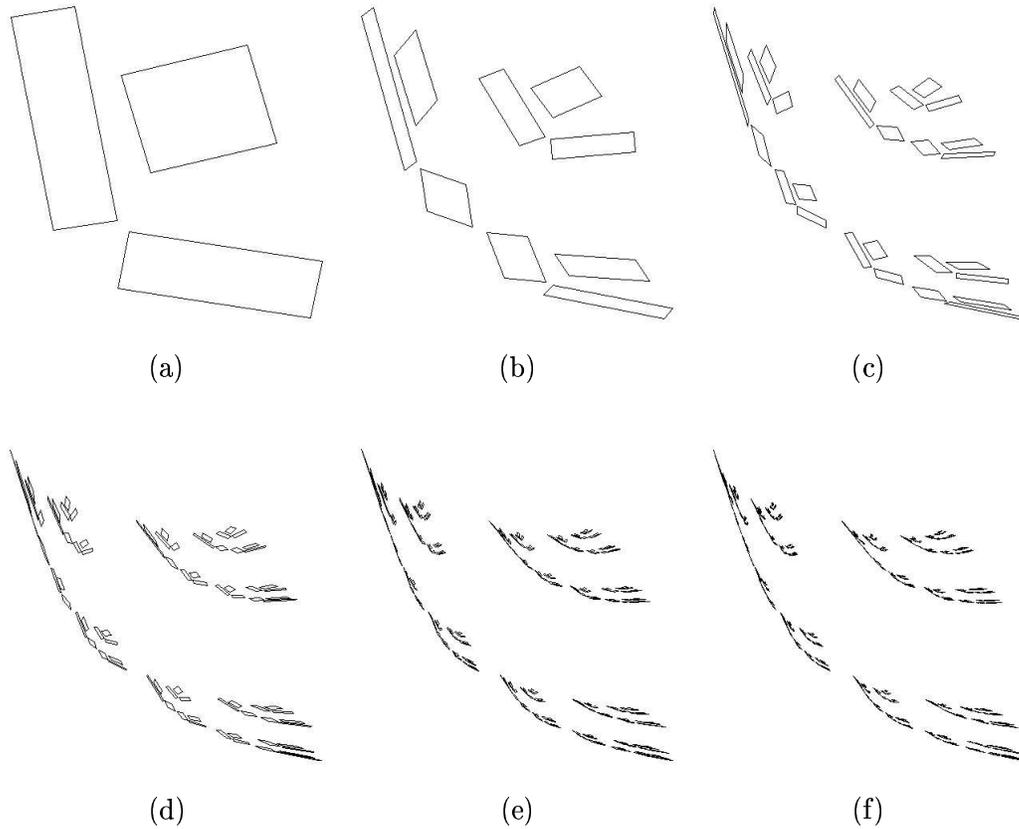


Fig. 2.5 – Fractal auto-afim: (a)  $E_1$  (b)  $E_2$  (c)  $E_3$  (d)  $E_4$  (e)  $E_5$  (f)  $E_6$ .

Para  $\lambda > 1$  e  $1 < s < 2$ , pode-se mostrar que  $\dim_B G(f) = s$ . Nas Figuras 2.6 e 2.7 estão alguns gráficos da função de Weierstrass para  $\lambda = 1.5$  e diversos valores de  $s$ .

### 2.5.1 Curvas Auto-Afins

Escolhendo adequadamente as transformações afins, é possível construir conjuntos auto-afins que sejam gráficos de funções. Sejam  $S_1, S_2, \dots, S_m$  transformações afins dadas matricialmente por:

$$S_i \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (i-1)/m \\ b_i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

para cada  $1 \leq i \leq m$ , com  $1/m < c_i \leq 1$ .

Sejam  $p_1 = (0, b_1/(1 - c_1))$  e  $p_m = (1, (a_m + b_m)/(1 - c_m))$  os pontos fixos de  $S_1$  e  $S_m$ . Supondo que os valores de  $a_i$  e  $b_i$  na transformação dada pela equação 2.11 foram escolhidos

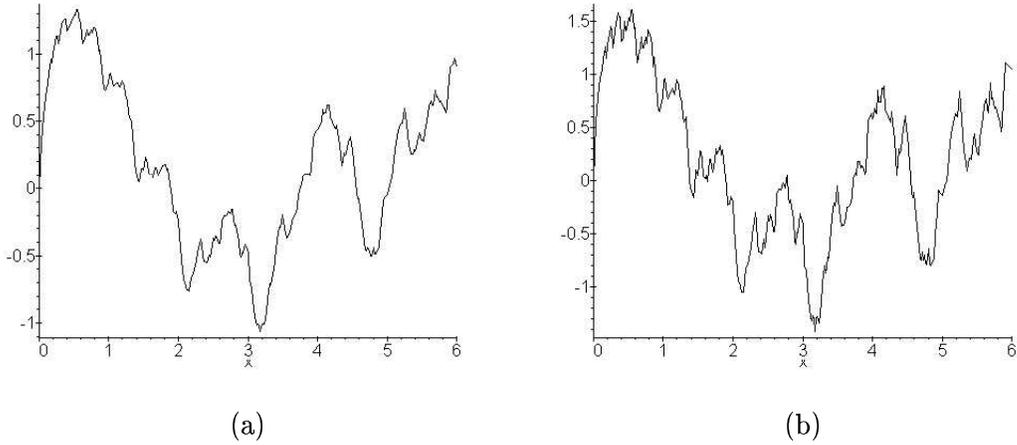


Fig. 2.6 – Função de Weierstrass para  $\lambda = 1.5$  e: (a)  $s = 1.1$  (b)  $s = 1.3$ .

de forma que:

$$S_i(p_m) = S_{i+1}(p_1), \text{ para } 1 \leq i \leq m - 1 \quad (2.12)$$

Esta condição garante que a união dos segmentos  $\overline{S_i(p_1)S_i(p_m)}$  forma uma curva poligonal.

O conjunto afim pode ser obtido através do seguinte processo recursivo: defina  $E_0 = \overline{p_1 p_m}$  e obtenha recursivamente as curvas poligonais  $E_k$  através da seguinte fórmula:

$$E_{k+1} = \bigcup_{i=1}^m S_i(E_k) \quad (2.13)$$

Considerando o fato de que as transformações afins usadas para gerar este conjunto, especificadas na expressão 2.11, transformam retas verticais em retas verticais e a faixa vertical de  $0 \leq t \leq 1$  na faixa vertical de  $(i-1)/m \leq t \leq i/m$ , em conjunto com a condição 2.12, resulta que o conjunto obtido é o gráfico de alguma função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $F$  é a curva auto-afim obtida pelo processo acima, então (Falconer (1990)):

$$\dim_B F = 1 + \frac{\log(c_1 + \dots + c_m)}{\log m} \quad (2.14)$$

Na Figura 2.8 tem-se quatro transformações  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  com  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.75$ ,  $a_1 = a_2 = 0.5$ ,  $a_3 = a_4 = -0.5$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = b_4 = 0.5$  e  $b_3 = 1$ , resultando em um

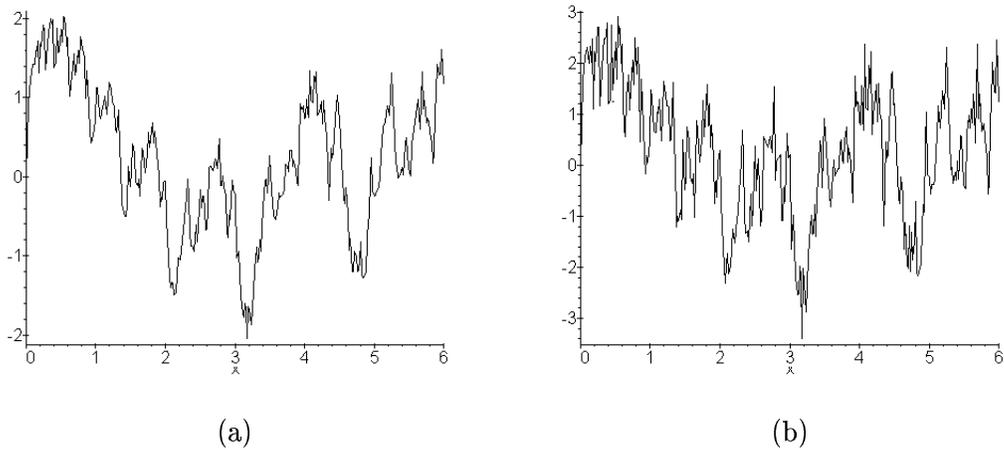


Fig. 2.7 – Função de Weierstrass para  $\lambda = 1.5$  e: (a)  $s = 1.5$  (b)  $s = 1.7$ .

fractal de dimensão 1.7925.

Uma aplicação importante de curvas auto-afins é a *interpolação fractal*. Sejam  $(i/m, x_i)$ , para  $1 \leq i \leq m$ , os pontos a serem interpolados por um fractal de determinada dimensão. Escolhendo as transformações 2.11 de modo que  $S_i$  mapeia o segmento  $\overline{p_1 p_m}$  no segmento  $\overline{((i-1)/m, x_{i-1}) (i/m, x_i)}$  para cada  $i$ , o conjunto auto-afim obtido com estas transformações passa sobre os pontos dados com dimensão de contagem requerida.

A Figura 2.9 mostra a construção de um fractal que interpola os pontos  $(0, 0.2)$ ,  $(0.25, 0.5)$ ,  $(0.5, 0.5)$ ,  $(0.75, 1.0)$ ,  $(1.0, 0.35)$  com dimensão igual a 1.6315, para os valores de  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $c_3 = 0.7$  e  $c_4 = 0.9$ . A Figura 2.9 (a) apresenta o polígono formado pelos pontos a serem interpolados. Nas demais Figuras o mesmo polígono aparece em um tom de cinza mais claro apenas para verificar a interpolação em cada etapa.

## 2.6 Gerando Fractais com Cadeias de Caracteres

Dentre os fractais auto-afins pode-se extrair um subconjunto de fractais cujos pré-fractais são constituídos por um número finito de segmentos de retas. Deste subconjunto destaca-se as denominadas curvas fractais, cujo exemplo mais conhecido é a curva de Koch (Figura 2.4 (b)). A geração destes pré-fractais pode ser realizada facilmente através do método denominado sistema de Lindenmayer ou *L-System*. Este método, exposto em Barnsley et al. (1988), descreve o fractal por meio de um axioma e um conjunto de

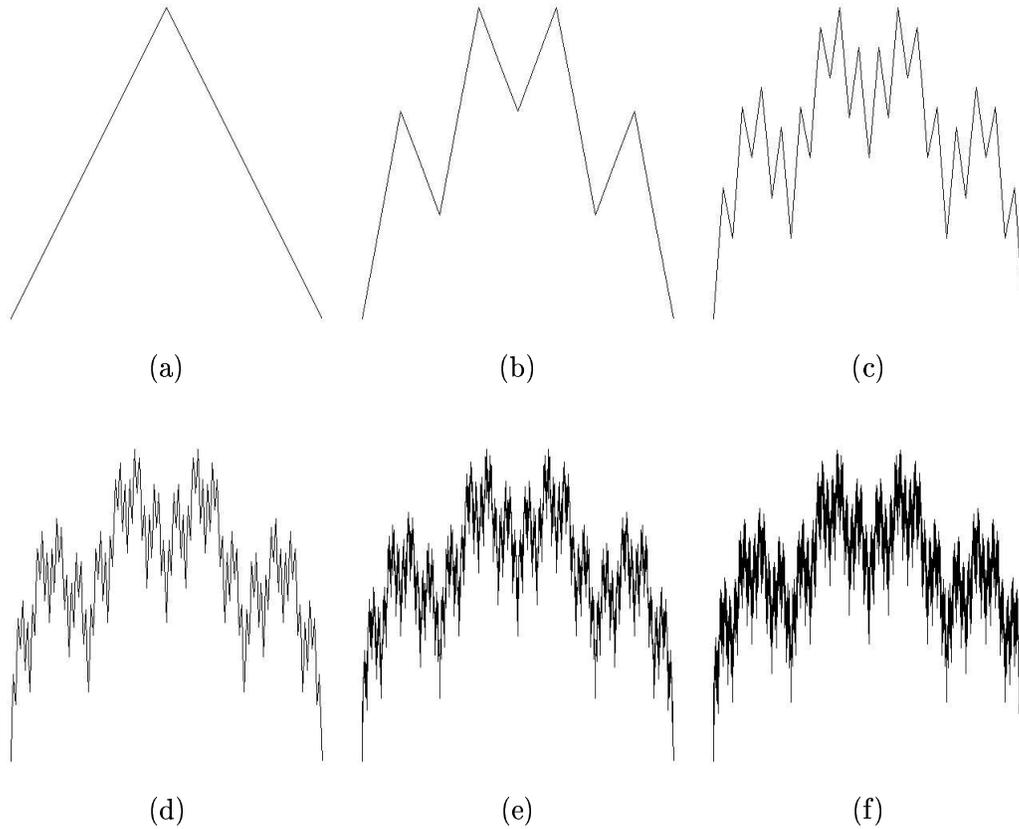


Fig. 2.8 – Curva auto-afim: (a)  $E_1$  (b)  $E_2$  (c)  $E_3$  (d)  $E_4$  (e)  $E_5$  (f)  $E_6$ .

regras, cada qual formado por uma cadeia de caracteres, mais um ângulo de giro  $\theta$ . O pré-fractal de nível 0 é o próprio axioma, enquanto que os pré-fractais dos demais níveis são obtidos pela substituição recursiva das regras na cadeia de caracteres que descreve o pré-fractal de nível anterior. Para obter a representação gráfica do pré-fractal é suficiente um sistema gráfico capaz de traçar um segmento de reta de tamanho fixo, na direção atual, e cuja direção possa ser alterada por um ângulo fixo, no sentido horário ou anti-horário. A sintaxe dos caracteres usados pode ser vista na Tabela 2.2.

A Tabela 2.3 fornece vários exemplos de fractais especificados por meio do L-system. A Figura 2.13 mostra cada um dos pré-fractais do fractal *árvore 2*, gerados de acordo com as regras indicadas na tabela.

TABELA 2.2 – SINTAXE DE CARACTERES PARA L-SYSTEM

Caracter	Função
$A \dots Z$	representa uma regra
[	armazena posição na pilha
]	restaura posição da pilha
+	gira direção em $\theta$ graus
-	gira direção em $-\theta$ graus

TABELA 2.3 – DEFINIÇÃO DE FRACTAIS POR MEIO DO L-SYSTEM

Fractal	Axioma	Regras	$\theta$	Figura
Koch 1	A	$A \Rightarrow A-A++A-A$	$60^\circ$	2.4 (b)
Koch 2	A+A+A+A	$A \Rightarrow A+A-A-AA+A+A-A$	$90^\circ$	2.14
Sierpinsky 1	A+A+A+A	$A \Rightarrow AA+A+A+A+AA$	$90^\circ$	2.10 (a)
Sierpinsky 2	XF-XF-X	$X \Rightarrow XF-XF-XF-FF$ $F \Rightarrow FF$	$120^\circ$	2.10 (b)
Peano	X	$X \Rightarrow XF YFX+F+YFXFY-F-XFYFX$ $Y \Rightarrow YFXFY-F-XFYFX+F+YFXFY$	$90^\circ$	2.11 (a)
Hilbert	X	$X \Rightarrow -YF+XFX+FY-$ $Y \Rightarrow +XF-YFY-FX+$	$90^\circ$	2.11 (b)
árvore 1	F	$F \Rightarrow F[+F]F[-F]F$	$28^\circ$	2.12 (a)
árvore 2	G	$G \Rightarrow GFX[+G][-G]$ $X \Rightarrow X[-FFF][+FFF]FX$	$28^\circ$	2.13
árvore 3	F	$F \Rightarrow FF+[+F-F-F][-F+F+F]$	$22^\circ$	2.12 (b)

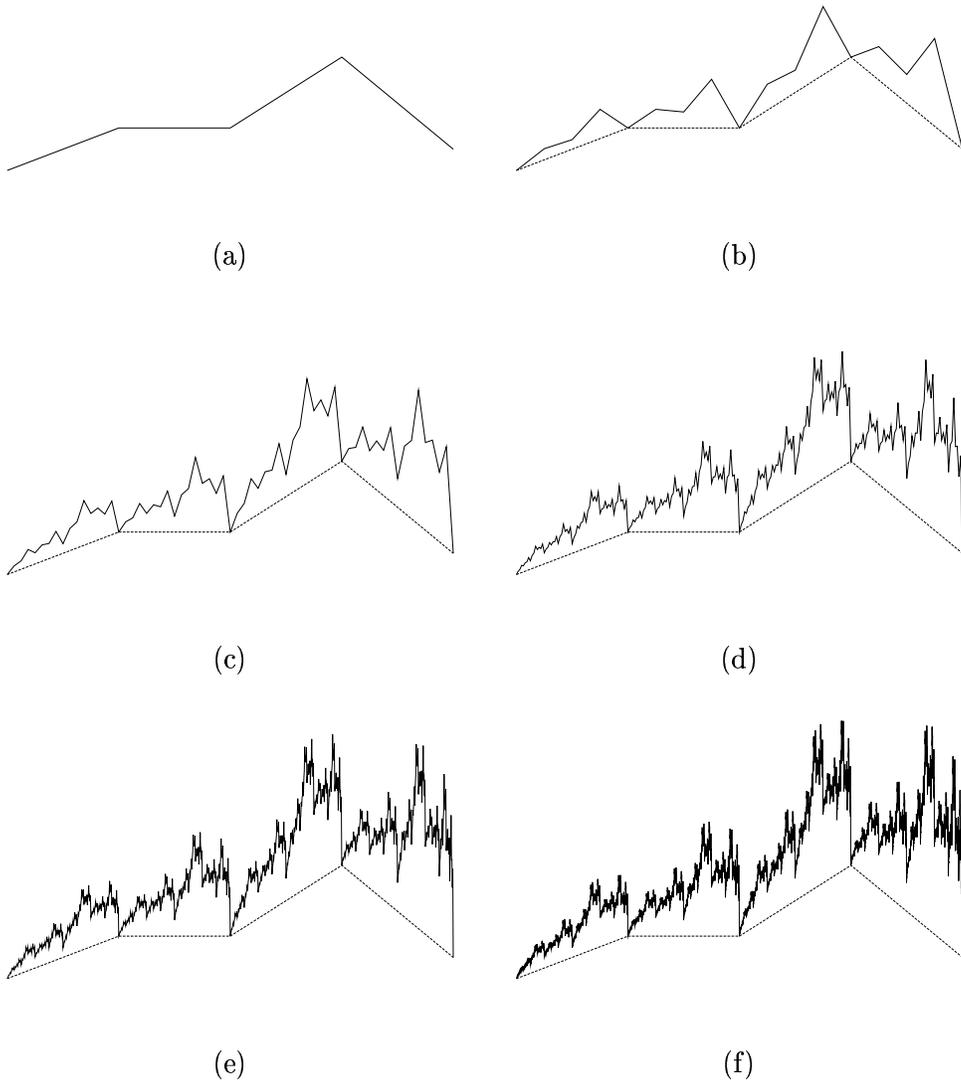
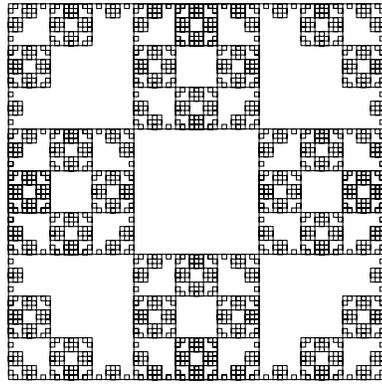
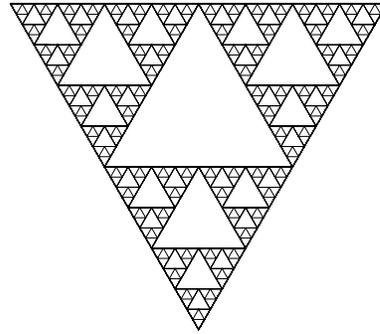


Fig. 2.9 – Interpolação fractal: (a)  $E_1$  (b)  $E_2$  (c)  $E_3$  (d)  $E_4$  (e)  $E_5$  (f)  $E_6$ .

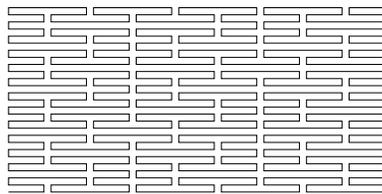


(a)

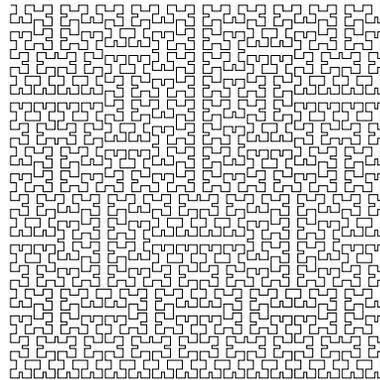


(b)

Fig. 2.10 – Fractais de Sierpinski: (a) Pré-fractal 4 de Sierpinski 1 (b) Pré-fractal 5 de Sierpinski 2.

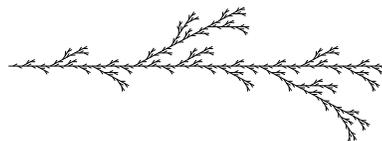


(a)

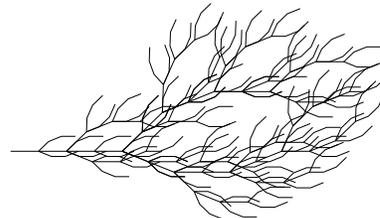


(b)

Fig. 2.11 – (a) Pré-fractal 3 da curva de Peano (b) Pré-fractal 6 da curva de Hilbert.



(a)



(b)

Fig. 2.12 – (a) Pré-fractal 4 de árvore 1 (b) Pré-fractal 3 de árvore 2.

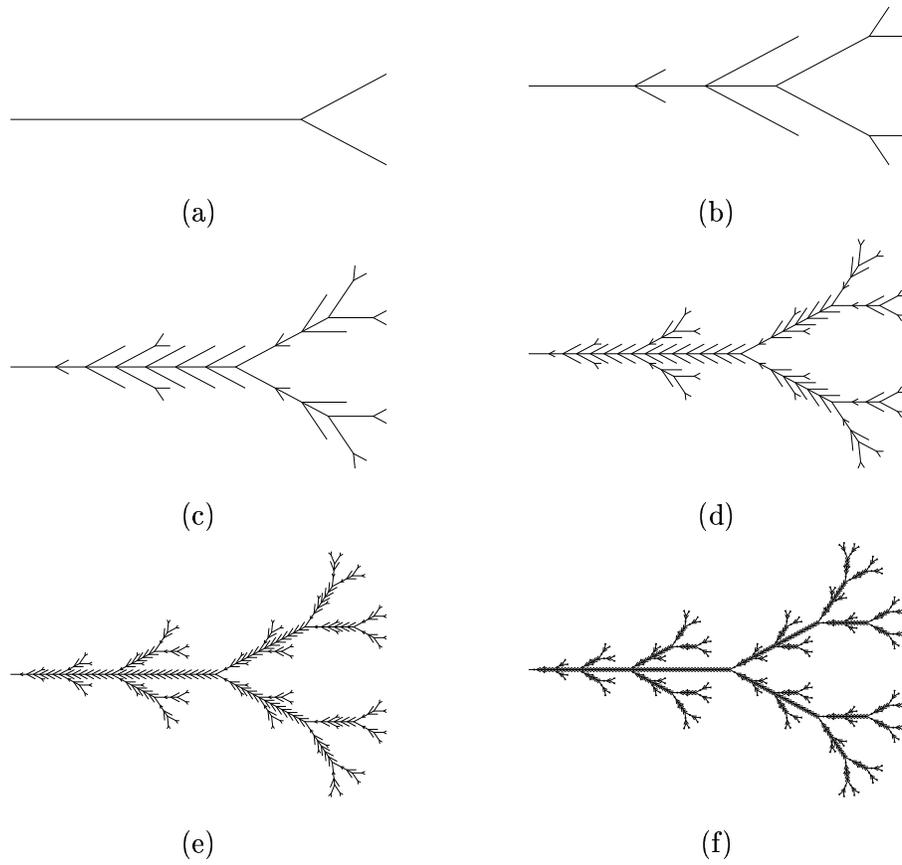


Fig. 2.13 – Pré-fractais para árvore 2 de nível: (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5.

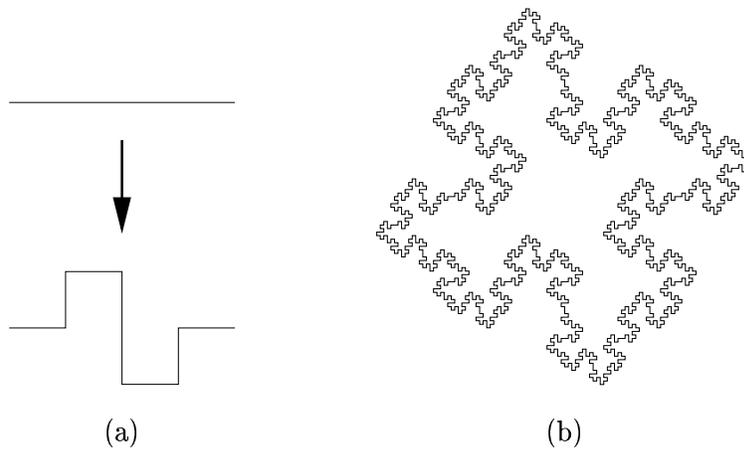


Fig. 2.14 – (a) Gerador (b) Ilha quadrada de Koch.



## CAPÍTULO 3

### MÉTODOS NUMÉRICOS EM DINÂMICA DOS FLUÍDOS

Sejam  $\Omega$  uma região limitada e  $\Gamma = \partial\Omega$  a fronteira desta região. O escoamento isotérmico de um fluido viscoso incompressível em um domínio bidimensional, é descrito pelas equações de Navier-Stokes e as condições de contorno:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad x \in \overline{\Omega} \quad (3.3)$$

$$\vec{u} = \vec{w}(\vec{x}, t), \quad x \in \Gamma, t \leq 0 \quad (3.4)$$

sendo  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  e  $p(\vec{x}, t)$  a velocidade e a pressão cinemática, respectivamente, no ponto  $\vec{x}$  no instante  $t$ , enquanto que  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

Considerando as seguintes variáveis adimensionais:

$$\vec{X} = \frac{\vec{x}}{L} \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{u_\infty} \quad \bar{t} = \frac{u_\infty t}{L} \quad P = \frac{p - p_\infty}{u_\infty^2} \quad (3.5)$$

sendo  $L, u_\infty$  e  $p_\infty$  valores de referência, as equações 3.1 e 3.2 tomam a forma:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\vec{U} + (\vec{U} \cdot \overline{\nabla})\vec{U} + \overline{\nabla}P = \frac{1}{Re}(\overline{\nabla})^2\vec{U} \quad (3.6)$$

$$\overline{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.7)$$

sendo que  $\overline{\nabla}$  corresponde ao operador  $\nabla$  usando as variáveis adimensionais  $\vec{X}$  e  $Re$  indica o número de Reynolds e é dado por:

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu} \quad (3.8)$$

A partir deste momento, as equações envolverão apenas variáveis adimensionais, exceto onde for indicado o contrário. Para simplificar a notação, serão usados os símbolos usuais de posição  $\vec{x}$ , velocidade  $\vec{u}$ , pressão  $p$  e tempo  $t$ .

Aproximações da solução das equações 3.6 e 3.7 são, em geral, obtidas numericamente através dos métodos de diferenças finitas ou de volumes finitos, que serão vistos nas

seções 3.1 e 3.2, respectivamente. A principal dificuldade encontrada na resolução destas equações está na falta de uma equação de evolução para a pressão. O campo de pressão é dado implicitamente pela equação da continuidade: se o campo de pressão dado está correto, então o campo de velocidade  $\vec{u}$  obtido por meio da equação 3.6 satisfaz a equação 3.7. Por meio de algumas manipulações algébricas com as equações 3.6 e 3.7, como efetuado em Platte (1998), obtém-se a equação de Poisson para a pressão e a sua condição de contorno:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \left( \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 u_n - \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u_n \right) \quad (3.10)$$

sendo  $\vec{n}$  o vetor normal a  $\Gamma = \partial\Omega$  e  $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$ .

Qualquer que seja o método numérico utilizado para resolver as equações 3.6, 3.7 e 3.9, a seqüência para obter uma aproximação da solução destas equações, pode ser resumida nos passos descritos pelo algoritmo 3.1.

- *Atribua  $\vec{u}_0$*
- *Obtenha pressão inicial  $p_0$  para o campo de velocidades  $\vec{u}_0$*
- *Para cada iteração, até atingir a condição de parada:*
  - *Atualize  $\vec{u}$*
  - *Corrija a pressão*

Algoritmo 3.1 – Cálculo do escoamento incompressível.

### 3.1 Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas caracteriza-se pela discretização do domínio em um conjunto finito de pontos, usualmente posicionados de forma estruturada, e pela transformação da equação diferencial em uma equação algébrica sobre o domínio discretizado.

Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $x_1, \dots, x_n$  um conjunto de pontos distintos. Denotando por  $f_i = f(x_i)$ , as derivadas de  $f$  podem ser aproximadas por:

$$f_x(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.11)$$

$$f_x(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (3.12)$$

$$f_x(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.13)$$

$$f_{xx}(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (3.14)$$

As aproximações da derivada primeira, dadas pelas equações 3.11, 3.12 e 3.13, são conhecidas, respectivamente, como diferença avançada, diferença central e diferença para trás. A equação 3.14 é uma aproximação para a derivada segunda de  $f$ , conhecida como diferença centrada. Estas aproximações são usadas para associar a equação diferencial a uma equação algébrica, pela substituição das respectivas derivadas. A equação algébrica resultante, conhecida como equação de diferenças finitas, deve ser analisada sobre quatro aspectos: consistência com a equação diferencial, ordem, convergência e estabilidade.

A equação de diferenças finitas é dita *consistente* com a equação diferencial se a diferença entre as duas tende a zero quando a discretização espacial e temporal tendem para zero independentemente.

A equação de diferenças finitas é dita *estável* se produz uma solução limitada quando aplicado à uma equação diferencial que possua solução limitada.

Um método de diferenças finitas é dito *convergente* se a solução da equação de diferenças finitas se aproxima da solução da equação diferencial quando a discretização espacial e temporal se aproximam de zero independentemente. No caso de equações lineares, a convergência pode ser garantida pela consistência e pela estabilidade, de acordo com o teorema da equivalência de Lax (Hoffman (1992)):

*Dado um problema de valor inicial linear bem-posto e uma aproximação em diferenças finitas que seja consistente, a estabilidade é uma condição necessária e suficiente para a convergência.*

Uma demonstração do teorema da equivalência de Lax pode ser encontrada em Gottlieb e Orszag (1977).

A ordem de um método de diferenças finitas é a taxa pela qual o erro da solução aproximada de diferenças finitas se aproxima de zero quando o tamanho do espaçamento da malha

tende à zero.

TABELA 3.1 – MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO (Hoffman (1992)).

Método	Consistente	Estabilidade	Ordem
FTCS	sim	condicional	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
Richardson	sim	instável	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
BTCS	sim	incondicional	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
Crank-Nicolson	sim	incondicional	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
ADI	sim	incondicional	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$

TABELA 3.2 – MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS PARA A EQUAÇÃO DE CONVECÇÃO (Hoffman (1992)).

Método	Consistente	Estabilidade	Ordem
FTCS	sim	instável	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
Lax	não	condicional	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2) + O(\frac{\Delta x^2}{\Delta t})$
Upwind	sim	condicional	$O(\Delta t) + O(\Delta x)$
Richardson	sim	condicional	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
Lax-Wendroff(1 passo)	sim	condicional	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
Lax-Wendroff(2 passos)	sim	condicional	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
MacCormack	sim	condicional	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
BTCS	sim	instável	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
Hopscotch	sim	condicional	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$

A Tabela 3.1 lista os principais métodos de diferenças finitas para a equação da difusão ( $f_t = \alpha f_{xx}$ ), bem como a sua análise com respeito a consistência, estabilidade e ordem. A Tabela 3.2 mostra os principais métodos de diferenças finitas para a equação de convecção ( $f_t + u f_x = 0$ ). A convergência de cada um destes métodos, para as equações citadas, pode ser garantida pelo teorema da equivalência de Lax, quando o método for consistente e estável.

### 3.2 Volumes Finitos

No método de volumes finitos o domínio  $\Omega$  é subdividido em um número finito de elementos,  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ . Estes elementos são disjuntos dois a dois, exceto nas suas fronteiras, o domínio  $\Omega$  é totalmente coberto pelos elementos:

$$\Omega_i \cap \Omega_j \subseteq \partial\Omega_k, \quad k = i, j \quad (3.15)$$

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i \supseteq \Omega \quad (3.16)$$

Cada um destes elementos tem, em geral, forma poligonal e serve como referência para definir os pontos onde as propriedades serão calculadas como, por exemplo, nos vértices ou centros do polígono, bem como para a definir a região onde a equação diferencial é integrada. Esta região é denominada *volume de controle* do ponto onde a propriedade é calculada.

As formas mais usadas para tais elementos são retangular e triangular. Subdivisões usando tais formas serão denominadas, respectivamente, como *malha retangular* e *malha triangular*.

As equações 3.6 e 3.7, para o caso bidimensional, podem ser reescritas da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \left( u\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla u \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot \left( v\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla v \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.18)$$

sendo  $\vec{u} = (u, v)$ . Integrando as equações 3.17 e 3.18 nos volumes de controle  $V$  e  $W$ , respectivamente, e aplicando o teorema da divergência, obtém-se a forma integral:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \left( u\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla u \right) \cdot \vec{n} ds = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (3.19)$$

$$\int_W \frac{\partial v}{\partial t} dV + \int_{\partial W} \left( v\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla v \right) \cdot \vec{n} ds = - \int_W \frac{\partial p}{\partial y} dV \quad (3.20)$$

Para efetuar as integrações nas equações 3.19 e 3.20, é preciso definir o tipo de elemento para subdividir o domínio, bem como o posicionamento dos pontos de cálculo das propriedades. Outra questão a ser abordada é o acoplamento entre a velocidade e a pressão, ou seja, como obter o campo de pressão a partir de um campo de velocidades obtido pela resolução das equações 3.19 e 3.20. Isto será feito na seção 3.2.2.

### 3.2.1 Volumes Finitos em Malhas Retangulares

A malha quadrada é a mais simples de ser implementada e a mais rápida. A estruturação permite expressar as derivadas parciais de forma simples e a malha quadriculada facilita a localização dos pontos vizinhos, pois pode-se armazenar os valores em matrizes. A grande desvantagem da malha quadrada é a sua baixa adaptabilidade à domínios de geometrias complexas.

Para evitar problemas, tais como a não conservação de massa global, entre outros, é usual utilizar-se malhas distintas para as velocidades e a pressão, tal como ocorre na *malha alternada* ou *malha desencontrada*, como pode ser visto na Figura 3.1. Neste trabalho, a implementação foi baseada na malha alternada.

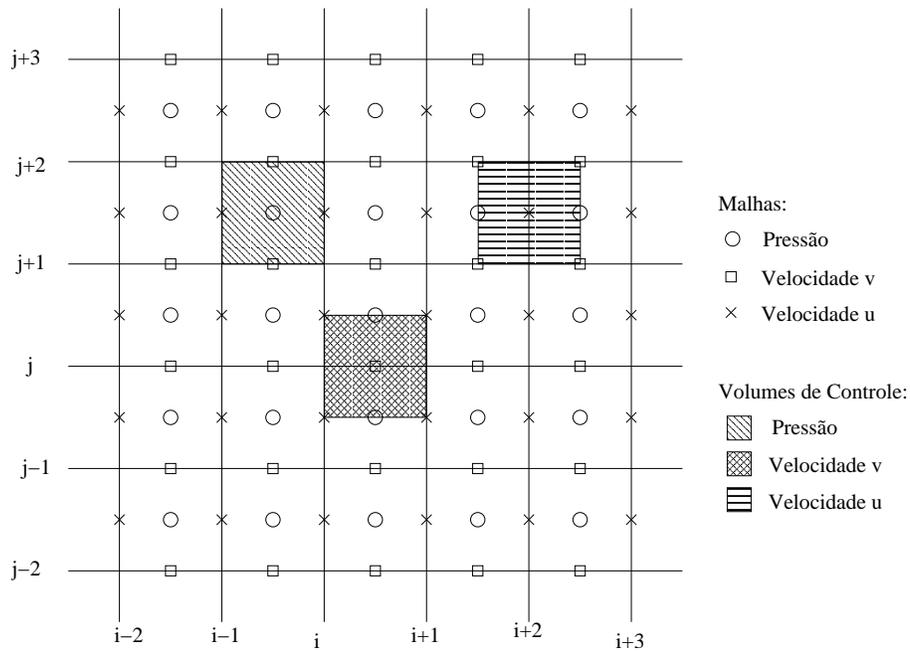


Fig. 3.1 – Malha alternada.

Supondo que  $u$  se mantém constante no volume de controle e que a pressão se mantém constante nas respectivas faces deste volume, obtém-se uma equação discreta para  $u$  da seguinte forma:

$$u_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left( H_{i,j}^1(u, v) - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \quad (3.21)$$

sendo:

$$H_{i,j}^1(u, v) = \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t} - \int_{\partial V} \left( u\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla u \right) \cdot d\vec{s} \quad (3.22)$$

De modo semelhante, obtém-se a seguinte equação discreta para  $v$ :

$$v_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left( H_{i,j}^2(u, v) - \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \quad (3.23)$$

sendo:

$$H_{i,j}^2(u, v) = \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t} - \int_{\partial V} \left( v\vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla v \right) \cdot d\vec{s} \quad (3.24)$$

Em cada ponto da malha da pressão, os campos de  $u$  e  $v$ , dados pelas equações 3.21 e 3.23, devem satisfazer a equação da continuidade, cuja discretização é expressa por:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} = 0 \quad (3.25)$$

### 3.2.2 Acoplamento Velocidade-Pressão

A inexistência de uma equação de evolução para a pressão em escoamentos incompressíveis implica que o campo de pressão só pode ser obtida de forma indireta: um dado campo de pressão é adequado se o campo de velocidades obtida das equações de movimento com este campo de pressão satisfaz a equação da continuidade.

#### 3.2.2.1 Método de Chorin

Chorin desenvolveu dois métodos para tratar o problema do acoplamento velocidade-pressão em escoamentos incompressíveis. O primeiro método é baseado no uso da compressibilidade artificial. Neste caso as soluções intermediárias são distorcidas e apenas a solução estacionária corresponde ao escoamento incompressível.

O segundo método de Chorin consiste na obtenção de aproximações iniciais para  $\vec{u}$  e  $p$ , com sucessivas correções iterativas em cada intervalo de tempo. Dado o campo de velocidades no instante de tempo  $t$ , seja  $\vec{u}^* = (u^*, v^*)$  a solução da equação do movimento

desprezando-se a pressão. Com algumas manipulações algébricas pode-se relacionar o valor de  $\vec{u} = (u, v)$ , no instante  $t + \Delta t$ , com a previsão inicial  $\vec{u}^*$ , através das expressões:

$$\rho u = \rho u^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.26)$$

$$\rho v = \rho v^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.27)$$

Chorin propõe o seguinte esquema iterativo para que a pressão satisfaça a equação de conservação de massa:

$$p^{k+1} = p^k - \lambda D \quad (3.28)$$

sendo  $D$  a aproximação numérica da equação de conservação da massa,  $\lambda$  um parâmetro de relaxação e  $k$  o nível iterativo dentro do intervalo de tempo.

Desta forma, o acoplamento velocidade-pressão através do método de Chorin pode ser relacionado através do algoritmo 3.2.

- 1) *Obtenha  $\vec{u}^*$ .*
- 2) *Corrija  $\vec{u}$  usando as equações 3.26 e 3.27.*
- 3) *Calcule  $p$  através da equação 3.28.*
- 4) *Repita os passos 2 e 3 até que a velocidade e a pressão estejam dentro da precisão desejada.*
- 5) *Repita o processo para o próximo intervalo de tempo.*

Algoritmo 3.2 – Método de Chorin.

### 3.2.2.2 Método SIMPLE

O método *Semi Implicit Linked Equations* ou SIMPLE, foi desenvolvido por Patankar e Spalding (1972), baseado no método de Chorin. Por simplificação, o método será aplicado a uma malha retangular bidimensional, mas ele é aplicável a outros tipos de malhas, constituindo o método básico para malhas não estruturadas.

Sejam  $p^*$  a melhor estimativa da pressão disponível e  $\vec{u}^* = (u^*, v^*)$  a solução das equações 3.21 e 3.23 usando  $p^*$  como campo de pressão, ou seja:

$$u_{i,j}^* = \Delta t \left( H_{i,j}^1(u^*, v^*) - \frac{p_{i,j}^* - p_{i-1,j}^*}{\Delta x} \right) \quad (3.29)$$

$$v_{i,j}^* = \Delta t \left( H_{i,j}^2(u^*, v^*) - \frac{p_{i,j}^* - p_{i,j-1}^*}{\Delta y} \right) \quad (3.30)$$

Subtraindo as equações 3.21 e 3.23 das equações 3.29 e 3.30 e desprezando <sup>1</sup> as diferenças  $u_{i,j}^n - u_{i,j}^*$  e  $v_{i,j}^n - v_{i,j}^*$ , obtém-se as equações de correção da velocidade:

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* - \Delta t \frac{p'_{i,j} - p'_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.31)$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* - \Delta t \frac{p'_{i,j} - p'_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (3.32)$$

$$\text{sendo: } p' = p - p^* \quad (3.33)$$

Substituindo as equações 3.29 e 3.30 na equação 3.25, obtém-se uma equação de Poisson para  $p'$ , na forma discreta:

$$\nabla^2 p'_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*}{\Delta t \Delta x} + \frac{v_{i+1,j}^* - v_{i,j}^*}{\Delta t \Delta y} \quad (3.34)$$

sendo:

$$\nabla^2 p'_{i,j} = \frac{p'_{i+1,j} - 2p'_{i,j} + p'_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p'_{i,j+1} - 2p'_{i,j} + p'_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.35)$$

A partir da equação 3.34 é possível calcular  $p'$  e, desta forma, corrigir  $u$ ,  $v$  e  $p$  usando as equações 3.31, 3.32 e 3.33. Por questões de convergência, é comum adotar-se um fator de sub-relaxação na correção da pressão, ou seja:

$$p = p^* + \alpha p' \quad (3.36)$$

Portanto, o método SIMPLE pode ser descrito através dos passos indicados pelo algoritmo 3.3.

---

<sup>1</sup>O método *SIMPLE Consistente* ou SIMPLEC segue raciocínio análogo, sem desprezar as diferenças citadas.

- 1) *Estimar os campos de velocidade e pressão.*
- 2) *Calcule  $(u^*, v^*)$  através das equações 3.29 e 3.30.*
- 3) *Encontre  $p'$  usando a equação 3.34.*
- 4) *Calcule  $(u, v)$  usando as equações 3.31 e 3.32.*
- 5) *Calcule  $p$  através da equação 3.33 ou 3.36.*
- 6) *Repetir o processo com  $u, v, p$  a partir do passo 2, até obter convergência.*

Algoritmo 3.3 – Método SIMPLE.  
Adaptado de Maliska (1995).

### 3.2.2.3 Método SIMPLER

O método *SIMPLE Revisado* ou SIMPLER (Patankar (1980)) apresenta uma nova forma de calcular a pressão  $p$ , de modo a conseguir uma convergência mais rápida e segura. As equações 3.21 e 3.23 podem ser escritas como:

$$u_{i,j}^{n+1} = \hat{u}_{i,j} - \Delta t \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.37)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \hat{v}_{i,j} - \Delta t \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (3.38)$$

Substituindo as equações 3.37 e 3.38 na equação 3.25, obtém-se uma equação de Poisson para  $p$ , na forma discreta:

$$\nabla^2 p_{i,j} = \frac{\hat{u}_{i+1,j} - \hat{u}_{i,j}}{\Delta t \Delta x} + \frac{\hat{v}_{i+1,j} - \hat{v}_{i,j}}{\Delta t \Delta y} \quad (3.39)$$

sendo  $\nabla^2 p_{i,j}$  dado pela equação 3.35, substituindo  $p'$  por  $p$ .

A equação 3.39 permite calcular a pressão  $p$ , após obter as velocidades seguindo os primeiros passos do método SIMPLE. O método SIMPLER está descrito no algoritmo 3.4.

- 1) *Estimar os campos de velocidade e pressão.*
- 2) *Calcule  $(u^*, v^*)$  através das equações 3.29 e 3.30.*
- 3) *Encontre  $p'$  usando a equação 3.34.*
- 4) *Calcule  $(u, v)$  usando as equações 3.31 e 3.32.*
- 5) *Calcule  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ .*
- 6) *Encontre  $p$ , resolvendo a equação 3.39.*
- 7) *Repetir o processo com  $u, v, p$  a partir do passo 2, até obter convergência.*

Algoritmo 3.4 – Método SIMPLER.  
Adaptado de Maliska (1995).

#### 3.2.2.4 Método PRIME

O método *Pressure Implicit Momentum Explicit* ou PRIME (Maliska (1995)) utiliza a equação 3.39 para obter a pressão e usá-las para corrigir a velocidade, tornando desnecessário a obtenção do campo  $p'$ , usado nos métodos SIMPLE e SIMPLER para corrigir a velocidade. O método PRIME está descrito no algoritmo 3.5.

- 1) *Estimar os campos de velocidade e pressão.*
- 2) *Calcule  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ .*
- 3) *Encontre  $p$ , resolvendo a equação 3.39.*
- 4) *Corrija as velocidades usando as equações 3.37 e 3.38.*
- 5) *Repetir o processo com  $u, v, p$  a partir do passo 2, até obter convergência.*

Algoritmo 3.5 – Método PRIME.  
Adaptado de Maliska (1995).

### 3.2.2.5 Método Velocidade-Pressão

Seguindo Gresho e Sani (1987), Claeyssen et al. (1999) ou Bravo et al. (1999), podemos obter uma equação de Poisson discreta para a pressão. Substituindo as equações 3.21 e 3.23 na equação 3.25 e rearranjando adequadamente os termos, obtém-se a equação discreta para a pressão:

$$\nabla^2 p_{i,j} = \nabla \cdot H_{i,j}(u, v) \quad (3.40)$$

sendo  $H_{i,j}(u, v) = (H_{i,j}^1(u, v), H_{i,j}^2(u, v))$ .

Esta equação é aplicável nos pontos interiores da malha da pressão, ou seja, se  $i = 0, 1, \dots, N$  e  $j = 0, 1, \dots, M$ , então a equação 3.40 é válida para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ , com  $n = N - 1$  e  $m = M - 1$ , resultando em um sistema linear  $Ap = b$ , sendo  $A$  uma matriz de ordem  $(m \times n) \times (m \times n)$ , singular. Este sistema pode ser resolvido de diversas formas, gerando diversos métodos de correção da pressão, descritos na seção 3.3.

- 1) *Atribua o campo de velocidade inicial e as condições de contorno.*
- 2) *Calcule o campo de pressão inicial.*
- 3) *Calcule  $(u^{n+1}, v^{n+1})$  através das equações 3.21 e 3.23.*
- 4) *Encontre  $p^{n+1}$  resolvendo o sistema linear da equação 3.40.*
- 5) *Voltar ao passo 3, usando  $u^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1}$ , para o próximo passo de tempo, até atingir o critério de parada estabelecido.*

Algoritmo 3.6 – Método Velocidade-Pressão.

### 3.2.3 Volumes Finitos em Malhas Triangulares

A malha triangular sugerida por Patankar (1980) consiste de uma malha  $M_p$  triangular inicial para a pressão que é subdividida para gerar uma malha  $M_v$  refinada para a velocidade. Esta subdivisão é efetuada da seguinte forma: para cada triângulo da malha  $M_p$

gera-se quatro triângulos da malha da velocidade, sendo um deles formado pelas arestas ligando os três pontos médios do triângulo original e os outros três são formados pelas arestas ligando dois pontos médios e um dos vértices (ver Figura 3.2 (a)). As vantagens obtidas com o uso de um posicionamento desencontrado para as malhas quadradas são garantidas através deste artifício.

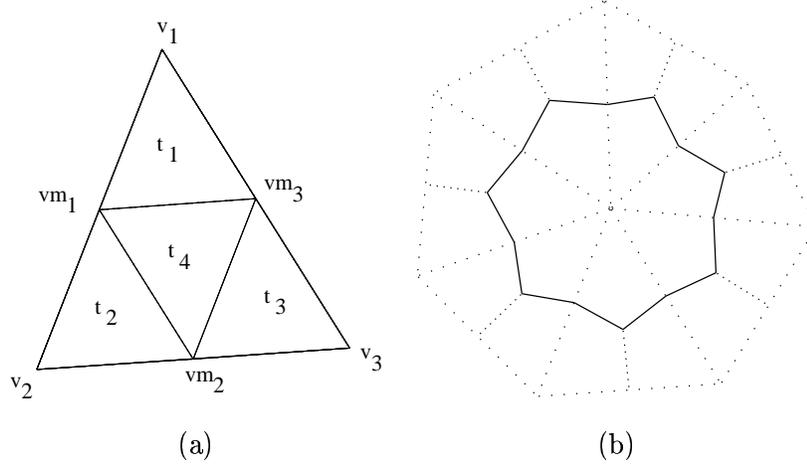


Fig. 3.2 – (a) Malha de velocidade (b) Volume de controle.

Os volumes de controle de cada vértice, em qualquer das malhas, é o "median-dual", ou seja, as arestas do volume de controle de um vértice  $v$  em um triângulo  $T$  é dado pelos segmentos de reta que unem o baricentro do triângulo aos pontos médios dos lados do triângulo que passam pelo vértice  $v$ , como pode ser visto na Figura 3.2(b).

Sejam  $V_v$  o volume de controle do vértice  $v$  e  $F_v$  as faces deste volume de controle. As equações 3.17 e 3.18, podem ser reescritas como:

$$u_v^{n+1} = \Delta t \left( H_v^u - \frac{I_v^{px}}{A_v} \right) \quad (3.41)$$

$$v_v^{n+1} = \Delta t \left( H_v^v - \frac{I_v^{py}}{A_v} \right) \quad (3.42)$$

com:

$$H_v^u = \frac{u_v^n}{\Delta t} - \frac{1}{A_v} \sum_{f \in F_v} \int_f \left( u \vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla u \right) \cdot \vec{n}_f ds \quad (3.43)$$

$$H_v^v = \frac{v_v^n}{\Delta t} - \frac{1}{A_v} \sum_{f \in F_v} \int_f \left( v \vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla v \right) \cdot \vec{n}_f ds \quad (3.44)$$

$$I_v^{px} = \int_{V_v} \frac{\partial P}{\partial x} dV \quad (3.45)$$

$$I_v^{py} = \int_{V_v} \frac{\partial P}{\partial y} dV \quad (3.46)$$

sendo  $A_v$  a área do volume de controle  $V_v$  e  $\vec{n}_f$  o vetor normal a face  $f \in F_v$ . Para a integração no tempo considera-se  $u$  e  $v$  constante no volume de controle.

As integrais em  $H_v^u$  e  $H_v^v$  podem ser aproximadas como se segue:

$$\int_f \left( u\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla u \right) \cdot \vec{n}_f ds \approx \left( u\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla u \right) \Big|_{m_f} \cdot \vec{n}_f S_f \quad (3.47)$$

$$\int_f \left( v\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla v \right) \cdot \vec{n}_f ds \approx \left( v\vec{u} - \frac{1}{Re} \nabla v \right) \Big|_{m_f} \cdot \vec{n}_f S_f \quad (3.48)$$

sendo  $m_f$  e  $S_f$ , respectivamente, o ponto médio e o tamanho da aresta  $f$ .

