



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m16c/2017/01.17.17.34-TDI

ESTUDO DO USO DE MÉTODOS DE CONTROLE ROBUSTO EM SISTEMAS ESPACIAIS RÍGIDOS - FLEXÍVEIS

Alain Giacobini de Souza

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 20 de fevereiro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGPDW34P/3N7MET8>>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):

Presidente:

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m16c/2017/01.17.17.34-TDI

ESTUDO DO USO DE MÉTODOS DE CONTROLE ROBUSTO EM SISTEMAS ESPACIAIS RÍGIDOS - FLEXÍVEIS

Alain Giacobini de Souza

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 20 de fevereiro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGPDW34P/3N7MET8>>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Souza, Alain Giacobini de.

So89e Estudo do uso de métodos de controle robusto em sistemas espaciais rígidos - flexíveis / Alain Giacobini de Souza. – São José dos Campos : INPE, 2017.
xxxii + 195 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m16c/2017/01.17.17.34-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientador : Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza.

1. H infinito. 2. LMI. 3. Controle robusto. 4. Alocação de polos.
5. Sistemas espaciais. I.Título.

CDU 629.783



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Alain Giacobini de Souza**

"ESTUDO DO USO DE MÉTODOS DE CONTROLE ROBUSTO EM SISTEMAS ESPACIAIS RÍGIDOS-FLEXÍVEIS"

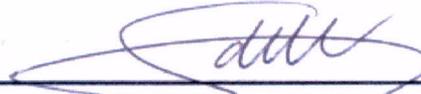
Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de
Almeida Prado



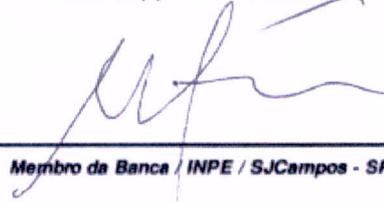
Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza



Orientador(a) / UNB / Brasília - DF

Dr. Mario Cesar Ricci



Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Dr. André Fenili



Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Dr. Luiz de Siqueira Martins Filho



Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 20 de fevereiro de 2017

*“As verdadeiras conquistas, as únicas de que nunca nos arrependemos,
são aquelas que fazemos contra a ignorância”.*

BONAPARTE, NAPOLEÃO

A meus avós **Raymond Giacobini** e **Jacqueline Giacobini** e à minha mãe
Marceline

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me capacitado e guiado até aqui.

Gostaria de deixar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. Gadelha, por toda sua paciência e dedicação ao longo desses anos, mesmo morando tão longe, nunca deixou de me dar atenção e me auxiliando a pensar de forma clara para resolver os problemas gerados ao longo deste trabalho.

Agradeço a minha mãe (Marceline) e avós (Raymond e Jacqueline), pois sem o sonho deles eu jamais teria chegado até aqui. A minha esposa (Eliza) que sempre esteve ao meu lado me apoiando e aconselhando e aos meus filhos Jean-Pierre e Rhubia, por terem cedido uma parte do tempo destinados a eles para a realização desta tese. Agradeço ao meu Pai (Ricardo) e ao meu tio (Philippe) e a toda minha família que sempre esteve ao meu lado nesses anos de doutoramento.

Aos amigos do INPE que muito me ajudaram com seus conselhos e por toda confiança, em especial: Valdirene M, Walter E, Willer G, Wagner M, Santos S, Jairo A, Jairo S, Eloy, Christopher, Pierre, Lorena, Ximena, Jhonathan, Rafael (Rafão), José B.N, William R.

Agradeço aos professores doutores: Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Mario Cesar Ricci, André Fenili e Luiz de Siqueira Martins Filho por gentilmente terem se disponibilizado a vir avaliar este trabalho.

Aos professores do curso, aos funcionários da biblioteca, da pós-graduação e da DMC/INPE.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Aos irmãos da igreja Missão Unida de Evangelização do Brasil pelas orações e todo apoio espiritual.

E de uma forma geral a todos aqueles que de uma forma direta ou indireta, ajudaram na evolução deste trabalho, quanto na minha evolução pessoal.