Para calcular  $u$ ,  $v$ ,  $P$  e suas derivadas no ponto médio, supondo uma variação linear entre os vértices de cada triângulo da malha. Assim, se  $v_1 = \{x_1, y_1\}$ ,  $v_2 = \{x_2, y_2\}$  e  $v_3 = \{x_3, y_3\}$  são os vértices do triângulo, nos quais a os valores da propriedade são  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$ , respectivamente, então o valor da propriedade em  $(x, y)$  será dado por:

$$\phi(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (3.49)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{(y_2 - y_3) \phi_1 + (y_3 - y_1) \phi_2 + (y_1 - y_2) \phi_3}{\psi} \quad (3.50)$$

$$\beta = \frac{(x_3 - x_2) \phi_1 + (x_1 - x_3) \phi_2 + (x_2 - x_1) \phi_3}{\psi} \quad (3.51)$$

$$\gamma = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) \phi_1 + (x_3 y_1 - y_3 x_1) \phi_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \phi_3}{\psi} \quad (3.52)$$

$$\psi = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1 \quad (3.53)$$

Obtém-se ainda, para todo ponto  $(x, y)$  interior ao triângulo, que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \alpha \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \beta \quad (3.54)$$

Para calcular  $I_v^{px}$  e  $I_v^{py}$ , define-se  $\Lambda_v$  como o conjunto dos triângulos da malha da velocidade adjacentes ao vértice  $v$ , ou seja, o conjunto dos triângulos da malha que possuem  $v$  como um dos seus vértices. Seja também  $ger(\lambda)$  o triângulo da malha da pressão que gerou o

$\lambda$ . Desta forma, obtém-se:

$$I_v^{px} = \sum_{\lambda \in \Lambda_v} \alpha^{ger(\lambda)} A_{\lambda,v} \quad (3.55)$$

$$I_v^{py} = \sum_{\lambda \in \Lambda_v} \beta^{ger(\lambda)} A_{\lambda,v} \quad (3.56)$$

sendo  $A_{\lambda,v}$  a área do volume de controle do vértice  $v$  no triângulo  $\lambda$ . Denotando por  $\lambda_{v_1}$ ,  $\lambda_{v_2}$  e  $\lambda_{v_3}$  os vértices de um triângulo  $\lambda$ , as equações acima podem ser reescritas como:

$$I_v^{px} = \sum_{\lambda \in \Lambda_v} \left( \alpha_1 P_{ger(\lambda)_{v_1}} + \alpha_2 P_{ger(\lambda)_{v_2}} + \alpha_3 P_{ger(\lambda)_{v_3}} \right) A_{\lambda,v} \quad (3.57)$$

$$I_v^{py} = \sum_{\lambda \in \Lambda_v} \left( \beta_1 P_{ger(\lambda)_{v_1}} + \beta_2 P_{ger(\lambda)_{v_2}} + \beta_3 P_{ger(\lambda)_{v_3}} \right) A_{\lambda,v} \quad (3.58)$$

ou simplificadamente como:

$$I_v^{px} = \sum_{p \in V_p} \bar{\alpha}_p^v P_p \quad (3.59)$$

$$I_v^{py} = \sum_{p \in V_p} \bar{\beta}_p^v P_p \quad (3.60)$$

Seja  $V_v$  o volume de controle da malha da pressão associada ao vértice  $v \in V_p$ . Para relacionar a velocidade com a pressão, a equação da continuidade 3.2 deve ser integrada sobre o volume  $V_v$ . Conforme pode ser visto na Figura 3.3 (a), o volume engloba diversos triângulos da malha da velocidade.

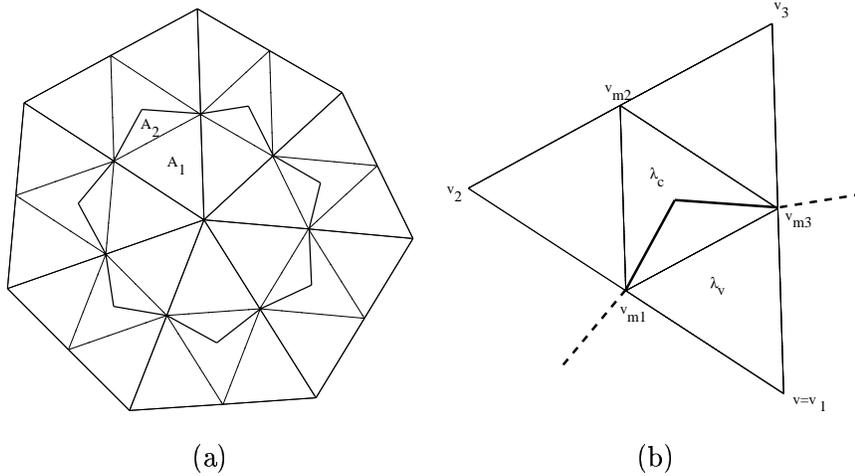


Fig. 3.3 – (a) Volume de controle (b) Triângulo adjacente à  $v$ .

Supondo a variação linear da velocidade nos triângulos da malha da velocidade, obtém-se derivadas parciais constantes em cada triângulo. Desta forma, a parte do volume de

controle sobre um triângulo adjacente à  $v$  na malha da pressão pode ser dividida em duas partes,  $A_1$  e  $A_2$ , onde as derivadas parciais da velocidade são constantes.

Seja  $\Lambda_v$  o conjunto dos triângulos da malha da pressão adjacentes ao vértice  $v$ . Para cada  $\lambda \in \Lambda_v$ , define-se  $\lambda_v$  e  $\lambda_c$  como os triângulos da malha da velocidade, gerados de  $\lambda$ , que são, respectivamente, adjacente à  $v$  e central (formado pelos pontos médios) de  $\lambda$ . Assim:

$$\int_{V_v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} dV = \sum_{\lambda \in \Lambda_v} \left( (\alpha_u^{\lambda_v} + \beta_v^{\lambda_v}) A_{\lambda_v} + \frac{A_{\lambda_c}}{3} (\alpha_u^{\lambda_c} + \beta_v^{\lambda_c}) \right) = 0 \quad (3.61)$$

sendo  $A_{\lambda_v}$  e  $A_{\lambda_c}$  as áreas dos triângulos  $\lambda_v$  e  $\lambda_c$ . Usando os vértices indicados na Figura 3.3(b) e as relações:

$$\alpha_u^{\lambda_v} = \alpha_{v_1}^{\lambda_v} u_{v_1} + \alpha_{v_{m_1}}^{\lambda_v} u_{v_{m_1}} + \alpha_{v_{m_3}}^{\lambda_v} u_{v_{m_3}} \quad (3.62)$$

$$\beta_v^{\lambda_v} = \beta_{v_1}^{\lambda_v} v_{v_1} + \beta_{v_{m_1}}^{\lambda_v} v_{v_{m_1}} + \beta_{v_{m_3}}^{\lambda_v} v_{v_{m_3}} \quad (3.63)$$

$$\alpha_u^{\lambda_c} = \alpha_{v_{m_1}}^{\lambda_c} u_{v_{m_1}} + \alpha_{v_{m_2}}^{\lambda_c} u_{v_{m_2}} + \alpha_{v_{m_3}}^{\lambda_c} u_{v_{m_3}} \quad (3.64)$$

$$\beta_v^{\lambda_c} = \beta_{v_{m_1}}^{\lambda_c} v_{v_{m_1}} + \beta_{v_{m_2}}^{\lambda_c} v_{v_{m_2}} + \beta_{v_{m_3}}^{\lambda_c} v_{v_{m_3}} \quad (3.65)$$

a equação 3.61 pode ser reescrita de modo genérico como:

$$\sum_v (\varphi_v u_v + \sigma_v v_v) = 0 \quad (3.66)$$

sendo os coeficientes  $\varphi_v$  e  $\sigma_v$  são obtidos acumulando o coeficiente (para cada vértice) em cada um dos triângulos adjacentes.

Definindo  $\partial V_u = \{v \in V_u | v \text{ é ponto da fronteira}\}$ , a equação acima toma a forma:

$$\sum_{v \notin \partial V_u} (\varphi_v u_v + \sigma_v v_v) = - \sum_{v \in \partial V_u} (\varphi_v u_v + \sigma_v v_v) \quad (3.67)$$

Para os vértices que não estão sobre a fronteira, valem as equações 3.41 e 3.42. Substituindo estas equações na equação 3.67 e isolando os fatores contendo os valores da pressão, obtém-se:

$$\sum_{v \notin \partial V_u} \frac{1}{A_v} (\varphi_v I_v^{px} + \sigma_v I_v^{py}) = B \quad (3.68)$$

sendo:

$$B = \frac{1}{\Delta t} \sum_{v \in \partial V_u} (\varphi_v u_v + \sigma_v v_v) + \sum_{v \notin \partial V_u} (\varphi_v H_v^u + \sigma_v H_v^v) \quad (3.69)$$

Substituindo as equações 3.59 e 3.60 na expressão acima, obtém-se:

$$\sum_{p \in V_p} \theta_p P_p = B \quad (3.70)$$

sendo:

$$\theta_p = \sum_{v \notin \partial V_u} \frac{1}{A_v} (\varphi_v \bar{\alpha}_p^v + \sigma_v \bar{\beta}_p^v) \quad (3.71)$$

Seja  $w \in V_p$  o vértice cuja pressão deve ser atualizada. A equação de atualização iterativa é definida por:

$$P_w^{(k+1)} = \frac{1}{\theta_w} \left( B - \sum_{p < w} \theta_p P_p^{(k+1)} - \sum_{p > w} \theta_p P_p^{(k)} \right) \quad (3.72)$$

### 3.3 Métodos de Correção da Pressão

Qualquer que seja o tipo da malha utilizada, a equação de Poisson para a pressão, dada por 3.9, quando discretizada, se reduz a um sistema linear  $Ap = b$ , sendo  $A$  uma matriz de ordem  $(m \times n) \times (m \times n)$ , singular. A resolução deste sistema linear singular pode ser feita de duas formas principais: atribuindo um valor fixo para a pressão em um dos pontos e resolver o sistema linear não singular resultante, ou então resolvendo o problema de minimização equivalente, usando a decomposição em valores singulares da matriz  $A$ .

De acordo com o algoritmo 3.1, um método para obtenção da pressão se faz necessário em dois momentos: na obtenção da pressão inicial e em cada iteração de tempo, para a correção do campo de pressão.

### 3.3.1 Métodos Iterativo e de Passo

Para o método de Gauss-Seidel, define-se as matrizes  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  e  $\mathbf{C} = (c_{ij})$ , sendo:

$$b_{i,j} = \begin{cases} -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} & \text{se } i < j \\ 0 & \text{se } i \geq j \end{cases} \quad \text{e} \quad c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \leq j \\ -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} & \text{se } i > j \end{cases} \quad (3.73)$$

e a equação de iteração do sistema linear por:

$$p^{n+1} = \mathbf{B}p^{n+1} + \mathbf{C}p^n, \quad \forall n \quad (3.74)$$

A variação relativa na iteração  $n + 1$  do método é dada por:

$$\text{Var}^{n+1} = \max_k \{ \text{Var}_k^{n+1} \} \quad (3.75)$$

sendo a variação relativa da  $k$ -ésima componente do vetor  $p^{n+1}$  dada por:

$$\text{Var}_k^{n+1} = \begin{cases} \left| \frac{p_k^{n+1} - p_k^n}{p_k^n} \right| & \text{se } p_k^n \neq 0 \\ 1 & \text{se } p_k^n = 0 \text{ e } p_k^{n+1} \neq 0 \\ 0 & \text{se } p_k^n = p_k^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

Seja  $k_f$  o índice do elemento do vetor  $p$  cujo valor é fixo. Os passos para a resolução do sistema linear  $Ap = b$  pode ser resumido através do algoritmo 3.7.

- Dado  $\varepsilon > 0$ , número real, e  $N_{max}$ , número inteiro
- Dado  $p^0$  aproximação inicial
- Repita:
  - Faça  $p_{k_f}^{n+1} = p_{k_f}^\infty$
  - Calcule  $p^{n+1}$  usando a equação 3.74
  - Calcule  $\text{Var}^{n+1}$  usando a equação 3.75
- Até que  $\text{Var}^{n+1} < \varepsilon$  ou  $n + 1 = N_{max}$

Algoritmo 3.7 – Resolução de  $Ap = b$  usando método iterativo.

Em geral, tem-se um valor pequeno para  $\varepsilon$  (valor típico:  $\varepsilon = 10^{-6}$ ), enquanto que  $N_{max}$ , que especifica o número máximo de iterações, é alto (tipicamente  $10^5$ ).

A correção da pressão nas iterações de tempo, baseada no algoritmo 3.7 com  $N_{max}$  elevado, é denominada *método iterativo de correção da pressão*. De acordo com Bravo (1997, 1999) e Claeysen et al. (1999) são viáveis simulações nas quais, a partir da pressão inicializada, a correção da pressão em cada iteração de tempo é feita usando uma única iteração do sistema linear, ou seja,  $N_{max} = 1$ . Tal método é conhecido como *método de passo único*. Como o sistema linear é resolvido em um único passo, o valor da pressão apresenta uma forte oscilação nas iterações de tempo iniciais, próximo ao valor obtido usando o método iterativo. Após um grande número de iterações de tempo, o valor obtido com o método de passo único reduz a oscilação, se aproximando da solução para o método iterativo (Platte et al. (1998)). A grande vantagem do método de passo único é a diminuição do tempo necessário para realizar toda a simulação, com relação ao método iterativo. Métodos intermediários entre o de passo único e o iterativo são alternativas viáveis para reduzir a oscilação na pressão e manter o tempo gasto na simulação em um limite razoável, destacando-se os *método de passo cinco*, com  $N_{max} = 5$ , e o *método de passo dez*, com  $N_{max} = 10$ . As oscilações de  $p(0.5, 0.5)$  para tais métodos podem ser vistas na Figura 3.4, para as 1000 primeiras iterações de tempo.

A Tabela 3.3(a) exibe os tempos gastos para cada método, depois de inicializada a pressão, para realizar 25000 iterações de tempo em uma malha quadrada formada por  $40 \times 40$  pontos, intervalo de tempo  $\Delta t = 0.001$ , número de Reynolds  $Re = 400$  e  $\varepsilon = 10^{-6}$  como variação máxima para os métodos iterativo, passo cinco e dez.

Dos métodos acima, o método iterativo é o que apresenta uma melhor aproximação da solução, ao custo de um tempo de cálculo maior. O método de passo único apresenta melhor desempenho com relação ao tempo gasto, mas o resultado obtido tem maior oscilação no início. Os outros métodos apresentam um desempenho intermediário entre o tempo gasto e a oscilação na solução.

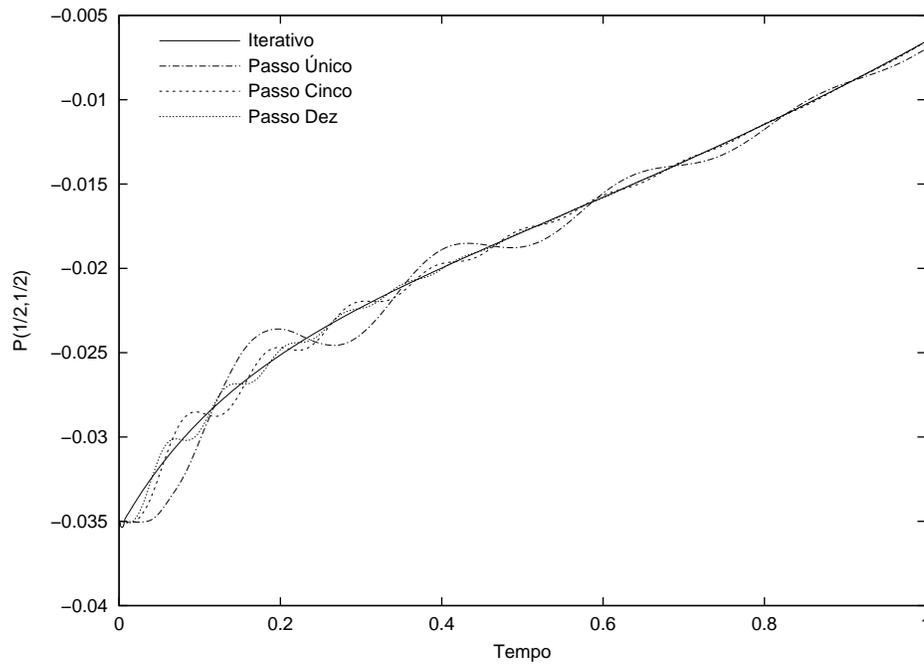


Fig. 3.4 – Evolução de  $P(1/2, 1/2)$  com os métodos de correção da pressão.

TABELA 3.3 – TEMPO DE CPU NO CÁLCULO DA: (a) SIMULAÇÃO TOTAL  
(b) PRESSÃO INICIAL

Método	Tempo (min.)
Iterativo	8.13
Passo único	1.55
Passo cinco	2.15
Passo dez	2.35

(a)

Método	Tempo (min.)
Iterativo	2.65
Valores Singulares	0.50

(b)

### 3.3.2 Método Usando Decomposição em Valores Singulares

Geralmente um sistema linear cuja matriz de coeficientes é singular, ou numericamente próxima de uma matriz singular, apresenta grandes dificuldades de resolução por meio de métodos tradicionais, tais como a eliminação gaussiana, decomposição LU, entre outros. Para este caso a *decomposição em valores singulares* é uma técnica adequada. Em particular, este método pode ser aplicado à matriz singular de coeficientes do sistema linear obtido pela discretização da equação de Poisson para a pressão, cujos detalhes estão descritos em Campos Velho e Claeysen (1992) e Campos Velho (1992).

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz de ordem  $M \times N$ . A decomposição em valores singulares assegura que existem matrizes ortogonais  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ , respectivamente de ordens  $M \times M$  e  $N \times N$ , e uma matriz diagonal  $\mathbf{W}$ , de ordem  $M \times N$ , tal que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T \quad (3.77)$$

A decomposição em valores singulares pode sempre ser feita, qualquer que seja a matriz  $\mathbf{A}$ , além desta decomposição ser única, a menos de permutações das colunas de  $\mathbf{U}$  e de  $\mathbf{V}$  e dos elementos  $w_i$  da diagonal de  $\mathbf{W}$ , e de combinações lineares de colunas de  $\mathbf{U}$  e de  $\mathbf{V}$  cujos elementos correspondentes de  $\mathbf{W}$  sejam iguais.

Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada inversível, então a inversa pode ser facilmente calculada e é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{U}^T \quad (3.78)$$

sendo  $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^{-1}$  uma matriz diagonal cujos elementos são as recíprocas dos elementos correspondentes de  $\mathbf{W}$ .

Quando  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada singular, tem-se que um ou mais elementos de  $\mathbf{W}$  são nulos. Para este caso, define-se  $\overline{\mathbf{W}} = (\overline{w}_{i,j})$  da equação 3.78 como:

$$\overline{w}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \frac{1}{w_{i,j}} & \text{se } i = j \text{ e } w_{i,j} \neq 0 \\ 0 & \text{se } i = j \text{ e } w_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

Seja  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$  tal que:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{W}} \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{b}) \quad (3.80)$$

Se o sistema for compatível, então  $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$  é a menor solução possível, no sentido que:

$$|\bar{\mathbf{x}}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2, \quad \forall \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.81)$$

No caso de sistemas incompatíveis,  $\bar{\mathbf{x}}$  não pode ser solução do sistema linear, mas é a solução mais próxima possível, no sentido que minimiza o resíduo  $r = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}|$ .

A aplicação da decomposição em valores singulares para a resolução do sistema linear  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$ , resultante da equação da pressão, apresenta três características diferentes dos métodos iterativos.

A primeira diferença é que a equação de atualização para cada valor de  $\mathbf{p}$ , descritas de forma única pela equação 3.74, podem ser construídas apenas quando necessário, ou seja, não é necessário manter a matriz  $\mathbf{A}$ . Para a decomposição em valores singulares, estas equações são resolvidas conjuntamente, sendo necessário manter 3 matrizes ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ ), cada uma delas com  $(m \times n)^2$  elementos. Este fato pode tornar proibitivo o uso do método para malhas muito refinadas.

A segunda diferença é que a decomposição em valores singulares e a resolução do sistema por meio da equação 3.80 requer um tempo fixo em qualquer iteração de tempo da simulação, enquanto que no método iterativo as iterações do sistema linear se reduzem à unidade após o período inicial da simulação. Na Tabela 3.3(b) tem-se o tempo de CPU necessário para o cálculo da pressão inicial usando os métodos iterativo e de decomposição em valores singulares. Para obter estes resultados, foi usada a biblioteca LAPACK, descrita em Anderson et al. (1992), que implementa a decomposição em valores singulares.

Uma terceira característica a ser destacada é que o método iterativo requer a atribuição de um valor fixo para a pressão em um ponto escolhido. Não existem critérios para o valor atribuído, nem para a posição do ponto. No método da decomposição em valores

singulares esta escolha não é necessária, pois o método retorna a menor solução possível, no sentido descrito pela equação 3.81.

### 3.4 Escoamentos Não Isotérmicos

A inclusão da temperatura  $T$  no modelo matemático que descreve o escoamento pode ser feita através de algumas propriedades termodinâmicas dos fluidos. O princípio da Conservação da Energia fornece uma equação de energia com uma constante de difusividade térmica  $\alpha$ , dissipação viscosa negligenciável e uma fonte de calor  $q^m$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T + q^m \quad (3.82)$$

O principal efeito da temperatura sobre um fluido resulta do fato de que variações na temperatura ocasionam variações na densidade do fluido. A incorporação dos efeitos da temperatura resultam em equações não lineares de difícil tratamento. Para simplificar esta incorporação é comum usar-se a aproximação de Boussinesq:

- densidade é constante exceto no termo de empuxo;
- todas as outras propriedades do fluido são consideradas constantes;
- dissipação viscosa é desprezada.

Sob estas condições as equações do movimento, para o caso bidimensional, podem ser escritas como:

$$\rho_\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) + \nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho(T) \vec{g} \quad (3.83)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.84)$$

sendo  $\vec{g} = (g_x, g_y)$  a gravidade. A maior simplificação da aproximação de Boussinesq supõe uma variação linear entre  $\rho$  e  $T$ :

$$\rho(T) = \rho_\infty (1 - \beta (T(x, y) - T_\infty)) \quad (3.85)$$

sendo  $\rho_\infty$  a densidade de referência,  $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  o coeficiente de expansão térmica e  $T_\infty$  a temperatura de referência. Desta forma, as equações 3.82, 3.83 e 3.84 podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T + q^m \quad (3.86)$$

$$\rho_\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) + \nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho_\infty (1 - \beta (T(x, y) - T_\infty) \vec{g}) \quad (3.87)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.88)$$

Uma solução exata para o caso  $\nu = \frac{\mu}{\rho_\infty} = \alpha$ , obtida por Wessel, é apresentada por Ames (1995). Esta solução, bem como a sua verificação, pode ser vista no apêndice A.

Considerando as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} & \bar{u} &= \frac{u}{u_\infty} & \bar{t} &= \frac{u_\infty t}{L} & \bar{p} &= \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2} & \bar{q}^m &= \frac{L}{T_\Delta u_\infty} q^m \\ \bar{y} &= \frac{y}{L} & \bar{v} &= \frac{v}{u_\infty} & \bar{\beta} &= T_\Delta \beta & \bar{T} &= \frac{T - T_\infty}{T_\Delta} \end{aligned}$$

obtem-se as equações de Navier-Stokes para o escoamento não isotérmico usando variáveis adimensionais:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{RePr} \nabla^2 T + q^m \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + (1 - \beta T) \vec{g} \quad (3.90)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.91)$$

sendo que as barras sobre os símbolos foram eliminados para simplificar a notação e  $Pr$  é o número de Prandtl e é dado por:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.92)$$

Uma outra adimensionalização das equações 3.86, 3.87 e 3.88 pode ser obtida considerando as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} & \bar{u} &= \frac{Lu}{\alpha} & \bar{t} &= \frac{\alpha t}{L^2} & \bar{p} &= \frac{L^2(p - p_\infty)}{\alpha^2 \rho_\infty} & \bar{q}^m &= \frac{L}{T_\Delta u_\infty} q^m \\ \bar{y} &= \frac{y}{L} & \bar{v} &= \frac{Lv}{\alpha} & \bar{\beta} &= T_\Delta \beta & \bar{T} &= \frac{T - T_\infty}{T_\Delta} \end{aligned}$$

Desta formas, as equações de Navier-Stokes para um escoamento não isotérmico nestas variáveis adimensionais podem ser expressas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = Pr \nabla^2 u \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = Pr \nabla^2 v + Ra Pr T \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.95)$$

sendo que as barras sobre os símbolos foram eliminados para simplificar a notação e  $Ra$  representa o número de Rayleigh e é dado por:

$$Ra = Pr Gr \quad (3.96)$$

com o número de Grashof sendo dado por:

$$Gr = \frac{|g| \beta T \Delta L^3}{\nu^2} \quad (3.97)$$

Usando as equações 3.8, 3.96 e 3.97 pode-se obter uma relação entre o número de Rayleigh e o número de Reynolds, dada por:

$$Ra = \frac{|g| \beta T \Delta L}{u_\infty^2} Pr (Re)^2 \quad (3.98)$$

Se  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{t}$  representam os valores de  $u$ ,  $v$ ,  $p$  e  $t$  na segunda adimensionalização, então:

$$\bar{u} = (Re Pr) u \quad (3.99)$$

$$\bar{v} = (Re Pr) v \quad (3.100)$$

$$\bar{p} = (Re Pr)^2 p \quad (3.101)$$

$$\bar{t} = \frac{t}{Re Pr} \quad (3.102)$$

Neste trabalho, as simulações não isotérmicas serão simuladas através das equações 3.89, 3.90 e 3.91, mantendo o mesmo parâmetro base ( $Re$ ) das simulações isotérmicas. Os resultados correspondentes a segunda adimensionalização feita (equações 3.93, 3.94 e 3.95) podem ser obtidos através das equações 3.99, 3.100, 3.101 e 3.102, respectivamente para os campos de velocidade  $u$  e  $v$ , de pressão  $p$  e para o tempo  $t$ . O número de Rayleigh associado pode ser obtido através da equação 3.98.

### 3.5 Malhas para Domínios Fractais

Para calcular o escoamento de um fluido viscoso num domínio fractal ou, de modo geral, em um domínio complexo, é necessário a definição precisa do interior do domínio e de suas fronteiras. Devido à esta complexidade, a candidata natural para estes domínios são as malhas não estruturadas, em particular de elementos triangulares. Entretanto, tais malhas requerem uma estrutura de dados sofisticada para ser armazenada e especificada, resultando em um maior custo computacional devido a uma maior necessidade de memória e a um maior tempo gasto na busca de informações.

Por outro lado, as malhas estruturadas, em particular as quadradas, possuem uma estrutura de dados trivial e imediata, com praticamente nenhum custo adicional de memória e o tempo de busca de informações é praticamente nulo. Entretanto, tais malhas não apresentam a mesma flexibilidade das malhas não estruturadas no que diz respeito a sua adaptabilidade aos domínios complexos. Mas, como pode ser visto na seção 3.5.2, tais malhas podem ser alternativas interessantes, sob determinadas condições.

TABELA 3.4 – DEFINIÇÃO L-SYSTEM PARA A FRONTEIRA FRACTAL

<b>Axioma:</b>	+FFFFF+FFFFF+FFFFF
<b>Regra:</b>	$F \Rightarrow F+F-F-FF+F+F-F$
$\theta:$	$90^\circ$

A malha múltipla procura quebrar a complexidade do domínio subdividindo-o em partes, de modo que ele possa ser especificado através de diversas malhas simples. O uso de uma malha múltipla seria uma forma de contornar a dificuldade de adaptar malhas estruturadas à um domínio complexo.

Na Figura 3.5 estão diversos pré-fractais, gerados a partir das especificações dadas na Tabela 3.4, que servirão para ilustrar os diversos aspectos da especificação de um domínio complexo por meio de uma malha, e como domínio para diversas simulações que serão realizadas. Com respeito ao fractal descrito na Tabela 3.4, observa-se que a regra é a mesma utilizada para a Ilha Quadrada de Koch (Figura 2.14). Entretanto, para restringir o fractal à uma região próxima a parede da cavidade original, utilizou-se o artifício de

subdividir cada lado da cavidade em um número fixo de partes. No caso do fractal da Tabela 3.4, o axioma original para a cavidade, dado por  $+F + F + F$ , foi subdividido em 5 partes.

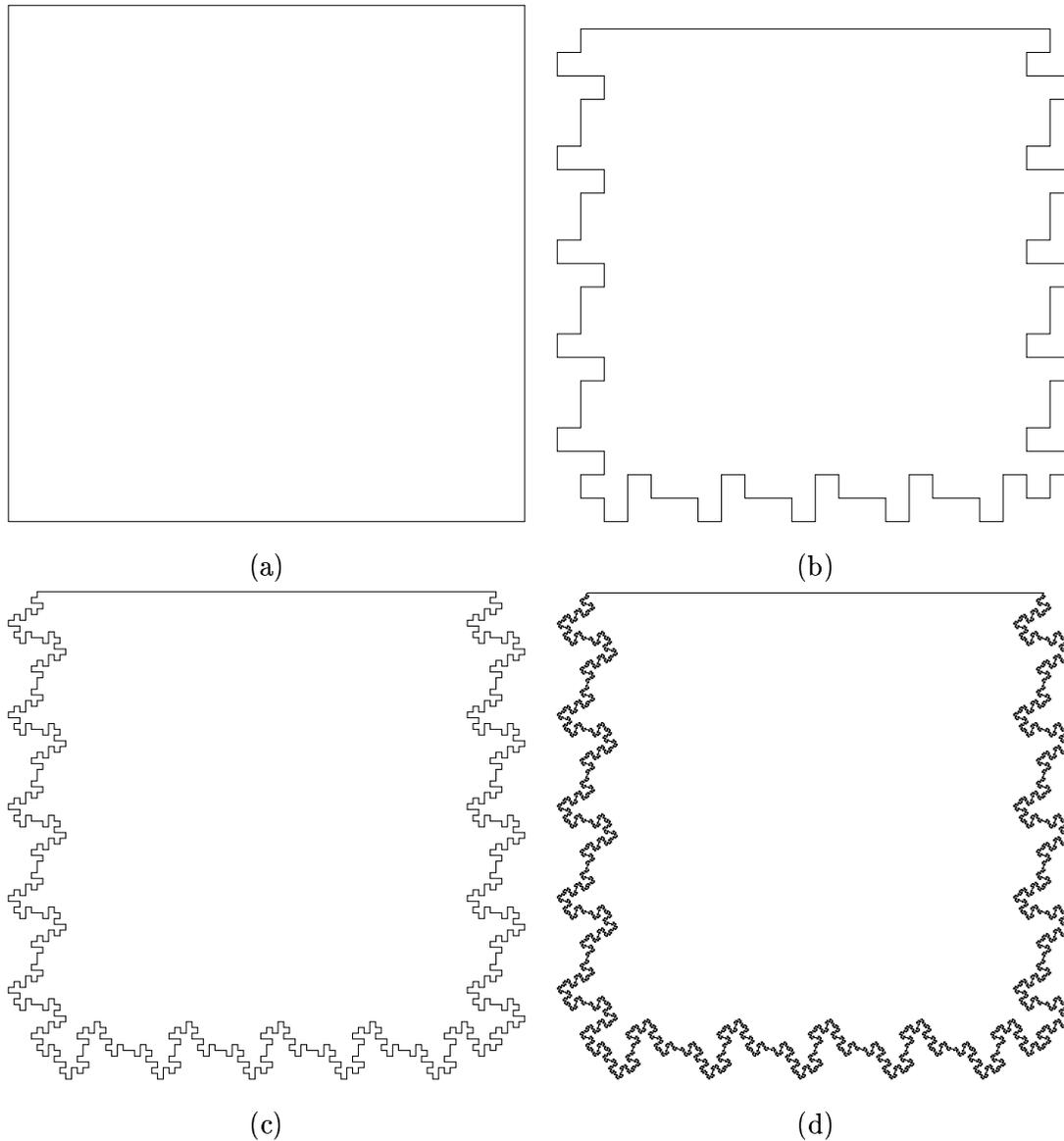


Fig. 3.5 – Cavidade usando pré-fractais de nível: (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.

### 3.5.1 Malhas Não Estruturadas

As malhas não estruturadas, em particular as malhas triangulares, se apresentam como candidatas naturais para as cavidades fractais, devido ao fato de que os pré-fractais usados na fronteira destas cavidades são linhas poligonais. A Figura 3.6 mostra um exemplo

de malha triangular para a cavidade fractal 2, gerada através do software **easymesh** (Niceno (1999)).

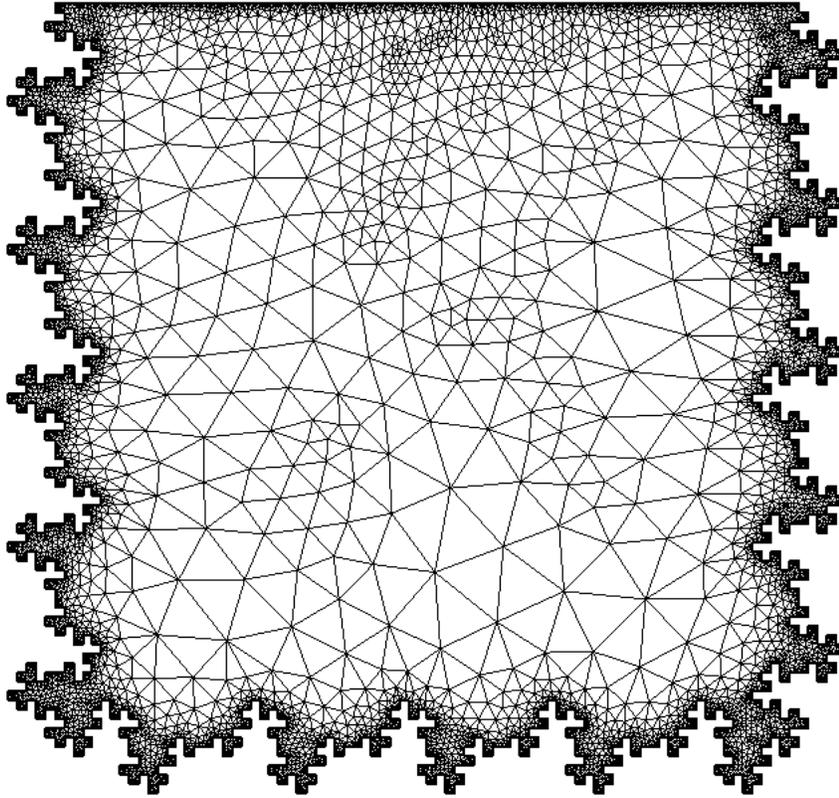


Fig. 3.6 – Malha triangular para cavidade fractal 2.

### 3.5.2 Malhas Estruturadas

O uso de malhas estruturadas, em particular, de malhas quadradas para domínios fractais se baseia na exclusão de um determinado número de células que não pertencem ao domínio. Esta exclusão é feita por meio de uma matriz de indicadores, semelhante ao realizado por Ramos (1997), exceto que para facilitar a implementação no método de volumes finitos, foram usados indicadores específicos para as células de fronteira, indicando o seu posicionamento com relação ao interior do domínio. Desta forma, exclusões situadas no interior da malha podem ser tratadas da mesma forma que as exclusões situadas na borda.

Sejam  $\Omega$  o domínio e  $c_{i,j}$  a célula da malha na posição  $(i, j)$ . A matriz de indicadores

$A = (a_{i,j})$  é dada por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{i,j} \notin \Omega \\ 1 & \text{se } c_{i,j} \in \Omega - \partial\Omega \\ 2 & \text{se } c_{i,j} \in \partial\Omega \text{ e } c_{i-1,j} \notin \Omega \\ 3 & \text{se } c_{i,j} \in \partial\Omega \text{ e } c_{i+1,j} \notin \Omega \\ 4 & \text{se } c_{i,j} \in \partial\Omega \text{ e } c_{i,j-1} \notin \Omega \\ 5 & \text{se } c_{i,j} \in \partial\Omega \text{ e } c_{i,j+1} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.103)$$

### 3.5.3 Malhas Compostas

As malhas quadradas apresentam como grandes vantagens a fácil implementação e a rapidez, devida a sua estruturação. Entretanto, uma desvantagem apresentada é a baixa adaptabilidade à domínios complexos. Por outro lado, as malhas triangulares se adaptam com bastante facilidade a tais domínios, mas por serem não estruturadas, requerem uma estrutura de dados mais complexa, ocasionando uma elevação do tempo necessário para executar a simulação.

A proposta das malhas compostas é unir as vantagens de ambos os tipos de malhas, de forma a obter uma malha adaptável e ao mesmo tempo, rápida. Nas regiões do domínio que apresentam geometria complexa é utilizada uma malha triangular, enquanto que nas demais regiões utiliza-se uma malha estruturada (quadrada).

O uso de malhas de tipos diferentes dá origem à regiões de fronteira entre estas malhas, onde é necessário realizar, de alguma forma, a união destas malhas, de modo que os valores das propriedades calculadas em uma das malhas possam ser repassados à outra, nesta região. Esta união pode ser realizada de duas formas: *união pontual* e *união por sobreposição*.

#### 3.5.3.1 União Pontual

A união pontual consiste em coincidir os pontos de cálculo das propriedades na fronteira de ambas as malhas, de modo a obter um volume de controle único, com partes em ambas as malhas (Figura 3.7).

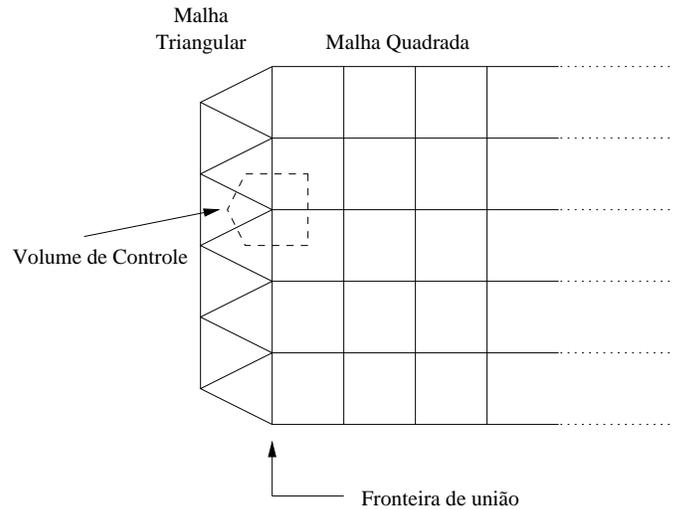


Fig. 3.7 – União pontual.

Este método apresenta algumas desvantagens. Para coincidir os pontos de cálculo das propriedades deve-se usar uma malha co-localizada nos vértices, em ambas as malhas, dando origem aos problemas anteriormente citados. Além disso, este tipo de união é possível apenas quando a fronteira ocorre entre duas malhas de tipos distintos. Não seria possível fazer coincidir os pontos para duas malhas quadradas com densidades diferentes. Rai (1986a) e Rai (1986b) mostram um esquema conservativo para diferenças finitas, que não requer interpolações.

### 3.5.3.2 União por Sobreposição

A união por sobreposição consiste em usar malhas cobrindo regiões um pouco maiores, de modo que uma das malhas sobreponha a outra em uma pequena parte do domínio. Desta forma, os valores das propriedades de uma malha são obtidos por interpolação na outra malha (Figura 3.8). Isto evita os volumes de controle entre as duas malhas. Além disso, torna-se possível fazer a união entre quaisquer dois tipos de malhas, com qualquer posicionamento das propriedades. Este esquema de união de malhas é conhecida por malha chimera (Benek et al. (1985)). As grandes vantagens deste método são a simplicidade e a possibilidade de alterar uma das malhas sem alterar as outras. A grande desvantagem é o uso de interpolações bidirecionais não conservativas na região sobreposta. Wright e Shyy (1993) propõem um esquema conservativo de interpolação, mas de difícil aplicação

para o caso tridimensional.

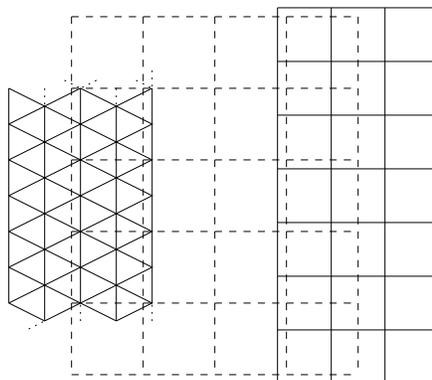


Fig. 3.8 – União por sobreposição.

Como alternativa para os métodos conservativos, Kao e Liou (1995) propõem transformar malhas do tipo chimera em uniões pontuais, através do seguinte processo: as malhas estruturadas usadas são reduzidas até que não haja interseção entre elas, e as regiões do domínio não cobertas pelas malhas reduzidas são preenchidas com uma malha triangular não estruturada, de modo a produzir um perfeito casamento na fronteira das malhas reduzidas. A Figura 3.9 ilustra a transformação, sendo que a em (a) mostra-se o domínio a ser coberto, em (b) mostra-se a malha chimera usando duas malhas estruturadas, em (c) tem-se o primeiro passo da transformação (sem sobreposição) e em (d) a malha final com o vazio preenchido com uma malha triangular.

Outra transformação de malhas chimera em pontuais foi sugerida por Wang (1995), através da eliminação da região sobreposta de uma das malhas e pelo cálculo do valor das propriedades de interesse sob os diversos tipos de malhas estruturadas. Estes exemplos estão apresentados em Doescher et al. (2000a).

### 3.5.3.3 Desempenho de Malhas Mistas

Evidentemente, a união de duas malhas implica em um custo computacional adicional. Torna-se necessário investigar o quanto deste custo computacional adicional compromete o desempenho final da malha resultante, ou seja, verificar se a união de malhas permite uma melhora de desempenho com relação à malha triangular simples. Os resultados a seguir também estão descritos em Doescher et al. (2000b, 2001a).

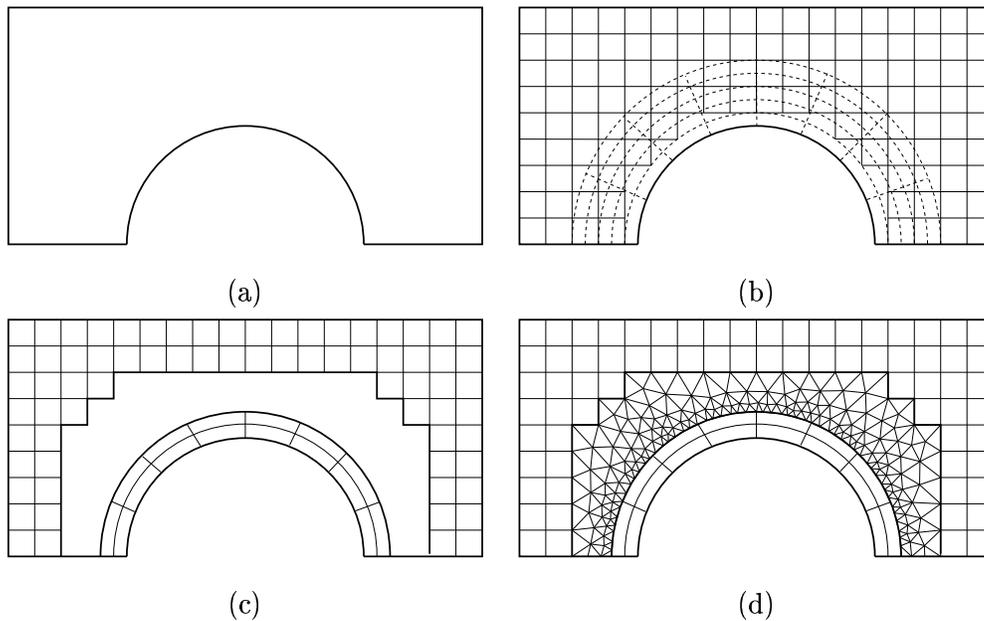


Fig. 3.9 – Transformação malha chimera para pontual.

Para realizar estes testes utilizou-se nove malhas mistas, com o formato da Figura 3.10, onde a área coberta pela malha triangular variaram de 10% à 90%. Além disso, a malha quadrada simples foi usada como 0% e a triangular simples como 100%. O número de pontos para a malha quadrada foi escolhido de modo a garantir  $\Delta x = 0.025$  e  $\Delta y = 0.025$ . Para a malha triangular foi utilizada a malha Patankar, de modo que o número de vértices para a malha da velocidade fosse cerca de 1600 pontos para a malha 100% triangular.

Para sobreposição foi usada uma faixa de 0.04 de largura. Foi considerado um tempo total de simulação de 25 segundos, para um intervalo de tempo de  $\Delta t = 0.001$ , com número de Reynolds  $Re = 400$ . Na Figura 3.11 pode-se ver os tempos gastos (em segundos) na inicialização da pressão através do método iterativo. A Figura 3.12 mostra os tempos gastos (em segundos) na simulação.

Pode-se observar na Figura 3.12 que o tempo da malha mista é inferior a malha triangular simples para os casos em que a malha triangular não ocupe mais do que 70% da área total da cavidade. O melhor desempenho é obtido com 20% da área ocupada pela malha triangular gastando, aproximadamente, 25% do tempo necessário para a malha triangular simples.

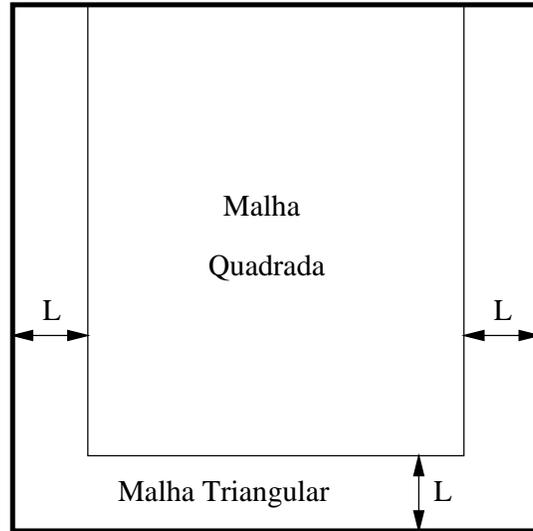


Fig. 3.10 – Malha mista usada para teste de desempenho.

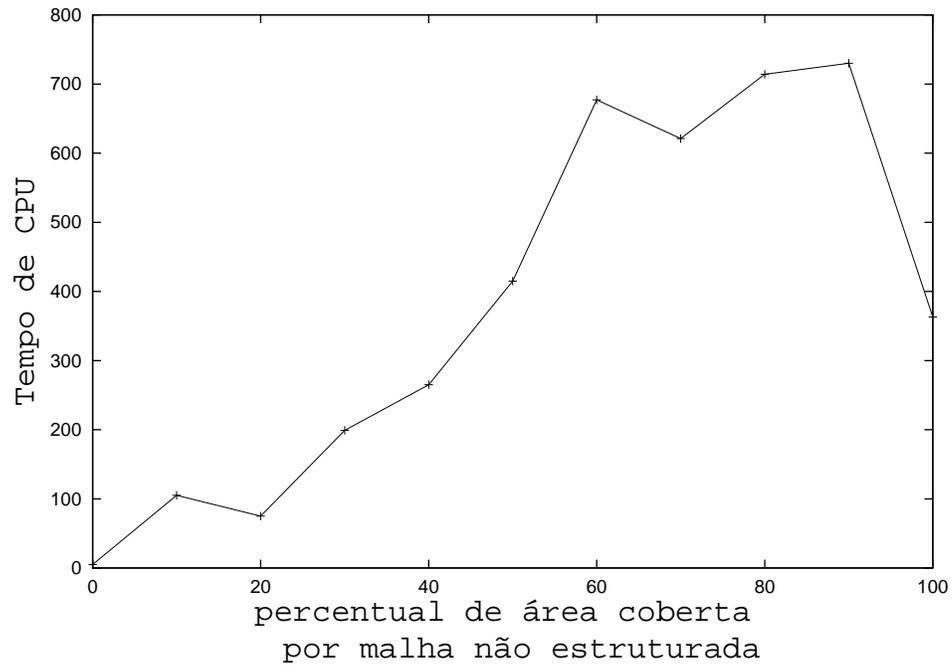


Fig. 3.11 – Tempo gasto (em segundos) na inicialização da pressão.

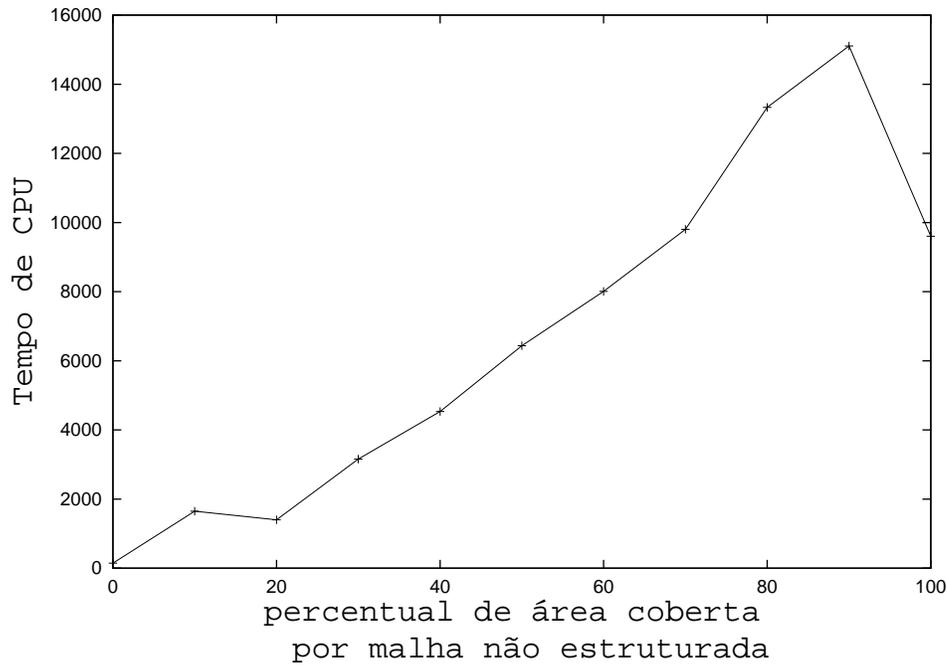


Fig. 3.12 – Tempo gasto (em segundos) na simulação.

### 3.6 Critérios de Convergência para a Pressão

Nesta seção é desenvolvido uma condição suficiente para satisfazer a condição de compatibilidade em malhas não estruturadas. Estes resultados são também apresentados em Doescher et al. (2001a).

De acordo com Roache (1976), a solução da pressão em um escoamento isotérmico é obtida da equação de Poisson para a pressão (equação 3.9) com a condição de Neumann (equação 3.10). Abdallah (1987) mostra que a solução da equação de Poisson existe se uma equação de compatibilidade é satisfeita. Esta condição relaciona o termo heterogêneo da equação de Poisson com a condição de contorno de Neumann e é conhecida como identidade de Green:

$$\iint_{\Omega} \nabla^2 p \, d\Omega = \int_{\Gamma} p_n \, d\Gamma \quad (3.104)$$

Seja a decomposição do domínio  $\Omega = \{\Omega_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ . Integrando a equação 3.9

sobre  $\Omega$  obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m \iint_{\Omega_i} \nabla^2 p \, d\Omega_i = \sum_{i=1}^m \iint_{\Omega_i} \vec{H} \, d\Omega_i \quad (3.105)$$

e impondo a identidade de Green em ambos os lados desta equação:

$$\sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega_i} \nabla p \cdot \vec{n}_i \, ds = \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega_i} \vec{H} \cdot \vec{n}_i \, ds \quad (3.106)$$

Para as arestas internas, a integral aparece duas vezes em sentidos opostos, cancelando-se. Logo, se  $A_\Gamma$  é o conjunto das arestas sobre a fronteira  $\Gamma$ , a equação acima pode ser expressa como:

$$\sum_{a \in A_\Gamma} \int_a \nabla p \cdot \vec{n}_a \, ds = \sum_{a \in A_\Gamma} \int_a \vec{H} \cdot \vec{n}_a \, ds \quad (3.107)$$

Considerando a aproximação  $\int_a \vec{F} \cdot \vec{n}_a \, ds \simeq L_a (\vec{F}_{a_m} \cdot \vec{n}_a)$ , sendo  $L_a$  o tamanho da aresta e  $a_m$  o ponto médio da aresta, a condição de compatibilidade fica reduzida à:

$$\sum_{a \in A_\Gamma} L_a (\nabla p_{a_m} \cdot \vec{n}_a) = \sum_{a \in A_\Gamma} L_a (\vec{H}_{a_m} \cdot \vec{n}_a) \quad (3.108)$$

ou ainda:

$$\sum_{a \in A_\Gamma} L_a \left[ (\nabla p_{a_m} - \vec{H}_{a_m}) \cdot \vec{n}_a \right] = 0 \quad (3.109)$$

Para que esta igualdade seja sempre satisfeita, é suficiente impor a seguinte condição:

$$\nabla p_{a_m} \cdot \vec{n}_a = \vec{H}_{a_m} \cdot \vec{n}_a \quad , \quad \forall a \in A_\Gamma \quad (3.110)$$

### 3.6.1 Condição de Compatibilidade

Uma boa maneira de se avaliar o procedimento de discretização em um método de volume finito é verificar a condição de compatibilidade, através da equação 3.104, definindo:

$$C_C = \iint_{\Omega} \nabla^2 p \, d\Omega - \int_{\Gamma} p_n \, d\Gamma \quad (3.111)$$

As Figuras 3.13 e 3.14 mostram a evolução de  $\mathcal{C}_C$  na inicialização da pressão para as seguintes malhas: quadrada, triangular (conforme definida na seção 3.2.3), triangular com a velocidade nos vértices e a pressão no centro e para a malha triangular co-localizada nos vértices. Foi considerado  $Re = 400$ ,  $\Delta t = 0.001$  e cerca de 1600 vértices.