RESUMO

A demanda da indústria espacial por Sistemas de Controle de Atitude (SCA) mais sofisticados e confiáveis cresce na mesma proporção que as missões espaciais tornam-se mais complexas. Um SCA precisa de bom desempenho e robustez em missões relacionadas com satélite em formação em torno da Terra até missões espaciais que visam investigar planetas fora do nosso sistema solar. Um exemplo disso é a recente missão espacial do satélite (rígido-flexível) Juno ao planeta Júpiter. Nesta tese estuda-se a aplicação de técnicas de controle robusta no projeto de SCA de satélites rígido com movimentos flexíveis e de líquidos em seu interior (*sloshing*). Uma vez que tais movimentos podem causar perturbações na dinâmica do satélite, afetando assim o desempenho do SCA e provocando a perda de precisão e/ou até mesmo a desestabilização do satélite. Por outro lado, a grande dificuldade de se obter um modelo matemático realístico do satélite rígido-flexível com *sloshing* esta relacionado ao não conhecimento exato dos parâmetros do satélite, como massa, amortecimento e rigidez, uma vez que estes variam com o tempo, e por isso, introduzem incertezas que também prejudicam o adequado projeto do SCA. Diante de tais desafios, neste trabalho são estudadas técnicas de controle robusto, como o \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via desigualdades matricial linear (*Linear Matrix Inequality* – LMI), objetivando incrementar a robustez dos SCA. No modelamento do satélite considera-se as perturbações devido ao movimento flexível e dos líquidos e as incertezas devido à variação dos parâmetros. Inicialmente, faz-se o modelamento de um satélite rígido-flexível com *sloshing*. Para este modelo, projeta-se um SCA pelo método \mathcal{H}_∞ e verifica-se que este controlador tem bom desempenho uma vez que controla e estabiliza a atitude do satélite. Em seguida faz uma investigação comparativa do desempenho do SCA projetado para um modelo de satélite rígido-flexível, utilizando o método \mathcal{H}_∞ sem e com incerteza; e do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI, sem e com incerteza. Para ambos os casos, a incerteza é inserida na dinâmica da matriz massa, amortecimento e rigidez. Para a alocação de polos foram estudados quatro regiões LMI resultando na escolha da região que apresentou melhor desempenho. Verificou-se que a incerteza tem maior influencia na matriz massa por meio de um estudo detalhado do nível de torque empregado pelo SCA. As simulações mostraram, que o SCA mais robusto foi obtido usando o método \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI comparado ao SCA projetado pelo método \mathcal{H}_∞ puro. Por fim, verificou-se o desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ projetado, inserindo-o no modelo do satélite rígido-flexível não linear.

Palavras-chave: Controle H infinito. Controle de Atitude. Satélite Flexível. Movimento de líquido. Sistemas não lineares.

STUDY OF THE ROBUST CONTROL METHODS USAGE IN SPACECRAFT RIGID - FLEXIBLE

ABSTRACT

Space industry demand for more sophisticated and reliable Attitude Control Systems (ACS) grows as space missions become more complex. An ACS needs good performance and robustness in satellite-related missions in formation around the Earth to space missions that aim to investigate planets outside our solar system. An example of this is the recent space mission of the (rigid-flexible) satellite Juno to the planet Jupiter. In this thesis we study the application of robust control techniques in the design of ACS of rigid satellites with flexible movements and of liquid in their interior (*slosh*). On the other hand, the great difficulty of obtaining a realistic mathematical model of the rigid-flexible satellite with *sloshing* is related to the lack of exact knowledge of the satellite parameters, such as mass, damping and stiffness, since these vary with time, and therefore, introduce uncertainties that also undermine the appropriate SCA project. Faced with such challenges, robust control techniques are being studied, such as \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_∞ with pole allocation via linear matrix inequalities (LMI), aiming to increase the robustness of ACS. In the satellite modeling, the perturbations due to the flexible movement, and the liquids and the uncertainties due to the variation of the parameters are considered. Initially, a model of a rigid-flexible satellite with sloshing is presented. For this model, a ACS is projected by the \mathcal{H}_∞ method and it is verified that this controller performs well since it controls and stabilizes the attitude of the satellite. It then performs a comparative investigation of the performance of the ACS projected designed for a rigid-flexible satellite model, using the \mathcal{H}_∞ method without and with uncertainty; And \mathcal{H}_∞ with pole allocation via LMI, without and with uncertainty. For both cases, the uncertainty is inserted in the dynamics of the mass matrix, damping and stiffness. For the allocation of poles, four LMI regions were studied, resulting in the choice of the region that presented the best performance. It was verified that the uncertainty has greater influence on the mass matrix through a detailed study of the level of torque used by the ACS. The simulations showed that the most robust ACS was obtained using the \mathcal{H}_∞ method with pole allocation via LMI compared to SCA designed by the \mathcal{H}_∞ method. Finally, it was found that the performance of the projected \mathcal{H}_∞ controller, inserting it into the non - linear flexible - rigid satellite model.