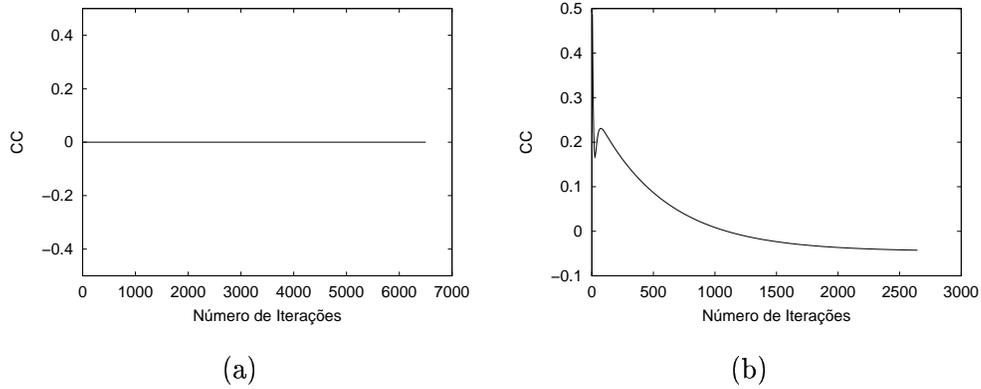


Fig. 3.13 – Condição de compatibilidade: (a) malha quadrada (b) Triangular (seção 3.2.3).

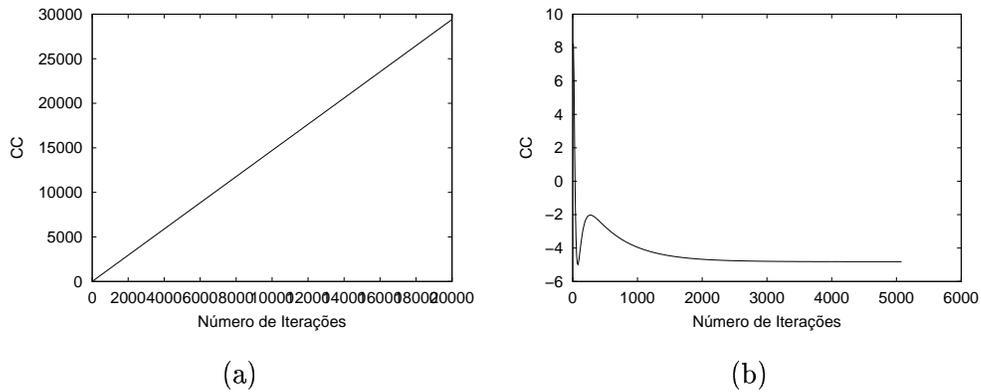


Fig. 3.14 – Condição de compatibilidade: (a) Triangular Vértice-Centro (b) Co-localizada nos vértices.

### 3.7 Definições e Algoritmos Utilizados nas Simulações Numéricas

As seções anteriores mostram as vantagens e desvantagens dos diversos métodos numéricos, tipos de malhas e métodos de correção da pressão. Para este trabalho propõem-se realizar as simulações numéricas sob as seguintes condições:

- Método numérico: será usado o método de volumes finitos.

- Malha utilizada: pela implementação mais simples, maior rapidez, satisfação imediata da condição de compatibilidade, as simulações serão realizadas em uma malha estruturada retangular desencontrada.
- Método de correção da pressão: O acoplamento velocidade-pressão será realizado através do método velocidade-pressão descrito na seção 3.2.2.5.

O sistema linear singular resultante será resolvido através do método de passo cinco, que apresenta uma melhor relação entre o custo computacional e uma maior estabilidade inicial na pressão, exceto para obter o campo de pressão inicial, quando será usado o método iterativo.

- Método de integração no tempo: A integração do tempo será feita supondo que as derivadas em relação ao tempo no volume de controle, o que equivale ao método de Euler avançado.
- Indicadores para os resultados: Os possíveis indicadores de escoamento estão relacionados na seção 3.7.1

### 3.7.1 Indicadores da Dinâmica do Escoamento

Para analisar as alterações no comportamento de um escoamento pela modificação da geometria do domínio, é necessário especificar indicadores capazes de refletir tais alterações. Estes indicadores devem permitir caracterizar uma determinada propriedade em todo o domínio simultaneamente, ou sob a forma de uma medida global, que podem filtram pequenas alterações locais.

A comparação de diversos escoamentos entre si pode ser realizada por meio da visualização do fluxo ou de sua quantificação por meio de valores numéricos. Goodrich et al. (1990) aborda as principais formas de visualização e de medida do escoamento, para o caso bidimensional. Na  $n$ -ésima iteração de tempo e no  $k$ -ésimo ponto da malha,  $\vec{u}_k^n = (u_k^n, v_k^n)$  representa o campo de velocidades,  $p_k^n$  a pressão,  $\psi_k^n$  a função corrente,  $\zeta_k^n$  a vorticidade e  $\mathcal{E}_c$  a energia cinética.

### **3.7.1.1 Visualização de Escoamentos**

A visualização de escoamentos por meio de gráficos das diversas propriedades permite realizar uma comparação em todo o domínio. As formas de visualização, mais encontradas na literatura, para escoamentos em domínios bidimensionais são:

- 1) Superfície da função corrente.
- 2) Linhas de contorno da função corrente.
- 3) Vetor velocidade.
- 4) Superfície da energia cinética.
- 5) Linhas de contorno da energia cinética.
- 6) Superfície da vorticidade.
- 7) Linhas de contorno da vorticidade.
- 8) Vetor gradiente de pressão.
- 9) Superfície da temperatura (escoamento não isotérmico).
- 10) Linhas de contorno da temperatura (escoamento não isotérmico).

### **3.7.1.2 Medidas de Escoamento**

As medidas de escoamento quantificam numericamente o escoamento de forma local ou global. As principais medidas de escoamento em um domínio bidimensional são:

- 1) Valor da função corrente em um ponto.
- 2) Valor da velocidade em um ponto.
- 3) Valor da energia cinética em um ponto.
- 4) Valor da vorticidade em um ponto.
- 5) Valor da temperatura em um ponto (escoamento não isotérmico).

6) Variação global da função corrente por iteração de tempo, dada por:

$$\frac{\sum_k |\psi_k^{n+1} - \psi_k^n|}{\sum_k |\psi_k^{n+1}|} \quad (3.112)$$

7) Máximo e mínimo da função corrente.

8) Variação global do campo de velocidades por iteração de tempo, dada por:

$$\frac{\sum_k (|u_k^{n+1} - u_k^n| + |v_k^{n+1} - v_k^n|)}{\sum_k (|u_k^{n+1}| + |v_k^{n+1}|)} \quad (3.113)$$

9) Energia cinética total no domínio  $\Omega$ , dada por:

$$E_c(\vec{u}, \Omega) = \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega \quad (3.114)$$

10) Energia cinética média no domínio  $\Omega$ , dada por

$$\langle E_c(\vec{u}, \Omega) \rangle = \frac{1}{A_{\Omega}} \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega \quad (3.115)$$

sendo que  $A_{\Omega}$  representa a área do domínio  $\Omega$ .

11) A máxima aceleração, dada por:

$$\max_{k \notin \partial\Omega} \left\{ \frac{\|\vec{u}_k^{n+1} - \vec{u}_k^n\|}{\Delta t} \right\} \quad (3.116)$$

12) A enstrofia no domínio  $Z_2$  (Huang e Driscoll (1994)):

$$Z_2 = \frac{1}{A_{\Omega}} \int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega \quad (3.117)$$



## CAPÍTULO 4

### ESCOAMENTOS EM DOMÍNIOS FRACTAIS

#### 4.1 O Problema da Cavidade

O problema da cavidade consiste no escoamento de um fluido viscoso sobre uma cavidade, conforme ilustrado na Figura 4.1. Este é um problema bem conhecido e muito utilizado como problema teste para avaliar técnicas ou métodos numéricos na resolução das equações de Navier-Stokes.

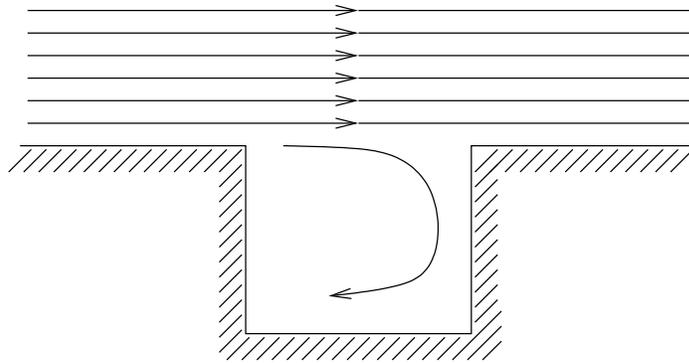


Fig. 4.1 – Problema da cavidade.

O escoamento do fluido sobre uma cavidade induz um escoamento no interior da mesma, devido ao movimento de cisalhamento sobre o fluido na parte superior da cavidade. O problema consiste em determinar este comportamento induzido. Embora este seja um problema simples, ele tem aplicações práticas. Mestayer et al. (1995) usaram o problema da cavidade para simular a influência de uma parede de calor no escoamento e dispersão de poluentes dentro de vales formados por prédios. Além disso, a grande quantidade de resultados publicados sobre o problema, tais como em Platte (1998), Ghia et al. (1982), Goodrich et al. (1990), Gustafson e Halasi (1986), o torna um importante problema teste que pode ser usado para validar os programas desenvolvidos, bem como referência para comparar com os resultados obtidos para domínios complexos.

## 4.2 Indicadores do Escoamento

Dentre os indicadores e medidas do escoamento apresentados na seção 3.7.1, a energia cinética média foi utilizada como parâmetro para indicação do estado estacionário, bem como para comparar os resultados obtidos entre as diversas cavidades. Considerando uma malha retangular cujos pontos são igualmente espaçados por  $\Delta x$  e  $\Delta y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e o posicionamento de malha alternada para o campo de velocidade, a equação 3.115 pode ser discretizada como:

$$\langle E_c(\vec{u}, \Omega) \rangle = \frac{1}{N_\Omega \Delta x \Delta y} \sum_{\substack{i,j \\ (x_i, y_i) \in \Omega}} \mathcal{E}_c(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{N_\Omega} \sum_{\substack{i,j \\ (x_i, y_i) \in \Omega}} \mathcal{E}_c(x_i, y_j) \quad (4.2)$$

sendo  $N_\Omega$  o número de células da malha retangular que pertencem ao domínio  $\Omega$  e  $\mathcal{E}_c(x_i, y_j)$  é a energia cinética no centro da célula  $(i, j)$  da malha, que pode ser expressa por:

$$\mathcal{E}_c(x_i, y_j) = \left( \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right)^2 \quad (4.3)$$

Para determinar o estado estacionário do escoamento, adotou-se como critério de parada a variação relativa da energia cinética média entre duas iterações consecutivas, ou seja:

$$\frac{\langle E_c(\vec{u}^{(n+1)}, \Omega) \rangle - \langle E_c(\vec{u}^{(n)}, \Omega) \rangle}{\langle E_c(\vec{u}^{(n+1)}, \Omega) \rangle} < \varepsilon \quad (4.4)$$

sendo  $\vec{u}^{(n)}$  o campo de velocidades na  $n$ -ésima iteração de tempo e  $\varepsilon$  uma constante pequena. Nas simulações realizadas adotou-se  $\varepsilon = 10^{-5}$  para a variação relativa máxima.

## 4.3 Escoamentos Isotérmicos

As simulações numéricas dos escoamentos isotérmicos foram realizadas usando o método de volumes finitos com correção de pressão de passo cinco. As simulações para a cavidade quadrada e para o fractal de nível 1 foram realizadas com malhas de dimensões  $100 \times 100$  e  $400 \times 400$ , enquanto que para fractal de nível 2 foi usado apenas a malha de dimensão  $400 \times 400$ , devido ao fato que a malha  $100 \times 100$  é demasiadamente grosseira para descrever os detalhes do fractal de nível 2.

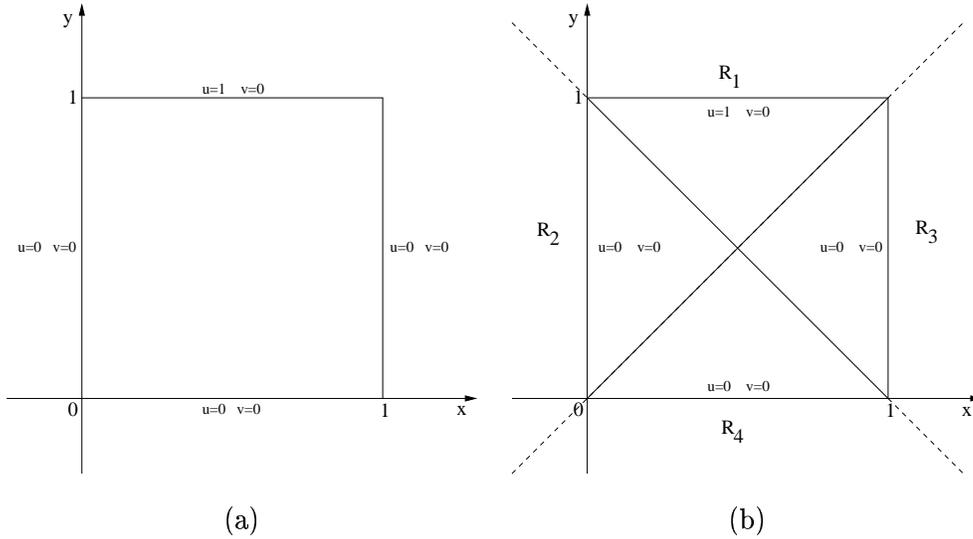
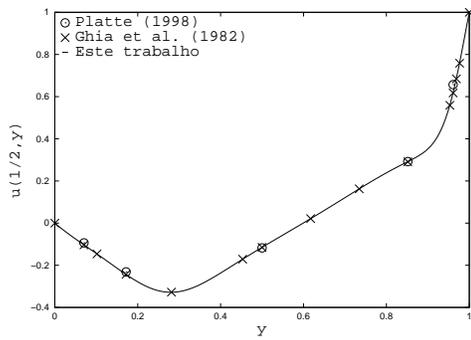


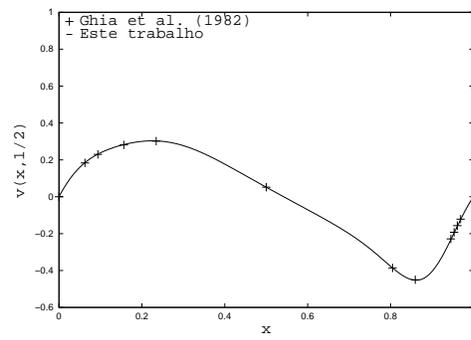
Fig. 4.2 – Condição de contorno para a velocidade: (a) cavidade (b) fractais.

Devido ao alto custo computacional das malhas não estruturadas e a não estabilidade do código para malhas retangulares refinadas localmente, optou-se por realizar as simulações numéricas usando o método de volumes finitos sobre uma malha retangular alternada, usando correção de pressão de passo cinco. O campo de pressão inicial foi obtido iterativamente. Para o número de Reynolds utilizou-se vários valores entre 10 e 6000. Um resumo das simulações isotérmicas realizadas pode ser visto nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 para a cavidade quadrada, a cavidade fractal 1 e a cavidade fractal 2, respectivamente. Este resumo consiste no número de Reynolds ( $Re$ ), no passo de tempo ( $\Delta t$ ), na energia cinética média no estado estacionário ( $\langle E_c \rangle_S$ ) e no tempo total de simulação ( $T_f$ ) para atingir o estado estacionário.

A Figura 4.3 (a) mostra uma comparação entre o valor de  $u(\frac{1}{2}, y)$ , ou seja, a velocidade horizontal do escoamento na linha central da cavidade, obtido pelo programa desenvolvido para o escoamento isotérmico com  $Re = 400$ , e os resultados da obtidos dos trabalhos de Platte (1998), usando o método de Euler-Lagrange, e de Ghia et al. (1982), usando o método da vorticidade. Na Figura 4.3 (b), a mesma comparação é feita para o valor de  $v(x, \frac{1}{2})$ . Apenas os valores de Ghia et al. (1982) são usados, pois os valores de  $v(x, \frac{1}{2})$  não estavam disponíveis em Platte (1998). As Figuras em 4.4 e 4.5 exibem a mesma comparação para  $Re = 1000$  e  $Re = 5000$ , respectivamente.

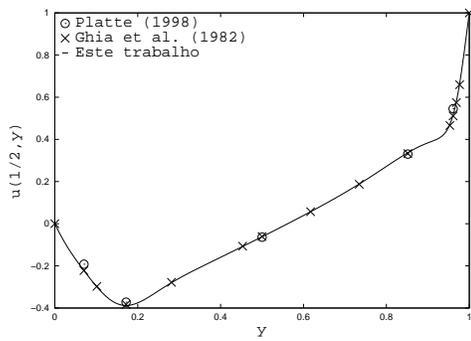


(a)

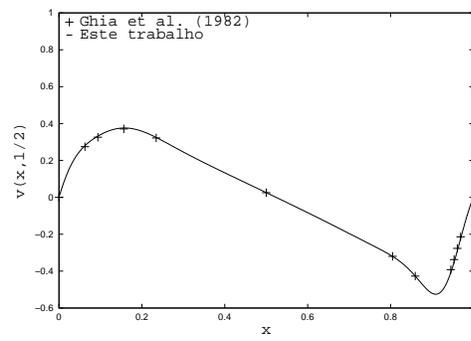


(b)

Fig. 4.3 – Comparação do escoamento isotérmico para  $Re = 400$ : (a)  $u(\frac{1}{2}, y)$  (b)  $v(x, \frac{1}{2})$ .

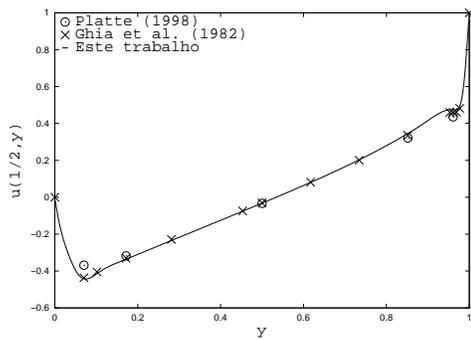


(a)

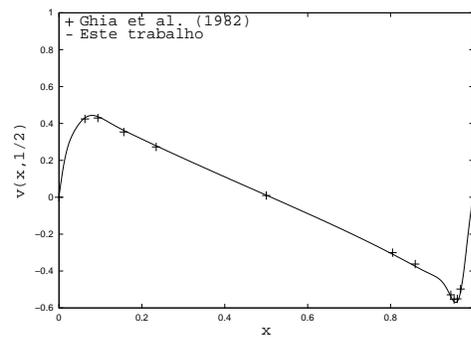


(b)

Fig. 4.4 – Comparação do escoamento isotérmico para  $Re = 1000$ : (a)  $u(\frac{1}{2}, y)$  (b)  $v(x, \frac{1}{2})$ .



(a)



(b)

Fig. 4.5 – Comparação do escoamento isotérmico para  $Re = 5000$ : (a)  $u(\frac{1}{2}, y)$  (b)  $v(x, \frac{1}{2})$ .

Outra questão importante a ser considerada é a variação de  $\langle E_c \rangle_S$  com o aumento de densidade da malha utilizada. A Figura 4.6 mostra a variação de  $\langle E_c \rangle_S$  em função do número de pontos da malha em uma das direções. Para estas simulações adotou-se  $Re = 1000$ ,  $\Delta t = 0.00075$  e o número de pontos da malha variando entre 10 e 500.

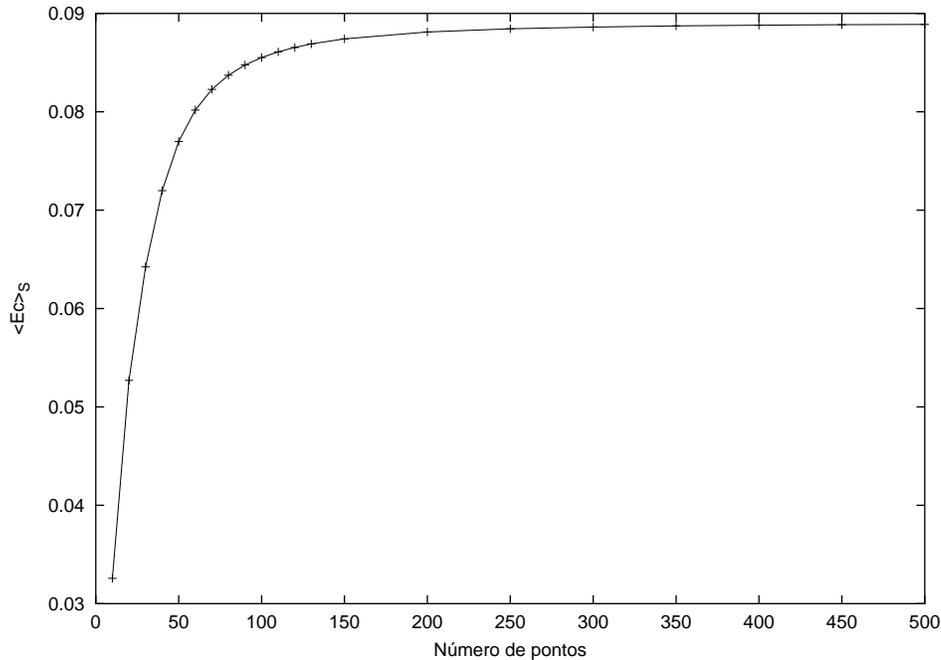


Fig. 4.6 – Variação de  $\langle E_c \rangle_S$  com a dimensão da malha.

De acordo com a Figura 4.6 existe uma diferença significativa na energia cinética média final entre as malhas  $100 \times 100$  e  $400 \times 400$ . Desta forma, não é aconselhável utilizar os resultados para a cavidade quadrada e a cavidade fractal 1, obtidos com malhas  $100 \times 100$ , para comparar com os resultados da cavidade fractal 2 que, para ser adequadamente representada, necessita de malhas  $400 \times 400$ . Por outro lado, a partir de malhas  $300 \times 300$ , a variação de  $\langle E_c \rangle_S$  é muito pequena. Assim, os resultados obtidos para malhas  $400 \times 400$ , servirão para comparar com malhas de densidades maiores, necessários para os pré-fractais de nível maior do que 2.

A Figura 4.7 mostra a evolução da energia cinética média  $\langle E_c \rangle$  final em função do número de Reynolds para a cavidade quadrada (cavidade) e para as cavidades com fronteira pré-fractal de nível 1 (fractal 1) e de nível 2 (fractal 2).

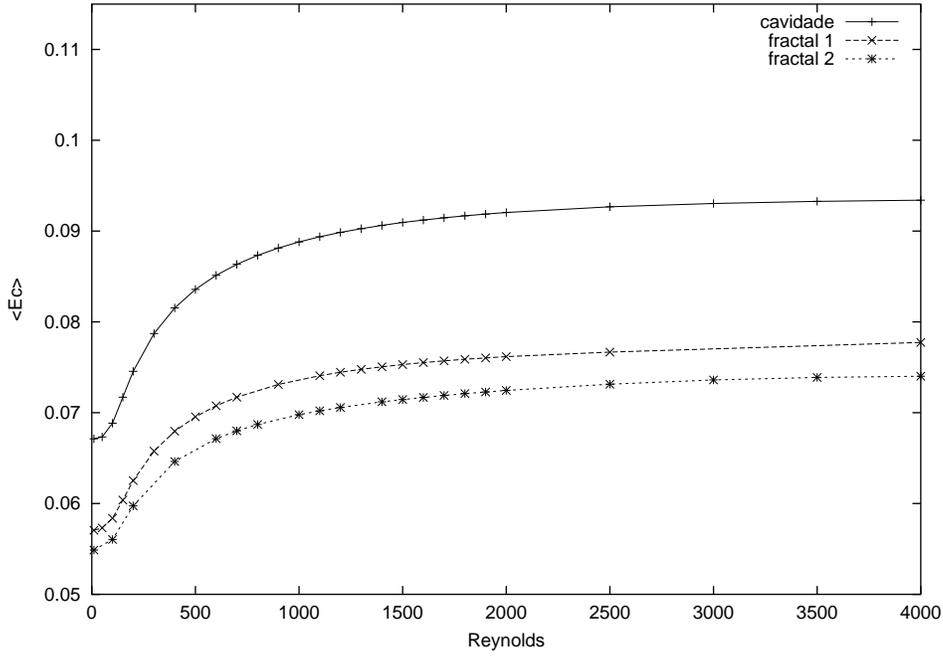


Fig. 4.7 – Energia cinética média (isotérmico).

A comparação da energia cinética final entre as cavidades pode ser feita por meio da variação absoluta, expressa por:

$$V_{ec} = \langle E_c \rangle_{F_1} - \langle E_c \rangle_{F_2} \quad (4.5)$$

sendo que  $F_1$  pode ser a cavidade quadrada ou a cavidade fractal 1, enquanto que  $F_2$  pode ser a cavidade fractal 1 ou a cavidade fractal 2. A variação absoluta da energia cinética média final entre duas cavidades é dada por:

$$V_{ec}^r = \frac{\langle E_c \rangle_{F_1} - \langle E_c \rangle_{F_2}}{\langle E_c \rangle_{F_1}} \quad (4.6)$$

A Figura 4.8 mostra a variação absoluta da energia cinética média entre a cavidade e os dois pré-fractais, bem como entre os dois pré-fractais. A Figura 4.9 exhibe a variação relativa para os mesmos casos, e mostra que, para  $400 \leq Re \leq 4000$ , a variação relativa entre a cavidade e o fractal 1 se mantém praticamente constante (variação na faixa de 16.65% à 17.26%).

O mesmo ocorre quanto a variação relativa entre os pré-fractais de níveis 1 e 2 para valores de  $400 \leq Re \leq 4000$ , com a variação relativa de  $\langle E_c \rangle$  entre as cavidades pré-fractais se mantendo na faixa de 4.8% à 5.22%. Estes resultados estão apresentados em Doescher et al. (2001b) e em Doescher et al. (2002).

TABELA 4.1 – RELAÇÃO DAS SIMULAÇÕES ISOTÉRMICAS PARA A CAVIDADE

Reynolds	$\Delta t$	$\langle E_c \rangle_s$	$T_f$
10	0.000012	$6.71264 \cdot 10^{-02}$	7.5
50	0.000063	$6.73285 \cdot 10^{-02}$	15.0
100	0.000125	$6.88535 \cdot 10^{-02}$	40.0
150	0.000188	$7.17138 \cdot 10^{-02}$	40.0
200	0.000250	$7.45509 \cdot 10^{-02}$	50.0
300	0.000375	$7.87175 \cdot 10^{-02}$	60.0
400	0.000500	$8.15366 \cdot 10^{-02}$	100.0
500	0.000625	$8.35810 \cdot 10^{-02}$	100.0
600	0.000750	$8.51301 \cdot 10^{-02}$	150.0
700	0.000875	$8.63464 \cdot 10^{-02}$	175.0
800	0.001000	$8.73280 \cdot 10^{-02}$	125.0
900	0.001125	$8.81309 \cdot 10^{-02}$	200.0
1000	0.001250	$8.88037 \cdot 10^{-02}$	150.0
1100	0.001250	$8.93710 \cdot 10^{-02}$	175.0
1200	0.001500	$8.98552 \cdot 10^{-02}$	200.0
1300	0.001625	$9.02725 \cdot 10^{-02}$	200.0
1400	0.001500	$9.06325 \cdot 10^{-02}$	225.0
1500	0.001500	$9.09476 \cdot 10^{-02}$	225.0
1600	0.001250	$9.12215 \cdot 10^{-02}$	250.0
1700	0.001250	$9.14654 \cdot 10^{-02}$	275.0
1800	0.001250	$9.16814 \cdot 10^{-02}$	300.0
1900	0.001250	$9.18730 \cdot 10^{-02}$	300.0
2000	0.001250	$9.20445 \cdot 10^{-02}$	325.0
2500	0.001000	$9.26706 \cdot 10^{-02}$	400.0
3000	0.001000	$9.30468 \cdot 10^{-02}$	475.0
3500	0.001000	$9.32757 \cdot 10^{-02}$	550.0
4000	0.001000	$9.34109 \cdot 10^{-02}$	650.0
4500	0.001000	$9.34808 \cdot 10^{-02}$	725.0
5000	0.001000	$9.35048 \cdot 10^{-02}$	825.0
5500	0.001000	$9.34936 \cdot 10^{-02}$	900.0
6000	0.000750	$9.34559 \cdot 10^{-02}$	975.0

Como a energia cinética média é uma medida sobre todo o domínio, não é possível, apenas com esta informação, observar que sub-região do domínio é responsável pela diminuição de  $\langle E_c \rangle$  ao introduzir os pré-fractais na fronteira. Para tanto, é necessário observar a energia cinética sobre alguns pontos do domínio. Nas Figuras 4.10 (a) e (b) pode-se ver

TABELA 4.2 – RELAÇÃO DAS SIMULAÇÕES ISOTÉRMICAS PARA A CAVIDADE FRACTAL 1

Reynolds	$\Delta t$	$\langle E_c \rangle_s$	$T_f$
10	0.000012	$5.70491 \cdot 10^{-02}$	5.0
50	0.000063	$5.73176 \cdot 10^{-02}$	15.0
100	0.000125	$5.83771 \cdot 10^{-02}$	30.0
150	0.000188	$6.03839 \cdot 10^{-02}$	75.0
200	0.000250	$6.25199 \cdot 10^{-02}$	75.0
300	0.000375	$6.57651 \cdot 10^{-02}$	75.0
400	0.000500	$6.79604 \cdot 10^{-02}$	75.0
500	0.000625	$6.95533 \cdot 10^{-02}$	75.0
600	0.000750	$7.07638 \cdot 10^{-02}$	125.0
700	0.000875	$7.17133 \cdot 10^{-02}$	150.0
900	0.001125	$7.31060 \cdot 10^{-02}$	200.0
1100	0.001250	$7.40732 \cdot 10^{-02}$	200.0
1200	0.001500	$7.44507 \cdot 10^{-02}$	225.0
1300	0.001625	$7.47768 \cdot 10^{-02}$	250.0
1400	0.001500	$7.50602 \cdot 10^{-02}$	225.0
1500	0.001500	$7.53074 \cdot 10^{-02}$	225.0
1600	0.001250	$7.55247 \cdot 10^{-02}$	200.0
1700	0.001250	$7.57163 \cdot 10^{-02}$	200.0
1800	0.001250	$7.58863 \cdot 10^{-02}$	200.0
1900	0.001250	$7.60377 \cdot 10^{-02}$	200.0
2000	0.001250	$7.61733 \cdot 10^{-02}$	175.0
2500	0.001000	$7.66799 \cdot 10^{-02}$	375.0
4000	0.001000	$7.77436 \cdot 10^{-02}$	625.0

TABELA 4.3 – RELAÇÃO DAS SIMULAÇÕES ISOTÉRMICAS PARA A CAVIDADE  
 FRACTAL 2

Reynolds	$\Delta t$	$\langle E_c \rangle_S$	$T_f$
10	0.000012	$5.48811 \cdot 10^{-02}$	5.0
100	0.000125	$5.60474 \cdot 10^{-02}$	30.0
200	0.000250	$5.97327 \cdot 10^{-02}$	75.0
400	0.000500	$6.46226 \cdot 10^{-02}$	75.0
600	0.000750	$6.71423 \cdot 10^{-02}$	100.0
700	0.000875	$6.80042 \cdot 10^{-02}$	125.0
800	0.001000	$6.87048 \cdot 10^{-02}$	125.0
1000	0.001250	$6.97817 \cdot 10^{-02}$	150.0
1100	0.001250	$7.02082 \cdot 10^{-02}$	175.0
1200	0.001500	$7.05765 \cdot 10^{-02}$	225.0
1400	0.001500	$7.11922 \cdot 10^{-02}$	200.0
1500	0.001500	$7.14521 \cdot 10^{-02}$	225.0
1600	0.001250	$7.16878 \cdot 10^{-02}$	225.0
1700	0.001250	$7.19027 \cdot 10^{-02}$	250.0
1800	0.001250	$7.21008 \cdot 10^{-02}$	250.0
1900	0.001250	$7.22836 \cdot 10^{-02}$	275.0
2000	0.001250	$7.24539 \cdot 10^{-02}$	250.0
2500	0.001000	$7.31415 \cdot 10^{-02}$	375.0
3000	0.001000	$7.36092 \cdot 10^{-02}$	450.0
3500	0.001000	$7.38912 \cdot 10^{-02}$	525.0
4000	0.001000	$7.40121 \cdot 10^{-02}$	575.0

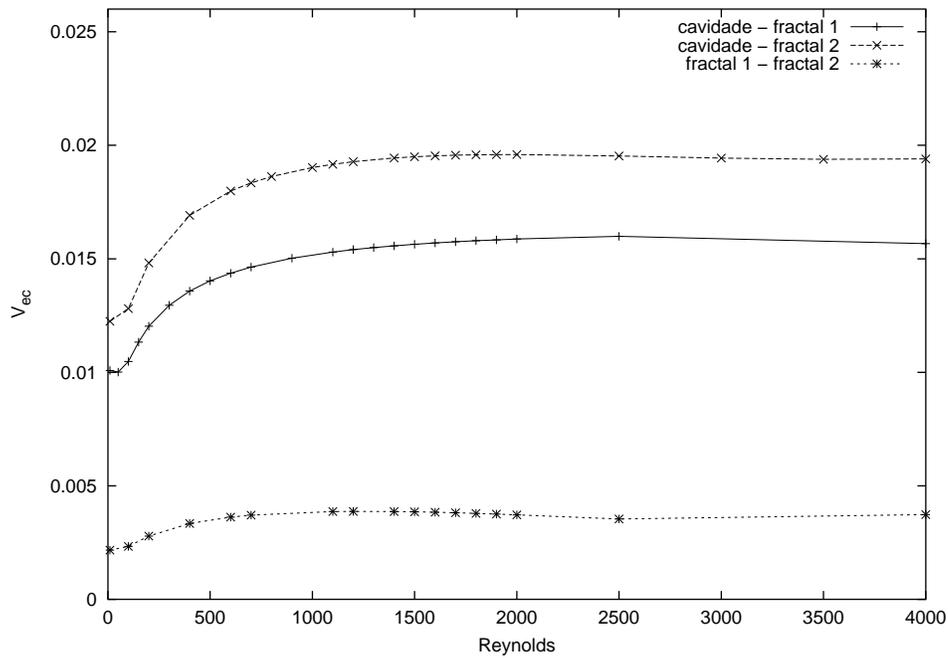


Fig. 4.8 – Variação absoluta da energia cinética média (isotérmico).

oito pontos escolhidos, sendo quatro próximos ao centro da cavidade e quatro próximos à fronteira, respectivamente na cavidade quadrada e na cavidade fractal 2. As coordenadas dos oito pontos estão na Tabela 4.4.

TABELA 4.4 – COORDENADAS DOS PONTOS PARA CÁLCULO DE VALORES

<b>ponto</b>	$x_i$	$y_i$
$p_1$	0.20	0.20
$p_2$	0.20	0.80
$p_3$	0.35	0.35
$p_4$	0.35	0.65
$p_5$	0.65	0.35
$p_6$	0.65	0.65
$p_7$	0.80	0.20
$p_8$	0.80	0.80

As Figuras 4.11 (a) à (h) mostram a energia cinética  $\mathcal{E}_c$  em cada um dos pontos, para as cavidades quadrada e fractais, em função do número de Reynolds. Observa-se que os valores da energia cinética nas cavidades fractais não sofrem alteração, quando comparados com o mesmo ponto na cavidade quadrada, nos pontos  $p_2$ ,  $p_4$ ,  $p_6$  e  $p_8$  (Figuras 4.11 (b), (d),

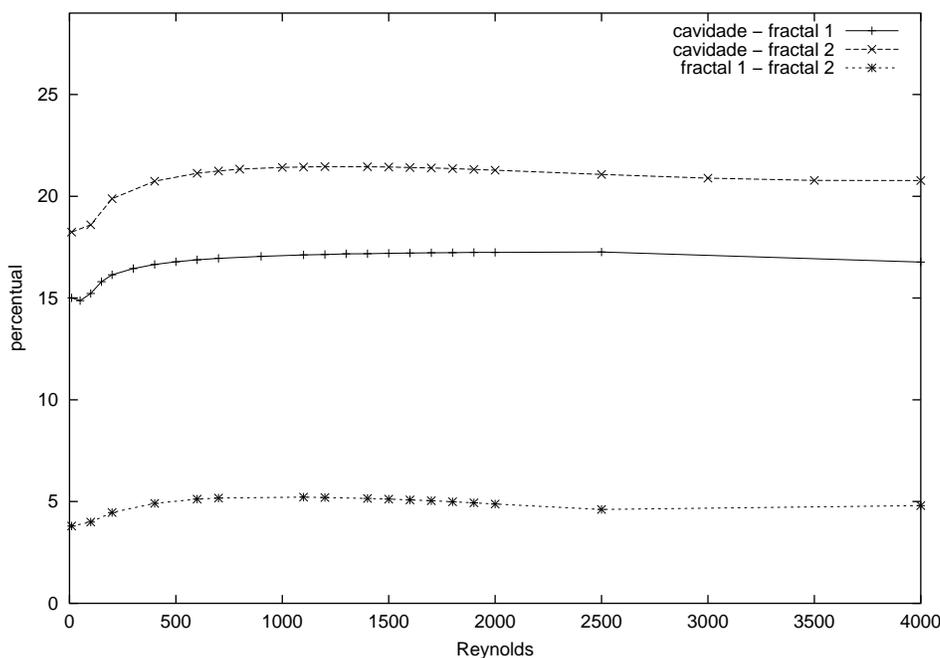


Fig. 4.9 – Variação relativa da energia cinética média (isotérmico).

(f) e (h), respectivamente). Nos pontos  $p_1$  (Figura 4.11 (a)) e  $p_7$  (Figura 4.11 (g)), ocorre uma diminuição significativa do valor de  $\mathcal{E}_c$  nas cavidades fractais quando comparadas com a cavidade quadrada, enquanto que nos dois últimos pontos,  $p_3$  (Figura 4.11 (c)) e  $p_5$  (Figura 4.11 (e)), o valor de  $\mathcal{E}_c$  para as cavidades fractais é um pouco maior do que na cavidade quadrada.

Desta forma, conclue-se que a diminuição de  $\mathcal{E}_c$  ocorre na região inferior das cavidades fractais. Além disso, ocorre um aumento de  $\mathcal{E}_c$  na região centro-inferior das cavidades.

#### 4.3.1 Gráficos da Vorticidade

A análise da variação da energia cinética média entre os três tipos de cavidades fornece um parâmetro global, isto é, sobre todo o domínio do problema. Este tipo de resultado pode filtrar pequenas alterações locais. Para estabelecer a existência ou não destas alterações torna-se necessário a visualização da superfície da propriedade em estudo. No caso do escoamento isotérmico, a vorticidade  $\zeta$  é uma das propriedades interessantes para serem verificadas, o que será feito a seguir. Algumas outras propriedades, para os mesmos valores do número de Reynolds, podem ser vistos no apêndice C.

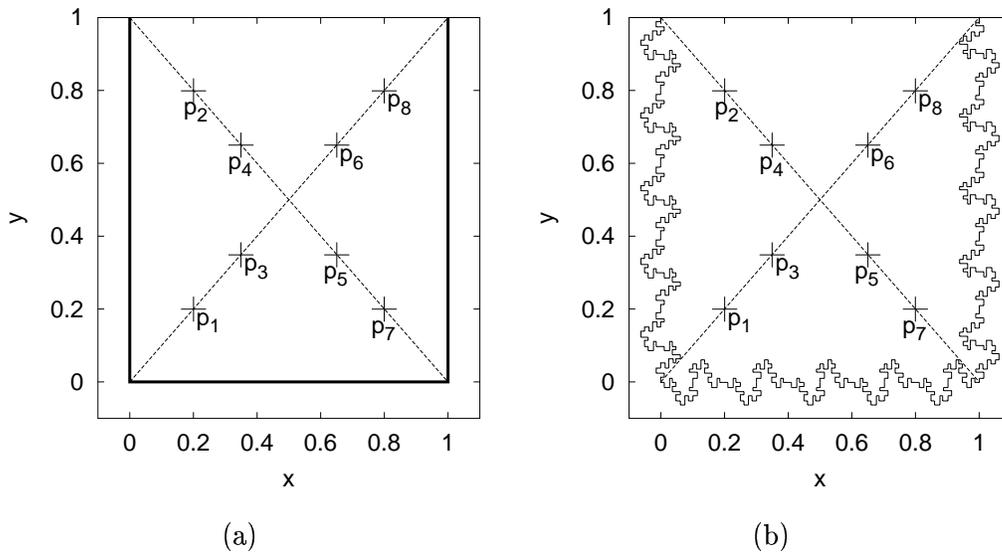


Fig. 4.10 – Pontos para cálculo de valores na cavidade: (a) quadrada (b) fractal 2.

Nas Figuras 4.12 (a) e (b) observam-se as superfícies de vorticidade para  $Re = 10$  e  $Re = 400$ , na cavidade quadrada. As isolinhas para estas superfícies podem ser vistas nas Figuras 4.13 (a) e (b), respectivamente. As superfícies e as respectivas isolinhas da vorticidade para  $Re = 1400$  e  $Re = 5000$  estão nas Figuras 4.14 e 4.15.

As isolinhas escolhidas, tanto para a cavidade quadrada quanto para as cavidades fractais foram -7, -3, 0, 3, 10 e 20.

#### 4.4 Escoamentos Não Isotérmicos

As simulações numéricas dos escoamentos não isotérmicos foram realizadas usando o método de volumes finitos com correção de pressão de passo cinco. As simulações para a cavidade quadrada e para o fractal de nível 1 foram realizadas com malhas de dimensões  $100 \times 100$  e  $400 \times 400$ , enquanto que para fractal de nível 2 foi usado apenas a malha de dimensão  $400 \times 400$ , devido ao fato que a malha  $100 \times 100$  é demasiadamente grosseira para descrever os detalhes do fractal de nível 2. Para alguns valores do número de Reynolds, foram realizadas simulações usando malhas de dimensões  $500 \times 500$  e  $600 \times 600$ , para as cavidades fractais, com finalidade de verificar a estabilidade da solução com o aumento do tamanho da malha. Com respeito às condições de contorno da velocidade tem-se duas situações possíveis: *convecção natural*, com velocidade nula em todos os lados e o escoamento

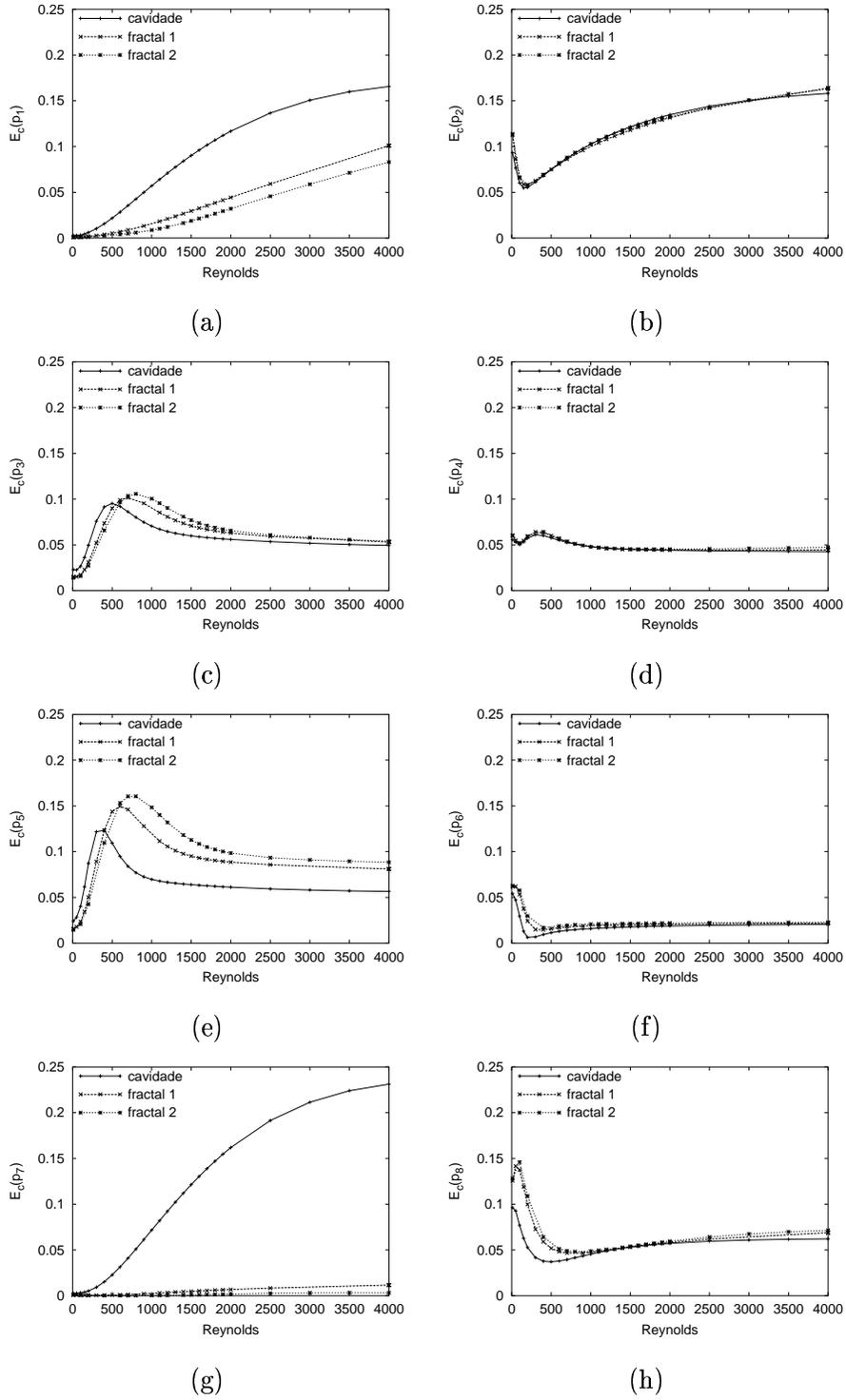
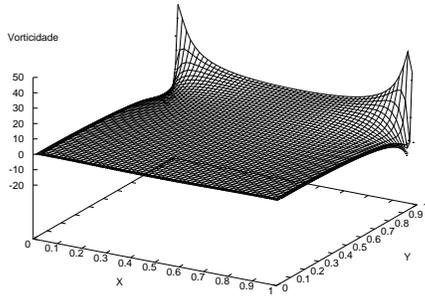
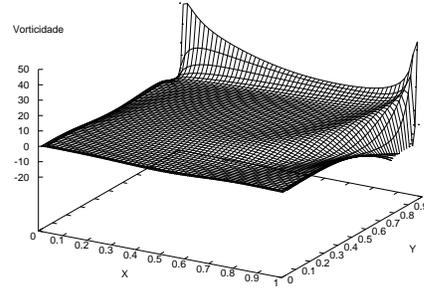


Fig. 4.11 – Energia Cinética  $\mathcal{E}_c$  na simulação isotérmica para o ponto: (a)  $p_1$  (b)  $p_2$  (c)  $p_3$  (d)  $p_4$  (e)  $p_5$  (f)  $p_6$  (g)  $p_7$  (h)  $p_8$ .

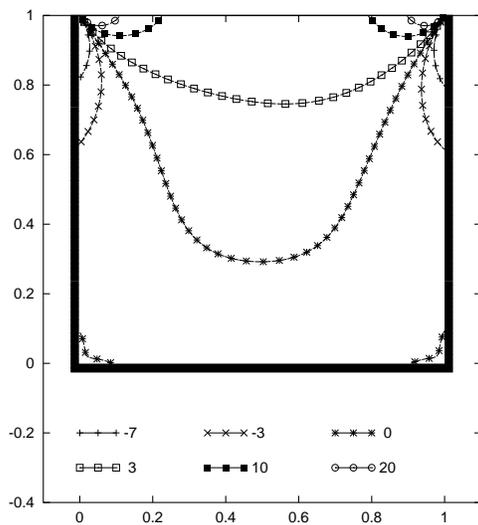


(a)

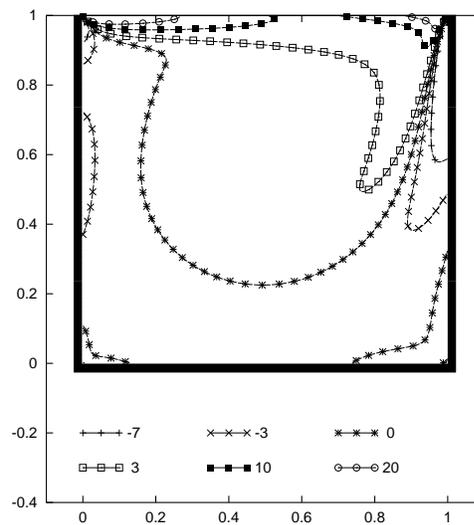


(b)

Fig. 4.12 – Superfície de vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

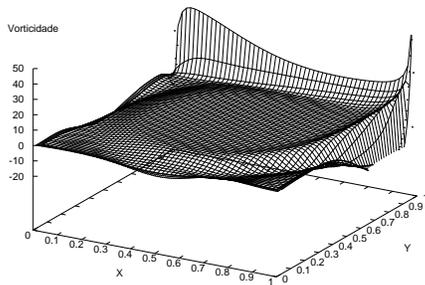


(a)

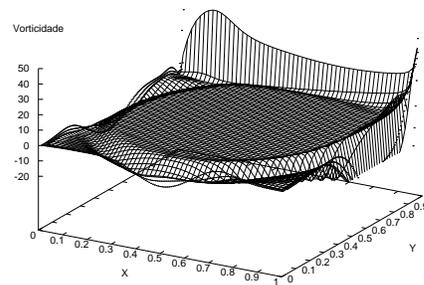


(b)

Fig. 4.13 – Isolinhas da vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

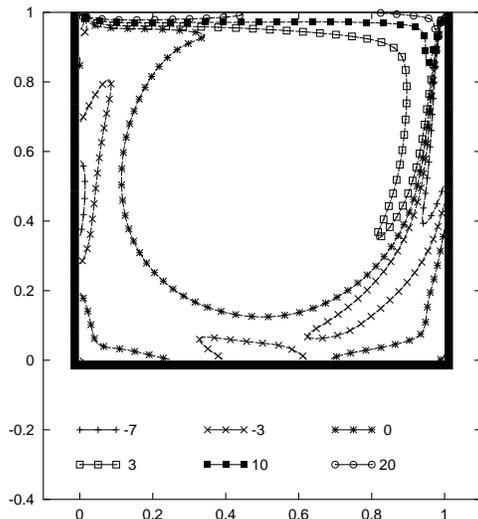


(a)

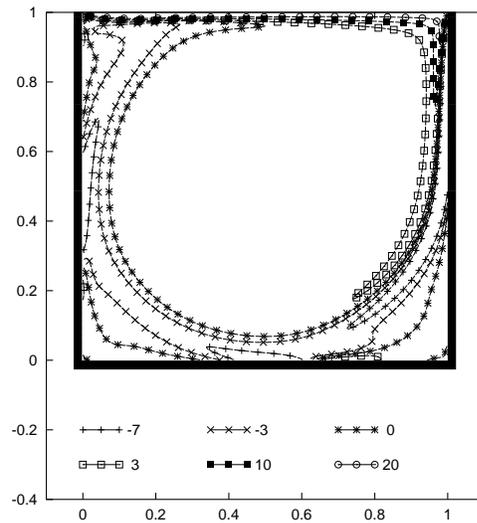


(b)

Fig. 4.14 – Superfície de vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

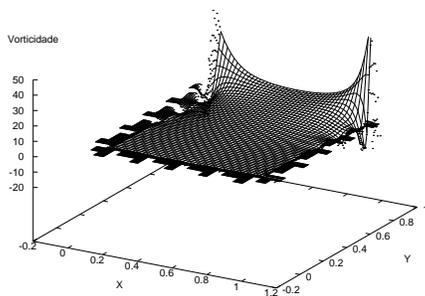


(a)

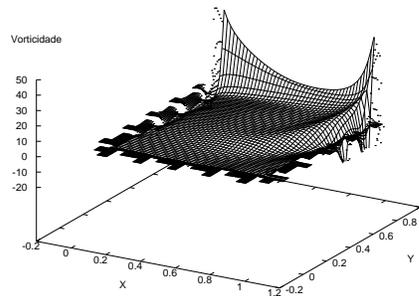


(b)

Fig. 4.15 – Isolinhas da vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

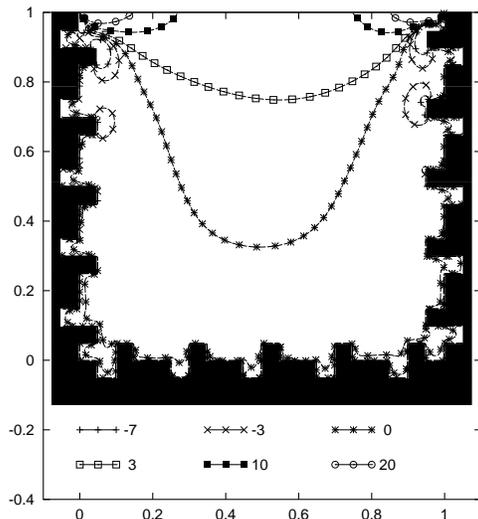


(a)

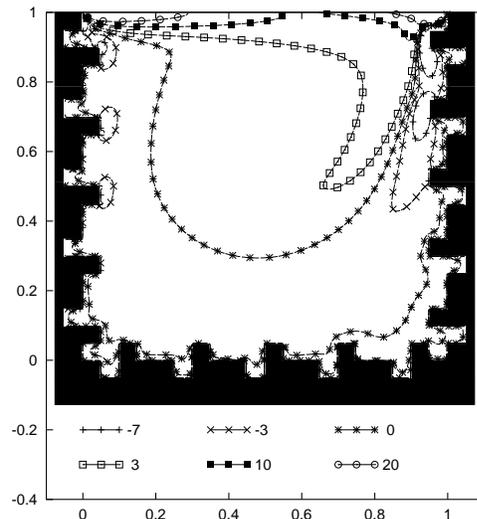


(b)

Fig. 4.16 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

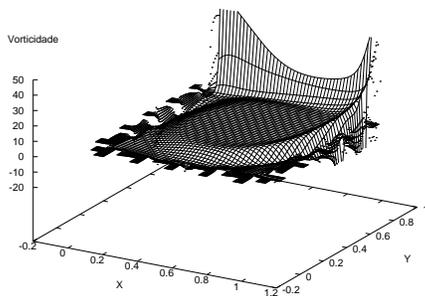


(a)

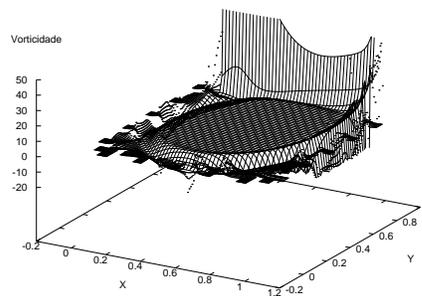


(b)

Fig. 4.17 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

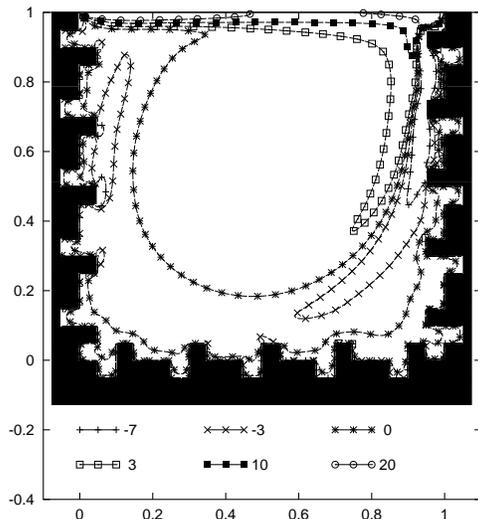


(a)

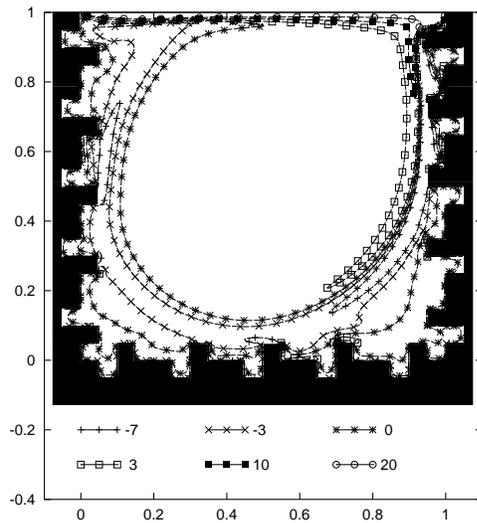


(b)

Fig. 4.18 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

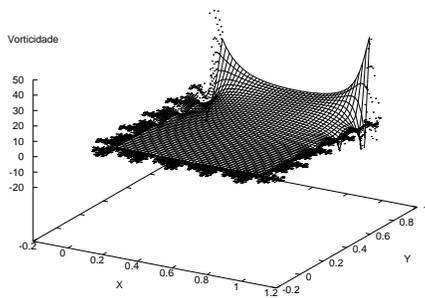


(a)

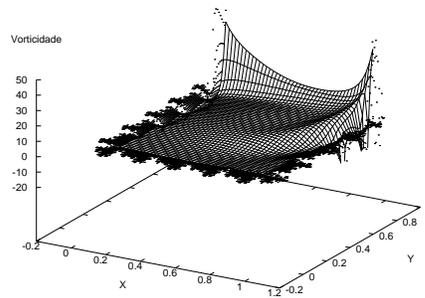


(b)

Fig. 4.19 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

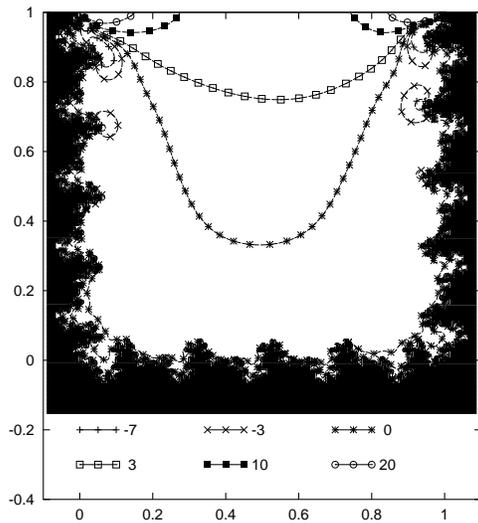


(a)

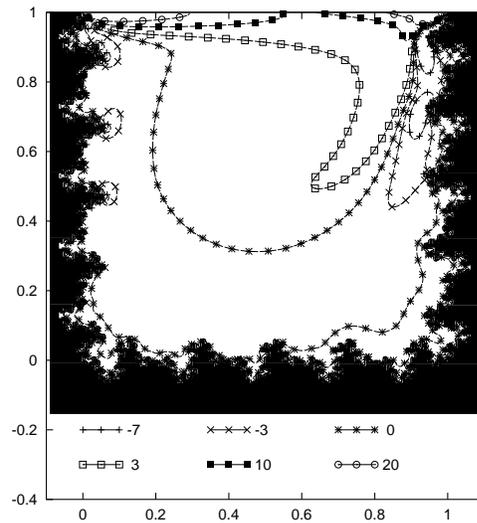


(b)

Fig. 4.20 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

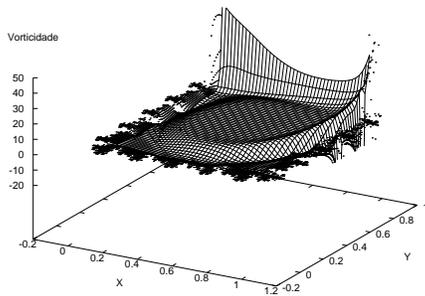


(a)

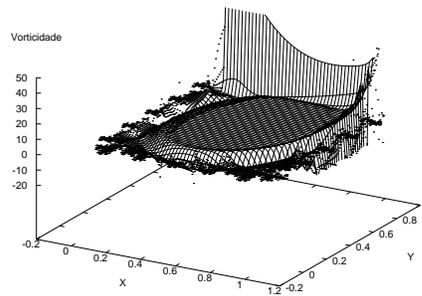


(b)

Fig. 4.21 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .



(a)



(b)

Fig. 4.22 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

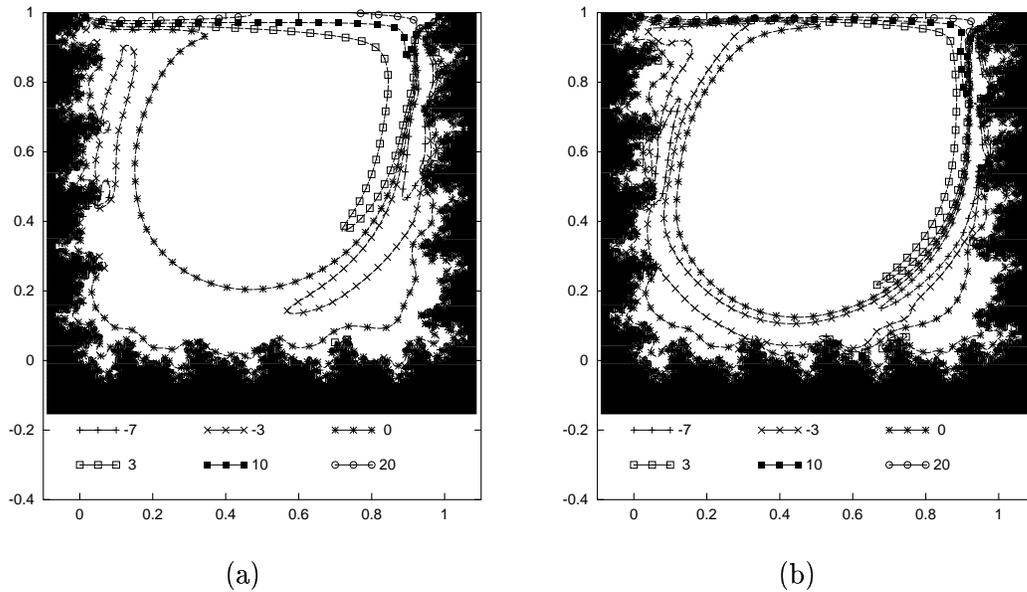


Fig. 4.23 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

mento do fluido ocorre devido unicamente à diferença de temperatura; *convecção forçada*, onde a velocidade de pelo menos um dos lados é não nula, sendo que o escoamento ocorre devido ao movimento induzido no fluido, bem como pela diferença de temperatura.

No caso da cavidade, a condição de contorno da temperatura foi estabelecida da seguinte forma:  $T_h$  para o lado superior e para o lado direito,  $T_c$  para o lado esquerdo e variação linear da temperatura, entre  $T_c$  e  $T_h$ , para o lado inferior, conforme pode ser visto na Figura 4.24 (a). No caso dos domínios fractais, o  $\mathbb{R}^2$  foi subdividido em quatro regiões delimitadas pelas retas que passam pelas diagonais da cavidade quadrada. Para cada ponto da fronteira foi atribuído uma temperatura de acordo com a região a que o ponto pertence. Assim, os pontos da fronteira nas regiões  $R_1$  e  $R_3$  receberam valor  $T_h$ . Os pontos na região  $R_2$  receberam  $T_c$  como valor para a temperatura, enquanto que os pontos na região  $R_4$  receberam um valor proporcional entre  $T_c$  e  $T_h$ , de acordo com a abscissa do ponto. Estes detalhes estão resumidos na Figura 4.24 (b).

#### 4.4.1 Convecção Natural

Para o caso da convecção natural tem-se  $u(x, y) = v(x, y) = 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ , sendo  $\Omega$  o domínio do problema. As simulações numéricas foram realizadas usando o método de volumes finitos sobre uma malha deslocada e estruturada (quadrada), usando correção de

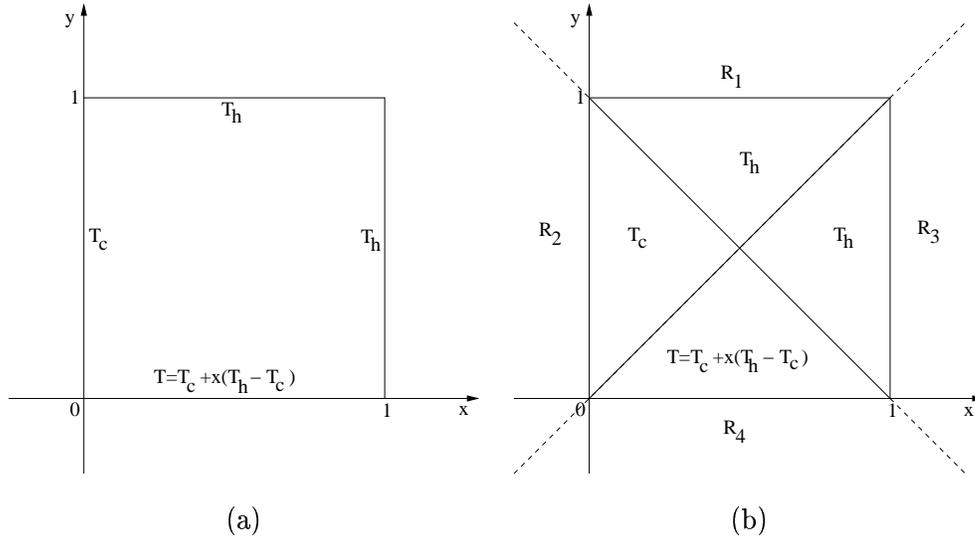


Fig. 4.24 – Condição de contorno para a temperatura: (a) cavidade (b) fractais.

pressão de passo cinco. O campo de pressão inicial foi obtido iterativamente. Adotou-se  $\beta = 3.52 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_c = 0^\circ C = 273K$ ,  $T_h = 20^\circ C = 293K$ ,  $q^m = 0$  e  $Pr = 0.72$ , com o número de Reynolds variando entre 10 e 6000. Um resumo das simulações não isotérmicas realizadas pode ser visto nas Tabelas 4.6, 4.7 e 4.9 para a cavidade quadrada, a cavidade fractal 1 e a cavidade fractal 2, respectivamente.

No caso da adimensionalização usando o número de Rayleigh (ver seção 3.4), a equação 3.98 pode ser expressa por:

$$Ra \approx 0.503Re^2 \quad (4.7)$$

A Tabela 4.5 mostra os valores do número de Rayleigh e das variáveis correspondentes, sendo que  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{t}$  representam os valores de  $u$ ,  $v$ ,  $p$  e  $t$  na adimensionalização usando o número de Rayleigh.

A Figura 4.25 mostra a evolução da energia cinética média  $\langle E_c \rangle$  final em função do número de Reynolds para a cavidade quadrada (cavidade) e para as cavidades com fronteira pré-fractal de nível 1 (fractal 1) e de nível 2 (fractal 2). A partir desta Figura pode-se concluir que a energia cinética média diminui com o aumento do nível de fractalização da fronteira. A Figura 4.26 mostra a variação absoluta da energia cinética média entre a

TABELA 4.5 – RELAÇÃO ENTRE AS ADIMENSIONALIZAÇÕES NO ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO

$Re$	$Ra$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{p}$	$\bar{t}$
10	50	7.2u	7.2v	52p	$1.39 \cdot 10^{-1}t$
50	$1.26 \cdot 10^3$	36u	36v	$1.3 \cdot 10^3p$	$2.78 \cdot 10^{-2}t$
100	$5.03 \cdot 10^3$	72u	72v	$5.2 \cdot 10^3p$	$1.39 \cdot 10^{-2}t$
150	$1.13 \cdot 10^4$	108u	108v	$1.2 \cdot 10^4p$	$9.26 \cdot 10^{-3}t$
200	$2.01 \cdot 10^4$	144u	144v	$2.1 \cdot 10^4p$	$6.94 \cdot 10^{-3}t$
300	$4.53 \cdot 10^4$	216u	216v	$4.7 \cdot 10^4p$	$4.63 \cdot 10^{-3}t$
400	$8.05 \cdot 10^4$	288u	288v	$8.3 \cdot 10^4p$	$3.47 \cdot 10^{-3}t$
500	$1.26 \cdot 10^5$	360u	360v	$1.3 \cdot 10^5p$	$2.78 \cdot 10^{-3}t$
600	$1.81 \cdot 10^5$	432u	432v	$1.9 \cdot 10^5p$	$2.31 \cdot 10^{-3}t$
700	$2.46 \cdot 10^5$	504u	504v	$2.5 \cdot 10^5p$	$1.98 \cdot 10^{-3}t$
800	$3.22 \cdot 10^5$	576u	576v	$3.3 \cdot 10^5p$	$1.74 \cdot 10^{-3}t$
900	$4.07 \cdot 10^5$	648u	648v	$4.2 \cdot 10^5p$	$1.54 \cdot 10^{-3}t$
1000	$5.03 \cdot 10^5$	720u	720v	$5.2 \cdot 10^5p$	$1.39 \cdot 10^{-3}t$
1100	$6.09 \cdot 10^5$	792u	792v	$6.3 \cdot 10^5p$	$1.26 \cdot 10^{-3}t$
1200	$7.24 \cdot 10^5$	864u	864v	$7.5 \cdot 10^5p$	$1.16 \cdot 10^{-3}t$
1300	$8.50 \cdot 10^5$	936u	936v	$8.8 \cdot 10^5p$	$1.07 \cdot 10^{-3}t$
1400	$9.86 \cdot 10^5$	1008u	1008v	$1.0 \cdot 10^6p$	$9.92 \cdot 10^{-4}t$
1500	$1.13 \cdot 10^6$	1080u	1080v	$1.2 \cdot 10^6p$	$9.26 \cdot 10^{-4}t$
1600	$1.29 \cdot 10^6$	1152u	1152v	$1.3 \cdot 10^6p$	$8.68 \cdot 10^{-4}t$
1700	$1.45 \cdot 10^6$	1224u	1224v	$1.5 \cdot 10^6p$	$8.17 \cdot 10^{-4}t$
1800	$1.63 \cdot 10^6$	1296u	1296v	$1.7 \cdot 10^6p$	$7.72 \cdot 10^{-4}t$
1900	$1.82 \cdot 10^6$	1368u	1368v	$1.9 \cdot 10^6p$	$7.31 \cdot 10^{-4}t$
2000	$2.01 \cdot 10^6$	1440u	1440v	$2.1 \cdot 10^6p$	$6.94 \cdot 10^{-4}t$
2500	$3.14 \cdot 10^6$	1800u	1800v	$3.2 \cdot 10^6p$	$5.56 \cdot 10^{-4}t$
3000	$4.53 \cdot 10^6$	2160u	2160v	$4.7 \cdot 10^6p$	$4.63 \cdot 10^{-4}t$
3500	$6.16 \cdot 10^6$	2520u	2520v	$6.4 \cdot 10^6p$	$3.97 \cdot 10^{-4}t$
4000	$8.05 \cdot 10^6$	2880u	2880v	$8.3 \cdot 10^6p$	$3.47 \cdot 10^{-4}t$
4500	$1.02 \cdot 10^7$	3240u	3240v	$1.0 \cdot 10^7p$	$3.09 \cdot 10^{-4}t$
5000	$1.26 \cdot 10^7$	3600u	3600v	$1.3 \cdot 10^7p$	$2.78 \cdot 10^{-4}t$
5500	$1.52 \cdot 10^7$	3960u	3960v	$1.6 \cdot 10^7p$	$2.53 \cdot 10^{-4}t$
6000	$1.81 \cdot 10^7$	4320u	4320v	$1.9 \cdot 10^7p$	$2.31 \cdot 10^{-4}t$

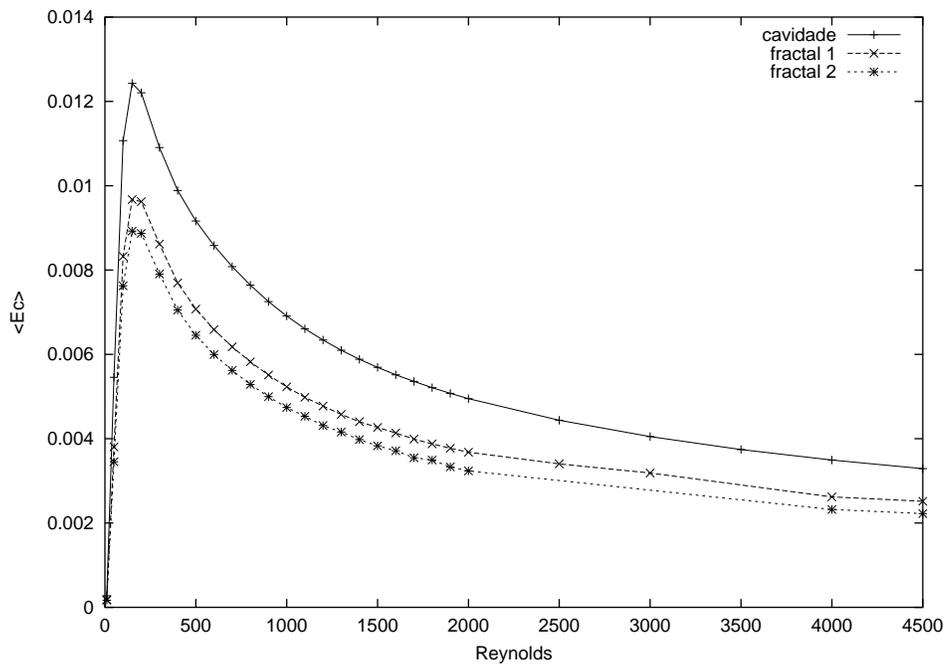


Fig. 4.25 – Energia cinética média (não isotérmico).

cavidade e os dois pré-fractais, bem como entre os dois pré-fractais. A Figura 4.27 exhibe a variação relativa para os mesmos casos, e mostra que, para  $200 \leq Re \leq 3000$ , a variação relativa entre a cavidade e o fractal 1 se mantém praticamente constante (de 21.15% à 25.7%). A variação relativa entre os pré-fractais de níveis 1 e 2 cresce de 7.74% até 12.0% para  $150 \leq Re \leq 2000$ . Estes resultados estão apresentados em Doescher et al. (2001c) e em Doescher et al. (2002).

A redução da energia cinética média com o aumento do nível de fractalização da fronteira é conseqüência do aumento da área de contato (ou do perímetro, no caso bidimensional) do fluido, levando a uma redução da velocidade final. O comportamento da variação absoluta pode ser compreendido da seguinte forma: o aumento do número de Reynolds corresponde a uma diminuição da viscosidade do fluido, causando uma diminuição da camada limite próxima a fronteira. A mudança da cavidade quadrada para o fractal 1 causou alterações no domínio superiores à variação na camada limite. Na mudança do fractal 1 para o fractal 2, as alterações são de mesma ordem, ou inferiores, à variação da camada limite, causando uma maior variação relativa com o aumento do número de Reynolds.

TABELA 4.6 – RELAÇÃO DAS SIMULAÇÕES NÃO ISOTÉRMICAS PARA A CAVIDADE

Reynolds	$\Delta t$	$\langle E_c \rangle_s$	$T_f$
10	0.000010	$2.72954 \cdot 10^{-04}$	5.0
50	0.000050	$5.45512 \cdot 10^{-03}$	20.0
100	0.000100	$1.10697 \cdot 10^{-02}$	25.0
150	0.000150	$1.24292 \cdot 10^{-02}$	20.0
200	0.000150	$1.22053 \cdot 10^{-02}$	60.0
300	0.000250	$1.09049 \cdot 10^{-02}$	60.0
400	0.000450	$9.88530 \cdot 10^{-03}$	170.0
500	0.000500	$9.16216 \cdot 10^{-03}$	180.0
600	0.000500	$8.58318 \cdot 10^{-03}$	180.0
700	0.000750	$8.08289 \cdot 10^{-03}$	320.0
800	0.000750	$7.64126 \cdot 10^{-03}$	350.0
900	0.001000	$7.25219 \cdot 10^{-03}$	600.0
1000	0.001000	$6.90936 \cdot 10^{-03}$	515.0
1100	0.001000	$6.60664 \cdot 10^{-03}$	475.0
1200	0.001300	$6.33950 \cdot 10^{-03}$	561.0
1300	0.001250	$6.09890 \cdot 10^{-03}$	625.0
1400	0.001500	$5.88522 \cdot 10^{-03}$	705.0
1500	0.001500	$5.69126 \cdot 10^{-03}$	800.0
1600	0.001500	$5.51728 \cdot 10^{-03}$	612.0
1700	0.001500	$5.35661 \cdot 10^{-03}$	750.0
1800	0.001500	$5.21037 \cdot 10^{-03}$	750.0
1900	0.001500	$5.07567 \cdot 10^{-03}$	700.0
2000	0.001500	$4.95088 \cdot 10^{-03}$	675.0
2500	0.000750	$4.43764 \cdot 10^{-03}$	275.0
3000	0.001000	$4.04897 \cdot 10^{-03}$	280.0
3500	0.000500	$3.74182 \cdot 10^{-03}$	325.0
4000	0.000500	$3.49343 \cdot 10^{-03}$	280.0
4500	0.000500	$3.28824 \cdot 10^{-03}$	410.0
5000	0.000500	$3.11506 \cdot 10^{-03}$	580.0
5500	0.000400	$2.96598 \cdot 10^{-03}$	950.0
6000	0.000375	$2.83605 \cdot 10^{-03}$	1175.0

TABELA 4.7 – RELAÇÃO DAS SIMULAÇÕES NÃO ISOTÉRMICAS PARA A CAVIDADE FRACTAL 1

Reynolds	$\Delta t$	$\langle E_c \rangle_s$	$T_f$
10	0.000012	$1.83459 \cdot 10^{-04}$	4.0
50	0.000063	$3.80639 \cdot 10^{-03}$	20.0
100	0.000125	$8.32270 \cdot 10^{-03}$	30.0
150	0.000188	$9.67338 \cdot 10^{-03}$	75.0
200	0.000250	$9.62366 \cdot 10^{-03}$	60.0
300	0.000375	$8.61678 \cdot 10^{-03}$	100.0
400	0.000500	$7.69434 \cdot 10^{-03}$	100.0
500	0.000625	$7.07436 \cdot 10^{-03}$	125.0
600	0.000750	$6.58693 \cdot 10^{-03}$	200.0
700	0.000875	$6.17828 \cdot 10^{-03}$	150.0
800	0.001000	$5.82536 \cdot 10^{-03}$	400.0
900	0.001125	$5.50953 \cdot 10^{-03}$	450.0
1000	0.001250	$5.23058 \cdot 10^{-03}$	500.0
1100	0.001250	$4.98251 \cdot 10^{-03}$	475.0
1200	0.001500	$4.77261 \cdot 10^{-03}$	650.0
1300	0.001500	$4.57405 \cdot 10^{-03}$	200.0
1400	0.001500	$4.40374 \cdot 10^{-03}$	200.0
1500	0.001500	$4.26840 \cdot 10^{-03}$	550.0
1600	0.001250	$4.13397 \cdot 10^{-03}$	375.0
1700	0.001250	$3.99068 \cdot 10^{-03}$	225.0
1800	0.001250	$3.87775 \cdot 10^{-03}$	225.0
1900	0.001250	$3.77418 \cdot 10^{-03}$	225.0
2000	0.001250	$3.67866 \cdot 10^{-03}$	225.0
2500	0.000500	$3.40361 \cdot 10^{-03}$	250.0
3000	0.000500	$3.18451 \cdot 10^{-03}$	215.0
4000	0.000500	$2.61811 \cdot 10^{-03}$	300.0
4500	0.000500	Tabela 4.8	1000.0
5000	0.000500	Tabela 4.8	1225.0
5500	0.000375	Tabela 4.8	925.0
6000	0.000250	Tabela 4.8	600.0

TABELA 4.8 – EXTREMOS DE  $\langle E_c \rangle$  PARA SIMULAÇÃO NÃO ISOTÉRMICA NA CAVIDADE FRACTAL 1

Reynolds	mínimo	máximo	média	amplitude
4500	$2.43879 \cdot 10^{-3}$	$2.59098 \cdot 10^{-3}$	$2.51682 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$
5000	$2.35563 \cdot 10^{-3}$	$2.59783 \cdot 10^{-3}$	$2.07940 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$
5500	$2.30202 \cdot 10^{-3}$	$2.58471 \cdot 10^{-3}$	$1.92433 \cdot 10^{-3}$	$2.82 \cdot 10^{-4}$
6000	$2.25965 \cdot 10^{-3}$	$2.56475 \cdot 10^{-3}$	$1.61330 \cdot 10^{-3}$	$3.05 \cdot 10^{-4}$

TABELA 4.9 – RELAÇÃO DAS SIMULAÇÕES NÃO ISOTÉRMICAS PARA A CAVIDADE FRACTAL 2

Reynolds	$\Delta t$	$\langle E_c \rangle_s$	$T_f$
10	0.000012	$1.65710 \cdot 10^{-04}$	6.0
50	0.000063	$3.45366 \cdot 10^{-03}$	35.0
100	0.000125	$7.62435 \cdot 10^{-03}$	30.0
150	0.000188	$8.92490 \cdot 10^{-03}$	110.0
200	0.000250	$8.86908 \cdot 10^{-03}$	75.0
300	0.000375	$7.90609 \cdot 10^{-03}$	100.0
400	0.000500	$7.05147 \cdot 10^{-03}$	100.0
500	0.000625	$6.45291 \cdot 10^{-03}$	125.0
600	0.000750	$5.99788 \cdot 10^{-03}$	125.0
700	0.000875	$5.61856 \cdot 10^{-03}$	150.0
800	0.001000	$5.28750 \cdot 10^{-03}$	150.0
900	0.001125	$4.99531 \cdot 10^{-03}$	150.0
1000	0.001250	$4.73775 \cdot 10^{-03}$	175.0
1100	0.001250	$4.53164 \cdot 10^{-03}$	400.0
1200	0.001500	$4.31134 \cdot 10^{-03}$	200.0
1300	0.001625	$4.15679 \cdot 10^{-03}$	1025.0
1400	0.001500	$3.97843 \cdot 10^{-03}$	225.0
1500	0.001500	$3.82896 \cdot 10^{-03}$	450.0
1600	0.001250	$3.71286 \cdot 10^{-03}$	200.0
1700	0.001250	$3.54787 \cdot 10^{-03}$	225.0
1800	0.001250	$3.49477 \cdot 10^{-03}$	225.0
1900	0.001250	$3.33040 \cdot 10^{-03}$	225.0
2000	0.001250	$3.23720 \cdot 10^{-03}$	250.0
4000	0.000500	$2.32206 \cdot 10^{-03}$	175.0
4500	0.000500	Tabela 4.10	1100.0
5000	0.000500	Tabela 4.10	1150.0
5500	0.000250	Tabela 4.10	600.0
6000	0.000100	Tabela 4.10	225.0

TABELA 4.10 – EXTREMOS DE  $\langle E_c \rangle$  PARA SIMULAÇÃO NÃO ISOTÉRMICA NA CAVIDADE FRACTAL 2

Reynolds	mínimo	máximo	média	amplitude
4500	$2.15654 \cdot 10^{-3}$	$2.30554 \cdot 10^{-3}$	$2.22323 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-4}$
5000	$2.06985 \cdot 10^{-3}$	$2.26868 \cdot 10^{-3}$	$2.17218 \cdot 10^{-3}$	$1.99 \cdot 10^{-4}$
5500	$2.00124 \cdot 10^{-3}$	$2.21989 \cdot 10^{-3}$	$2.11454 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-4}$
6000	$1.94399 \cdot 10^{-3}$	$2.17263 \cdot 10^{-3}$	$2.06543 \cdot 10^{-3}$	$2.29 \cdot 10^{-4}$

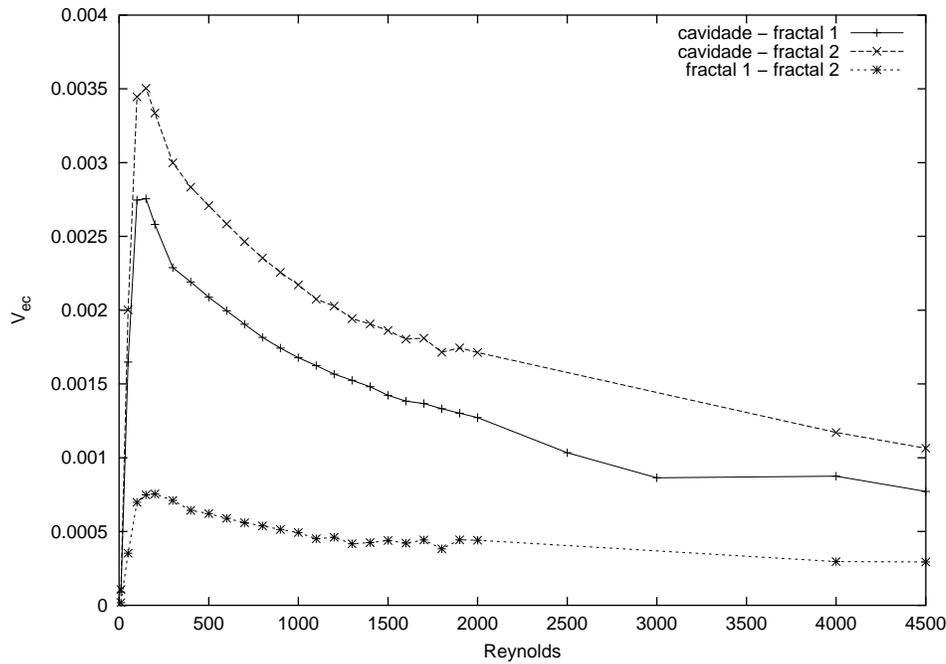


Fig. 4.26 – Variação absoluta da energia cinética média (não isotérmico).

De acordo com este comportamento, espera-se que o crescimento da variação absoluta da energia cinética média do pré-fractal de nível 2 para o pré-fractal de nível 3, em função do número de Reynolds, seja ainda mais elevado. Entretanto, devido ao elevado número de detalhes para se representar uma cavidade com fronteira pré-fractal de nível 3, é necessário realizar simulações com malhas da ordem de, pelo menos,  $1000 \times 1000$  pontos. Isto representa um esforço computacional muito elevado para o presente trabalho.

#### 4.4.2 Gráficos do Campo de Temperatura

Assim como no caso isotérmico, a análise da variação da energia cinética média entre os diversos tipos de cavidades fornece um parâmetro global, isto é, sobre todo o domínio do problema, que pode filtrar pequenas alterações locais. Para estabelecer a existência ou não destas alterações torna-se necessário a visualização da superfície da propriedade em estudo. No caso do escoamento não isotérmico, a temperatura  $T$  é uma das propriedades interessantes para serem verificadas, o que será feito a seguir. Algumas outras propriedades, para os mesmos valores do número de Reynolds, podem ser vistos no apêndice D.

Nas Figuras 4.28 (a) e (b) observam-se as superfícies de temperatura para  $Re = 10$  e

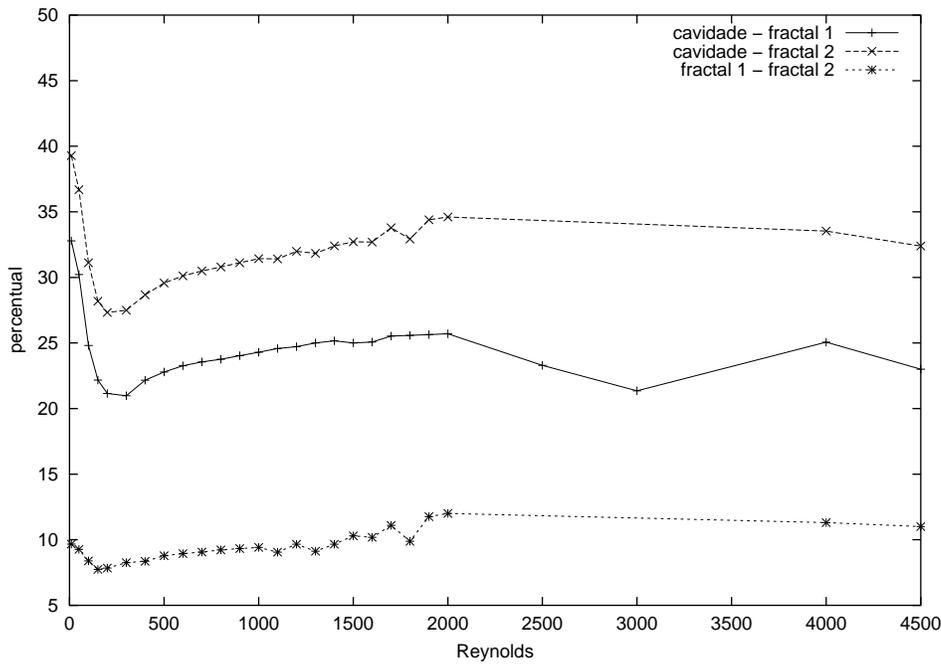


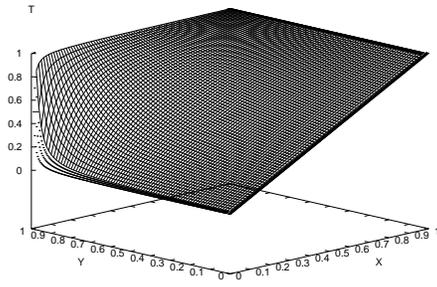
Fig. 4.27 – Variação relativa da energia cinética média (não isotérmico).

$Re = 400$ , na cavidade quadrada. As isolinhas para estas superfícies podem ser vistas nas Figuras 4.29 (a) e (b), respectivamente. As superfícies e as respectivas isothermas para  $Re = 1400$  e  $Re = 5000$  estão nas Figuras 4.30 e 4.31.

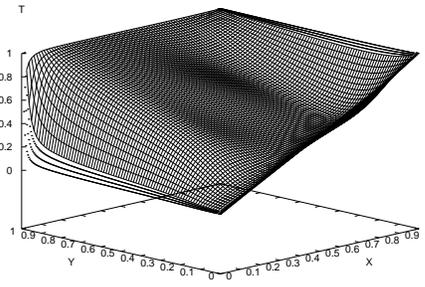
As isolinhas escolhidas, tanto para a cavidade quadrada quanto para as cavidades fractais foram 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 e 0.9.

As Figuras 4.32 (a) e (b) mostram as superfícies de temperatura para  $Re = 10$  e  $Re = 400$ , na cavidade fractal 1. As isolinhas para estas superfícies podem ser vistas nas figuras 4.33 (a) e (b), respectivamente. As superfícies e as respectivas isothermas para  $Re = 1400$  e  $Re = 5000$  estão nas Figuras 4.34 e 4.35.

Estas Figuras mostram que para  $Re = 10$ , a modificação do domínio da cavidade quadrada para a cavidade fractal 1 quase não provocam alteração no campo de temperatura, afetando apenas as isolinhas próximas às paredes da cavidade (Figura 4.29 (a) e 4.33 (a)). Aumentando o número de Reynolds, as isolinhas se aproximam das laterais, acompanhando as variações da fronteira.

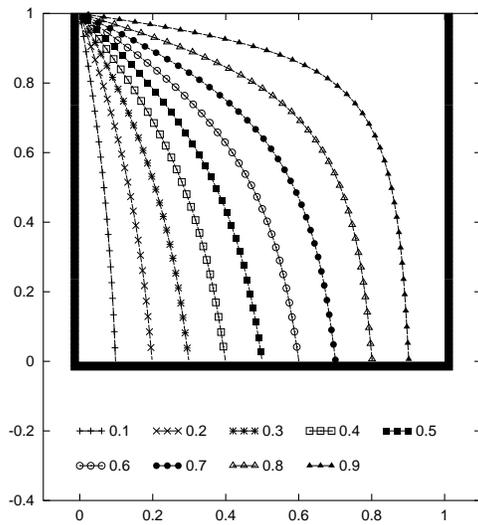


(a)

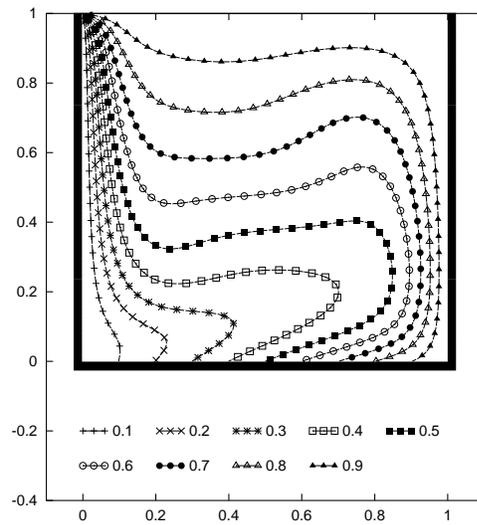


(b)

Fig. 4.28 – Superfície de temperatura na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

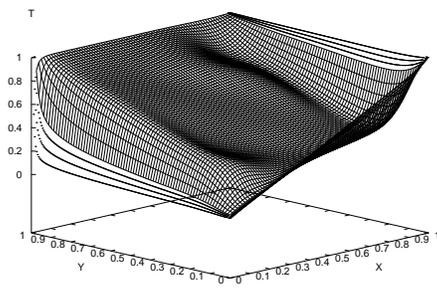


(a)

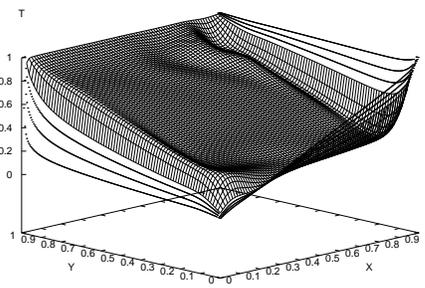


(b)

Fig. 4.29 – Isotermas na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

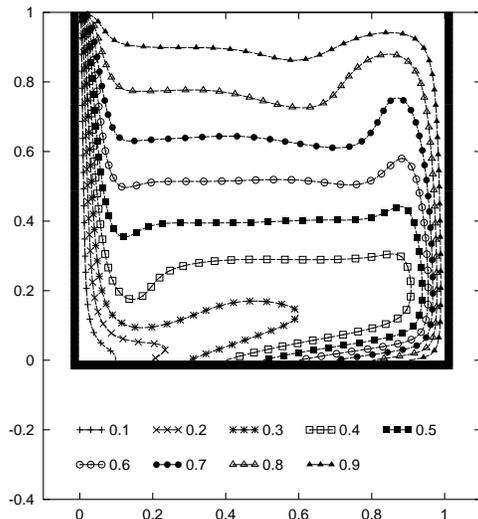


(a)

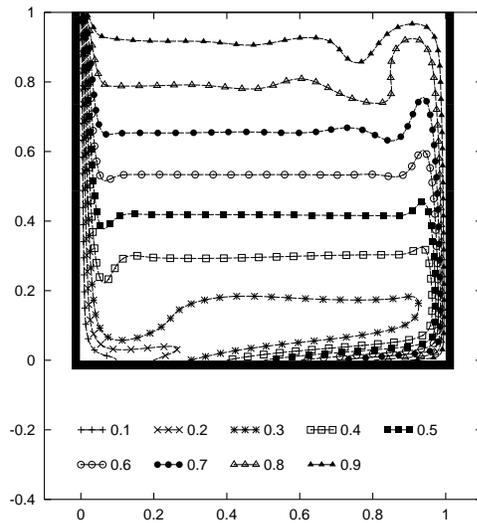


(b)

Fig. 4.30 – Superfície de temperatura na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

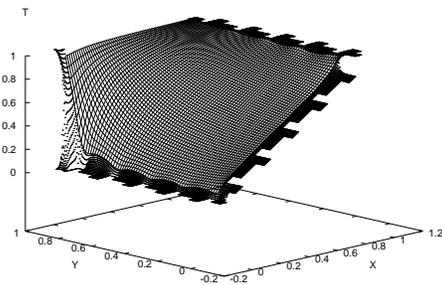


(a)

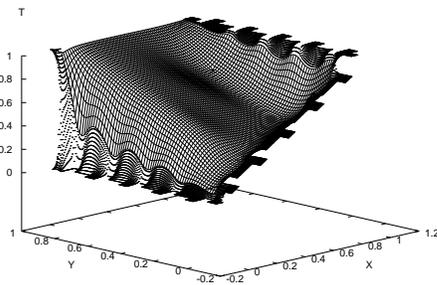


(b)

Fig. 4.31 – Isotermas na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

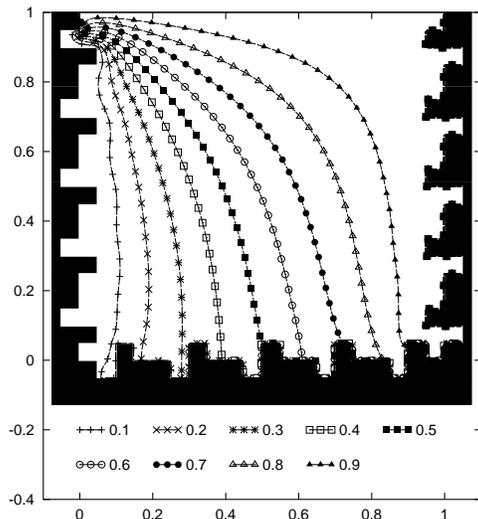


(a)

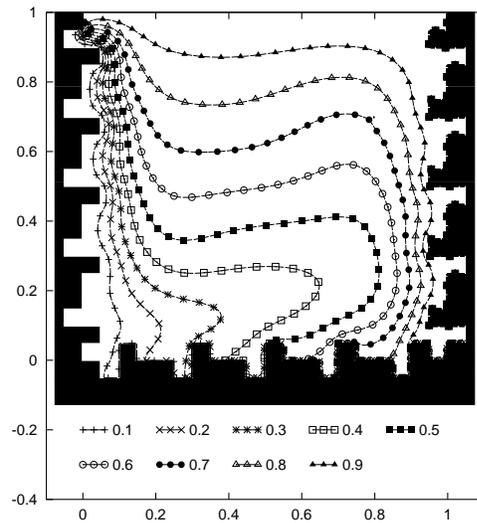


(b)

Fig. 4.32 – Superfície de temperatura na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

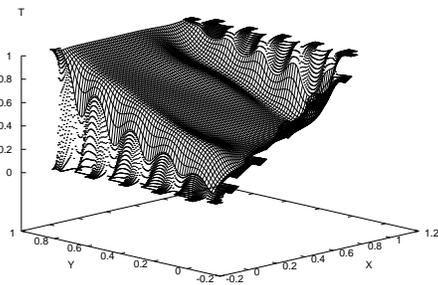


(a)

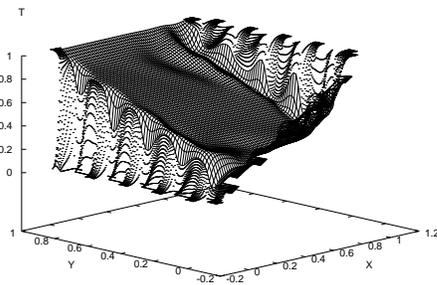


(b)

Fig. 4.33 – Isotermas na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

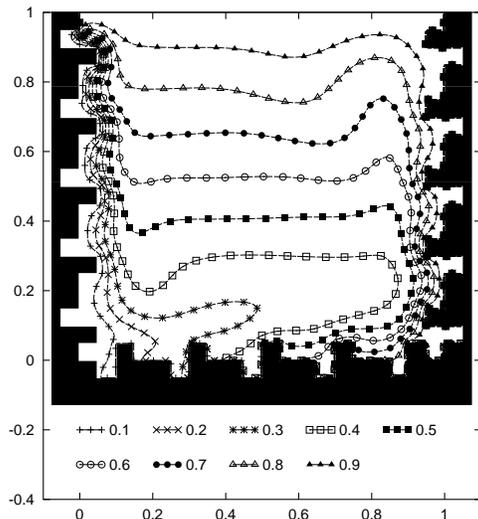


(a)

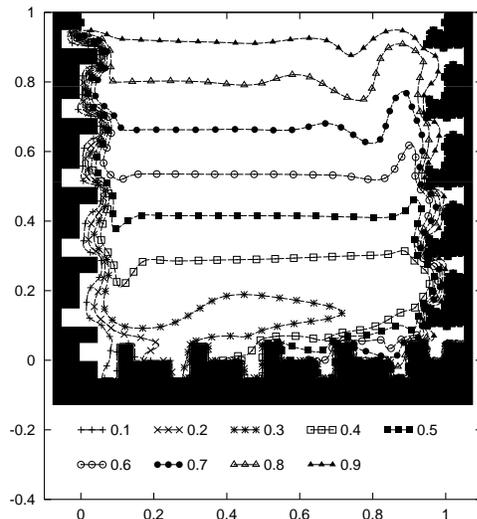


(b)

Fig. 4.34 – Superfície de temperatura na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

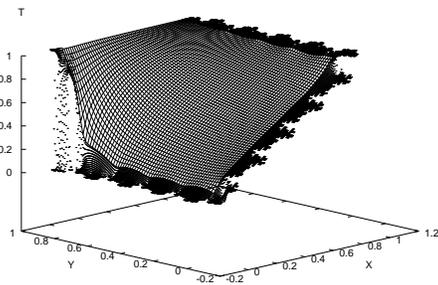


(a)

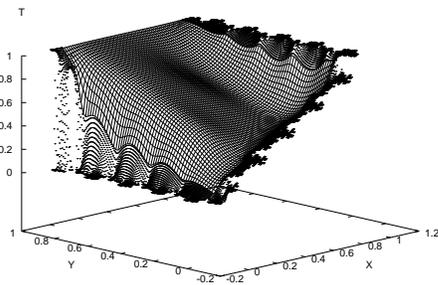


(b)

Fig. 4.35 – Isothermas na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

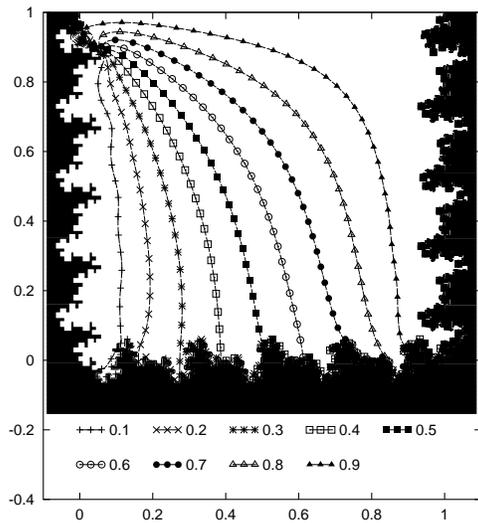


(a)

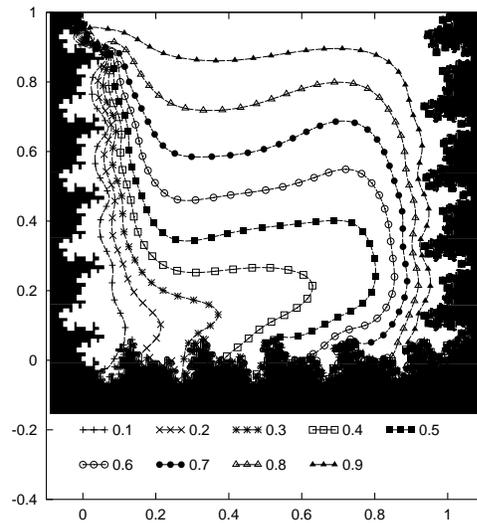


(b)

Fig. 4.36 – Superfície de temperatura na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

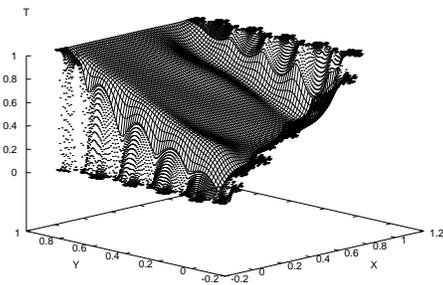


(a)

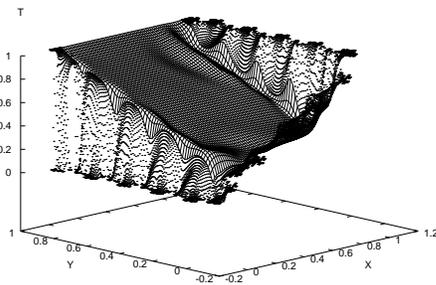


(b)

Fig. 4.37 – Isothermas na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

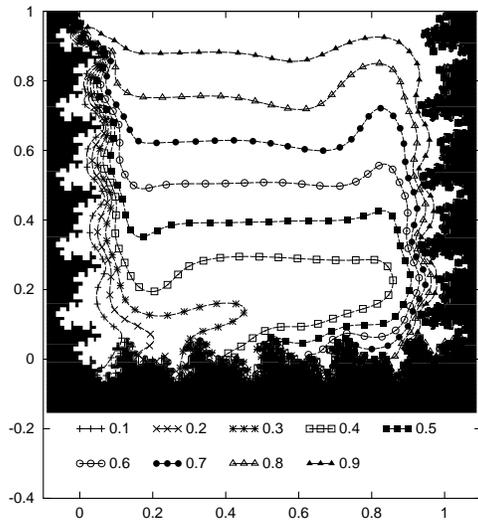


(a)

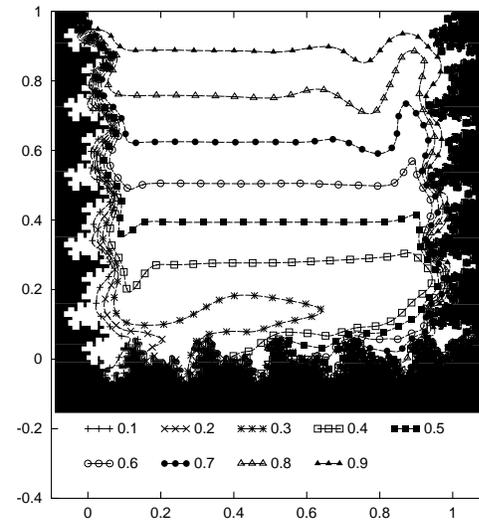


(b)

Fig. 4.38 – Superfície de temperatura na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

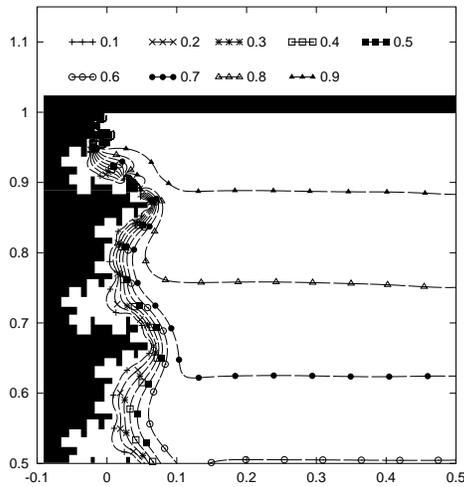


(a)

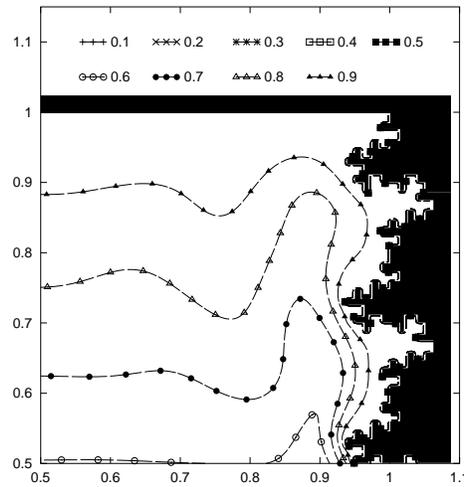


(b)

Fig. 4.39 – Isothermas na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .



(a)



(b)

Fig. 4.40 – Ampliação do gráfico de isolinhas para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ): (a) Canto superior esquerdo (b) Canto superior direito.

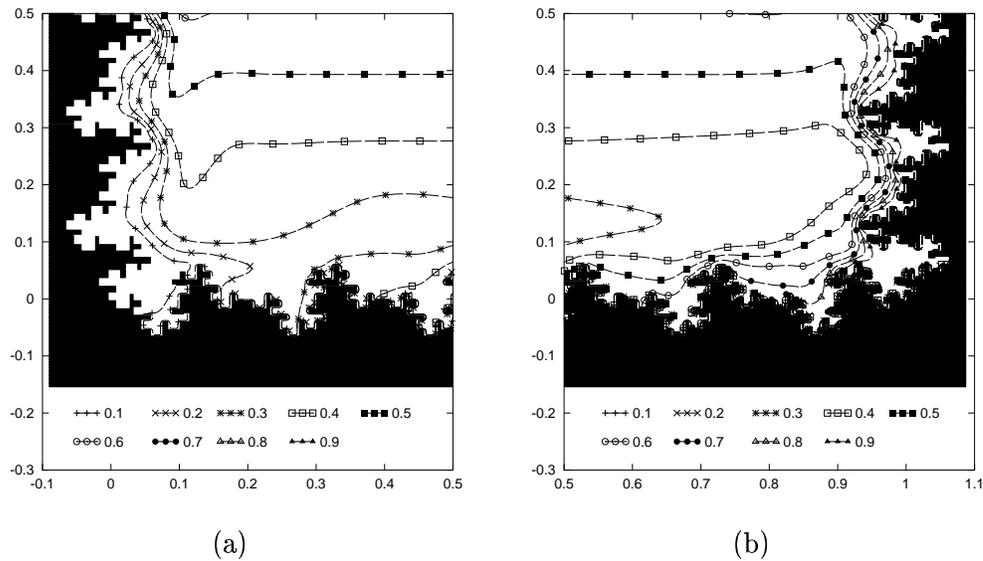


Fig. 4.41 – Ampliação do gráfico de isotermas para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ): (a) Canto inferior esquerdo (b) Canto inferior direito.

As Figuras 4.36 (a) e (b) mostram as superfícies de temperatura para  $Re = 10$  e  $Re = 400$ , na cavidade fractal 2. As isolinhas para estas superfícies podem ser vistas nas figuras 4.37 (a) e (b), respectivamente. As superfícies e as respectivas isotermas para  $Re = 1400$  e  $Re = 5000$  estão nas Figuras 4.38 e 4.39.

#### 4.4.3 Oscilações na Evolução da Energia Cinética Média

Em um escoamento não isotérmico de fluido, sob convecção natural, e para número de Reynolds  $Re \geq 4500$ , a evolução da energia cinética média do fluido nas cavidades fractais de níveis 1 e 2, apresenta oscilações constantes não presentes na cavidade tradicional. A evolução da energia cinética média para  $Re = 4500$ ,  $Re = 5000$ ,  $Re = 5500$  e  $Re = 6000$  são exibidas, respectivamente, para a cavidade nas Figuras 4.42, 4.43, 4.44 e 4.45, para a cavidade fractal 1 nas Figuras 4.46, 4.47, 4.48 e 4.49 e para a cavidade fractal 2 nas Figuras 4.50, 4.51, 4.52 e 4.53. Em cada uma destas Figuras, tem-se na Figura (a) a evolução a partir do instante  $t = 0$  enquanto que na Figura (b) a evolução é mostrada a partir do instante  $t \geq 100$ , com outra escala para ampliar a oscilação.

De acordo com as Figuras 4.42, 4.43, 4.44 e 4.45, observa-se que a evolução da energia cinética em uma cavidade quadrada apresenta uma oscilação cuja amplitude decai rapida-

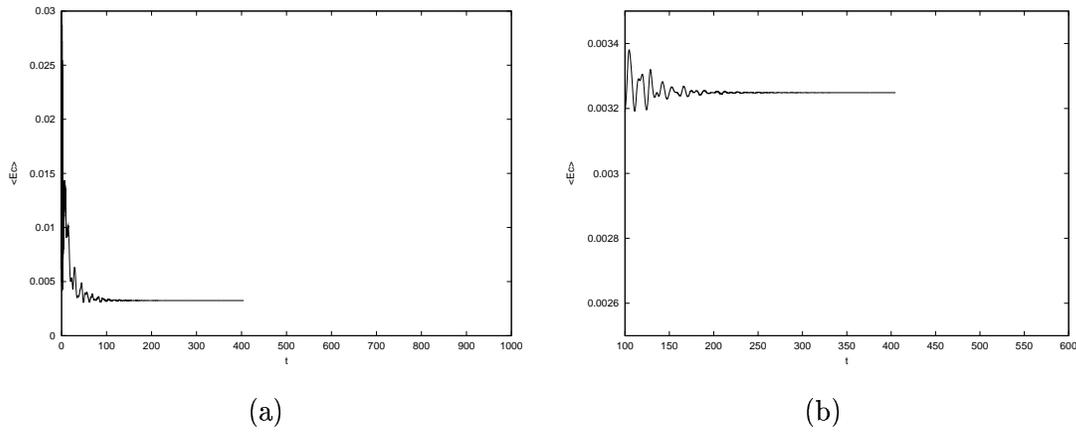


Fig. 4.42 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade ( $Re = 4500$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

mente. Com o aumento do número de Reynolds este decaimento é mais lento, necessitando de um maior tempo de simulação para atingir o critério de parada.

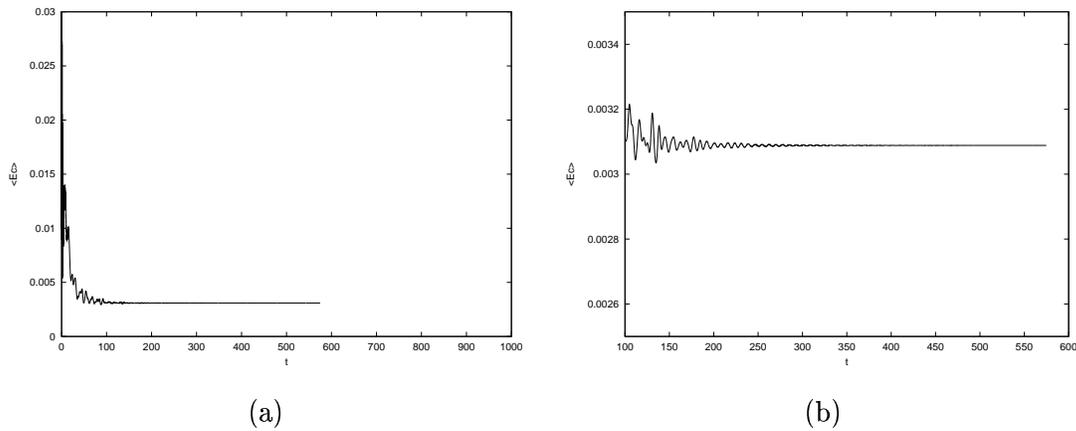
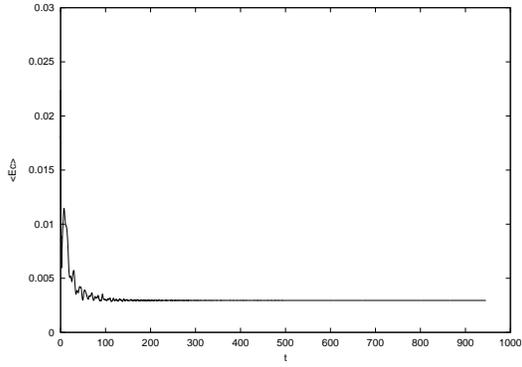


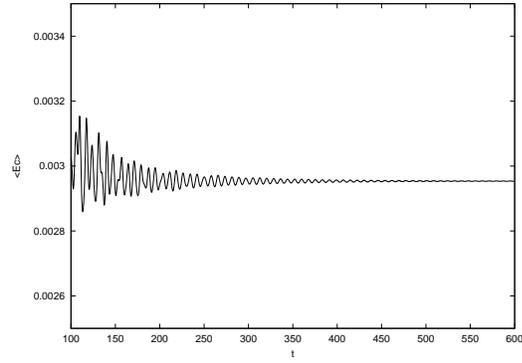
Fig. 4.43 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade ( $Re = 5000$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

Para a evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 1 com  $Re = 5000$ , que pode ser observada na Figura 4.47, a mesma oscilação analisada para  $Re = 4500$  continua presente, com a diferença de que o valor médio das oscilações é um pouco menor, mas a amplitude de oscilação é maior.

Na evolução de  $\langle E_c \rangle$  para  $Re = 5500$  e  $Re = 6000$  (Figuras 4.48 e 4.49, respectivamente), constata-se que o valor médio de  $\langle E_c \rangle$  é decai com o aumento do número de Reynolds e que a amplitude das oscilações aumentam, para cavidade fractal 1. Este fato pode ser verificado numericamente através da Tabela 4.8.

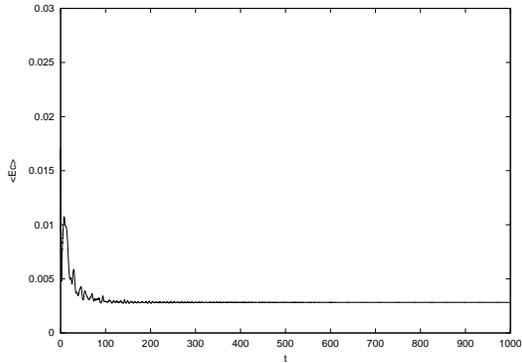


(a)

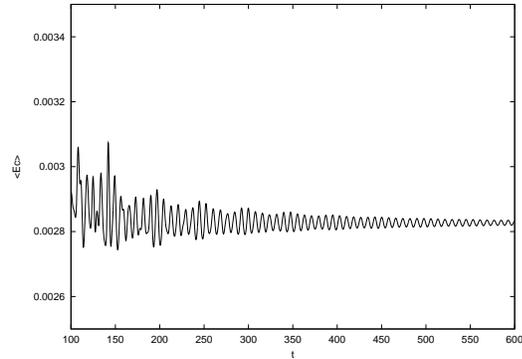


(b)

Fig. 4.44 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade ( $Re = 5500$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

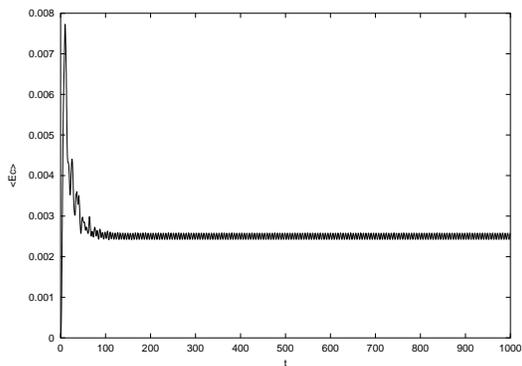


(a)

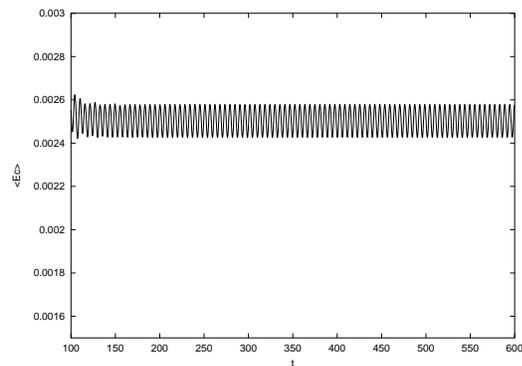


(b)

Fig. 4.45 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade ( $Re = 6000$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

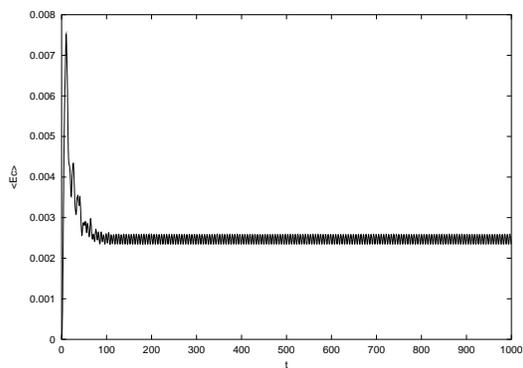


(a)

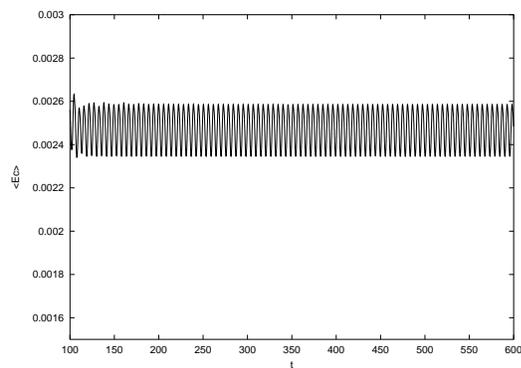


(b)

Fig. 4.46 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 1 ( $Re = 4500$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

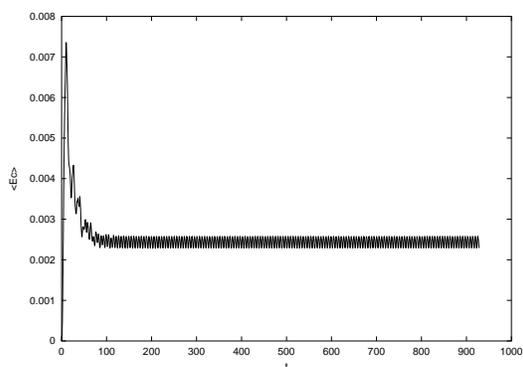


(a)

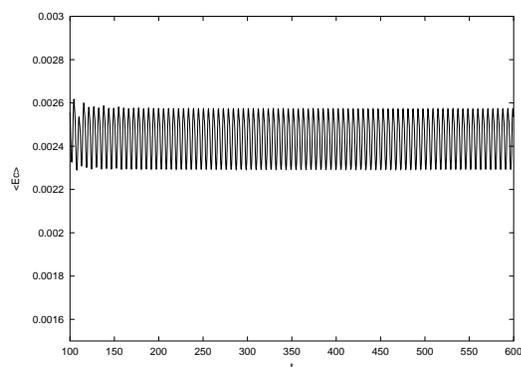


(b)

Fig. 4.47 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

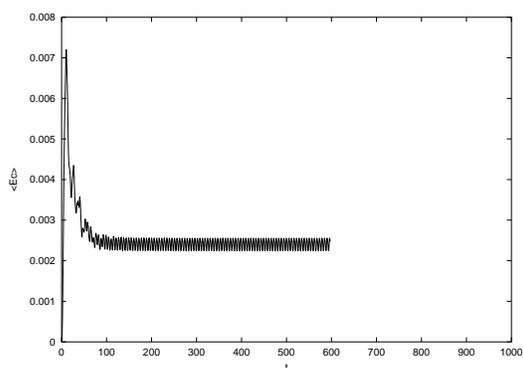


(a)

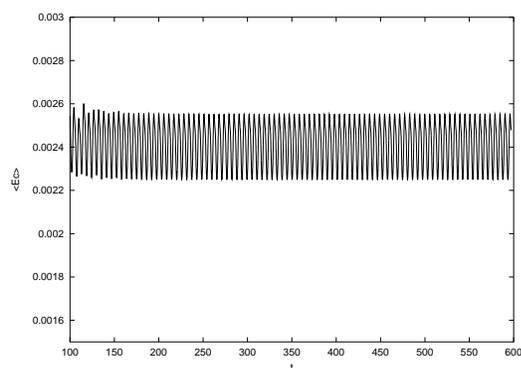


(b)

Fig. 4.48 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .



(a)



(b)

Fig. 4.49 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

O mesmo comportamento é observado nas simulações com a cavidade fractal 2, conforme pode ser visto nas Figuras 4.50, 4.51, 4.52 e 4.53, e numericamente na Tabela 4.10.

Comparando-se as amplitudes das oscilações relacionadas nas Tabelas 4.8 e 4.10, observa-se uma redução da amplitude com o aumento do nível de fractalização da fronteira.

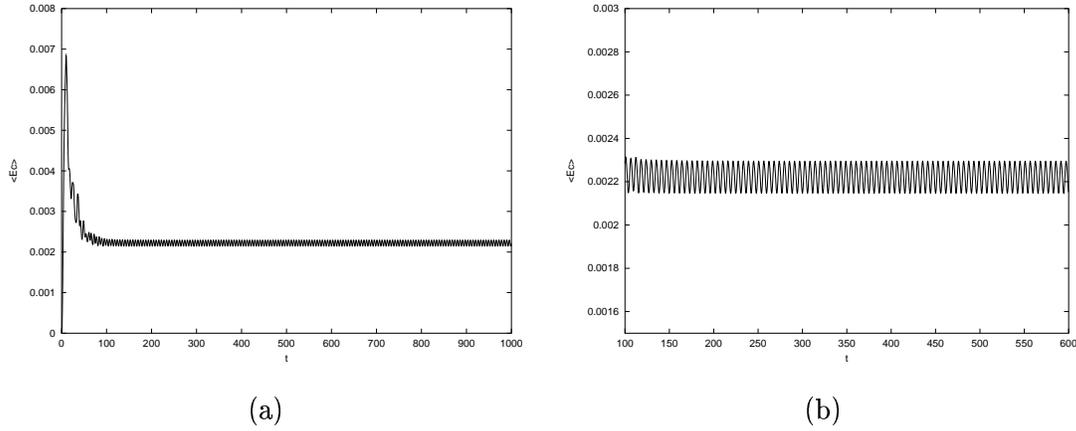


Fig. 4.50 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 2 ( $Re = 4500$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

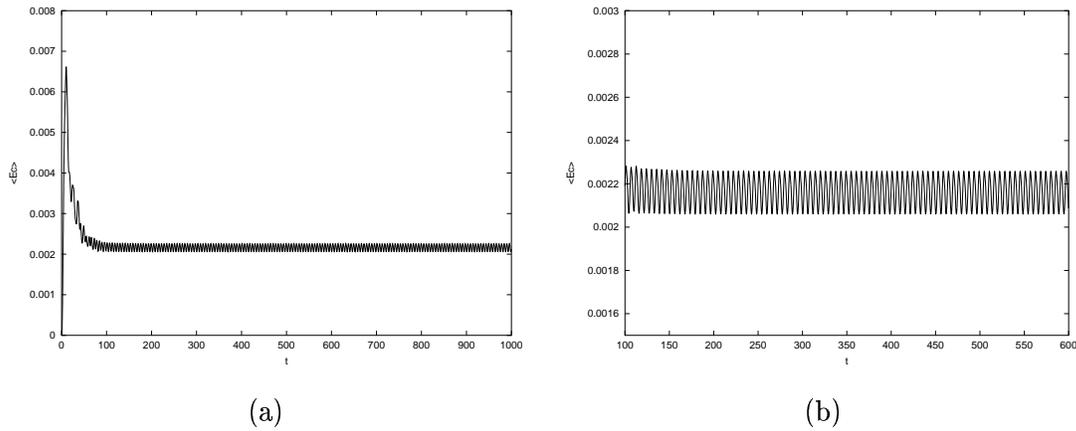
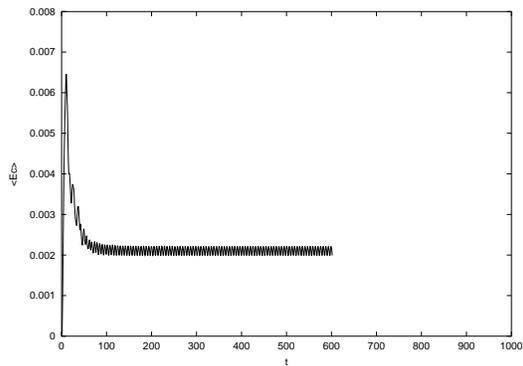
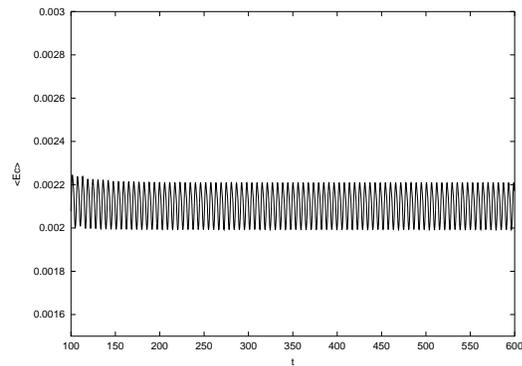


Fig. 4.51 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

Do ponto de vista numérico, é importante verificar se as oscilações detectadas não são provenientes do uso de uma malha de dimensão inadequada. Para realizar esta verificação, é necessário comparar a evolução de  $\langle E_c \rangle$  com a obtida em simulações usadas malhas de dimensões maiores, constantando ou não a permanência das oscilações. Foram realizadas simulações para as cavidades fractais 1 e 2, usando malhas de dimensões  $500 \times 500$  e  $600 \times 600$ , para os seguintes valores do número de Reynolds  $Re = 5000, 5500, 6000$ .

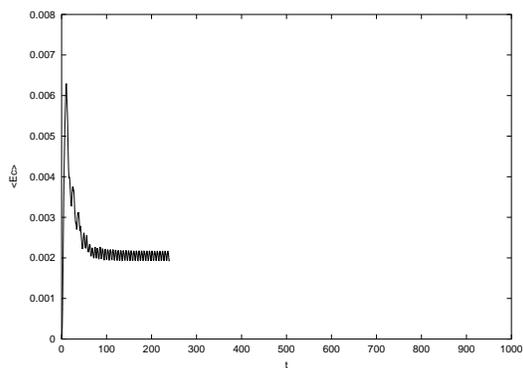


(a)

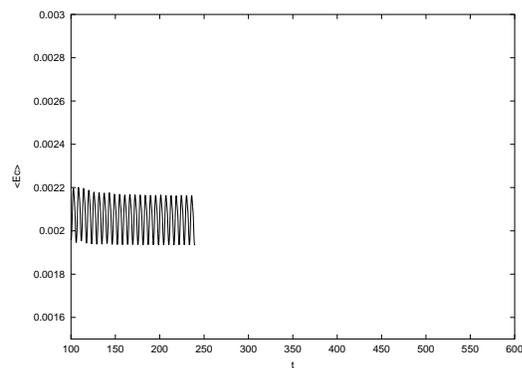


(b)

Fig. 4.52 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .



(a)



(b)

Fig. 4.53 – Evolução de  $\langle E_c \rangle$  na cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ): (a)  $t \geq 0$  (b)  $t \geq 100$ .

As Figuras 4.54, 4.55 e 4.56, mostram a comparação de  $\langle E_c \rangle$  usando malhas de dimensão  $400 \times 400$ ,  $500 \times 500$  e  $600 \times 600$ , para  $40 \leq t \leq 100$ , na cavidade fractal 1, respectivamente para  $Re = 5000$ ,  $Re = 5500$  e  $Re = 6000$ . Estas Figuras mostram que as alterações são muito pequenas, resultantes da diminuição do erro pelo aumento da dimensão da malha.

O mesmo comportamento pode ser observado nas Figuras 4.57, 4.58 e 4.59, que mostram a comparação de  $\langle E_c \rangle$  usando malhas de dimensão  $400 \times 400$ ,  $500 \times 500$  e  $600 \times 600$ , para  $40 \leq t \leq 100$ , na cavidade fractal 2, respectivamente para  $Re = 5000$ ,  $Re = 5500$  e  $Re = 6000$ .

Desta forma pode-se concluir que as oscilações observadas não são provenientes do uso de uma malha de dimensão inadequada.

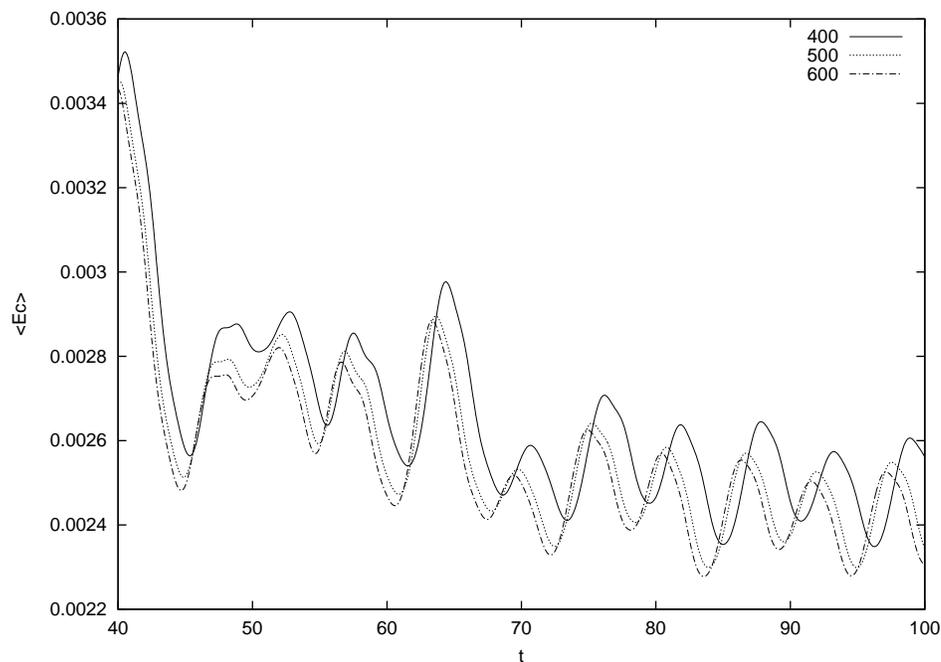


Fig. 4.54 – Variação de  $\langle E_c \rangle$  com dimensão da malha na cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ).

#### 4.4.4 Espectros da Evolução da Energia Cinética Média

A evolução da energia cinética média em um escoamento não isotérmico de fluido de uma cavidade fractal apresenta, para número de Reynolds maior que 4500, um comportamento oscilatório. Nestas condições é importante obter-se as frequências associadas a estes comportamentos oscilatórios, o que pode ser feito através dos espectros associados.

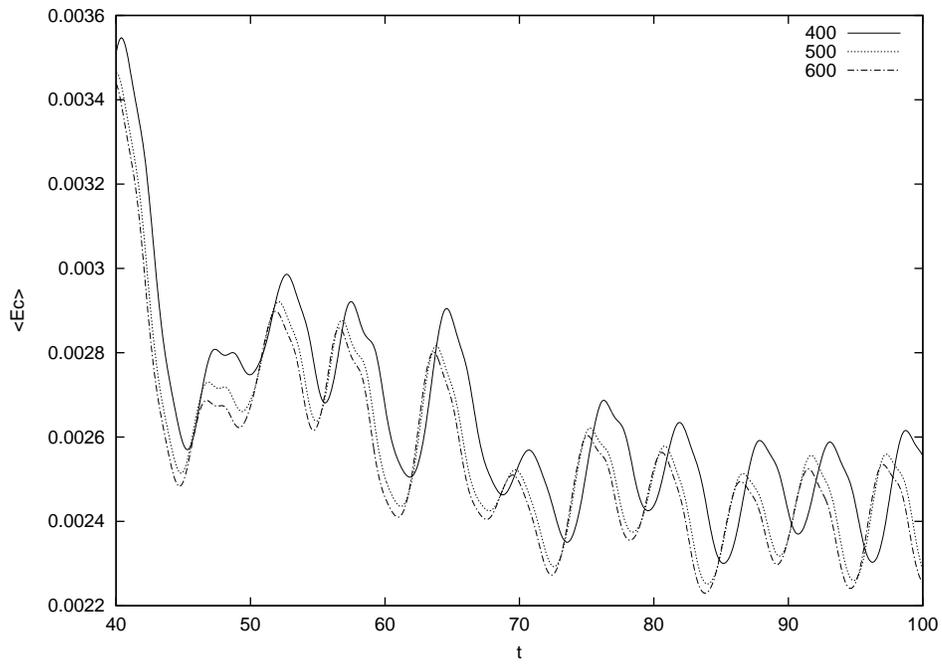


Fig. 4.55 – Variação de  $\langle E_c \rangle$  com dimensão da malha na cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ).

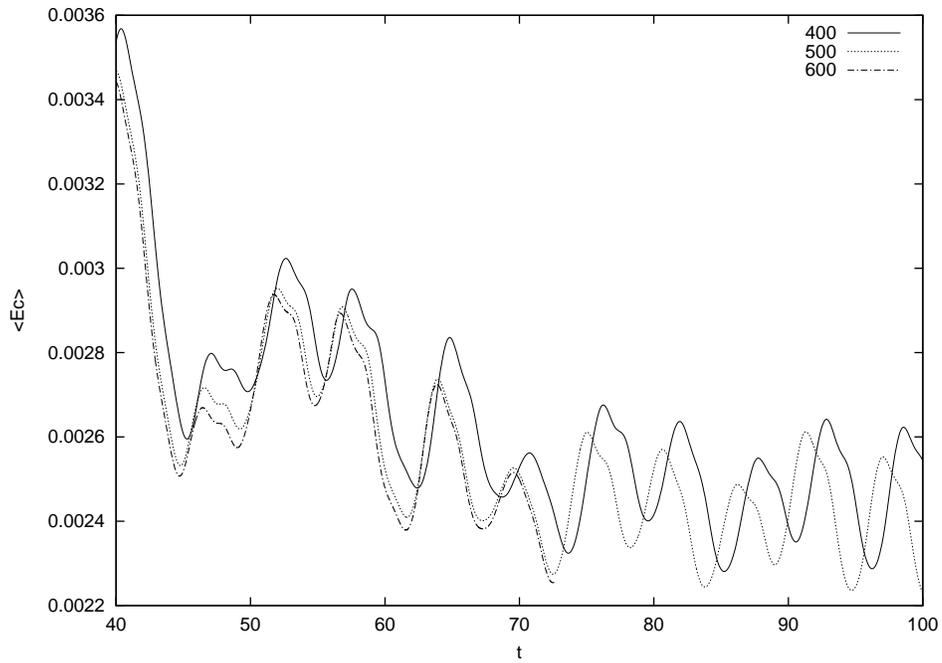


Fig. 4.56 – Variação de  $\langle E_c \rangle$  com dimensão da malha na cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ).

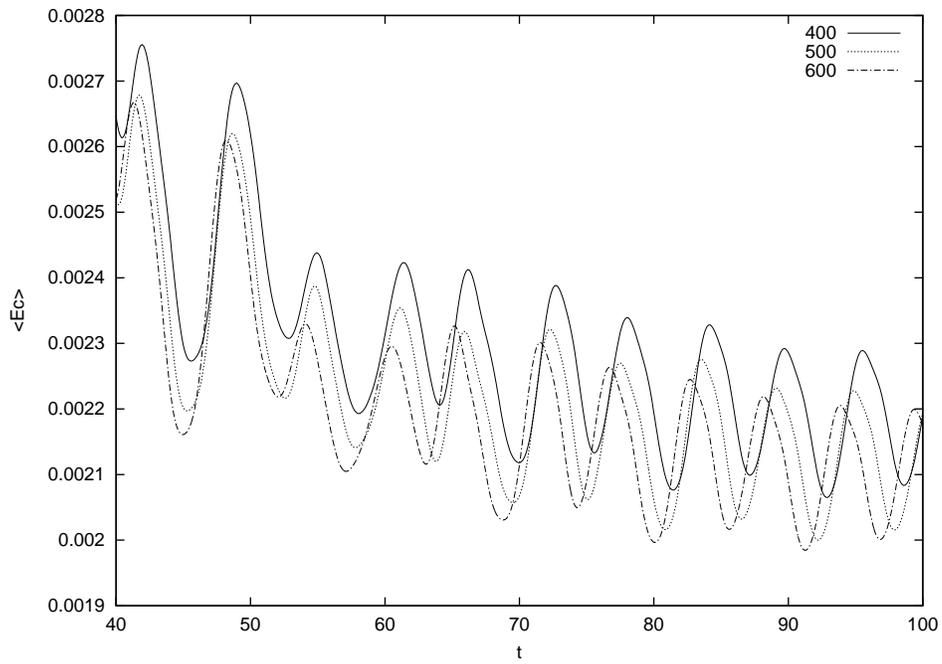


Fig. 4.57 – Variação de  $\langle E_c \rangle$  com dimensão da malha na cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ).

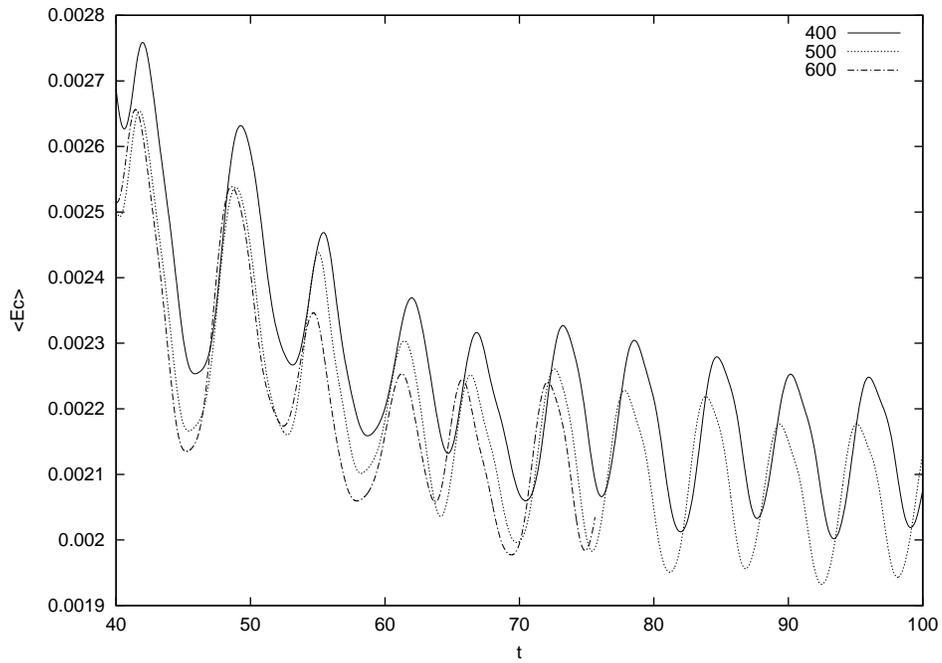


Fig. 4.58 – Variação de  $\langle E_c \rangle$  com dimensão da malha na cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ).

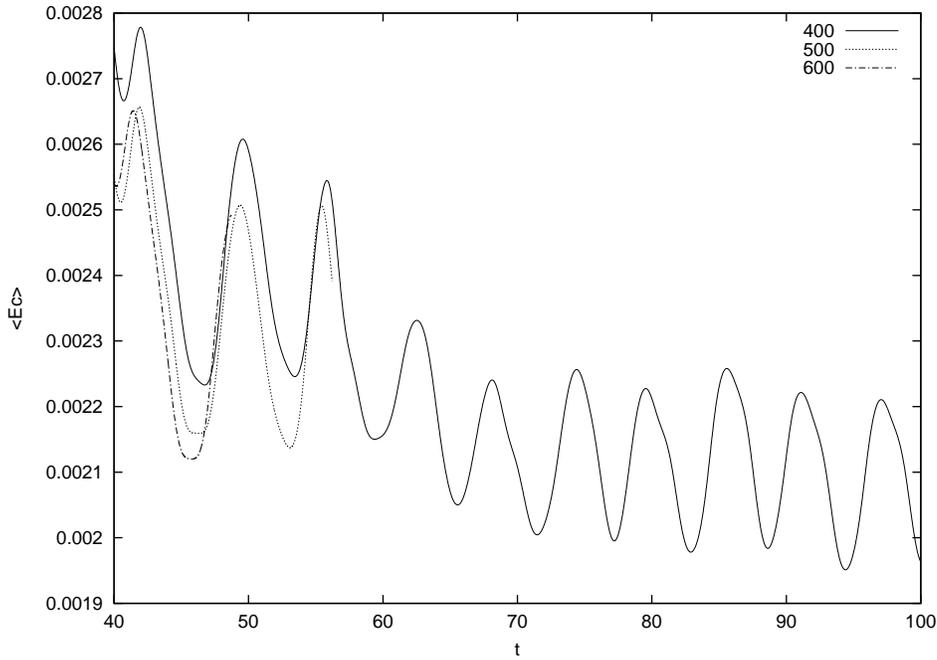


Fig. 4.59 – Variação de  $\langle E_c \rangle$  com dimensão da malha na cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ).

As definições necessárias sobre espectros, bem como diversos exemplos, podem ser vistas no apêndice E.

Devido ao elevado número de entradas, os espectros são realizados para uma subamostragem de fator 100 da evolução da energia cinética média. De acordo com a seção E.1, a frequência máxima do espectro é reduzida por 100. Nestas simulações, o pior caso (menor frequência máxima) ocorre para  $\Delta t = 0.0005$ , que corresponde a uma frequência máxima  $f_c = 1000$ , para a seqüência normal e  $\bar{f}_c = 10$ , para a seqüência subamostrada, suficiente para observar as oscilações encontradas, cujas frequências situam-se abaixo de 1.

Em cada uma das Figuras desta seção, tem-se na Figura (a) o espectro no intervalo de frequências de  $[0, 1]$ , enquanto que a Figura (b) contém uma ampliação de uma parte do espectro.

#### 4.4.4.1 Espectros da Evolução de $\langle E_c \rangle$ na Cavidade

As Figuras 4.60, 4.61, 4.62 e 4.63 mostram os espectros da evolução de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade quadrada para o número de Reynolds  $Re = 4500, 5000, 5500$  e  $6000$ , respecti-

vamente.

A Tabela 4.11 mostra as frequências principais  $f_p$  (pico de maior amplitude) e a resolução do espectro  $\Delta_f$  em cada caso. Deve ser destacado que, para a cavidade quadrada, a frequência principal praticamente não se altera com a alteração do número de Reynolds, dentro da resolução dos espectros obtidos.

TABELA 4.11 – FREQUÊNCIA PRINCIPAL PARA A CAVIDADE QUADRADA

Reynolds	$f_p$	$\Delta_f$
4500	0.129	0.0024
5000	0.129	0.0017
5500	0.126	0.0010
6000	0.126	0.0010

Os espectros para  $Re = 4500$ ,  $5500$  e  $6000$  não apresentam sinais de modulação (picos simétricos ao pico da frequência principal), ocorrendo apenas para  $Re = 5000$ . Para este caso, o valor da frequência de modulação  $f_m$ , as frequências dos picos simétricos  $f_e = f_p - f_m$  e  $f_d = f_p + f_m$  e as suas respectivas amplitudes  $P(f_e)$  e  $P(f_d)$  estão relacionadas na Tabela 4.12.

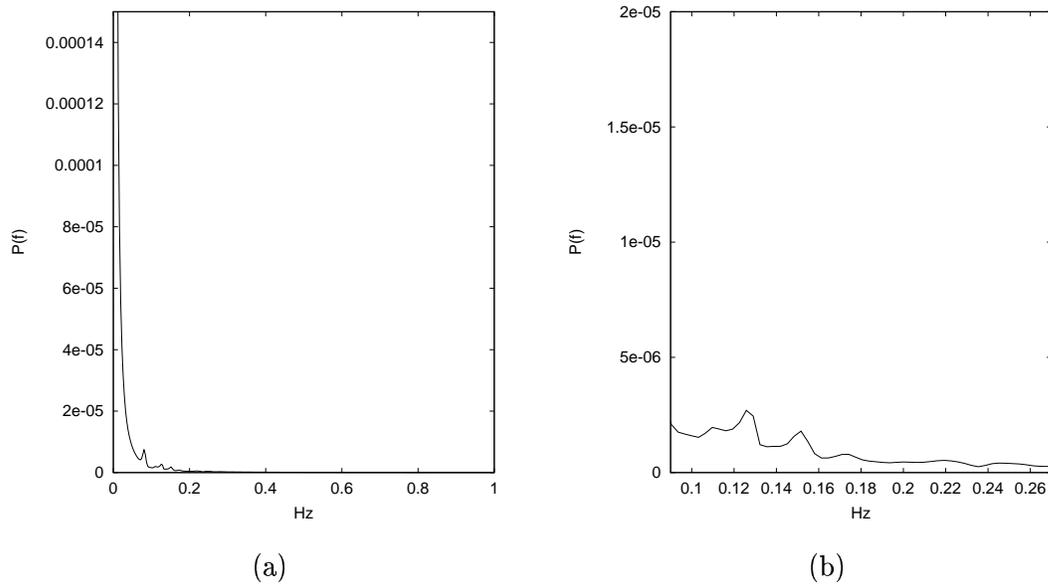
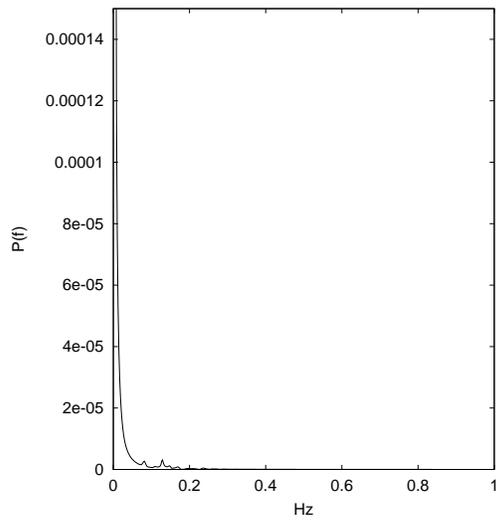


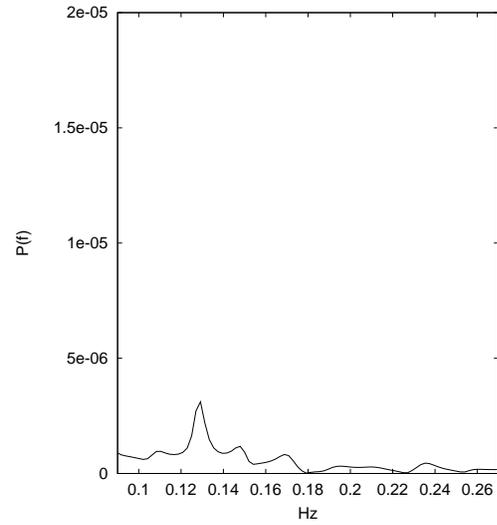
Fig. 4.60 – Espectro para cavidade ( $Re = 4500$ ).

TABELA 4.12 – FREQUÊNCIA DE MODULAÇÃO NA CAVIDADE QUADRADA

Reynolds	$f_m$	$f_e$	$f_d$	$P(f_e)$	$P(f_d)$
5000	0.0259	0.103	0.155	$8.7 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-6}$

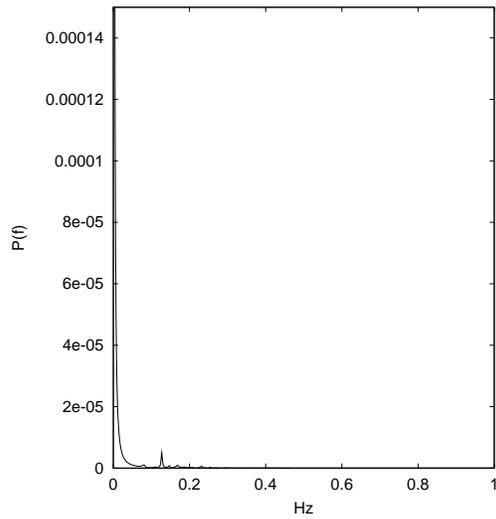


(a)

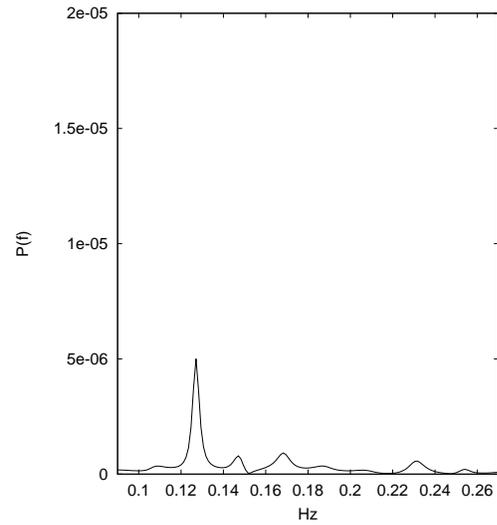


(b)

Fig. 4.61 – Espectro para cavidade ( $Re = 5000$ ).



(a)



(b)

Fig. 4.62 – Espectro para cavidade ( $Re = 5500$ ).

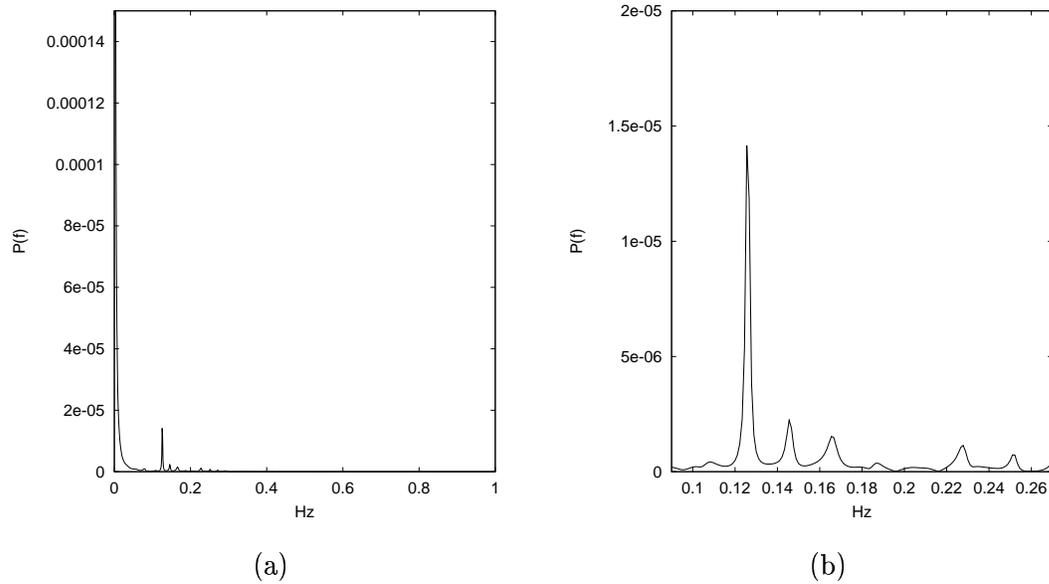


Fig. 4.63 – Espectro para cavidade ( $Re = 6000$ ).

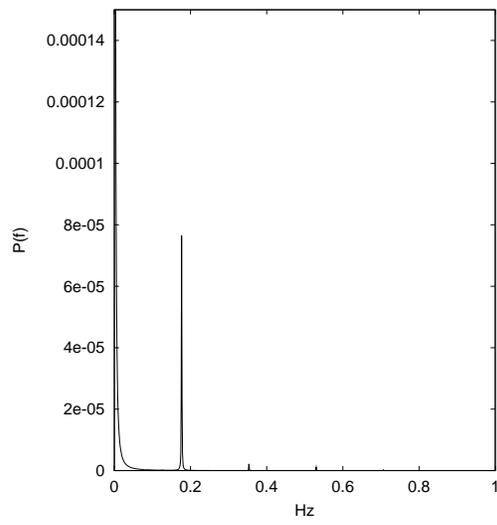
#### 4.4.4.2 Espectros da Evolução de $\langle E_c \rangle$ na Cavidade Fractal de Nível 1

As Figuras 4.64, 4.65, 4.66 e 4.67 mostram os espectros da evolução de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 1 com o número de Reynolds  $Re = 4500$ ,  $5000$ ,  $5500$  e  $6000$ , respectivamente. A Tabela 4.13 mostra as frequências principais  $f_p$  (pico de maior amplitude) e a resolução do espectro  $\Delta_f$  em cada caso. Como ocorreu com a cavidade quadrada, a frequência principal se manteve constante com a variação do número de Reynolds. Entretanto a frequência detectada foi maior do que a obtida para a cavidade quadrada.

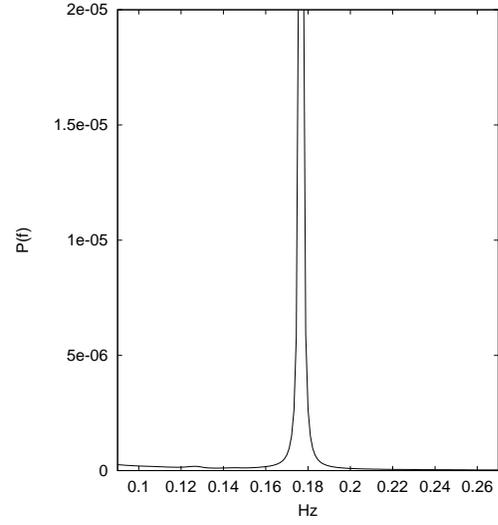
TABELA 4.13 – FREQUÊNCIA PRINCIPAL PARA A CAVIDADE FRACTAL 1

Reynolds	$f_p$	$\Delta_f$
5000	0.1770	0.0010
5500	0.1769	0.0011
6000	0.1767	0.0017

Com exceção do espectro de  $Re = 4500$ , os espectros para a cavidade fractal 1 apresentam-se sinais de modulação. Os valores das frequências de modulação  $f_m$ , as frequências dos picos simétricos  $f_e = f_p - f_m$  e  $f_d = f_p + f_m$  e as suas respectivas amplitudes  $P(f_e)$  e  $P(f_d)$  estão relacionadas na Tabela 4.14.

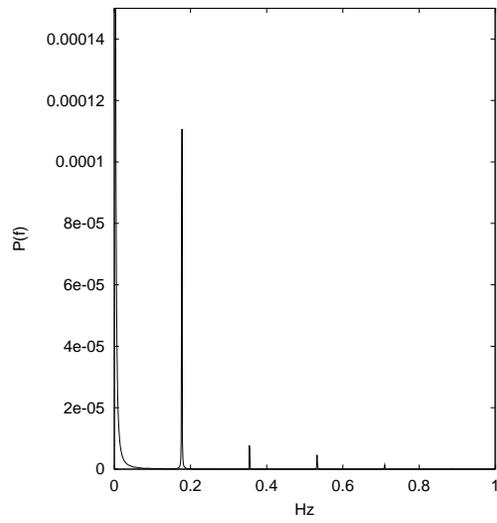


(a)

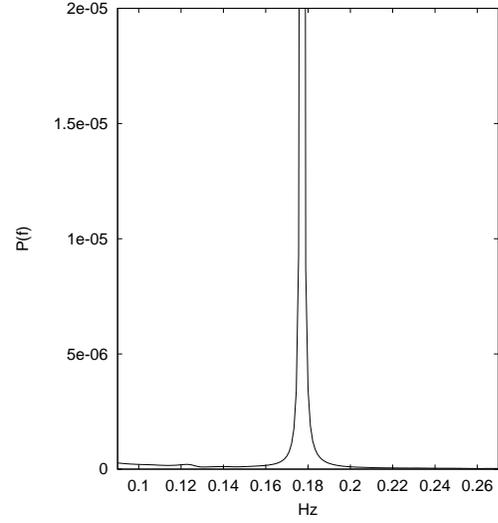


(b)

Fig. 4.64 – Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 4500$ ).



(a)



(b)

Fig. 4.65 – Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ).