Keywords: H-infinity control. Satellite attitude control. Flexible spacecraft . Liquid sloshing. Non linear systems.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1	Concepção artística das explorações espaciais de 1959 à 2015. 1
1.2	Concepção artística de Juno orbitando Júpiter. 2
2.1	Configuração geral da malha de controle (planta generalizada). 11
2.2	Configuração de controle com um grau de liberdade. 13
2.3	Representação equivalente a Figura 2.2 13
2.4	Configuração para o caso com funções peso. 15
2.5	Diagrama de um sistema multivariável. 16
2.6	Diagrama correspondente a Equação 2.8 em que $z = Nw$ 17
2.7	Comparação entre W_S com W_T 21
2.8	Relação de desempenho 22
2.9	Representação da planta generalizada com incerteza 23
2.10	Representação da região LMI $S(\alpha, r, \theta)$ 27
3.1	Ilustração do fenômeno de sloshing. 31
3.2	Deslocamento do centro de massa do líquido. 32
3.3	Sistema análogo do tipo pêndulo. 33
3.4	Modelo de <i>sloshing</i> 34
3.5	Concepção artística do ATV 35
3.6	Modelo rígido - flexível com slosh. 36
3.7	Valores singulares da planta. 42
3.8	Valores singulares da função sensibilidade S com $\frac{1}{W_S}$ 43
3.9	Valores singulares da função sensibilidade T com $\frac{1}{W_T}$ 43
3.10	Resposta a condição inicial para θ 44
3.11	Resposta a condição inicial para $\dot{\theta}$ 45
3.12	Resposta a condição inicial para ψ 45
3.13	Resposta a condição inicial para $\dot{\psi}$ 46
3.14	Resposta a condição inicial para δ 47
3.15	Resposta a condição inicial para $\dot{\delta}$ 47
3.16	Resposta para o esforço de controle M 48
3.17	Resposta para o esforço de controle f 49
4.1	Concepção artística de um satélite com um apêndice flexível. 51
4.2	China-Brazil Earth Resources Satellite, Satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestre (CBERS). 52
4.3	Rotary Servo Base Unit (SRV02). 52

4.4	Modelo rígido - flexível.	53
4.5	Função de forma para os quatros primeiros modos.	58
4.6	Valores singulares da planta.	62
4.7	Valores singulares da função sensibilidade S com $\frac{1}{W_S}$	63
4.8	Valores singulares da função sensibilidade T com $\frac{1}{W_T}$	63
4.9	Modelo de referência.	65
4.10	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).	66
4.11	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).	66
4.12	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).	67
4.13	Resultado da simulação para a variável η_3 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_3$ (direita).	67
4.14	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	68
4.15	Resultado da simulação para o comportamento do angulo α	68
4.16	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).	69
4.17	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).	70
4.18	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).	70
4.19	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).	71
4.20	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	71
4.21	Resultado da simulação para o comportamento do angulo α	72
4.22	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).	72
4.23	Representação das incertezas paramétricas como LFT.	74
4.24	Diagrama de blocos do sistema com incerteza paraméticas.	75
4.25	Diagrama de entrada/saída do sistema.	76
4.26	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	79
4.27	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	80

4.28	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	80
4.29	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	81
4.30	Resultado da simulação para a variável α , com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	82
4.31	Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle, com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	82
4.32	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	83
4.33	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	84
4.34	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	84
4.35	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	85
4.36	Resultado da simulação para a variável α , com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	86
4.37	Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle, com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	86
4.38	Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho é o caso nominal	88
4.39	Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho é o caso nominal	89
4.40	Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho é o caso nominal	90
4.41	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_1$. Em vermelho é o caso nominal	91
4.42	Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho é o caso nominal	92
4.43	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_2$. Em vermelho é o caso nominal	93
4.44	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal	94
4.45	Resultado da simulação para a variável $\dot{\omega}(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal	95
4.46	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho é o caso nominal	96