TABELA 4.14 – FREQUÊNCIAS DE MODULAÇÃO NA CAVIDADE FRACTAL 1

Reynolds	$f_m$	$f_e$	$f_d$	$P(f_e)$	$P(f_d)$
5000	0.005	0.172	0.182	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$
5500	0.053	0.124	0.229	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$
6000	0.053	0.123	0.230	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-7}$

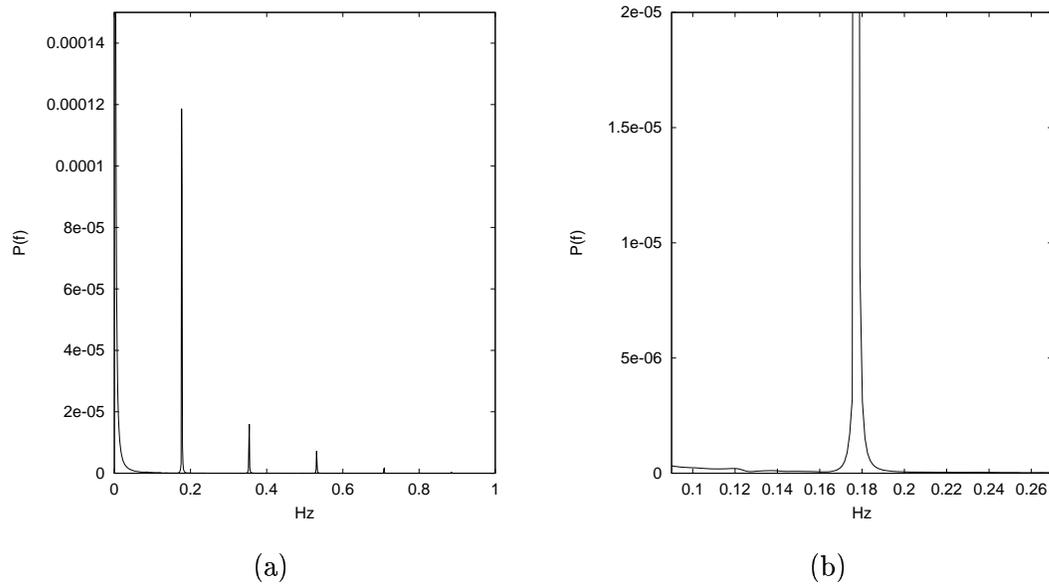


Fig. 4.66 – Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ).

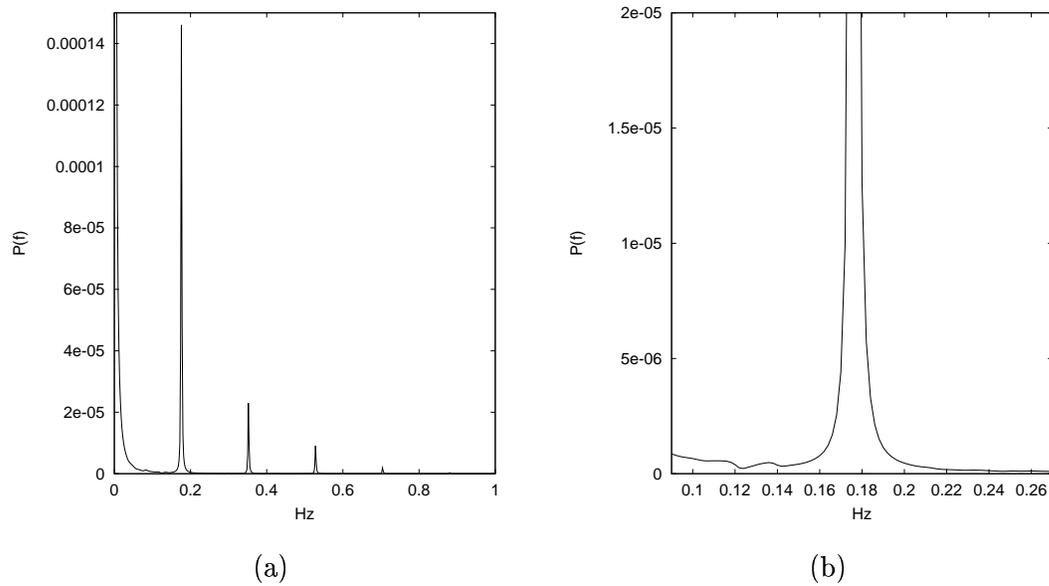


Fig. 4.67 – Espectro para cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ).

#### 4.4.4.3 Espectros da Evolução de $\langle E_c \rangle$ na Cavidade Fractal de Nível 2

As Figuras 4.68, 4.69, 4.70 e 4.71 mostram os espectros da evolução de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 2 com o número de Reynolds  $Re = 4500$ ,  $5000$ ,  $5500$  e  $6000$ , respectivamente.

A Tabela 4.15 mostra as frequências principais  $f_p$  (pico de maior amplitude) e a resolução do espectro  $\Delta_f$  em cada caso. Assim como ocorreu com a cavidade quadrada e com a cavidade fractal 1, a frequência principal é praticamente constante com a variação do número de Reynolds.

Esta frequência é um pouco inferior a observada na cavidade fractal 1, mas é maior do que detectada na cavidade quadrada.

#### 4.4.5 Análise de Espaço de Fase

Para analisar o comportamento oscilatório da evolução de  $\langle E_c \rangle$  para as cavidades fractais, mostrado na seção 4.4.3, será adotado o procedimento proposto por Takens, para a reconstrução de atratores a partir de uma série temporal, de acordo com o processo descrito por Fiedler-Ferrara e Prado (1995). De acordo com estes autores, embora o atrator

TABELA 4.15 – FREQUÊNCIA PRINCIPAL PARA A CAVIDADE FRACTAL 2

Reynolds	$f_p$	$\Delta_f$
4500	0.1720	0.0010
5000	0.1720	0.0010
5500	0.1719	0.0016
6000	0.1705	0.0044

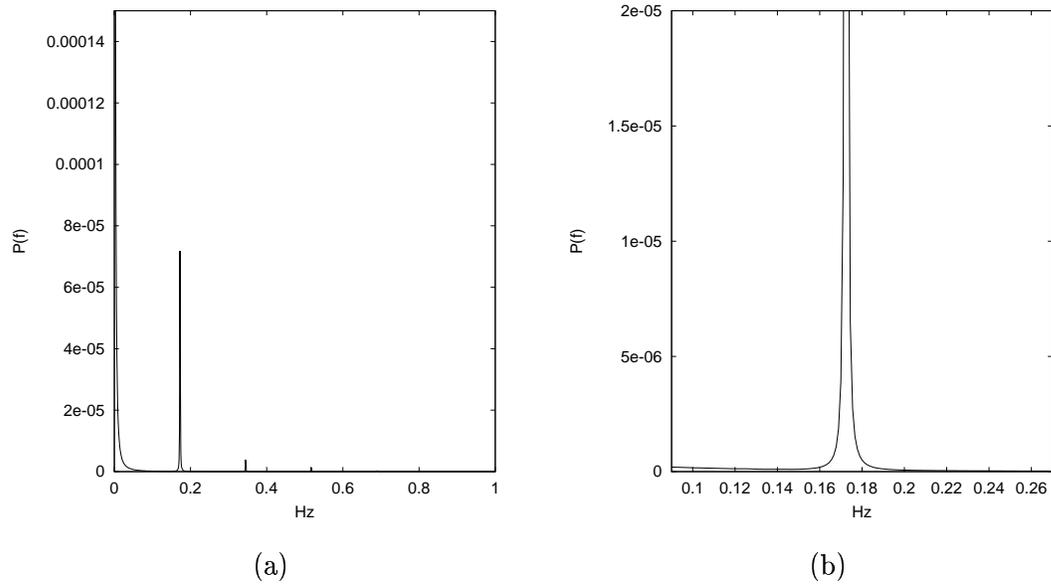
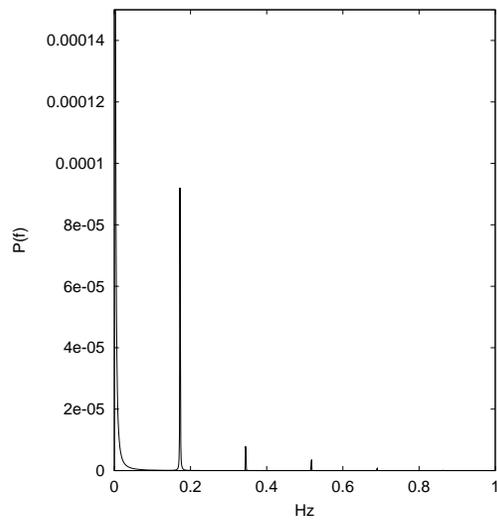
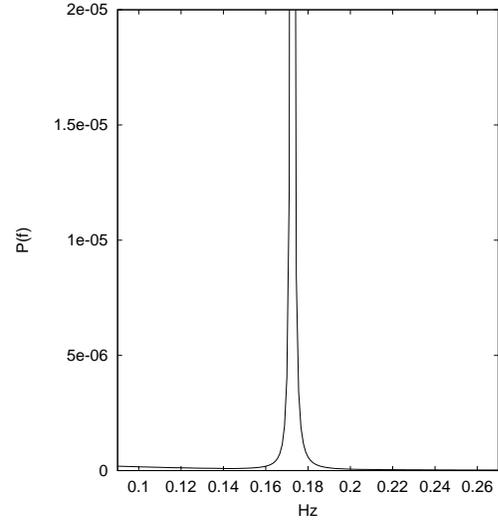


Fig. 4.68 – Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 4500$ ).

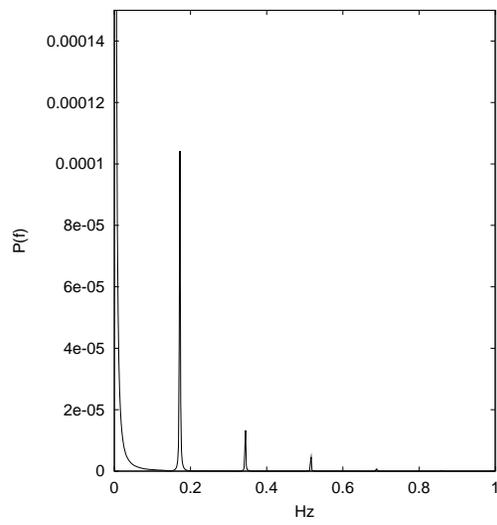


(a)

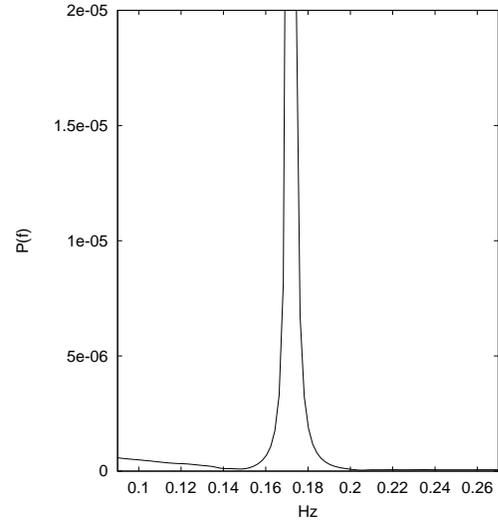


(b)

Fig. 4.69 – Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ).



(a)



(b)

Fig. 4.70 – Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ).

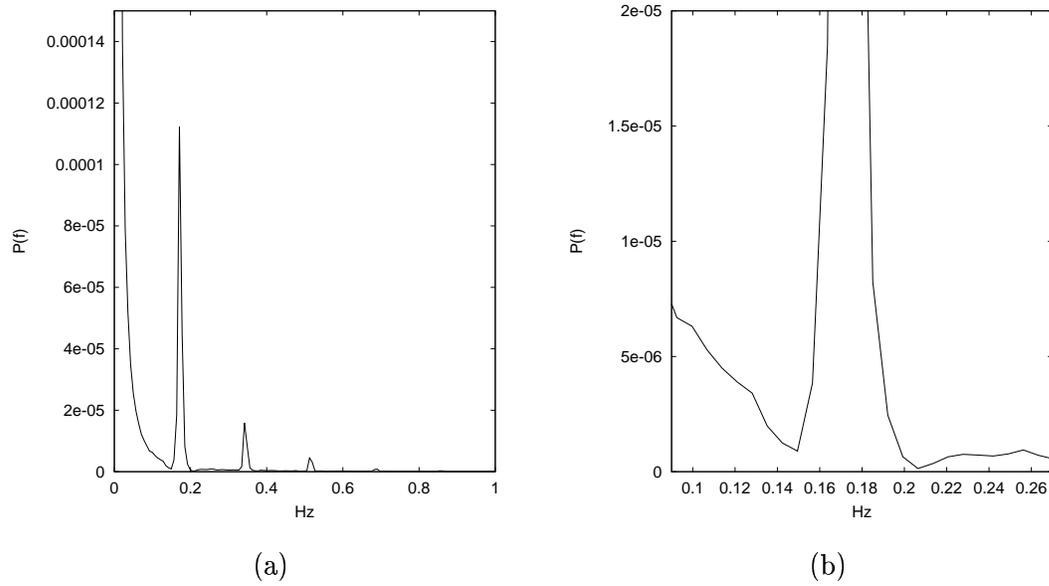


Fig. 4.71 – Espectro para cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ).

reconstruído não seja idêntico ao original, as propriedades topológicas são preservadas.

Seja  $x_i = x(t_i)$ , com  $i = 1, \dots, N$ , uma série temporal. Pode-se reconstruir o atrator associado através dos vetores  $\vec{\xi}_i$  definidos por:

$$\vec{\xi}_i = (x(t_i), x(t_i + p), \dots, x(t_i + (m - 1)p)) \quad (4.8)$$

sendo  $m$  a dimensão de imersão e  $p$  o passo de reconstrução.

Para gerar o espaço de fase da evolução de  $\langle E_c \rangle$  adotou-se  $m = 2$  e  $p = 0.25$ . Devido à forte oscilação inicial de  $\langle E_c \rangle$  em algumas simulações, os valores iniciais, mais precisamente para  $t \leq 200$ , da evolução de  $\langle E_c \rangle$  não foram utilizados na reconstrução do espaço de fase.

Para  $Re = 4500$ , o espaço de fase apresenta órbitas convergentes para a cavidade quadrada (Figura 4.72), enquanto que o espaço de fase para a cavidade fractal 1 (Figura 4.73) e para a cavidade fractal 2 (Figura 4.74) aparecem como órbitas elípticas.

Para valores maiores do número de Reynolds ( $Re = 5000, 5500, 6000$ ), o espaço de fase para a cavidade mantém as órbitas convergentes (Figuras 4.75, 4.78 e 4.81), enquanto que para a cavidade fractal 1 (Figuras 4.76, 4.79 e 4.82) e para a cavidade fractal 2

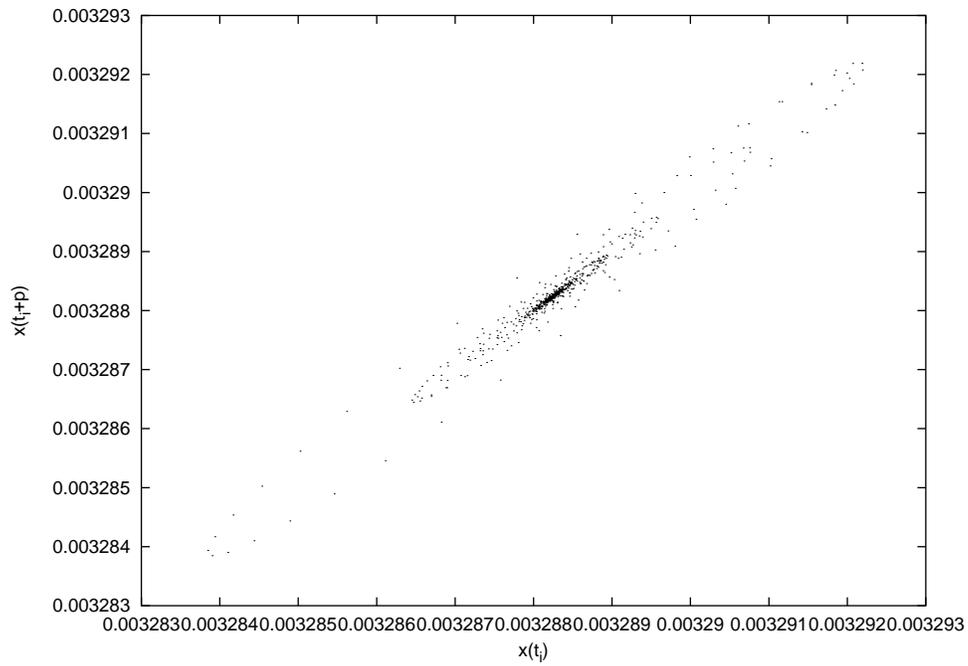


Fig. 4.72 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade quadrada ( $Re = 4500$ ).

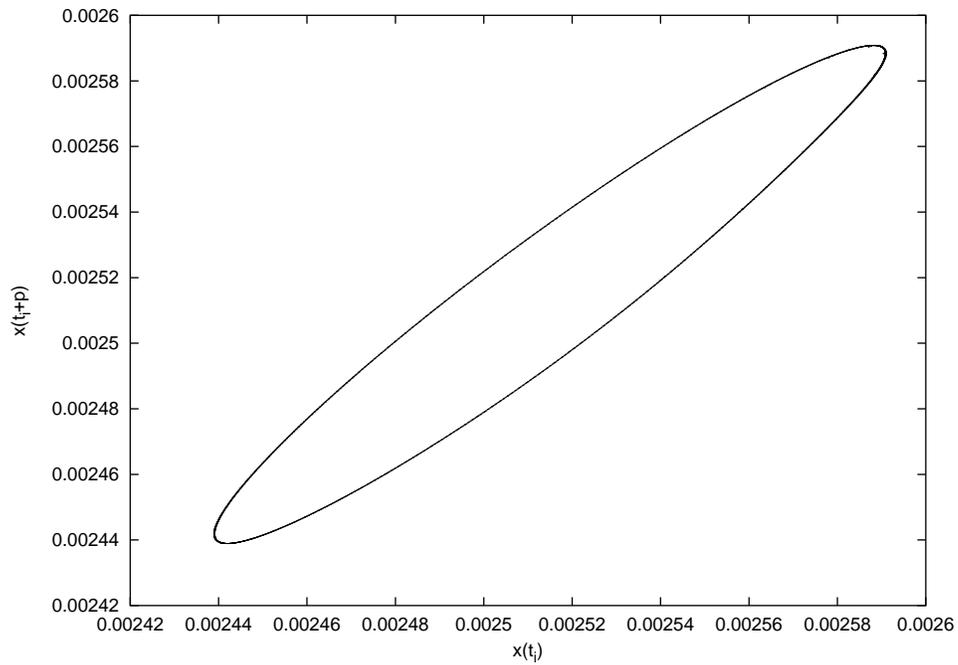


Fig. 4.73 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 1 ( $Re = 4500$ ).

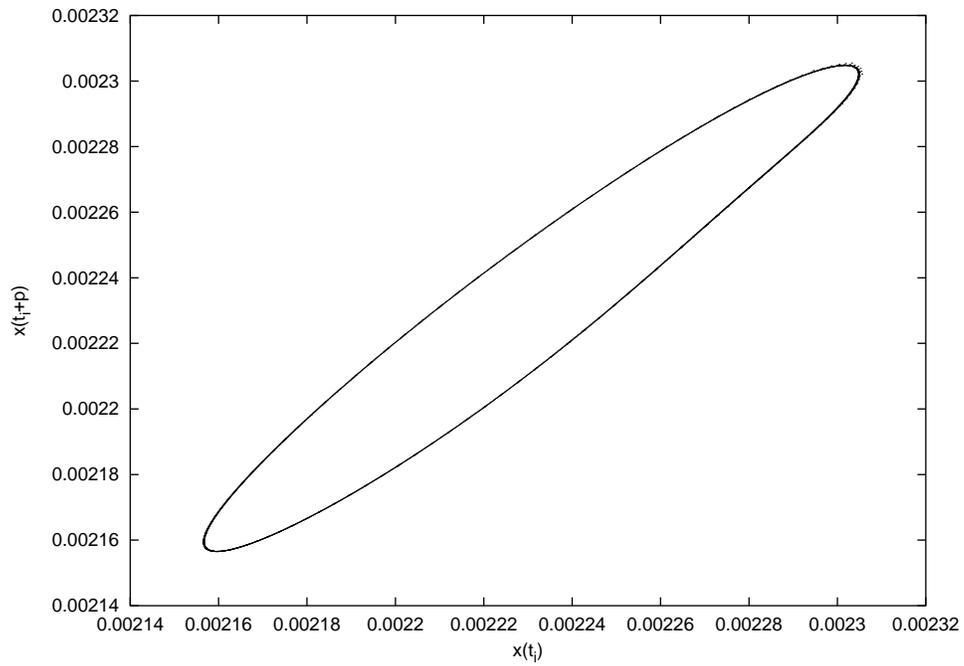


Fig. 4.74 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 2 ( $Re = 4500$ ).

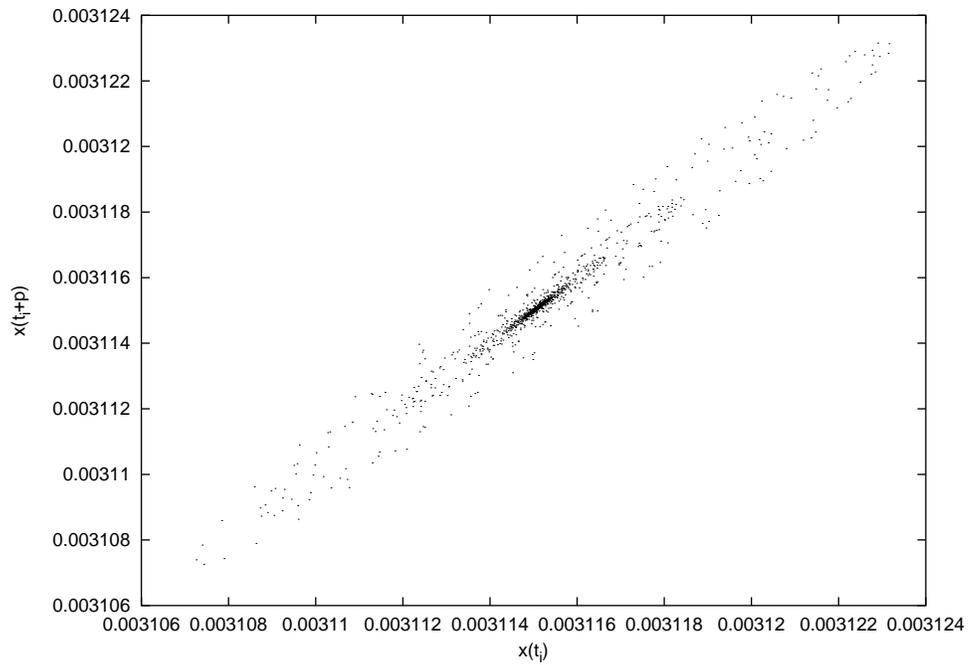


Fig. 4.75 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade quadrada ( $Re = 5000$ ).

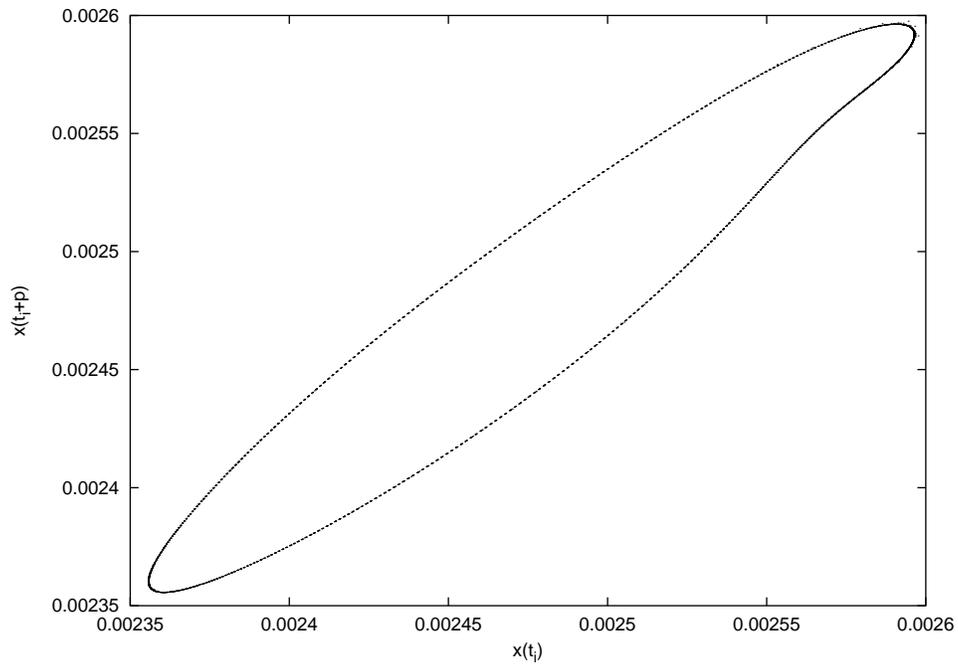


Fig. 4.76 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 1 ( $Re = 5000$ ).

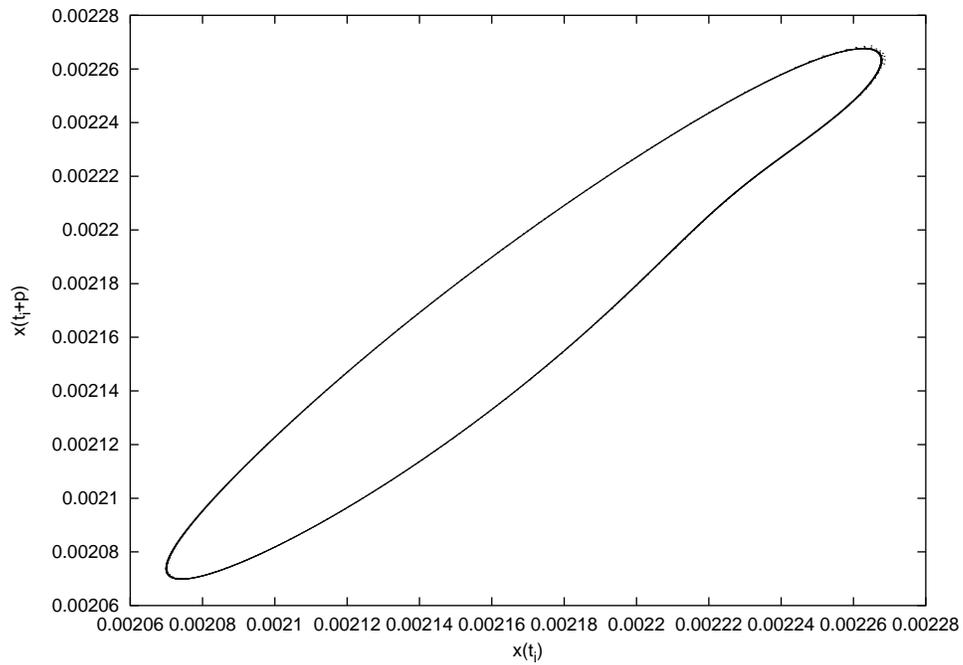


Fig. 4.77 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5000$ ).

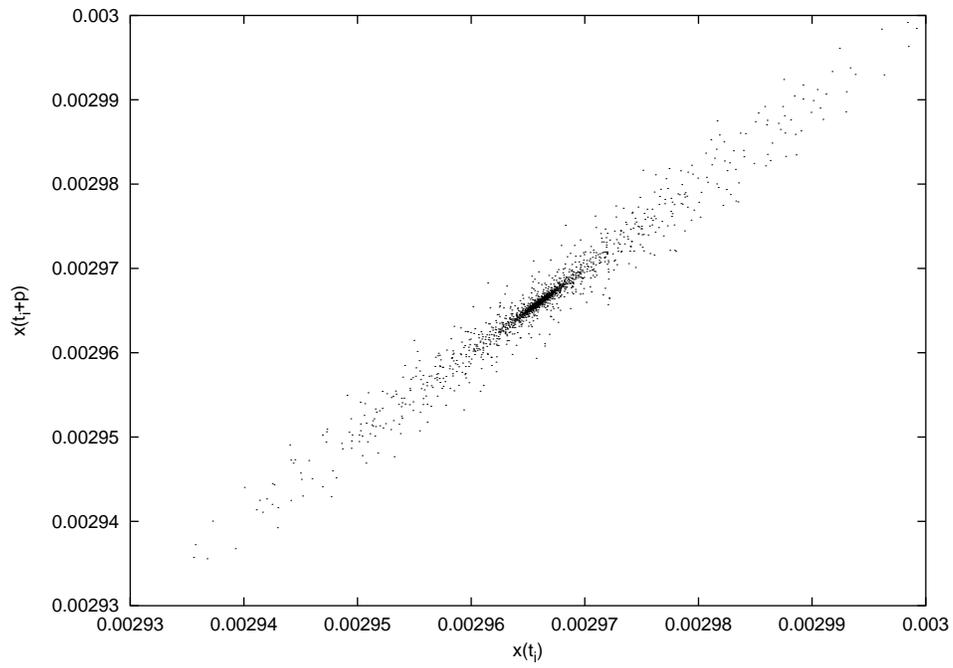


Fig. 4.78 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade quadrada ( $Re = 5500$ ).

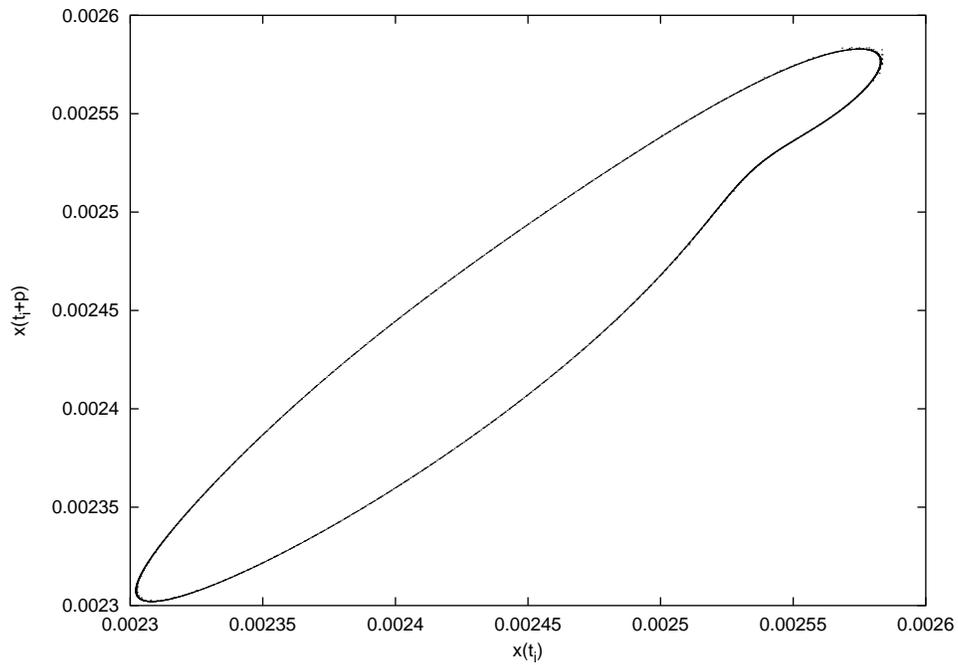


Fig. 4.79 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 1 ( $Re = 5500$ ).

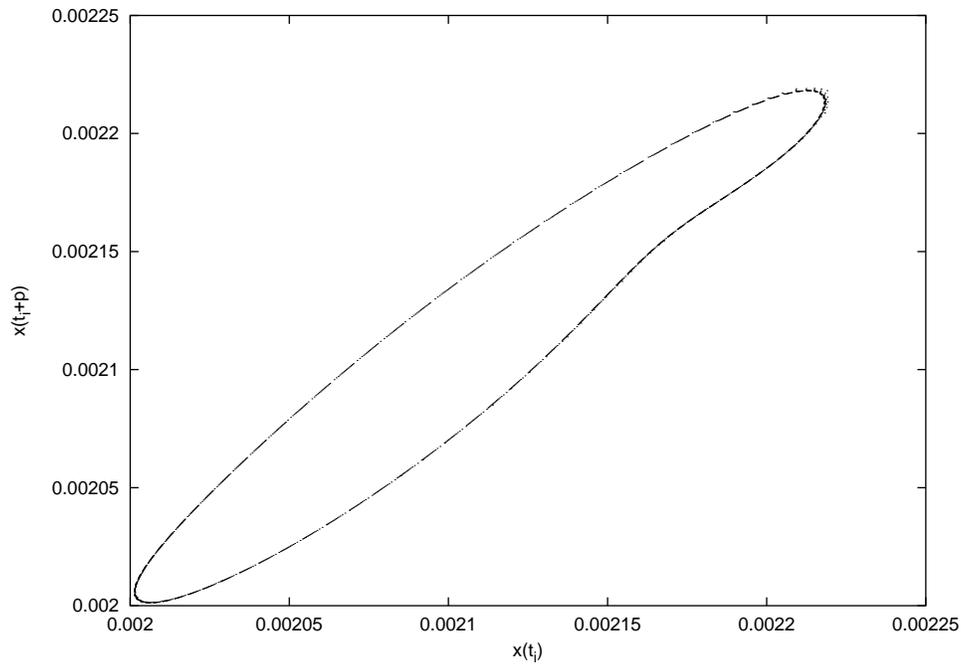


Fig. 4.80 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 2 ( $Re = 5500$ ).

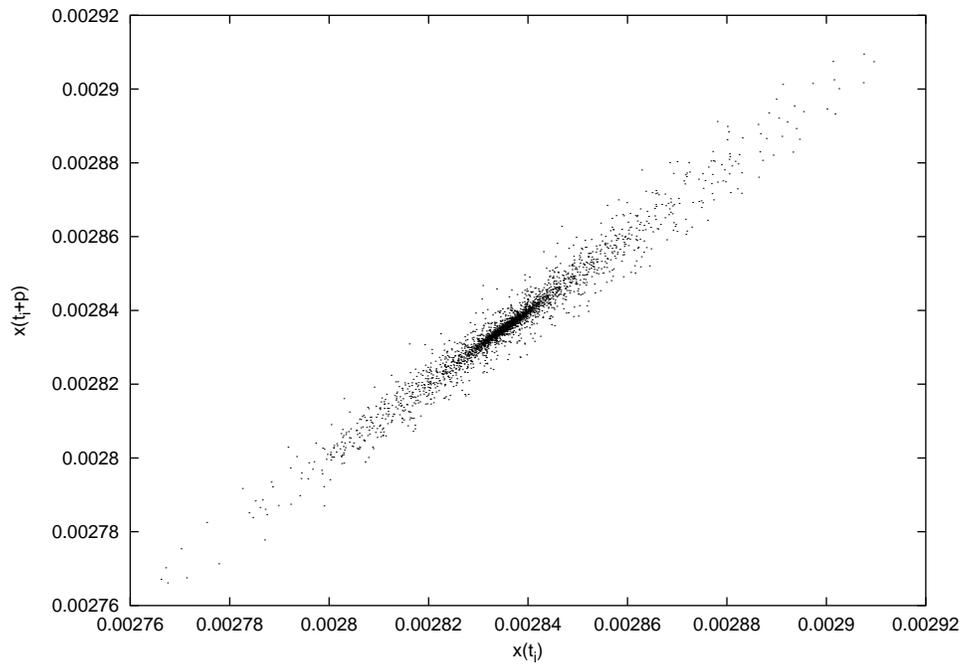


Fig. 4.81 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade quadrada ( $Re = 6000$ ).

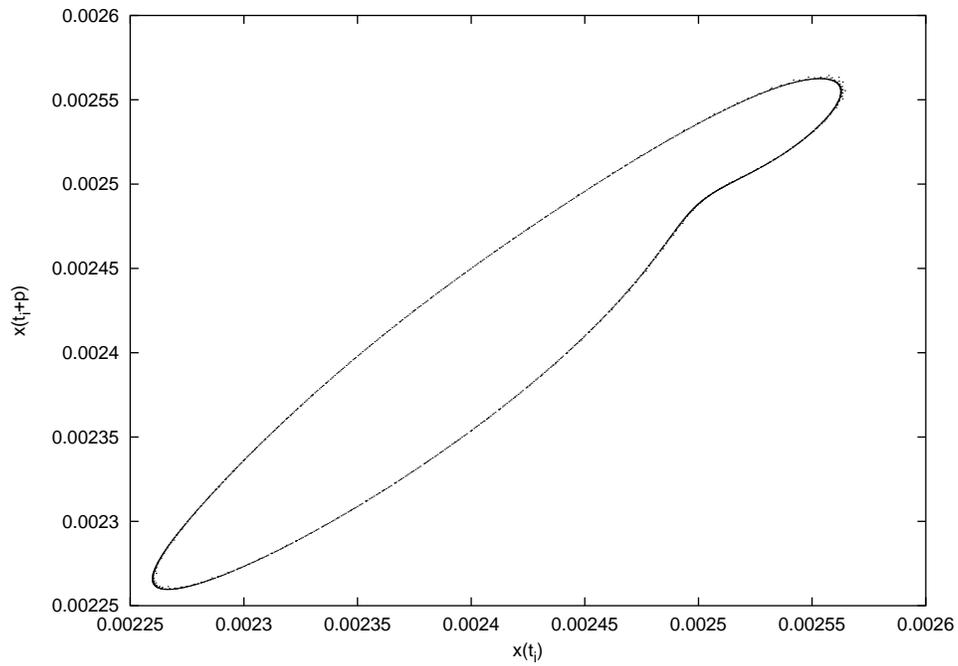


Fig. 4.82 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 1 ( $Re = 6000$ ).

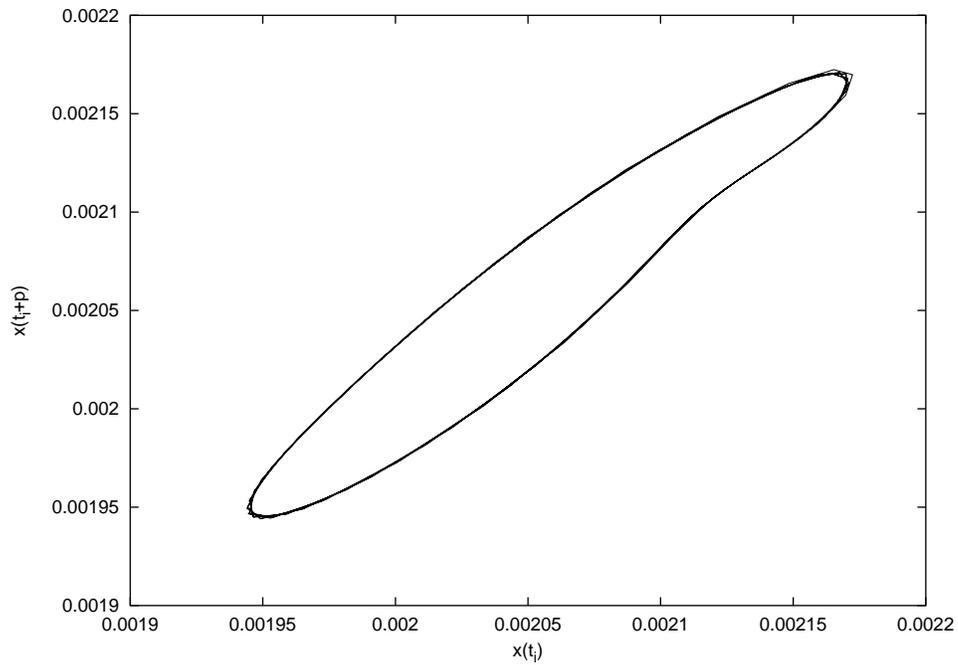


Fig. 4.83 – Espaço de fase de  $\langle E_c \rangle$  para a cavidade fractal 2 ( $Re = 6000$ ).

(Figuras 4.77, 4.80 e 4.83), as órbitas são praticamente elípticas, mas apresentam uma alteração, indicando a presença de um possível atrator estranho. Além disso, observa-se que esta alteração aumenta proporcionalmente com o número de Reynolds. Por outro lado, a alteração não apresenta mudanças quando comparada entre as cavidades fractais 1 e 2, sob o mesmo número de Reynolds.

Deve-se destacar que não está sendo realizada uma análise detalhada e precisa destes espaços de fase. Esta tarefa deverá ser realizada em um futuro próximo.



## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

Este estudo baseou-se na investigação da dinâmica de fluidos em domínios fractais e foi inspirado em trabalhos prévios em vibração, especificamente o trabalho de Sapoval et al. (1991), e transferência de calor, no trabalho de Ramos (1997). Sapoval et al. (1991) resolveram um problema muito simples em vibração linear: analisar as vibrações de uma membrana, onde existem até soluções analíticas. Estes autores identificaram modos de vibração não existentes em domínios mais simples, mas presentes em membranas fractais. É provável que a abordagem tradicional de se tratar problemas de domínio complexo, modelando a fronteira fractal por uma poligonal, não permitisse a identificação destes modos de vibração. A técnica da geometria fractal fornece uma maneira sistemática de aproximação de um domínio complexo por um processo iterativo simples.

Sob este ponto de vista, as simulações desenvolvidas nesta tese se justificam por permitir a verificação do comportamento de soluções de equações não lineares pela introdução de uma geometria fractal. Além disso, a utilização do método L-system na geração de fronteiras estabelece uma metodologia de aproximar fronteiras reais por meio de fractais. Esta metodologia não está presente em trabalhos similares, como por exemplo nos trabalhos de Sapoval et al. (1991) e Ramos (1997, 1999)

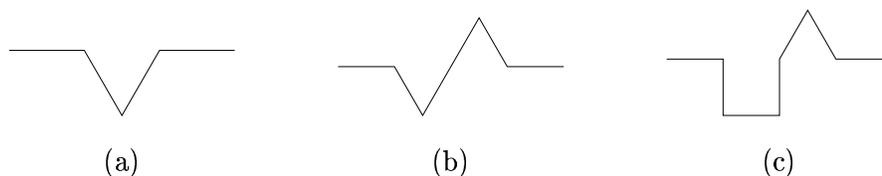


Fig. 5.1 – Geradores da fronteira fractal: (a) Curva de Koch (b) Simétrica (c) Combinada.

Por exemplo, tomando-se os geradores apresentados na Figura 5.1 é possível construir outros domínios pré-fractais. A Figura 5.2 (a) e (b) mostra o exemplo de uma fronteira gerada usando a curva de Koch, cujo gerador é apresentado na Figura 5.1 (a). Com uma simples modificação da regra de geração da fronteira, pode-se transformá-la em uma cavidade cujos detalhes são simétricos com relação à fronteira original, como ocorre na Figura 5.2 (c) e (d), cujo gerador é mostrado na Figura 5.1 (b). Pode-se também criar

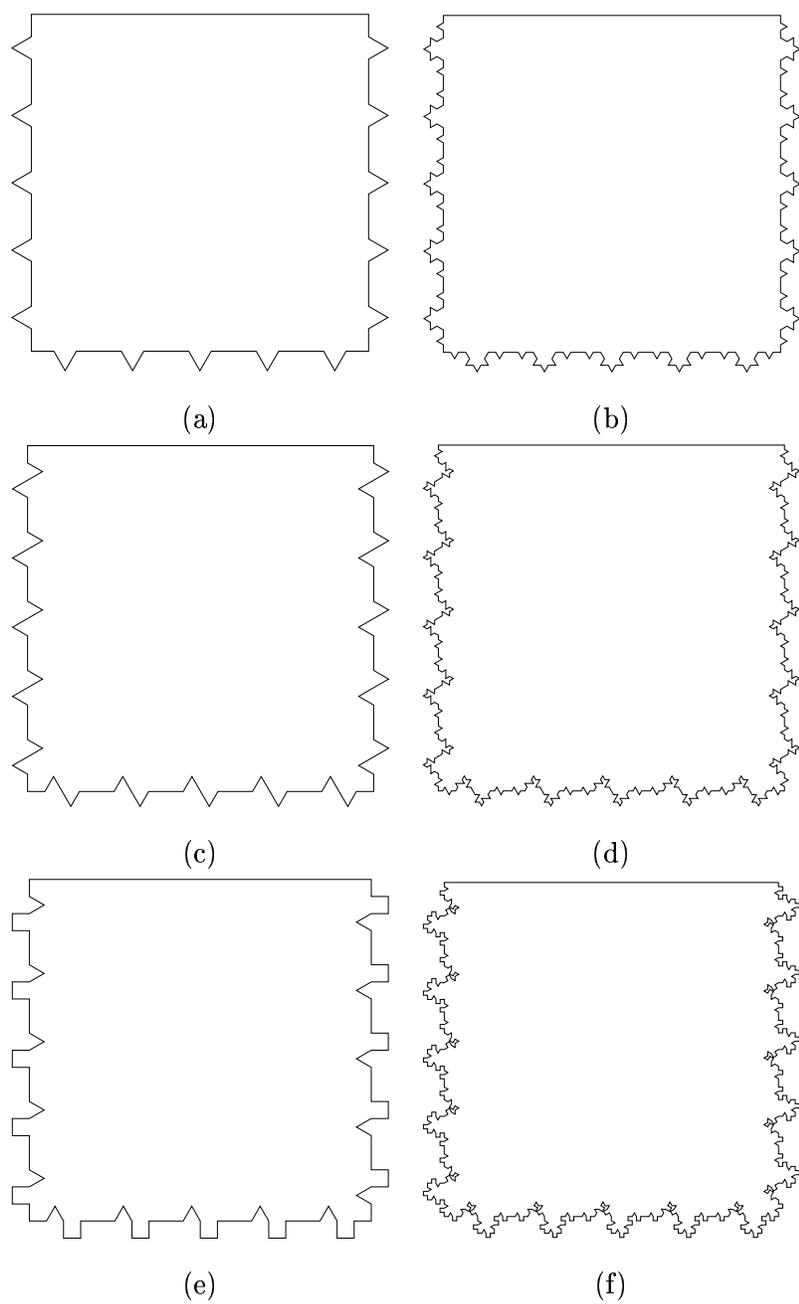


Fig. 5.2 – Outras fronteiras fractais: (a) Curva de Koch (nível 1) (b) Curva de Koch (nível 2) (c) Curva de Koch simétrica (nível 1) (d) Curva de Koch simétrica (nível 2) (e) Combinação de fractais (nível 1) (f) Combinação de fractais (nível 2).

uma combinação de duas curvas, como as curvas quadrada e triangular de Koch, obtendo o gerador mostrado na Figura 5.1 (c), cujo fronteira correspondente pode ser vista na Figura 5.2 (e) e (f).

Neste trabalho os escoamentos foram realizados usando método de volumes finitos. Devido a necessidade de selecionar um posicionamento para os diversos tipos de malhas não estruturadas, com respeito a convergência numérica do método numérico resultante, foi encontrada uma condição suficiente para a condição de compatibilidade em malhas não estruturadas ser satisfeita. Esta condição de compatibilidade, automaticamente satisfeita para a malha retangular alternada, garante a existência da equação de Poisson para a pressão (Abdallah (1987)).

Através de todos os experimentos realizados, chega-se às seguintes conclusões:

- Para as simulações isotérmicas, observou-se que:
  - A energia cinética média nas cavidades fractais apresentam uma queda com o aumento do nível de fractalização.
  - A variação relativa da energia cinética média entre as cavidades se mantém praticamente constante quando o número de Reynolds cresce.
  - Foi verificado que a região inferior das cavidades fractais é responsável pela queda da energia cinética média, quando comparadas com a cavidade quadrada.
  - Próximo ao centro da cavidade foi observado um aumento da energia cinética e este aumento ocorre proporcional ao nível de fractalização.

Estes fatos demonstram que a introdução de pré-fractais na fronteira da cavidade quadrada produz alterações relevantes ao comportamento do escoamento, no caso isotérmico.

- Nas simulações não isotérmicas, observou-se que:
  - A energia cinética média diminui com o aumento do nível de fractalização, para todos os números de Reynolds utilizados.
  - A variação relativa da energia cinética média entre as cavidades quadrada e fractal 1 permanece praticamente constante para  $200 \leq Re \leq 3000$ .

- A variação relativa da energia cinética média entre as cavidades fractal 1 e fractal 2 apresenta um crescimento em função do número de Reynolds para  $150 \leq Re \leq 2000$ .
- Para as simulações realizadas com  $Re \geq 4500$ , nas cavidades fractais, a energia cinética média apresentou uma oscilação constante, não atingindo o critério de parada estabelecido para o estado estacionário.
- Os espaços de fase da evolução de  $\langle E_c \rangle$  mostra o aparecimento de possíveis atratores estranhos para as cavidades fractais, a partir de  $Re \geq 5000$ .

Estes fatos demonstram que, também para o caso não isotérmico, em convecção natural, a introdução de fronteiras pré-fractais na cavidade produziu alterações importantes ao comportamento do escoamento e que, estas alterações diminuem com o aumento do número de Reynolds, quando a comparação é feita por meio da energia cinética média no estado estacionário. Para  $Re \geq 4500$ , o aparecimento de oscilações na energia cinética média durante a simulação, indica alterações de comportamento também para valores elevados do número de Reynolds.

Portanto, demonstra-se desta forma que a introdução de fronteiras fractais produz alterações importantes no comportamento do escoamento, seja para o caso isotérmico ou não isotérmico. Desta forma, demonstra-se a importância da representação adequada da geometria fractal na simulação de escoamentos de fluídos.

Embora a natureza possa ser mais complexa que um fractal, a aproximação por um fractal é muito mais realista do que uma formulação utilizando objetos geométricos simples.

A simulação de um escoamento em um domínio fractal apresenta aplicações diversas, tais como o escoamento de ar em um vale real ou em alvéolos pulmonares, etc. Uma aplicação a ser destacada é o escoamento de aerossóis no trajeto boca, garganta e pulmão. Tais aerossóis são usados para levar medicação diretamente às vias respiratórias (Finlay (2001, 2002)). A eficiência deste processo é muitas vezes afetada pela diferença na forma (geometria) das vias aéreas da pessoa. A geometria fractal pode realizar uma aproximação mais adequada para vias respiratórias.

Um outro exemplo de aplicação de um escoamento em um domínio fractal é a modificação

do trabalho de Mestayer et al. (1995), que usaram o problema da cavidade para simular a influência de uma parede de calor no escoamento e dispersão de poluentes dentro de vales formados por prédios. A utilização de uma fronteira fractal permite resolver o mesmo problema para vales naturais.

### 5.1 Trabalhos Futuros

Com base nos resultados obtidos neste trabalho, as seguintes alternativas se apresentam como caminhos naturais a serem perseguidos:

- **Aumentar o nível de fractalização** - Devido aos limites dos recursos computacionais, dentro da proposta de resolução por malhas estruturadas simples, realizaram-se simulações para os níveis 0 (cavidade), 1 e 2 de fractalização das fronteiras, bem como algumas simulações para o nível 3. Com a implementação de algumas alternativas abaixo, tais como métodos multigrid, paralelização e outros métodos numéricos, afim de aumentar a eficiência do programa, pode ser viável realizar as simulações de escoamentos com níveis maiores de fractalização.
- **Diferentes tipos de fractais** - No presente trabalho utilizaram-se os pré-fractais da curva quadrada de Koch como fronteira para o domínio do escoamento. Uma seqüência natural para este trabalho é a alteração do tipo de fractal usado. Também seria interessante analisar as variações obtidas no escoamento em função da dimensão do fractal utilizado.
- **Alterar os parâmetros básicos** - Para o escoamento não isotérmico alguns dos parâmetros permaneceram fixos em todas as simulações. Entre estes parâmetros podemos citar: o número de Prandtl  $Pr$ , o coeficiente de expansão térmica  $\beta$ , a diferença entre as temperaturas máxima e mínima  $T_{\Delta}$  e a velocidade do escoamento sobre a cavidade, que para o presente caso, foi utilizada a velocidade nula (convecção natural). Desta forma, deve-se verificar se, sob a modificação de um ou mais destes parâmetros, os resultados obtidos no presente trabalho permanecem.
- **Domínios tridimensionais** - As simulações em domínios bidimensionais constituem uma primeira aproximação para a simulação de um escoamento em um vale natural. Realizar a simulação em um domínio tridimensional, isto é, em uma cavi-

dade cúbica cujos lados planos foram trocados por superfícies de dimensão fractal, surge como seqüência natural ao trabalho realizado até aqui. Entretanto, tal mudança introduz uma série de novos fatores que dificultam fortemente as simulações tridimensionais. Entre estes fatores: a elevação do número de pontos da malha (para um fractal de nível 2, usando malhas de  $400 \times 400$  pontos, a terceira dimensão introduz 399 camadas com mesma quantidade de pontos, ou seja, equivale a resolver 400 simulações bidimensionais), tendo como conseqüência o aumento dos arquivos gravados em disco; a necessidade de desenvolver ferramentas para visualização de escoamentos tridimensionais.