4.47	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho é o caso nominal	97
4.48	Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.	98
4.49	Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho é o caso nominal	99
4.50	Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho é o caso nominal	100
4.51	Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho é o caso nominal	101
4.52	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_1$. Em vermelho é o caso nominal	102
4.53	Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho é o caso nominal	103
4.54	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_2$. Em vermelho é o caso nominal	104
4.55	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal	105
4.56	Resultado da simulação para a variável $\dot{\omega}(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal	106
4.57	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho é o caso nominal	107
4.58	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho é o caso nominal	108
4.59	Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.	109
4.60	Representação da região LMI $S(\alpha_{lmi}, r_{lmi}, \theta_{lmi})$	111
4.61	Localização dos pólos e zeros, \mathcal{H}_∞ sem alocação se pólos	112
4.62	Localização dos pólos e zeros para a região 1	113
4.63	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).	113
4.64	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).	114
4.65	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).	114
4.66	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	115
4.67	Resultado da simulação para o comportamento do angulo α	115
4.68	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).	116
4.69	Localização dos pólos e zeros para a região 2	116
4.70	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).	117
4.71	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).	117
4.72	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).	118

4.73	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	118
4.74	Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .	119
4.75	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).	119
4.76	Localização dos pólos e zeros para a região 3	120
4.77	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).	120
4.78	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).	121
4.79	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).	121
4.80	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	122
4.81	Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .	122
4.82	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).	123
4.83	Localização dos pólos e zeros para a região 4	123
4.84	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).	124
4.85	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).	124
4.86	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).	125
4.87	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	125
4.88	Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .	126
4.89	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).	126
4.90	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.	128
4.91	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.	128
4.92	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.	129
4.93	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	130
4.94	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho a resposta para os valores nominais.	130
4.95	Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	131

4.96	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.	132
4.97	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.	132
4.98	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.	133
4.99	Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).	134
4.100	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho a resposta para os valores nominais.	134
4.101	Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle. Em vermelho a resposta para os valores nominais.	135
4.102	Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho o caso nominal.	136
4.103	Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.	137
4.104	Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho o caso nominal.	138
4.105	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_1$. Em vermelho o caso nominal.	139
4.106	Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho o caso nominal.	140
4.107	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_2$. Em vermelho o caso nominal.	141
4.108	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho o caso nominal.	142
4.109	Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.	143
4.110	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso nominal.	144
4.111	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso nominal.	145
4.112	Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.	146
4.113	Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho o caso nominal.	147
4.114	Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.	148
4.115	Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho o caso nominal.	149
4.116	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_1$. Em vermelho o caso nominal.	150
4.117	Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho o caso nominal.	151
4.118	Resultado da simulação para a variável $\dot{\eta}_2$. Em vermelho o caso nominal.	152
4.119	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho o caso nominal.	153
4.120	Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.	154
4.121	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso nominal.	155
4.122	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso nominal.	156

4.123	Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.	157
5.1	Diagrama de blocos que representa o sistema simulado.	163
5.2	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	164
5.3	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	165
5.4	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	165
5.5	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\omega\dot{\omega}(L, t)$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	166
5.6	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	167
5.7	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	167
5.8	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	169
5.9	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	169
5.10	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	170
5.11	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\omega\dot{\omega}(L, t)$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	171
5.12	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	171
5.13	Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	172
5.14	Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	173
5.15	Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	174
5.16	Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	174
5.17	Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\omega\dot{\omega}(L, t)$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	175
5.18	Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	176

5.19 Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear	176
---	-----

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Análise dos Auto-Valores	64
4.2 Variação das matrizes δ_m , δ_d e δ_k	77
4.3 Parâmetros das regiões LMI	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

INPE	–	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
ESA	–	European Space Agency
NASA	–	National Aeronautics and Space Administration
SID	–	Serviço de Informação e Documentação
TDI	–	Teses e Dissertações Internas
SPG	–	Serviço de Pós-Graduação
ETE–CMC	–	Engenharia e Tecnologia Espaciais – Mecânica Espacial e Controle
SCAO	–	Sistema de Controle de Atitude e Órbita
AOCS	–	Attitude and Orbit Control System
SCA	–	Sistema de Controle de Atitude
LMI	–	Linear Matrix Inequality
LQR	–	Linear Quadratic Regulator
LQG	–	Linear Quadratic Gaussian
PRLQG	–	Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian
LTR	–	Loop Transfer Recovery
ATV	–	Automated Transfer Vehicle