- **Modelo de turbulência** - Para obter uma simulação mais realística seria importante introduzir um modelo de turbulência às simulações.
- **Refinamento por Blocos** - O uso de malhas estruturadas uniformes, como as malhas quadradas introduz uma grande quantidade de pontos em regiões onde não há necessidade, elevando em muito o tempo necessário para efetuar a simulação. O uso de refinamento por blocos permitirá o uso de malhas refinadas exclusivamente nas regiões de interesse, evitando cálculos desnecessários e reduzindo o tempo total gasto na simulação.
- **Esquemas multigrid** - Resolver a equação de Poisson para a pressão constitui um gargalo nas simulações de escoamento. O uso de esquemas multigrid permitirá obter convergência mais rápida, diminuindo o tempo gasto na simulação.
- **Outros métodos numéricos** - Uma outra forma de aumentar a eficiência das simulações é utilizar métodos numéricos baseados em outras integrações no tempo, tais como em Platte et al. (1997), obtendo uma maior região de estabilidade, o que permite utilizar um  $\Delta t$  maior, necessitando conseqüentemente de um tempo de computação menor para o mesmo intervalo de tempo.
- **Paralelização** - Para viabilizar a simulação para níveis maiores de fractalização e também o caso tridimensional, a alternativa de paralelizar o código mostra-se bastante interessante e viável, pela natureza matricial do problema.
- **Modelo de vale com florestas** - A substituição dos lados da cavidade por pré-fractais introduz no modelo uma representação mais adequada para a superfície

naturalmente irregular encontrada em um vale. Sobre esta superfície é comum haver objetos (florestas, cidades) que se constituem em obstáculos para o escoamento do ar próximo à superfície neste vale. Para representar estes objetos pode-se introduzir um fractal (como o tapete de Sierpinski, por exemplo) próximo aos lados.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdallah, S. Numerical solutions for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid - I. **Journal of Computational Physics**, v. 70, n. 1, p. 182-192, 1987.
- Ames, W.F. **Numerical methods for partial differential equations**. 3.ed., New York:Academic Press, p. 382, 1995.
- Anderson, E.; Bai, Z.; Bischof, C.; Demmel, J.; Dongarra, J.; Du Croz, J.; Greenbaum, A.; Hammarling, S.; McKenney, A.; Ostrouchov, S. ; Sorensen, D. **LAPACK users' guide**, Philadelphia:Society for Industry and Applied Mathematics, 1992.
- Barnsley, M.F.; Devaney, R.L.; Mandelbrot, B.B.; Peitgen, H.O.; Saupe, D.; Voss, R.F. **The science of fractal images**, New York:Springer Verlag, 1988.
- Benek, J.A.; Buning, P.G.; Steger, J.L. A 3-D chimera grid embedding technique. **AIAA paper 85-1523**, 1985, 7th Computational Fluid Dynamics Conference, Cincinnati, Ohio.
- Bravo, E. **Escoamento incompressível com condição de Neumann para a pressão: simulação e formulação matricial em variáveis primitivas**. Porto Alegre. Tese(Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1997.
- Bravo, E.; Claeysen, J.C.R.; Platte, R.B. A direct one-step pressure actualization for incompressible flow with pressure Neumann condition. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 103,n. 1, p. 43-54, 1999.
- Campos Velho, H.F. **Matriz não-modal em integração e inicialização num modelo barotrópico e um estudo numérico da dispersão vertical turbulenta**. Porto Alegre. Tese(Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- Campos Velho, H.F.; Claeysen, J.C.R. Singular Value Decomposition in the integration of an atmospheric model. In: XIII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos

- Computacionais para a Engenharia, Porto Alegre, 1992. **Anais**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1992, p. 72-80.
- Claeyssen, J.C.R.; Platte, R.B.; Bravo, E.O. Simulation in primitive variables of incompressible flow with pressure Neumann condition. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 30, n. 8, p. 1009-1026, 1999.
- Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Mixed grids in computational fluid dynamics. In: Regional Meeting on Computational and Applied Mathematics, São José dos Campos, 2000. **Anais**. São José dos Campos: Univap, 1997, p. 85.
- Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Different grid strategies in fluid dynamics. In: Advances in Fluid Mechanics, Montreal, 2000. **Anais**. Southampton (UK): WIT Press, 2002, p. 587-598.
- Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Criteria for mixed grids in computational fluid dynamics. Submetido à **International Journal for Numerical Methods in Fluids** (sob revisão) em 2001a.
- Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Isothermal fluid flow in fractal domains. Submetido à **Computational and Applied Mathematics** (sob revisão) em 2001b.
- Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Fluid flow in a fractal cavity. In: 2nd Workshop on Physics of the Planetary Boundary Layer and Dispersion Process Modeling, Santa Maria, 2001c. **Anais**. Sydney: Begell House, 2003, v. 4, p. 1-10.
- Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Fluid flow in a fractal cavity. **Hybrid Methods in Engineering**, v. 4, n. 3, 2002.
- Falconer, K. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. Great Britain: John Wiley Sons, 1990.
- Feder, J. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.
- Fiedler-Ferrara, N.; Prado, C.P.C. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1995.
- Finlay, W.H. **The mechanics of inhaled pharmaceutical aerosols: an introduction**. London: Academic Press, 2001.

- Finlay, W.H. [online]. <http://www.mece.ualberta.ca/staff/finlay/tutorial.htm> Consultado em Fevereiro de 2002.
- Francisco, G.; Santos, C.R. Transition to turbulence in the Reynolds experiment. **Physica A**, v. 297, n. 1, p. 73-78, 2001.
- Ghia, U.; Ghia, K.N.; Shin, C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, n. 4, p. 387-411, 1982.
- Giona, M. Contour integrals and vector calculus on fractal curves and interfaces. **Chaos Solitons & Fractals**, v. 10, n. 8, p. 1349-1370, 1999.
- Gonzalez, M.; Araujo, M.; Rodriguez, A. Flow equations on a fractal structure. **Physica A**, v. 298, n. 3, p. 297-314, 2001.
- Gottlieb, D.; Orszag, S. A. **Numerical analysis of spectral methods: theory and applications**. Philadelphia:Society for Industry and Applied Mathematics, 1977.
- Goodrich, J.W.; Gustafson, K.; Halasi, K. Hopf bifurcation in the driven cavity. **Journal of Computational Physics**, v. 90, n. 1, p. 219-261, 1990.
- Gresho, P.M.; Sani, R.L. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 7, n. 10, p. 1111-1145, 1987.
- Griebel, M.; Dornseifer, T.; Neunhoffer, T. **Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction**. Philadelphia:Society for Industry and Applied Mathematics, 1998.
- Gustafson, K.; Halasi, K. Vortex dynamics of cavity flows. **Journal of Computational Physics**, v. 64, n. 2, p. 279-319, 1986.
- Hoffman, J.D. **Numerical methods for engineers and scientists**. Singapore:McGraw-Hill, 1992.
- Huang, X.P.; Driscoll, C.F. Relaxation of 2D turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy state. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 14, p. 2187-2190, 1994.

- Jones, P.; MA, J.A.; Rokhlin, V. A fast direct algorithm for the solution of the Laplace equation on regions with fractal boundaries. **Journal of Computational Physics**, v. 113, n. 1, p. 35-51, 1994.
- Kao, K.H.; Liou, M.S. Advance in overset grid schemes: from chimera to dragon grids. **AIAA Journal**, v. 33, n. 10, p. 1809-1815, 1995.
- Kivotides, D.; Barenghi, C. F.; Samuels, D.C. Fractal dimension of superfluid turbulence. **Physical Review Letters**, v. 87, n. 15, p. 1-3 , 2001.
- Maliska, C.R. **Transferência de calor e mecânica dos fluídos computacional**. Rio de Janeiro:LTC, 1995.
- Mandelbrot, B.B. **The fractal geometry of nature**. San Francisco:W. H. Freeman, 1982.
- Mandelbrot, B.B. Self-affine fractal sets.In: Pietronero, L.; Tosatti,E. ed **Fractals in Physics**. North-Holland, p. 3-28, 1986.
- Martinez-Lopez, F.; Cabrerizo-Vilchez, M.A.; Hidalgo-Alvarez, R. An improved method to estimate the fractal dimension of physical fractals based on the Hausdorff definition. **Physica A**, v. 298, n. 3, p. 387-399, 2001.
- Mestayer, P.G.; Sini, J.F.; Jobert, M. Simulation of the wall temperature influence on flows and dispersion within street canyons. **Turbulence and diffusion**. v. 1, n. 95, p. 109-116, 1995.
- Nachbin, A.; Papanicolaou, G.C. Water waves in shallow channels of rapidly varying depth. **Journal Fluid Mechanics**, v. 241, n. 2, p.311-332, 1992.
- Niceno, B. [online]. <http://www-dinma.univ.trieste.it/nirftc/research/easymesh/> . Consultado em Janeiro de 1999.
- Panagiotopoulos, P.D.; Panagouli, O.K. The BEM in plates with boundaries of fractal geometry. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 17, n. 2, p. 153-160, 1996.
- Panagouli, O.K. On the fractal nature of problems in mechanics. **Chaos Solitons & Fractals**, v. 8, n. 2, p. 287-301, 1997.

- Patankar, S.V.; Spalding, D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 15, n. 3, p. 1787-1806, 1972.
- Patankar, S.V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York:Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- Platte, R.B.; Bravo, E.O.; Claeysen, J.C.R.; Campos Velho, H.F. Comportamento de algoritmos velocidade-pressão para escoamentos incompressíveis. In: Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais para a Engenharia (CILAMCE), 1997. **Anais**. Brasília: Editora da UnB, 1997, v. 2, p. 1005-1012
- Platte, R. B. Simulação em variáveis primitivas de escoamentos incompressíveis com atualização direta e explícita para pressão. Porto Alegre. Dissertação(Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1998.
- Platte, R.B.; Campos Velho, H.F.; Claeysen, J.C.R.; Bravo, E.O. Algorithms for pressure correction in the driven cavity problem. [CD-ROM]. In: Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, 1998. **Anais**. Barcelona: New Trends and Applications, 1998, p. 1-10.
- Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P. **Numerical recipes in C: the art of scientific computing**. 2. ed., Cambridge:Press, 1992.
- Rai, M.M. A conservative treatment of zonal boundaries for Euler equation calculations. **Journal of Computational Physics**, v. 62, n. 2, p. 472-503, 1986a.
- Rai, M.M. A relaxation approach to patched-grid calculations with Euler equation. **Journal of Computational Physics**, v. 66, n. 1, p. 99-131, 1986b.
- Ramos, F.M. Effective thermal conductivity of two-dimensional porous media. In: International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, CHT-97, Cesme/Turkey, 1997. **Anais**. Sydney: Begell House, 1997, p. 560-567.
- Ramos, F.M. Heat diffusion in two-dimensional fractals. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v. 21, n. 2, p. 133-143, 1999.
- Roache, P.J. **Computational fluid dynamics**. Albuquerque:Hermosa, 1976.

Sapoval, B.; Gobron, T.; Margolina, A. Vibrations of fractal drums. **Physical Review Letters**, v. 67, n. 21, p. 2974-2977, 1991.

Wang, Z.J. A fully conservative interface algorithm for overlapped grids. **Journal of Computational Physics**, v. 122, n. 1, p. 96-106, 1995.

Wright, J.A.; Shyy, W. A pressure-based composite grid method for the Navier-Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, v. 107, n. 2, p. 225-238, 1993.

## APÊNDICE A

### SOLUÇÃO EXATA PARA O PROBLEMA NÃO ISOTÉRMICO

As equações de Navier-Stokes bidimensional para o problema não isotérmico são dadas por:

$$u_t + uu_x + vv_y = -\phi_x + \nu \nabla^2 u \quad (\text{A.1})$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -\phi_y + \nu \nabla^2 v + \beta(T - T_0) \quad (\text{A.2})$$

$$T_t + uT_x + vT_y = \sigma \nabla^2 T \quad (\text{A.3})$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (\text{A.4})$$

sendo  $\phi = \frac{p}{\rho_0} + gy$ ,  $p$  a pressão,  $\rho_0$  a densidade média do fluido e  $g$  a aceleração da gravidade.

Uma solução exata para o caso  $\nu = \sigma$ , obtida por Wessel, é apresentada por Ames (1995). Esta solução é dada por:

$$u = u_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \sin by \quad (\text{A.5})$$

$$v = v_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \cos by \quad (\text{A.6})$$

$$T = T_0 + cy + \tau_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2} \beta c y^2 + \frac{u_0 \omega}{a} e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \sin by + \\ & + \frac{1}{4} u_0^2 e^{-2\lambda t} \cos(2ax - 2\omega t) - \frac{1}{4} v_0^2 e^{-2\lambda t} \cos 2by \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

com as seguintes definições:

$$\omega = \left[ \frac{a^2 \beta c}{a^2 + b^2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda = \nu (a^2 + b^2) \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_0 = \frac{v_0 c}{\omega} \quad (\text{A.11})$$

$$v_0 = \frac{a u_0}{b} \quad (\text{A.12})$$

$$\nu = \sigma \quad (\text{A.13})$$

sendo  $u_0$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes arbitrárias.

Para demonstrar que estas funções satisfazem as equações de Navier-Stokes e a equação da energia usando a aproximação de Boussinesq, é necessário calcular primeiramente algumas derivadas.

### Derivadas da Função $u$

$$u_x = au_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \sin by \quad (\text{A.14})$$

$$u_{xx} = -a^2 u_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \sin by = -a^2 u \quad (\text{A.15})$$

$$u_y = bu_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by \quad (\text{A.16})$$

$$u_{yy} = -b^2 u_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \sin by = -b^2 u \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} u_t &= -\lambda u_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \sin by - \\ &\quad -\omega u_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \sin by = -\lambda u - \frac{\omega}{a} u_x \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Desta forma, usando as equações A.15, A.17 e A.11, tem-se:

$$\nu \nabla^2 u = -\nu (a^2 + b^2) u = -\lambda u \quad (\text{A.19})$$

### Derivadas da Função $v$

De modo análogo, tem-se:

$$v_x = -av_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by = -\frac{a^2}{b^2} u_y \quad (\text{A.20})$$

$$v_{xx} = -a^2 v_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \cos by = -a^2 v \quad (\text{A.21})$$

$$v_y = -bv_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \sin by = -u_x \quad (\text{A.22})$$

$$v_{yy} = -b^2 v_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \cos by = -b^2 v \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} v_t &= -\lambda v_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \cos by + \omega v_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by = \\ &= -\lambda v - \frac{\omega}{a} v_x = -\lambda v + \frac{\omega v_0}{bu_0} u_y = -\lambda v + \frac{\omega a}{b^2} u_y \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\nu \nabla^2 v = -\nu (a^2 + b^2) v = -\lambda v \quad (\text{A.25})$$

## Derivadas da Função $T$

Da mesma forma, as derivadas para  $T$  são dadas por:

$$T_x = a\tau_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \cos by = \frac{a\tau_0}{v_0} v \quad (\text{A.26})$$

$$T_y = c - b\tau_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \sin by = c - \frac{b\tau_0}{u_0} u \quad (\text{A.27})$$

$$T_{xx} = \frac{a\tau_0}{v_0} v_x \quad (\text{A.28})$$

$$T_{yy} = -\frac{b\tau_0}{u_0} u_y \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \sigma \nabla^2 T &= \frac{a\sigma\tau_0}{v_0} v_x - \frac{b\sigma\tau_0}{u_0} u_y = -\nu(a^2 + b^2)\tau_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by = \\ &= \frac{\tau_0 \lambda}{av_0} v_x = \frac{\tau_0 \lambda}{bu_0} u_y \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} T_t &= -\lambda\tau_0 e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by - \omega\tau_0 e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \cos by = \\ &= -\frac{\lambda\tau_0}{bu_0} u_y - \frac{\omega\tau_0}{v_0} v = -\frac{\lambda\tau_0}{bu_0} u_y - cv = \frac{\lambda\tau_0}{av_0} v_x - cv \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

## Derivadas da Função $\phi$

Primeiramente, observa-se que as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned} uu_x + vv_y &= au_0^2 e^{-2\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos(ax - \omega t) \sin^2 by + \\ &\quad + bu_0 v_0 e^{-2\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos(ax - \omega t) \cos^2 by \end{aligned}$$

Da equação A.12, tem-se que  $bv_0 = au_0$  e como  $\cos^2 by = 1 - \sin^2 by$ , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} uu_x + vv_y &= au_0^2 e^{-2\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos(ax - \omega t) \sin^2 by + \\ &\quad + au_0^2 e^{-2\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos(ax - \omega t) - \\ &\quad - au_0^2 e^{-2\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos(ax - \omega t) \sin^2 by = \\ &= au_0^2 e^{-2\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos(ax - \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} au_0^2 e^{-2\lambda t} \sin(2ax - 2\omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Da mesma forma, obtém-se:

$$\begin{aligned} uv_x + vv_y &= -au_0 v_0 e^{-2\lambda t} \sin^2(ax - \omega t) \sin by \cos by - \\ &\quad - bv_0^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(ax - \omega t) \sin by \cos by = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -au_0v_0e^{-2\lambda t} \sin by \cos by (\sin^2(ax - \omega t) + \cos^2(ax - \omega t)) = \\
&= -au_0v_0e^{-2\lambda t} \sin by \cos by = \\
&= -\frac{1}{2}au_0v_0e^{-2\lambda t} \sin 2by \tag{A.33}
\end{aligned}$$

e também:

$$uT_x + vTy = \frac{a}{v_0}uv + cv - \frac{b}{u_0}uv = cv \tag{A.34}$$

Com estas relações é possível calcular as derivadas parciais da função  $\phi$ , usando as equações A.8, A.32 e A.33:

$$\begin{aligned}
\phi_x &= u_0\omega e^{-\lambda t} \cos(ax - \omega t) \sin by - \frac{1}{2}au_0^2e^{-2\lambda t} \sin(2ax - 2\omega t) = \\
&= \frac{\omega}{a}u_x - (uu_x + vu_y) \tag{A.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_y &= \beta cy + \frac{bu_0\omega}{a}e^{-\lambda t} \sin(ax - \omega t) \cos by + \frac{1}{2}bv_0^2e^{-2\lambda t} \sin 2by = \\
&= \beta cy + \frac{\omega}{a}u_y - (uv_x + vv_y) \tag{A.36}
\end{aligned}$$

## Conclusões

Desta forma, usando as equações A.19 e A.35, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&-uu_x - vu_y - \phi_x + \nu\nabla^2u = \\
&= -uu_x - vu_y - \frac{\omega}{a}u_x + uu_x + vu_y - \lambda u = \\
&= -\lambda u - \frac{\omega}{a}u_x = u_t \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Das equações A.7 e A.16, obtém-se:

$$T - T_0 = cy + \frac{\tau_0}{bu_0}u_y \tag{A.38}$$

Usando esta relação em conjunto com as equações A.25 e A.36, tem-se:

$$-uv_x - vv_y + \beta(T - T_0) - \phi_y + \nu\nabla^2v =$$

$$\begin{aligned}
&= -uv_x - vv_y + \beta cy + \frac{\beta\tau_0}{bu_0}u_y - \beta cy - \frac{\omega}{a}u_y + uv_x + vv_y - \lambda v = \\
&= \left(\frac{\beta\tau_0}{bu_0} - \frac{\omega}{a}\right)u_y - \lambda v = \left(\frac{\beta v_0 c}{bu_0 w} - \frac{\omega}{a}\right)u_y - \lambda v = \\
&= \omega \left(\frac{\beta v_0 a c}{b^2 v_0 \omega^2} - \frac{1}{a}\right)u_y - \lambda v = \omega \left(\frac{\beta a c(a^2 + b^2)}{a^2 b^2 c \beta} - \frac{1}{a}\right)u_y - \lambda v = \\
&= \frac{\omega}{a} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} - 1\right)u_y - \lambda v = \frac{\omega a}{b^2}u_y - \lambda v = v_t \tag{A.39}
\end{aligned}$$

Usando as equações A.34 e A.30, obtém-se:

$$-uT_x - vT_y + \sigma \nabla^2 T = -cv + \frac{\tau_0 \lambda}{av_0}v_x = T_t \tag{A.40}$$

Das igualdades obtidas em A.22, A.37, A.39 e A.40, concluí-se que as funções dadas são uma solução exata para o problema de escoamento de fluidos não isotérmico.



## APÊNDICE B

### PROPRIEDADES FÍSICAS DO AR

Os valores das propriedades físicas do ar estão descritas na Tabela B.1, obtida de Griebel et al. (1998), pág. 199.

TABELA B.1 – VALORES DAS PROPRIEDADES FÍSICAS DO AR

$T[^\circ C]$	0	10	20
$\rho[\frac{Kg}{m^3}]$	1.293	1.247	1.205
$\mu[\frac{Kg}{m \cdot s}]$	$1.71 \cdot 10^{-5}$	$1.76 \cdot 10^{-5}$	$1.81 \cdot 10^{-5}$
$\nu[\frac{m^2}{s}]$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$1.41 \cdot 10^{-5}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$
$\kappa[\frac{W}{m \cdot K}]$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
$\alpha[\frac{m^2}{s}]$	$1.84 \cdot 10^{-5}$	$1.96 \cdot 10^{-5}$	$2.08 \cdot 10^{-5}$
$\beta[\frac{1}{K}]$	$3.66 \cdot 10^{-5}$	$3.52 \cdot 10^{-5}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$
$Pr$	0.72	0.72	0.72



## APÊNDICE C

### GRÁFICOS DO ESCOAMENTO ISOTÉRMICO

Neste apêndice são apresentadas as superfícies da energia cinética, da pressão e os gráficos de isolinhas para a energia cinética obtidos para o escoamento isotérmico.

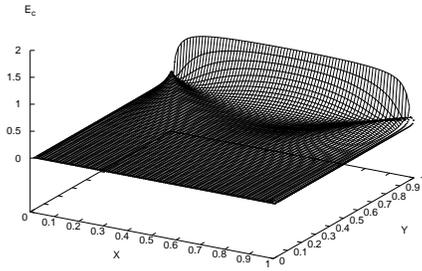
Estes gráficos foram obtidos para as simulações com número de Reynolds igual a 10, 400, 1400 e 5000, após atingir o estado estacionário.

#### C.1 Gráficos da Energia Cinética

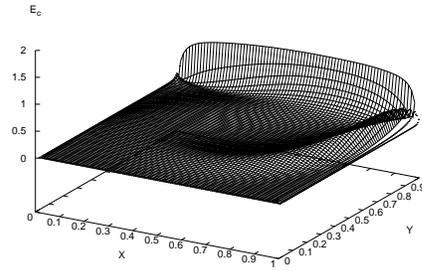
As Figuras C.1 e C.3 exibem a superfície da energia cinética  $\mathcal{E}_c$  na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras C.2 e C.4, para os seguintes valores: 0,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ , 0.1, 0.5.

As Figuras C.5 e C.7 exibem a superfície da energia cinética  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras C.6 e C.8, para os mesmos valores usados na cavidade quadrada.

As Figuras C.9 e C.11 exibem a superfície da energia cinética  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras C.10 e C.12, para os mesmos valores usados na cavidade quadrada.

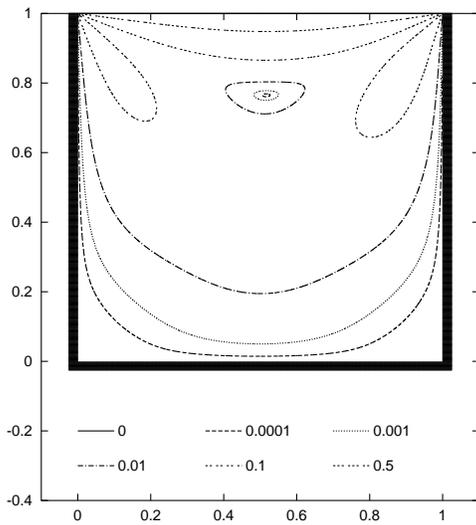


(a)

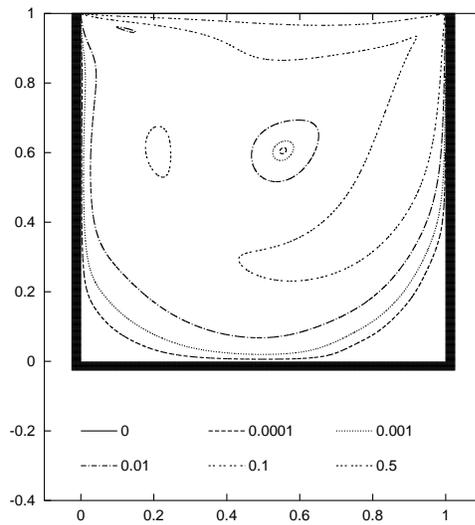


(b)

Fig. C.1 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

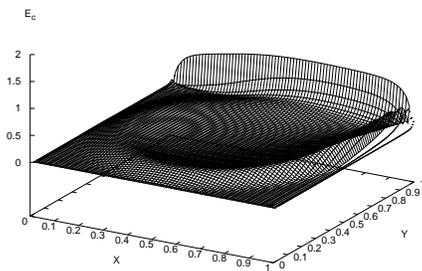


(a)

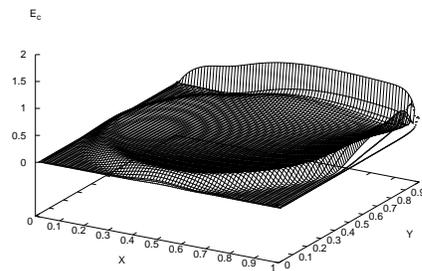


(b)

Fig. C.2 – Isolinhas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

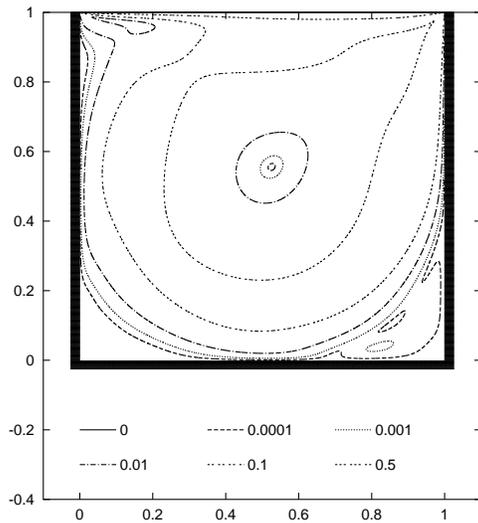


(a)

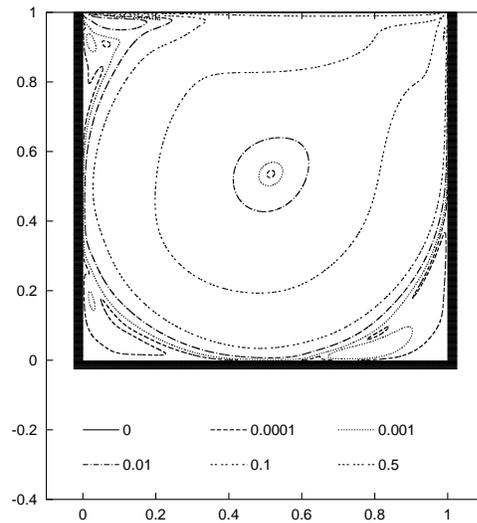


(b)

Fig. C.3 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

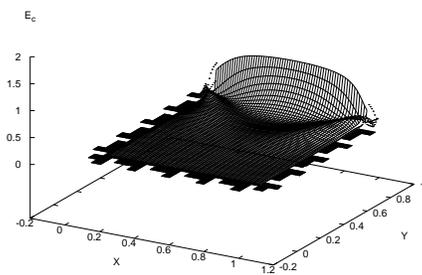


(a)

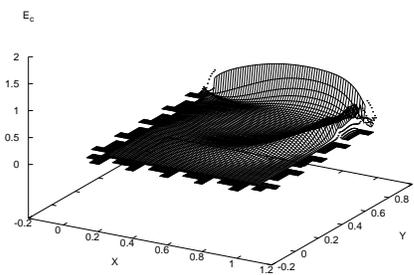


(b)

Fig. C.4 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

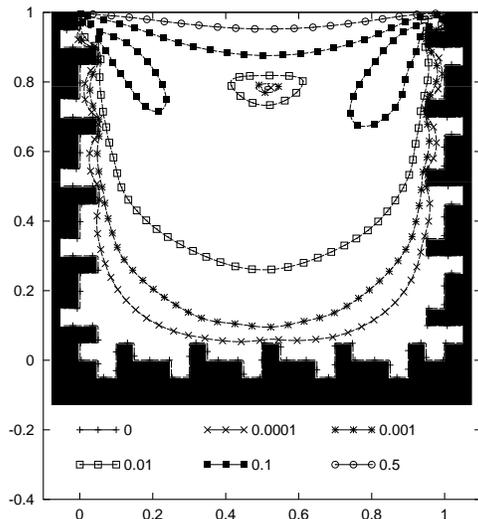


(a)

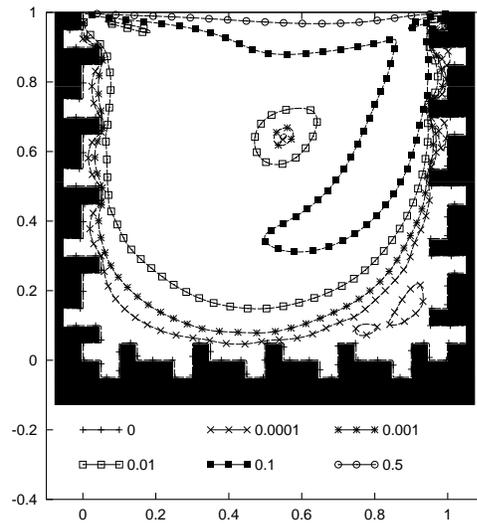


(b)

Fig. C.5 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

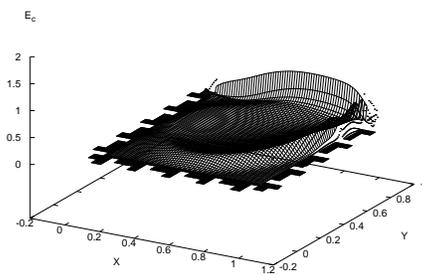


(a)

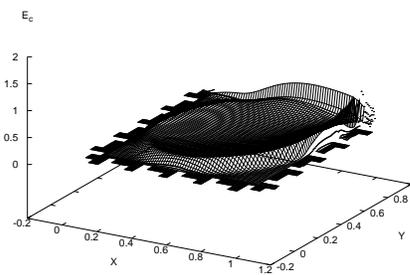


(b)

Fig. C.6 – Isolinhas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

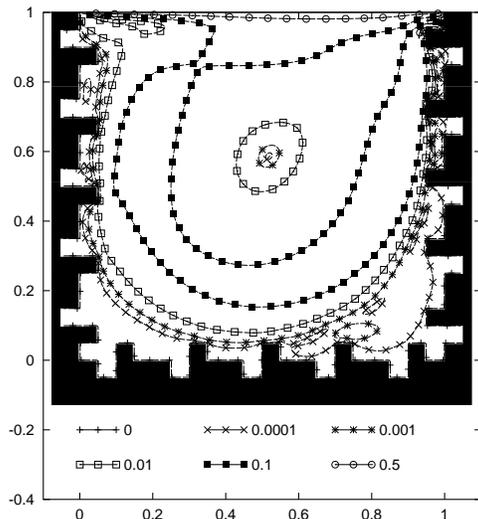


(a)

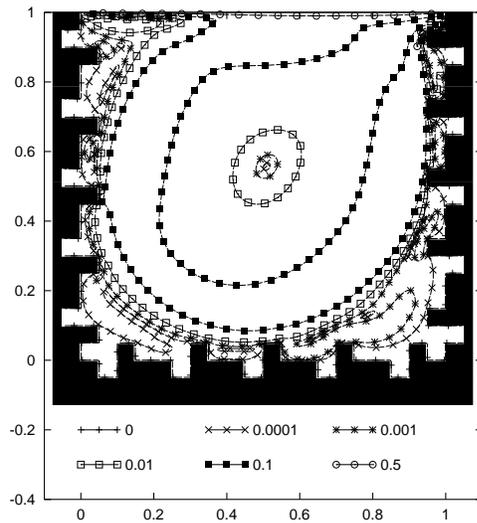


(b)

Fig. C.7 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

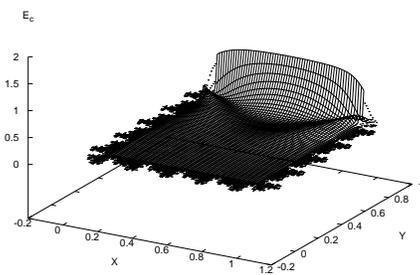


(a)

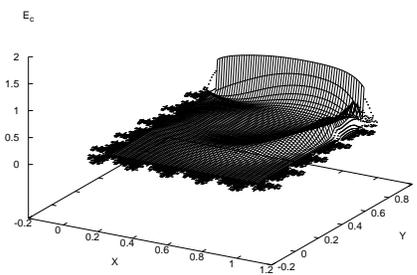


(b)

Fig. C.8 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

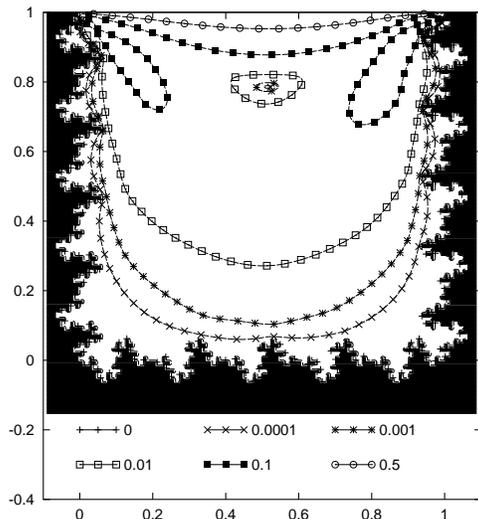


(a)

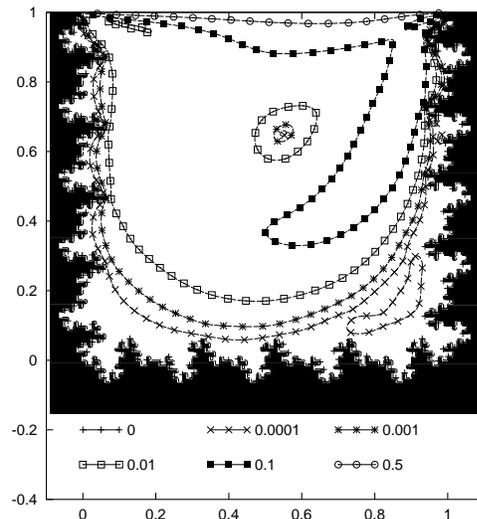


(b)

Fig. C.9 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

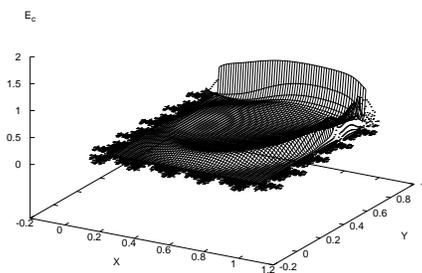


(a)

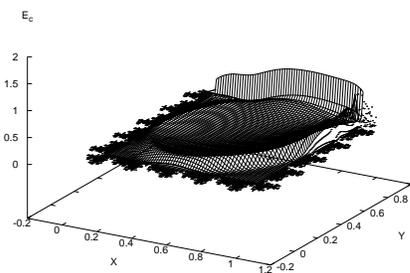


(b)

Fig. C.10 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

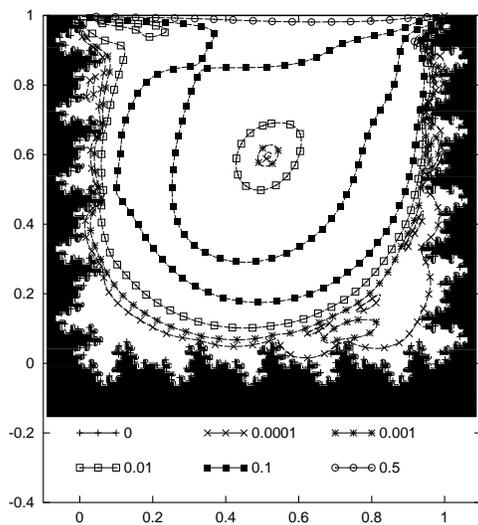


(a)

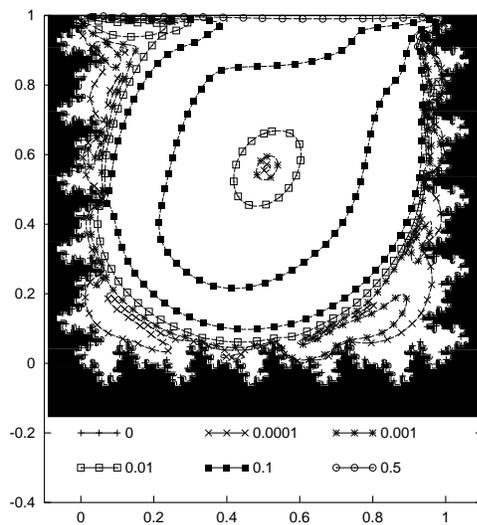


(b)

Fig. C.11 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .



(a)

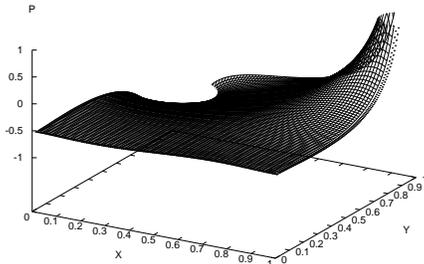


(b)

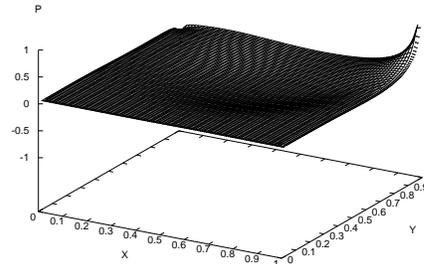
Fig. C.12 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

## C.2 Gráficos da Pressão

As Figuras C.13 e C.14 exibem a superfície da pressão na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente.

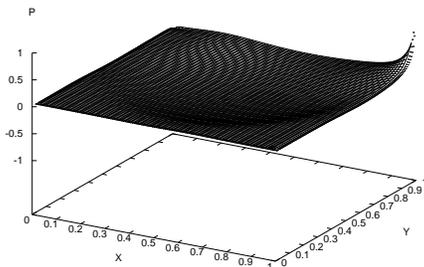


(a)

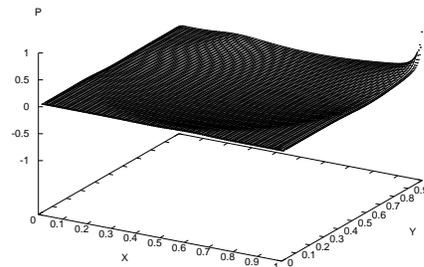


(b)

Fig. C.13 – Superfície de pressão na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .



(a)

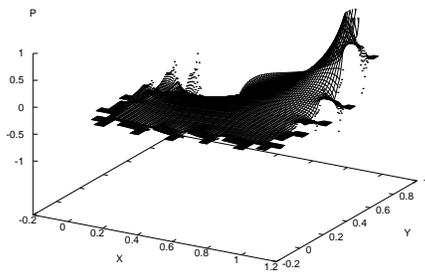


(b)

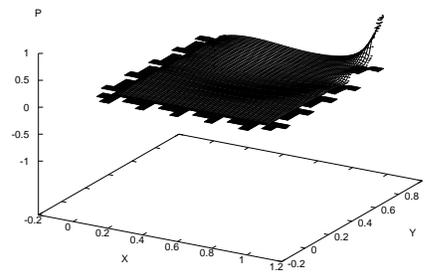
Fig. C.14 – Superfície de pressão na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

As Figuras C.15 e C.16 exibem a superfície da pressão na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente.

As Figuras C.17 e C.18 exibem a superfície da pressão na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente.

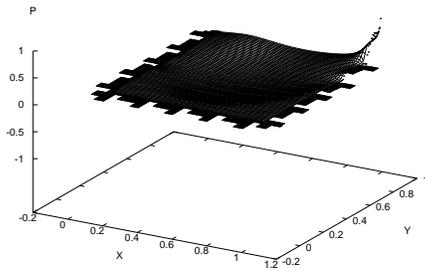


(a)

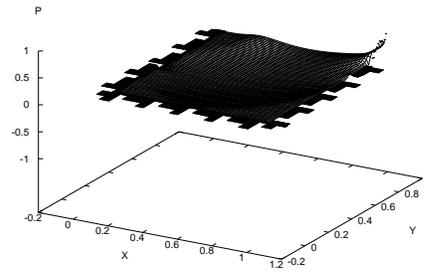


(b)

Fig. C.15 – Superfície de pressão na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

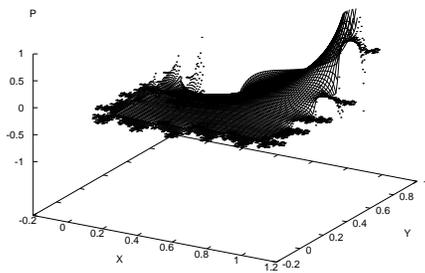


(a)

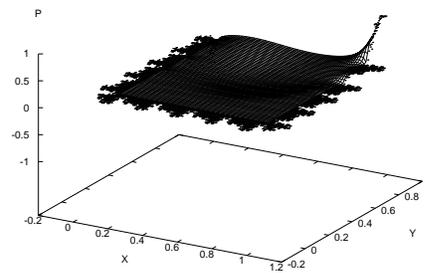


(b)

Fig. C.16 – Superfície de pressão na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

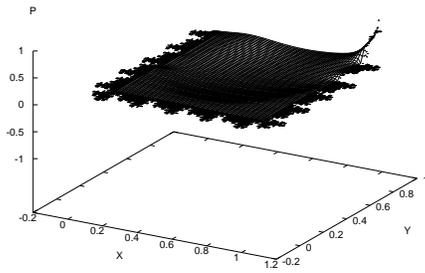


(a)

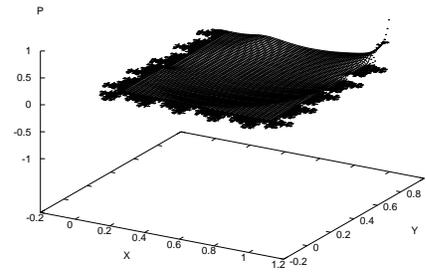


(b)

Fig. C.17 – Superfície de pressão na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .



(a)



(b)

Fig. C.18 – Superfície de pressão na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

## APÊNDICE D

### GRÁFICOS DO ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO

Neste apêndice são apresentadas as superfícies da energia cinética, da pressão, da vortacidade e os gráficos de isolinhas para a energia cinética e para a vortacidade obtidos para o escoamento não isotérmico.

Estes gráficos foram obtidos para as simulações com número de Reynolds igual a 10, 400, 1400 e 5000, após atingir o estado estacionário.

#### D.1 Gráficos da Energia Cinética

As Figuras D.1 e D.3 exibem a superfície da energia cinética  $\mathcal{E}_c$  na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras D.2 e D.4, para os seguintes valores:  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$ , 0.1.

As Figuras D.5 e D.7 exibem a superfície da energia cinética  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras D.6 e D.8, para os mesmos valores usados na cavidade quadrada.

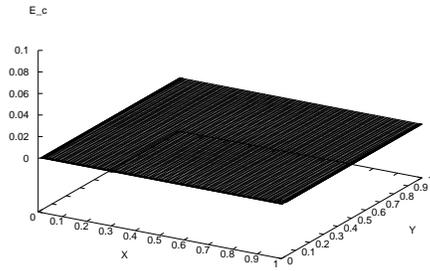
As Figuras D.9 e D.11 exibem a superfície da energia cinética  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras D.10 e D.12, para os mesmos valores usados na cavidade quadrada.

#### D.2 Gráficos da Pressão

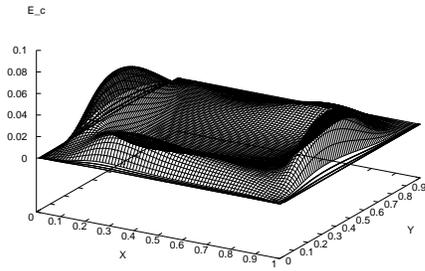
As Figuras D.13 e D.14 exibem a superfície da pressão na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente.

As Figuras D.15 e D.16 exibem a superfície da pressão na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente.

As Figuras D.17 e D.18 exibem a superfície da pressão na cavidade quadrada, para número

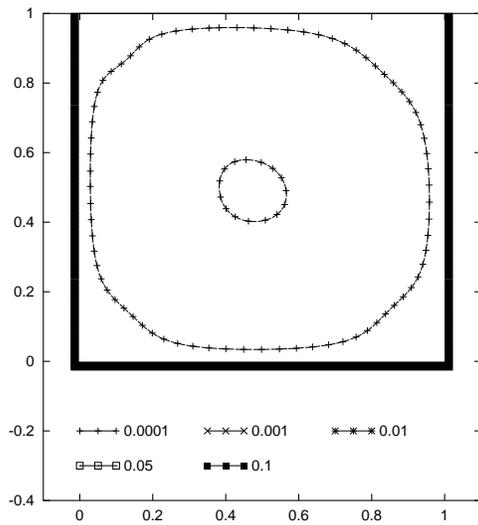


(a)

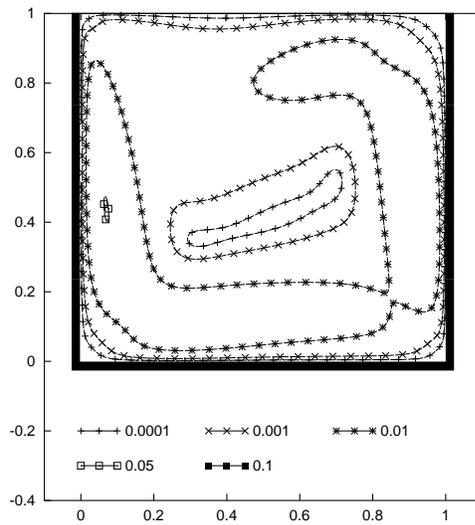


(b)

Fig. D.1 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

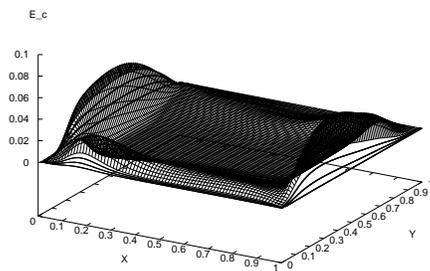


(a)

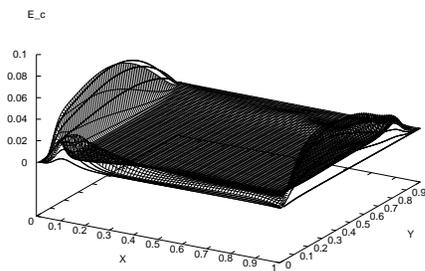


(b)

Fig. D.2 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade : (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

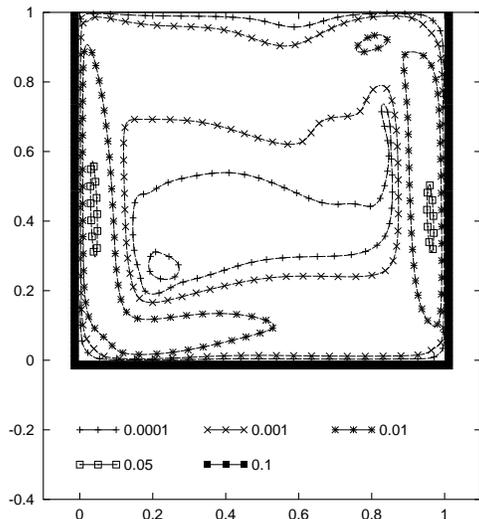


(a)

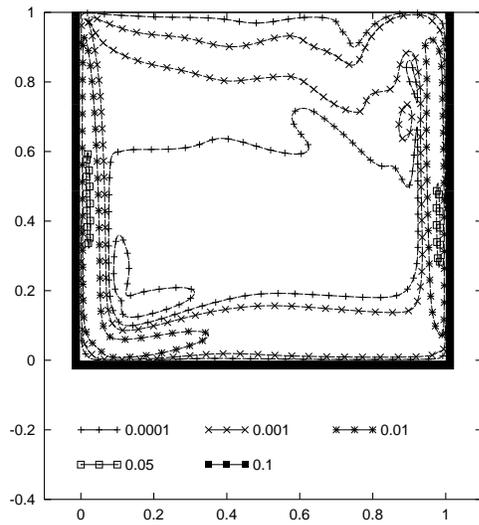


(b)

Fig. D.3 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

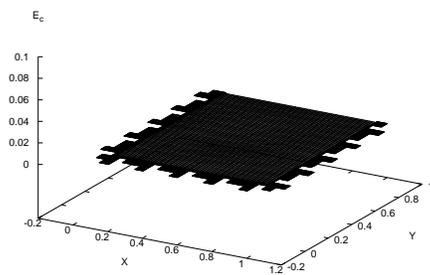


(a)

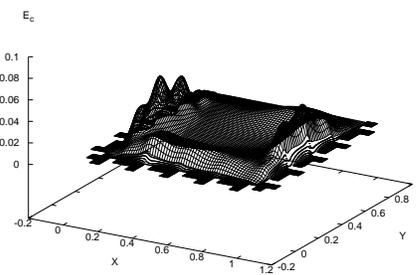


(b)

Fig. D.4 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

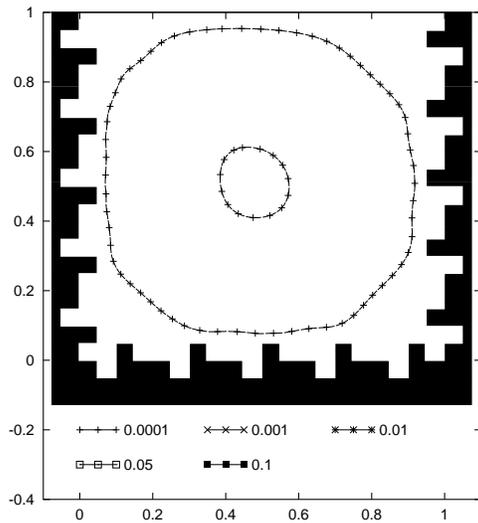


(a)

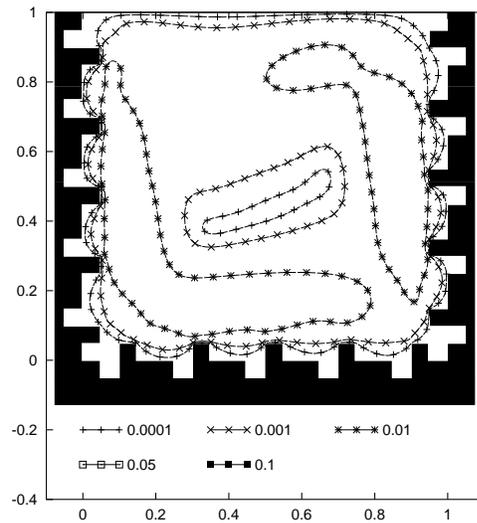


(b)

Fig. D.5 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

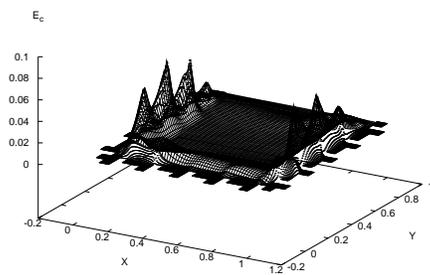


(a)

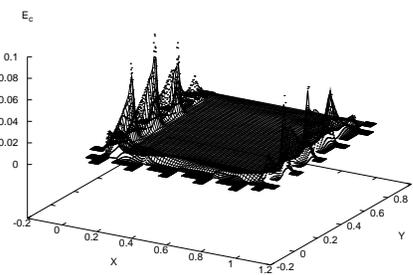


(b)

Fig. D.6 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .



(a)



(b)

Fig. D.7 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

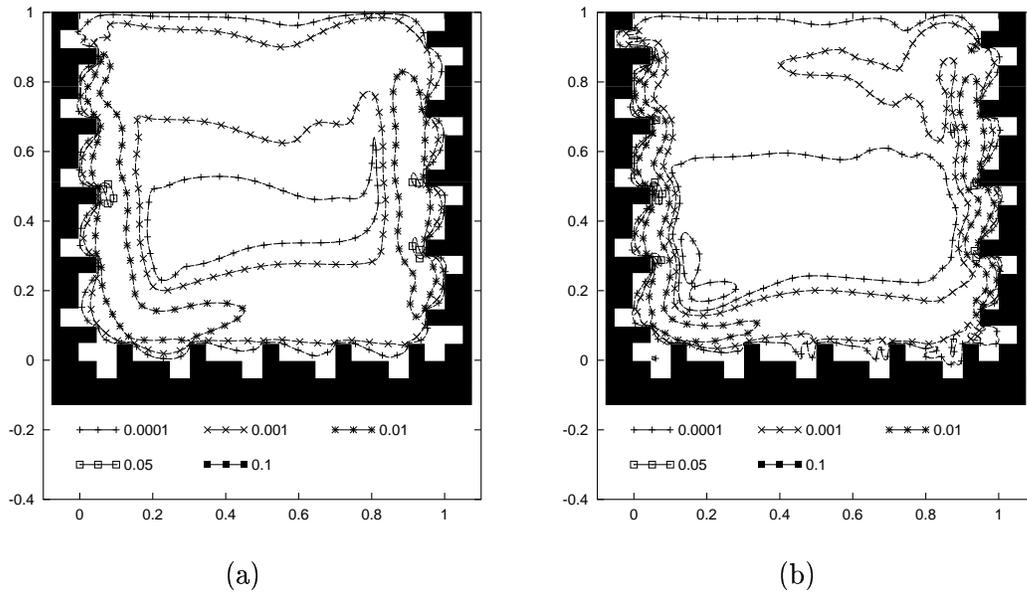


Fig. D.8 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

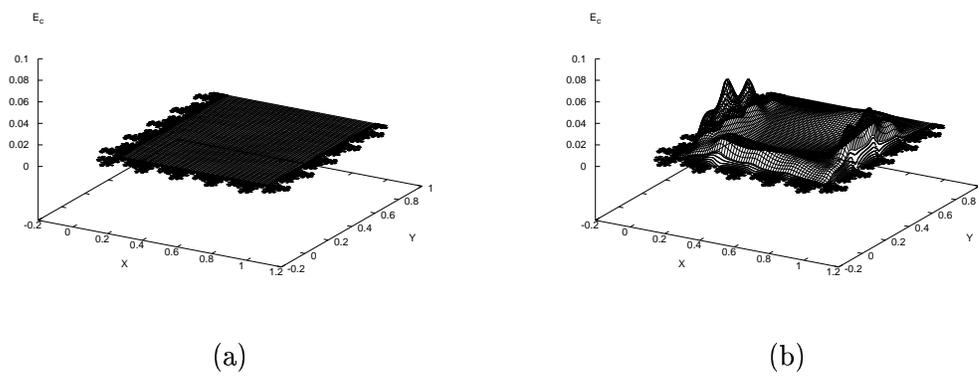
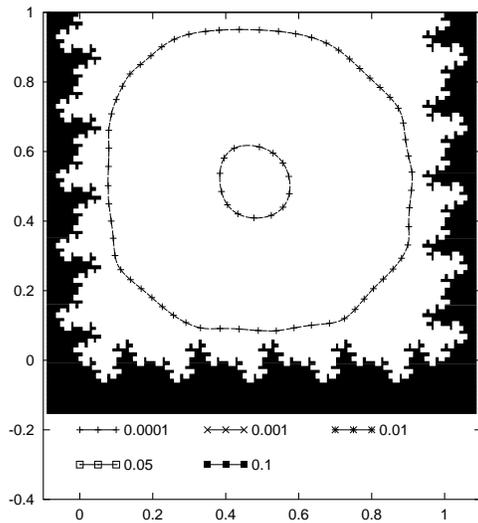
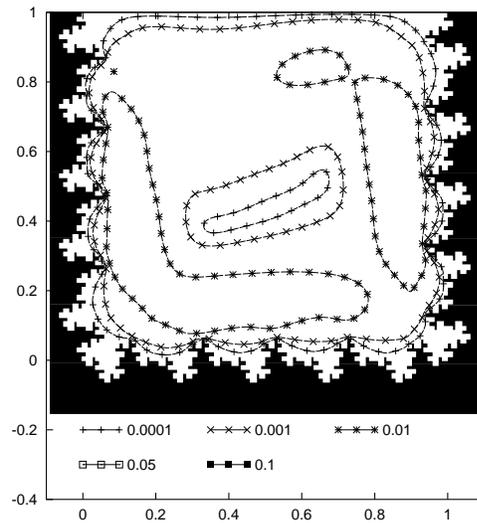


Fig. D.9 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

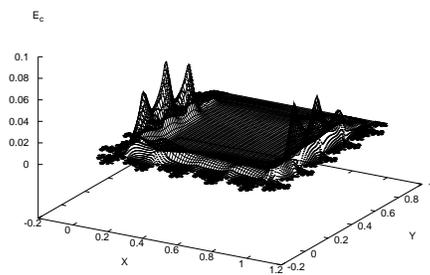


(a)

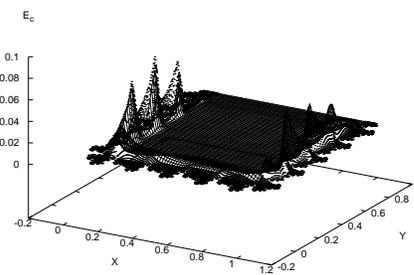


(b)

Fig. D.10 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

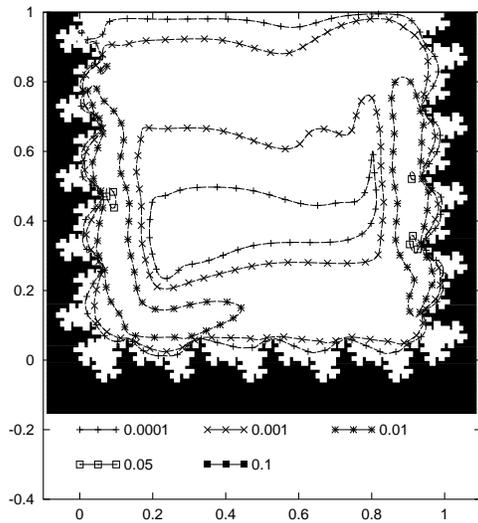


(a)

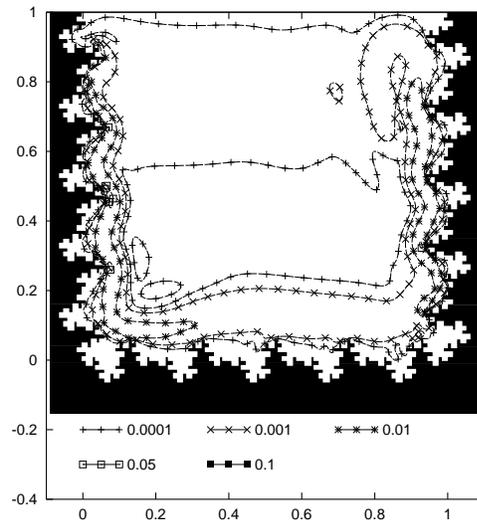


(b)

Fig. D.11 – Superfície de  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

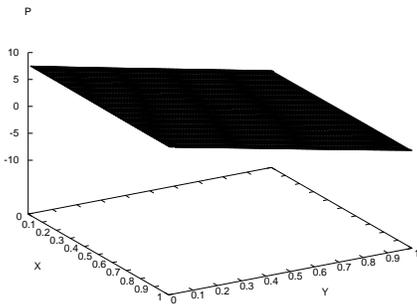


(a)

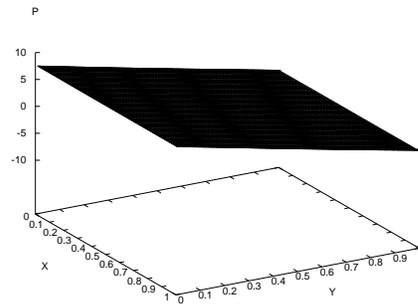


(b)

Fig. D.12 – Isolinas da  $\mathcal{E}_c$  na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

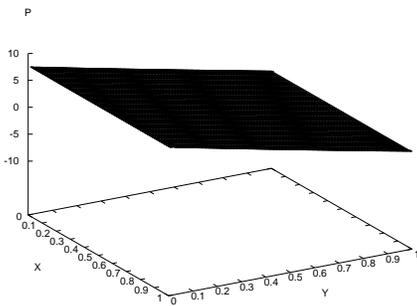


(a)

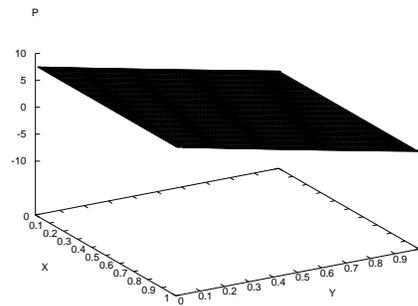


(b)

Fig. D.13 – Superfície de pressão na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

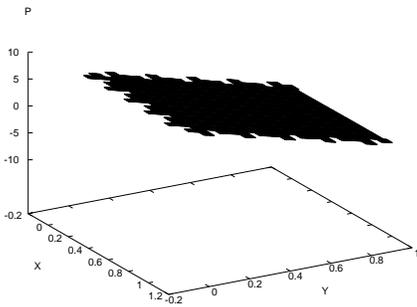


(a)

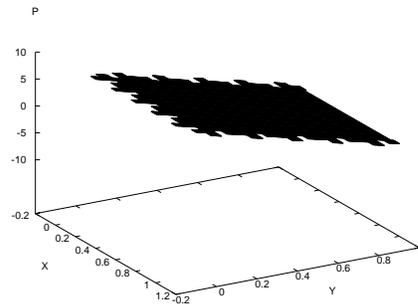


(b)

Fig. D.14 – Superfície de pressão na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

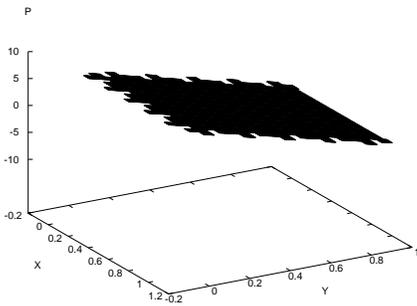


(a)

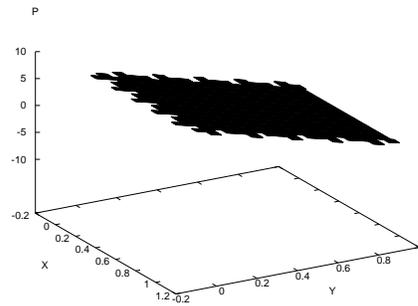


(b)

Fig. D.15 – Superfície de pressão na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .



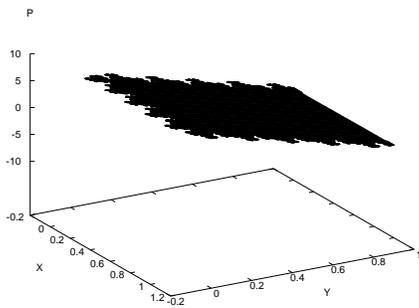
(a)



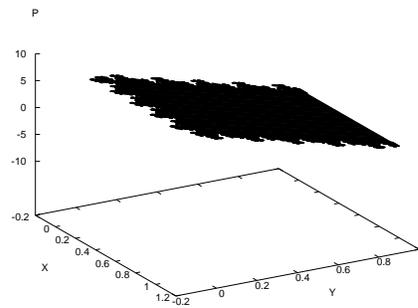
(b)

Fig. D.16 – Superfície de pressão na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente.

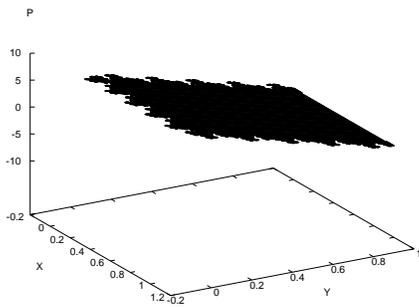


(a)

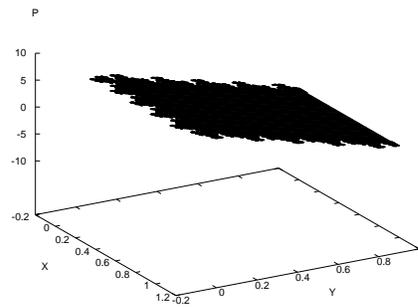


(b)

Fig. D.17 – Superfície de pressão na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .



(a)



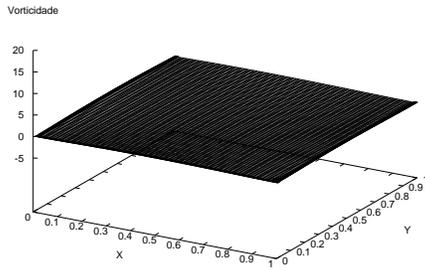
(b)

Fig. D.18 – Superfície de pressão na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

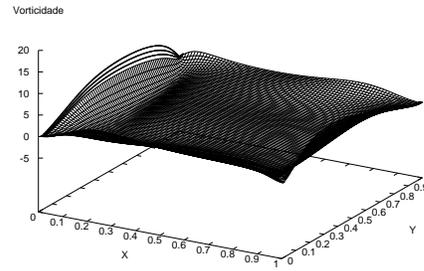
### D.3 Gráficos da Vorticidade

As Figuras D.19 e D.21 exibem a superfície da vorticidade  $\zeta$  na cavidade quadrada, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras D.20 e D.22, para os seguintes valores:  $-7$ ,  $-3$ ,  $0$ ,  $3$ ,  $10$ ,  $20$ .

As Figuras D.23 e D.25 exibem a superfície da vorticidade  $\zeta$  na cavidade fractal 1, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras D.24 e D.26, para os mesmos valores usados na cavidade quadrada.

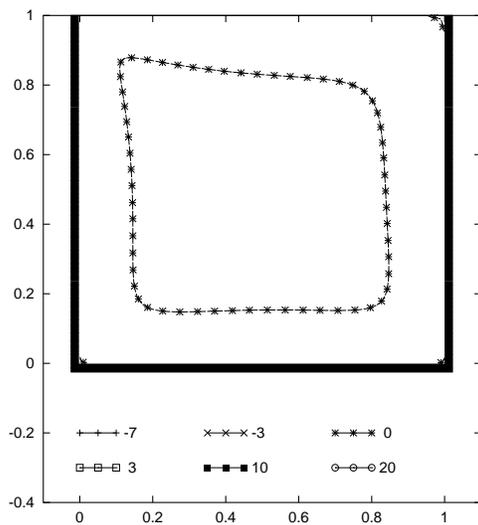


(a)

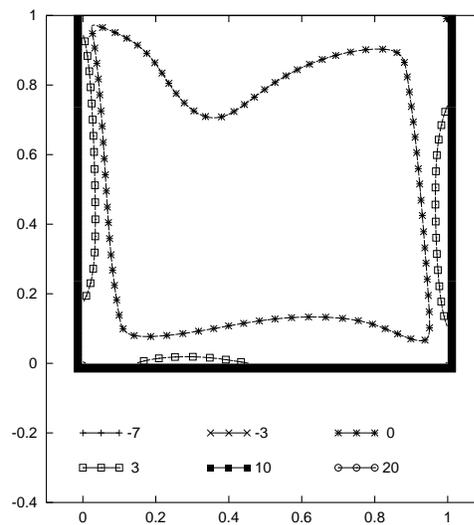


(b)

Fig. D.19 – Superfície de vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

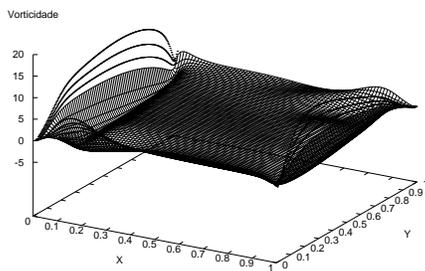


(a)

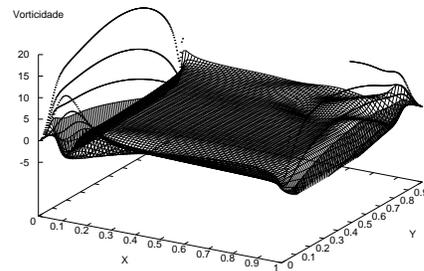


(b)

Fig. D.20 – Isolinhas da vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

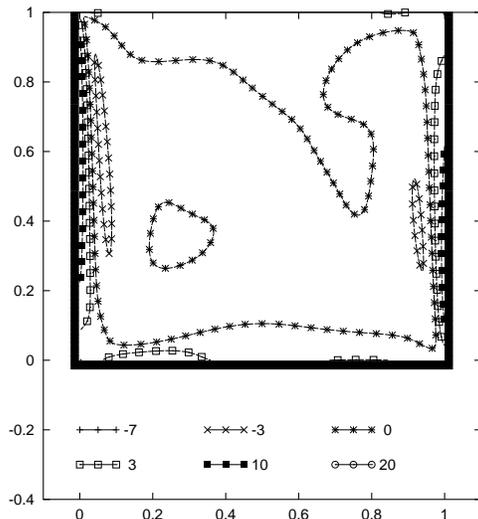


(a)

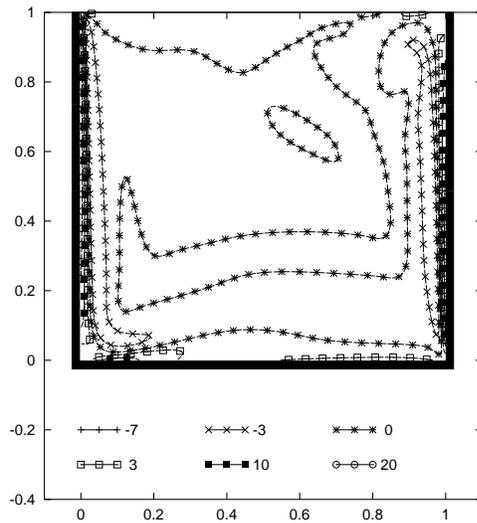


(b)

Fig. D.21 – Superfície de vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

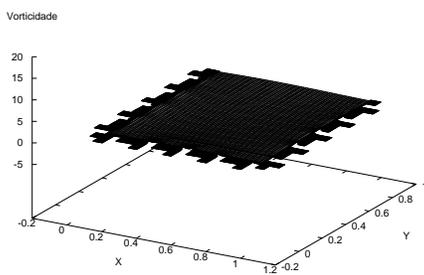


(a)

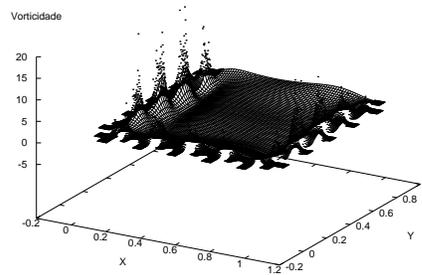


(b)

Fig. D.22 – Isolinhas da vorticidade na cavidade: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

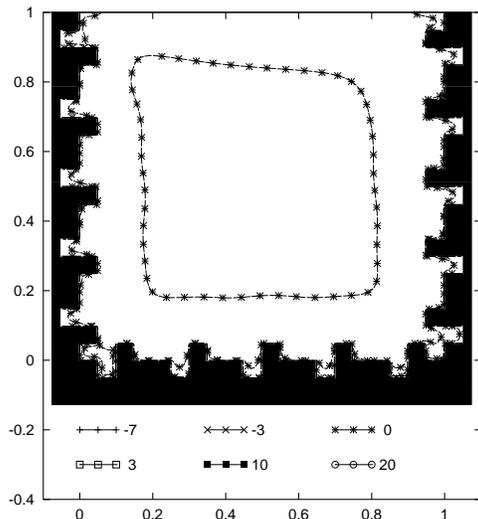


(a)

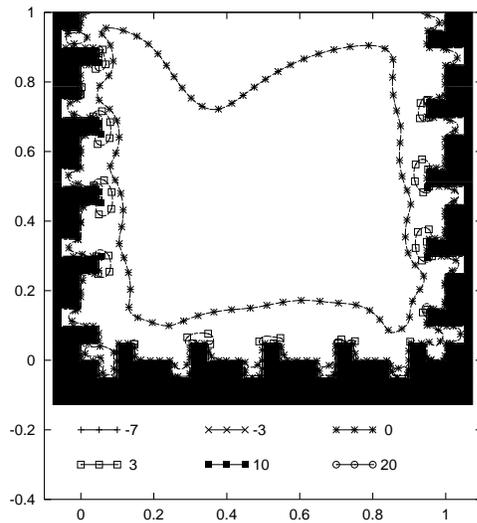


(b)

Fig. D.23 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

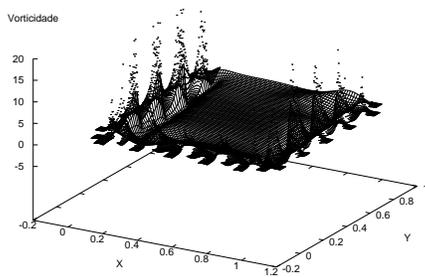


(a)

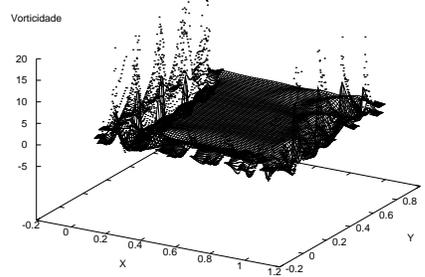


(b)

Fig. D.24 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

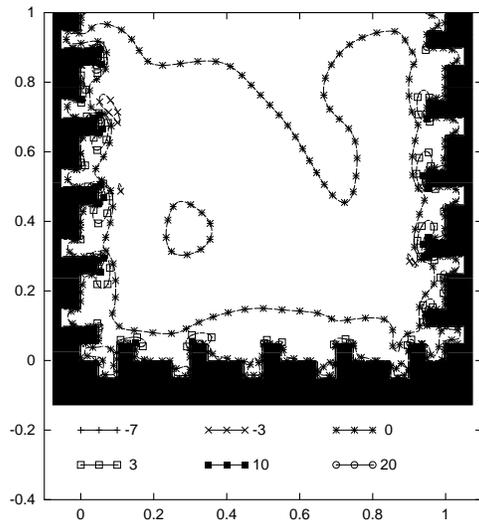


(a)

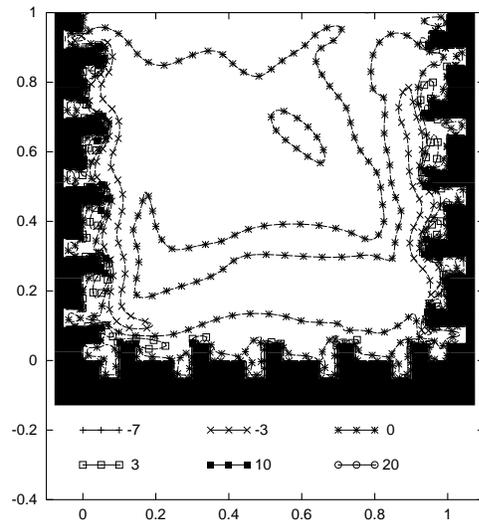


(b)

Fig. D.25 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .



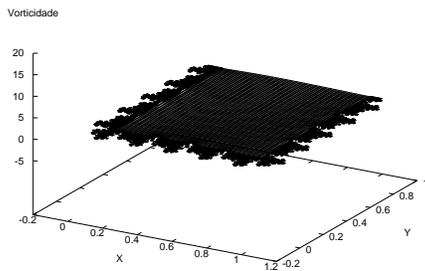
(a)



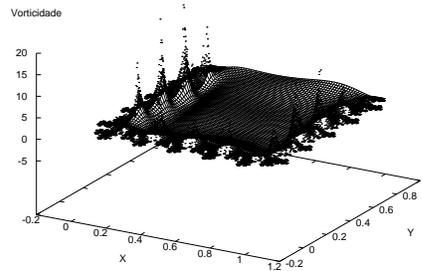
(b)

Fig. D.26 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 1: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .

As Figuras D.27 e D.29 exibem a superfície da vorticidade  $\zeta$  na cavidade fractal 2, para número de Reynolds  $Re$  igual a 10, 400, 1400 e 5000, respectivamente. As isolinhas destas superfícies estão mostradas, respectivamente, nas Figuras D.28 e D.30, para os mesmos valores usados na cavidade quadrada.

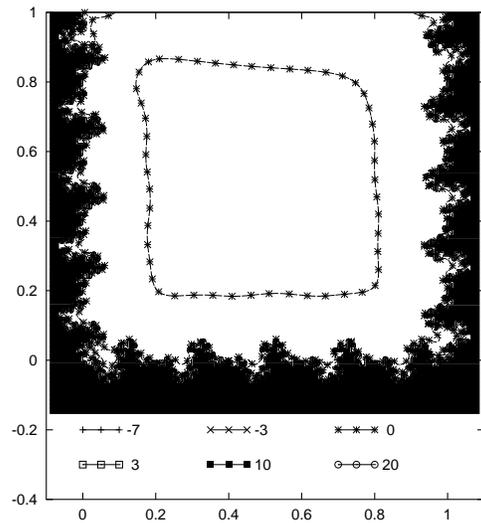


(a)

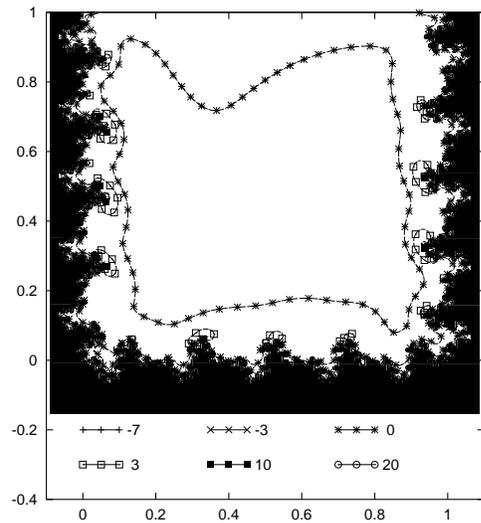


(b)

Fig. D.27 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

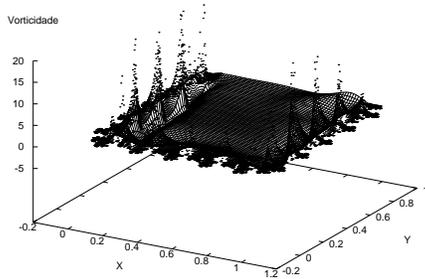


(a)

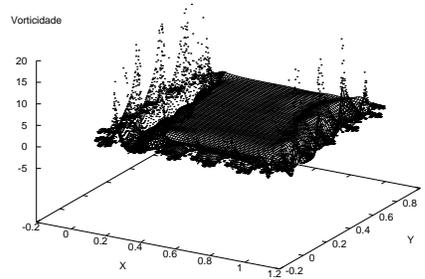


(b)

Fig. D.28 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 10$  (b)  $Re = 400$ .

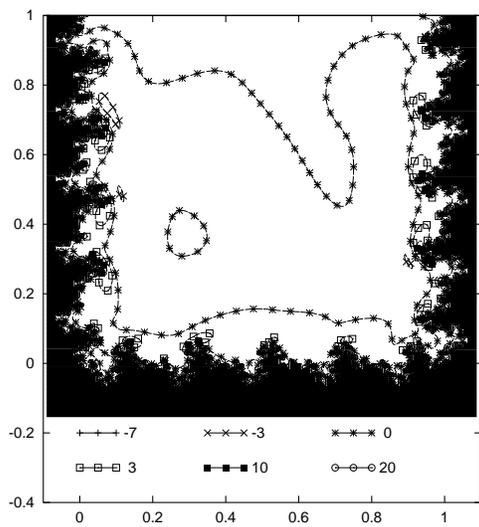


(a)

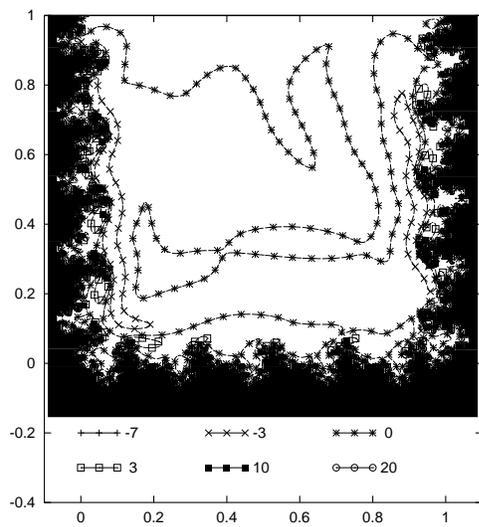


(b)

Fig. D.29 – Superfície de vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .



(a)



(b)

Fig. D.30 – Isolinhas da vorticidade na cavidade fractal 2: (a)  $Re = 1400$  (b)  $Re = 5000$ .



## APÊNDICE E

### ESPECTRO DE FUNÇÕES

Sejam  $y(t)$  uma função e  $t_0, \dots, t_{N-1}$  uma seqüência de valores igualmente espaçados por  $\Delta t$ . Definindo  $y_k = y(t_k)$ , o espectro  $P(f)$  de  $y(t)$ , por uma função janela  $w_j$ , é dada por (Press et al. (1992)):

$$D_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j w_j e^{2\pi i j k / N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{E.1})$$

$$P_0 = P(0) = P(f_0) = \frac{1}{W_{ss}} |D_0|^2 \quad (\text{E.2})$$

$$P_k = P(f_k) = \frac{1}{W_{ss}} [|D_k|^2 + |D_{N-k}|^2] \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (\text{E.3})$$

$$P_{N/2} = P(f_{N/2}) = \frac{1}{W_{ss}} |D_{N/2}|^2 \quad (\text{E.4})$$

sendo :

$$W_{ss} = N \sum_{j=0}^{N-1} w_j^2 \quad (\text{E.5})$$

$$f_k = 2f_c \frac{k}{N} \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{E.6})$$

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{E.7})$$

A função janela quadrada,  $w_j = 1$  para  $j = 0, \dots, N-1$ , ocasiona o aparecimento de lóbulos laterais no espectro, devido a variações abruptas da função nos extremos do intervalo. Por este motivo, é usual utilizar-se de um função janela com decaimento suave, como a função janela de Welch (Figura E.1), dada por:

$$w_j = 1 - \left( \frac{j - \frac{1}{2}N}{\frac{1}{2}N} \right)^2 \quad (\text{E.8})$$

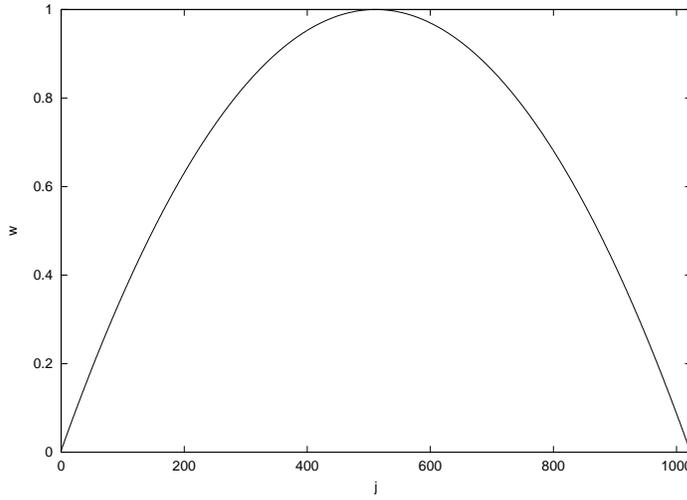


Fig. E.1 – Função janela de Welch ( $N = 1024$ ).

Dado o espectro  $P_k$  de uma seqüência de valores  $y_k$ , o conjunto dos *picos do espectro* é expresso por:

$$\left\{ (f_k, P_k) \mid 1 < k < \frac{N}{2}, \quad P_{k-1} < P_k \quad \text{e} \quad P_{k+1} < P_k \right\} \quad (\text{E.9})$$

### E.1 Resolução e Frequência Máxima de um Espectro

Dada uma seqüência de pontos  $(t_k, y_k)$ , para  $k = 0, \dots, N - 1$ , igualmente espaçados por  $\Delta t$ , a maior frequência representável pelo espectro é  $f_c$ , denominada frequência de corte, de acordo com a equação E.7. Seja  $(t_{mk}, y_{mk})$  uma subamostragem, por um fator  $m$ , da seqüência inicial. Neste caso, o intervalo de tempo passa para  $\overline{\Delta t} = m\Delta t$ , conseqüentemente reduzindo a maior frequência do espectro por um fator  $m$ , ou seja,  $\overline{f_c} = \frac{f_c}{m}$ .

A resolução do espectro, neste caso, é dada por:

$$\Delta f = f_{k+1} - f_k = \frac{2f_c}{N} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{t_{N-1} - t_0} \quad (\text{E.10})$$

A equação E.10 mostra que a resolução do espectro depende do intervalo de tempo total da seqüência e, portanto, não se altera ao considerar subamostragens da seqüência inicial.

## E.2 Exemplos de Espectros de Funções

Considere as seguintes funções:

$$y_1(t) = \cos(2\pi f_1 t) \quad (\text{E.11})$$

$$y_2(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) \quad (\text{E.12})$$

$$y_3(t) = \cos(2\pi f_1 t)[1 + c_m \cos(2\pi f_2 t)] \quad (\text{E.13})$$

$$y_4(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_1 t)[1 + c_m \cos(2\pi f_2 t)], & \text{se } \cos(2\pi f_1 t) > 0 \\ \cos(2\pi f_1 t), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

A função  $y_1(t)$  corresponde a um sinal senoidal simples com frequência igual a  $f_1$ . A função  $y_2(t)$  corresponde a soma de dois sinais cossenoidais com frequências  $f_1$  e  $f_2$ , com mesma amplitude.

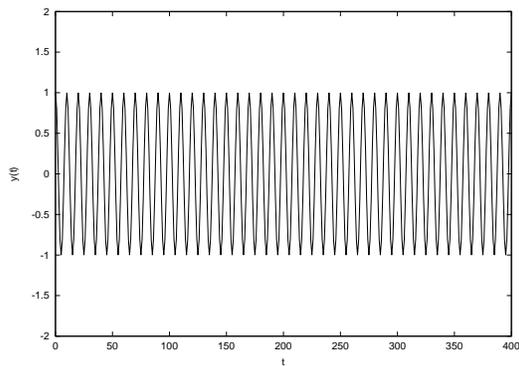
As outras duas funções,  $y_3(t)$  e  $y_4(t)$ , constituem sinais cossenoidais simples de frequência  $f_1$ , modulados por uma frequência  $f_2$ . A amplitude de modulação é controlada pela constante  $c_m$ . A modulação na função  $y_3(t)$  é simétrica, enquanto que na função  $y_4(t)$  a modulação é feita apenas na parte positiva do sinal principal.

Definindo o conjunto de pontos igualmente espaçados por  $h$  entre  $t_i$  e  $t_f$  por  $T(t_i : h : t_f)$ , ou seja,

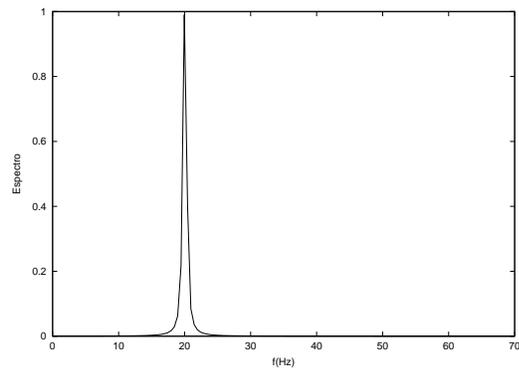
$$T(t_i : h : t_f) = \{t_n \mid t_n = t_i + nh, n \in \mathbf{N} \text{ e } t_i \leq t_n \leq t_f\} \quad (\text{E.15})$$

Considere dois conjuntos de pontos  $T_1 = T(-1 : 0.005 : 1)$  e  $T_2 = T(-100 : 0.5 : 100)$ . A Figura E.2 (a) mostra  $y_1$  sobre o conjunto  $T_1$  para  $f_1 = 20Hz$ . A Figura E.2 (b) mostra o espectro desta função com um pico na frequência principal.

A Figura E.3 (a) ilustra a função resultante da soma de duas funções cossenoidais de mesma amplitude, de acordo com a equação E.12, com frequências  $f_1 = 20Hz$  e  $f_2 = 30Hz$ , sobre o conjunto  $T_1$ . O espectro desta função corresponde a dois picos nas frequências de  $20Hz$  e  $30Hz$ , conforme pode ser visto na Figura E.3 (b). É importante destacar que o pico em  $30Hz$  é ligeiramente menor do que o pico em  $20Hz$ .

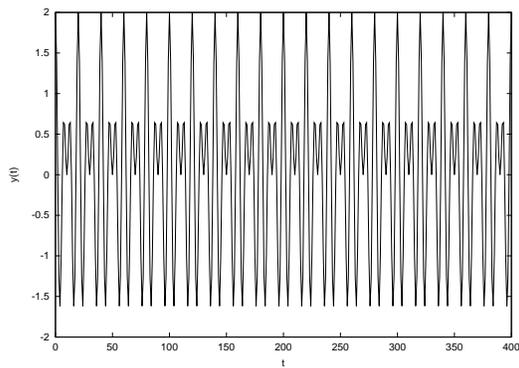


(a)

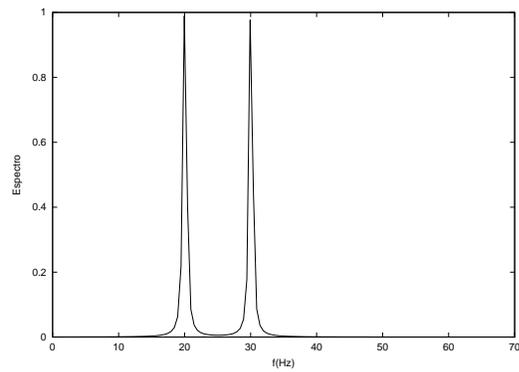


(b)

Fig. E.2 – (a) Função  $y_1$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 20Hz$ ) (b) Espectro de (a).



(a)



(b)

Fig. E.3 – (a) Função  $y_2$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 20Hz$  e  $f_2 = 30Hz$ ) (b) Espectro de (a).

Nas Figuras E.4 (a) e (b) tem-se, respectivamente, a função e o espectro do mesmo tipo de função, mas com frequências  $f_1 = 20Hz$  e  $f_2 = 22Hz$ .

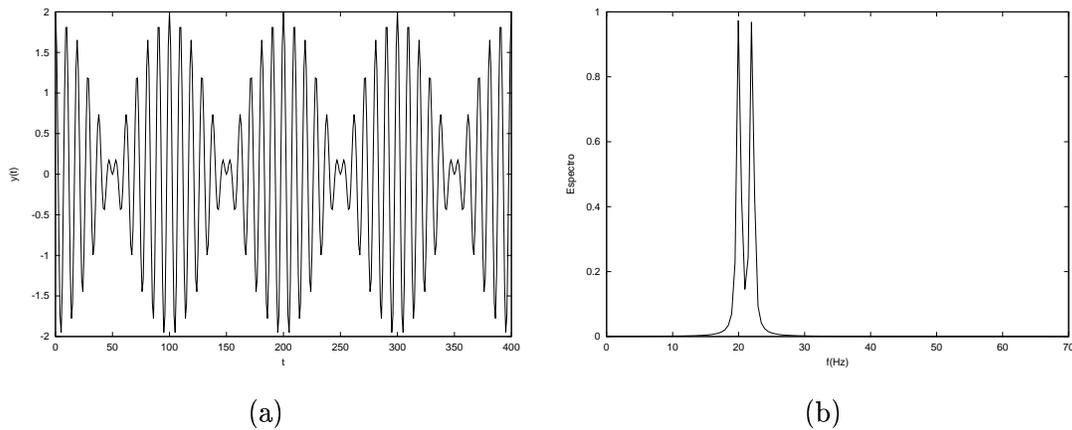


Fig. E.4 – (a) Função  $y_2$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 20Hz$  e  $f_2 = 22Hz$ ) (b) Espectro de (a).

A Figura E.5 (a) mostra o sinal resultante da modulação de uma função cossenoidal de frequência  $f_1 = 20Hz$  por uma outra função cossenoidal de frequência  $f_2 = 5Hz$ , com amplitude  $c_m = 0.2$ . De acordo com o espectro na Figura E.5 (b), observa-se um pico em  $20Hz$  e dois picos em  $15Hz = f_1 - f_2$  e  $25Hz = f_1 + f_2$ . Isto mostra que na análise de sinais modulados deve-se procurar os picos próximos ao pico da frequência principal, e que a diferença entre estes picos e o pico principal é igual a frequência do sinal de modulação.

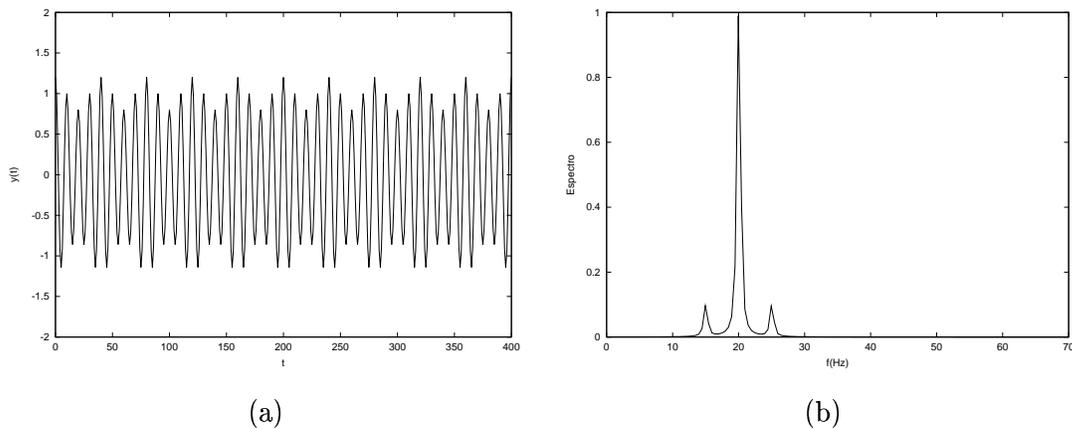


Fig. E.5 – (a) Função  $y_3$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 20Hz$ ,  $f_2 = 5Hz$  e  $c_m = 0.2$ ) (b) Espectro de (a).

Eventualmente este tipo de análise pode ser dificultada se a frequência de modulação for muito pequena. As Figuras E.6 (a) e (b) mostram o sinal e o espectro para o mesmo tipo

de função, considerando  $f_1 = 0.18Hz$  e  $f_2 = 0.03Hz$ , sobre o conjunto  $T_2$ . Observe que os picos da modulação, situados em  $0.15Hz$  e  $0.21Hz$  praticamente desaparecem devido a região de decaimento do pico principal em  $0.18Hz$ .

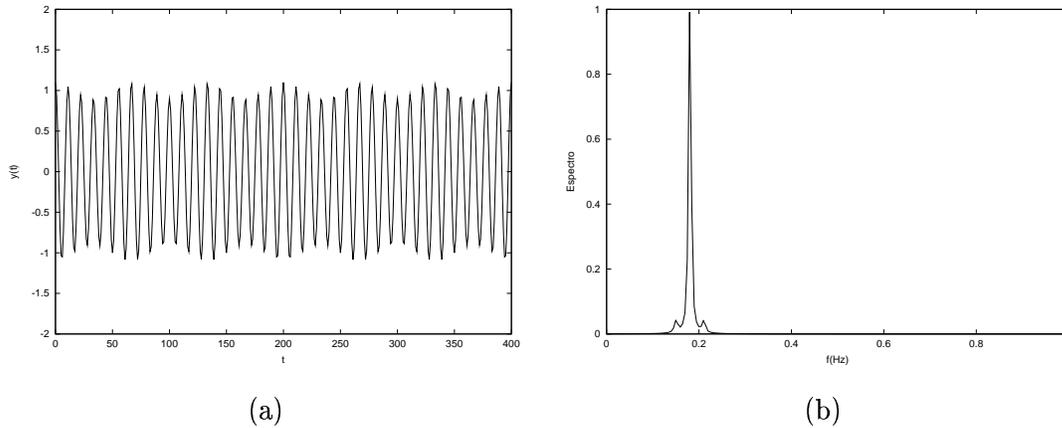


Fig. E.6 – (a) Função  $y_3$  sobre  $T_2$  ( $f_1 = 0.18Hz$ ,  $f_2 = 0.03Hz$  e  $c_m = 0.1$ ) (b) Espectro de (a).

Os sinais das Figuras E.5 e E.6 são modulados simetricamente, nas partes superior e inferior do sinal principal. Nas Figuras E.7 (a) e (b), observa-se o sinal e o espectro de uma modulação realizada apenas na parte superior do sinal principal. Além dos picos nas frequências diferença ( $f_1 - f_2$ ) e soma ( $f_1 + f_2$ ), observa-se o aparecimento de harmônicos em  $kf_1 - f_2$  e  $kf_1 + f_2$ , para  $k = 0$  e  $k = 2$ .

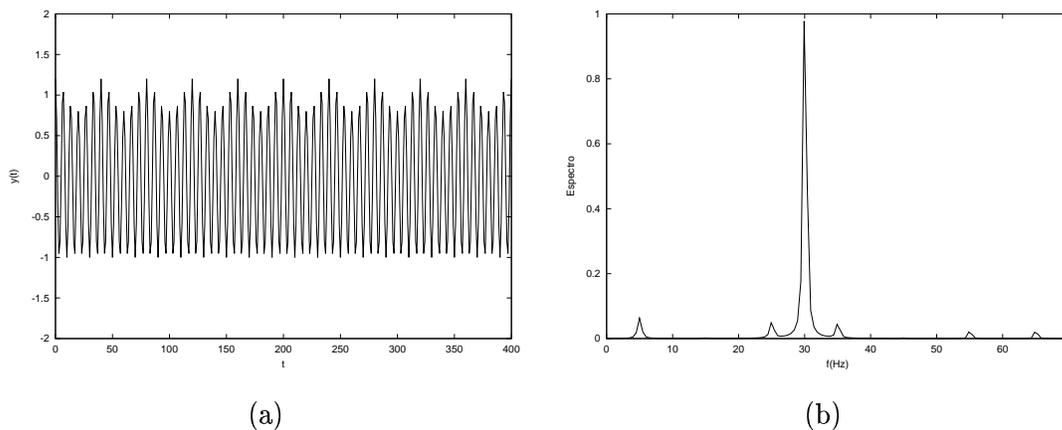


Fig. E.7 – (a) Função  $y_4$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 30Hz$ ,  $f_2 = 5Hz$  e  $c_m = 0.2$ ) (b) Espectro de (a).

Considere as funções:

$$y_5(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_1 t)[1 + c_m \cos(2\pi f_2 t)], & \text{se } \cos(2\pi f_1 t) > 0 \\ \cos(2\pi f_1 t)[1 + c_m \sin(2\pi f_2 t)], & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

$$y_6(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_1 t)[1 + c_m \cos(2\pi f_2 t)], & \text{se } \cos(2\pi f_1 t) > 0 \\ \cos(2\pi f_1 t)[1 + c_m \cos(2\pi f_3 t)], & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

$$(\text{E.18})$$

A equação E.16 representa um sinal cossenoidal cujas modulações inferior e superior apresentam a mesma frequência, porém defasadas. A equação E.17 representa um sinal cossenoidal modulado por frequências diferentes.

De acordo com as Figuras E.8 (a) e (b), a modulação de sinais defasados não apresenta grandes diferenças no espectro com respeito a modulação restrita a parte superior (E.7). Por outro lado, a modulação de sinais com frequências diferentes ocasiona o aparecimento de picos em  $kf_1 - f_3$  e  $kf_1 + f_3$ , para  $k = 0, 1, 2$ , conforme pode ser visto na Figura E.9.

Um processo para encontrar a frequência  $f_p$ , ou frequência principal, e as frequências de modulação menores do que  $\frac{f_p}{2}$ , pode ser descrito pelos seguintes passos:

*Dado o conjunto de picos de um espectro:*

- *A frequência principal corresponde ao pico de maior amplitude*
- *Para cada pico  $(f_j, P_j)$  tal que  $\frac{f_p}{2} < f_j$* 
  - *Verifique se existe um pico com frequência  $f_s$  tal que  $|2f_p - f_s - f_j| \leq \Delta_f$ .*
  - *Se existir então  $f_p - f_j$  é uma frequência de modulação.*

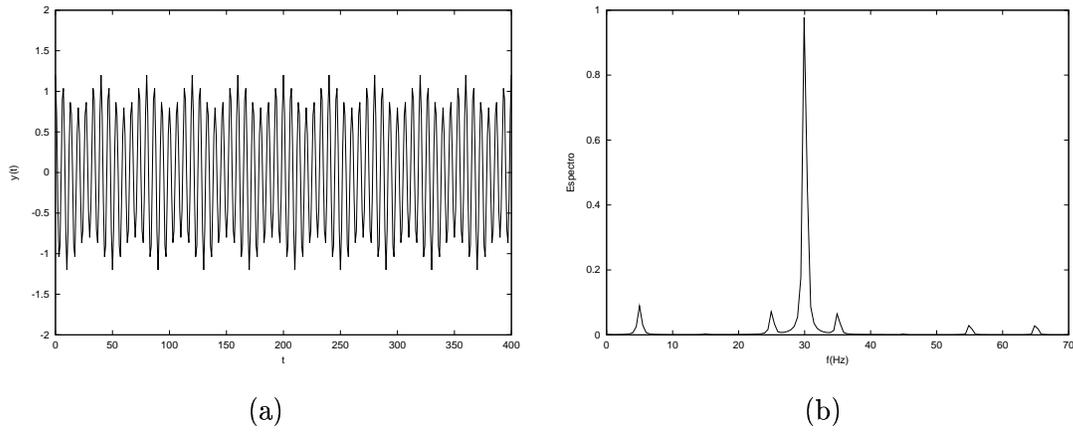


Fig. E.8 – (a) Função  $y_5$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 30\text{Hz}$ ,  $f_2 = 5\text{Hz}$  e  $c_m = 0.2$ ) (b) Espectro de (a).

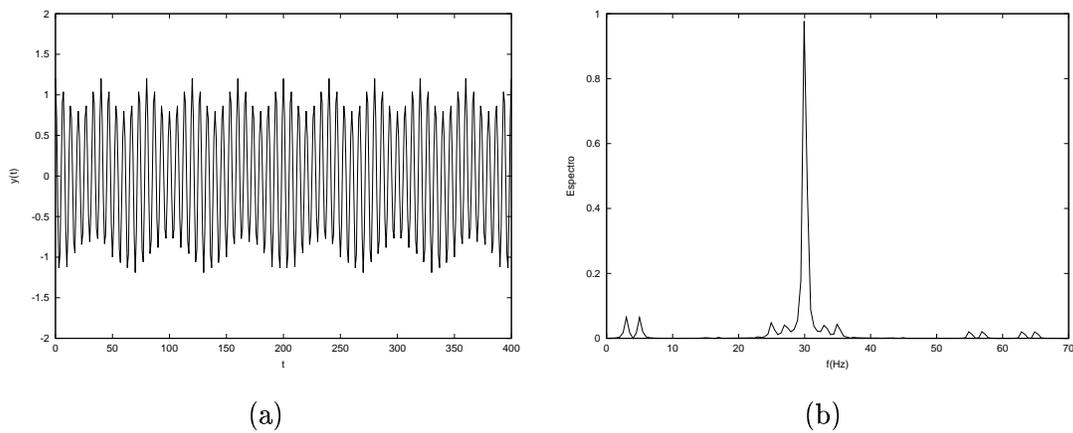


Fig. E.9 – (a) Função  $y_6$  sobre  $T_1$  ( $f_1 = 30\text{Hz}$ ,  $f_2 = 5\text{Hz}$ ,  $f_3 = 3\text{Hz}$  e  $c_m = 0.2$ ) (b) Espectro de (a).

## ÍNDICE

- $\delta$ -cobertura, 40
- Boussinesq, aproximação de, 79
- condição de compatibilidade, 91
- conjunto auto-similar, 45
- convecção
  - forçada, 115
  - natural, 108
- curva auto-afim, 48
- decomposição em valores singulares, 77
- diâmetro de um conjunto, 40
- diferenças finitas, 58
- dimensão
  - de contagem, 42
  - de similaridade, 44
  - de Hausdorff-Besicovitch, 40
- domínio tridimensional, 161
- energia cinética
  - média, 95
  - total, 95
  - variação absoluta, 102
  - variação relativa, 102
- equação de diferenças finitas
  - consistência de, 59
  - convergência de, 59
  - estabilidade de, 59
- equação de Poisson para a pressão, 58
- escoamento
  - medidas, 94
  - não isotérmico, 79
  - visualização, 94
- espaço de fase, 145
- espectro
  - da energia cinética, 136
- fractal
  - auto-afim, 46
  - auto-similar, 45
- função de Weierstrass, 47
- interpolação fractal, 50
- L-System, 50
- método
  - de Chorin, 63
  - de passo único, 75
  - de passo cinco, 75
  - de passo dez, 75
  - iterativo, 75
  - PRIME, 67
  - SIMPLE, 64
  - SIMPLER, 66
  - Velocidade-Pressão, 68
- malha
  - estruturada, 84
  - alternada, 62
  - chimera, 86
  - composta, 85
  - desencontrada, 62
  - não estruturada, 83

- para domínios fractais, 82
- retangular, 62
- triangular, 68

medida de Hausdorff, 40

multigrid, 162

número de

- Grashof, 81
- Prantdl, 80
- Rayleigh, 81
- Reynolds, 57

Navier-Stokes, equações de, 57

- não isotérmico, 80

pré-fractal, 47

problema da cavidade, 97

refinamento por blocos, 162

teorema da equivalência de Lax, 59

transformação afim, 46

turbulência, 162

união

- pontual, 85
- por sobreposição, 86

volume de controle, 61

volumes finitos, 61