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C, D	– matrizes que representam o sistema em espaço de estados.
G	– modelo da planta.
P	– planta generalizada.
K	– controlador.
r	– sinal de referência.
e	– erro ($r - y$).
y	– sinal de saída.
d	– representam os sinais de perturbação.
η	– medida do ruído respectivamente.
w	– entrada exógena/externa dos comandos.
v	– entrada de controle para a configuração geral.
u	– sinal de controle.
z	– saída exógena/externa dos erros dos sinais.
$T(j\omega)$	– função sensibilidade complementar.
$S(j\omega)$	– função sensibilidade.
W_T	– função peso em $T(j\omega)$.
W_S	– função peso em $S(j\omega)$.
W_{KS}	– função peso do controlador.
$\bar{\sigma}$	– máximo valor singular.
Δ	– matriz incerteza.
u_Δ	– saída da incerteza.
y_Δ	– entrada da incerteza.
\otimes	– produto de Kronecker.
\mathbb{C}	– Plano Complexo
m_{eq}	– massa equivalente deslocada–slosh.
$\psi(t)$	– comportamento do <i>slosh</i>
m_f	– massa de líquido
I_f	– momento de inércia do líquido
f	– força transversal
b	– distância do ponto de fixação do pêndulo
a	– comprimento da haste do pêndulo
m	– massa do corpo sem líquido
I	– momento de inércia do corpo sem líquido
θ	– ângulo de atitude do satélite (corpo rígido)
δ	– deformação elástica
ε	– constante de amortecimento.
ω_v	– frequência de vibração do líquido.
\mathcal{L}_{sa}	– Lagrangiana do modelo flexível com slosh.
k_d	– constante de dissipação
m_p	– massa do apêndice flexível

ℓ	– comprimento do apêndice flexível
M	– matriz massa.
D	– matriz amortecimento.
K	– matriz rigidez.
p	– variável muda ou livre.
T	– energia cinética.
V	– energia potencial.
$\theta(t)$	– posição angular do rotor.
R	– raio do rotor.
EI	– rigidez (E é o módulo de Young e I é o momento de inércia seccional).
b_m	– atrito viscoso.
J_{ROTOR}	– momento de inércia do rotor.
τ	– torque gerado pelo rotor.
ρ	– densidade linear da haste.
L	– comprimento da haste.
k_e	– coeficiente de amortecimento.
$\alpha(t)$	– posição do braço em relação à referência.
m_{tip}	– massa do corpo de prova.
J_{tip}	– momento de inércia do corpo de prova.
$w(x, t)$	– deformação elástica da haste.
$\phi_i(x)$	– função de forma.
$\eta(t)$	– coordenada generalizada.
m	– massa.
k	– coeficiente de rigidez.
c	– coeficiente de amortecimento.
$K_{controlador}$	– ganho.
$ \square $	– módulo
$\ \square\ _\infty$	– norma infinita
$\ \square\ _2$	– norma-2.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão Bibliográfica	4
1.2 Objetivos	9
1.3 Organização da tese	9
2 A TEORIA DE CONTROLE H-INFINITO, REPRESENTAÇÃO DA INCERTEZA E A TÉCNICA DE ALOCAÇÃO DE POLOS VIA LMI	11
2.1 O método de controle H infinito (\mathcal{H}_∞)	11
2.1.1 A otimização do método de controle \mathcal{H}_∞	17
2.1.2 Seleção das funções peso	20
2.1.3 Representação e modelamento das Incertezas	22
2.2 Desigualdades matriciais lineares (LMI - <i>Linear Matrix Inequality</i>)	24
2.2.1 As regiões das LMI	25
2.2.2 A técnica da alocação de polos via LMI	27
3 PROJETO DO CONTROLADOR H-INFINITO PARA UM SATÉLITE RÍGIDO-FLEXÍVEL COM SLOSH	31
3.1 Apresentação do modelo do sloshing	32
3.1.1 Modelagem do satélite rígido-flexível com <i>sloshing</i>	34
3.2 Projeto da lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞	41
3.2.1 Seleção das funções peso	41
3.3 Simulações	44
3.4 Sinopse do capítulo	49
4 PROJETO DO CONTROLADOR H-INFINITO COM ALOCAÇÃO DE POLOS VIA LMI PARA UM SATÉLITE RÍGIDO-FLEXÍVEL COM INCERTEZAS.	51
4.1 Modelo do satélite rígido-flexível usando o método dos modos assumidos.	53
4.1.1 Equações de movimento do satélite rígido-flexível	54
4.2 Projeto da lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞	61
4.2.1 Seleção das funções peso	62
4.2.2 Simulação sem incerteza	64

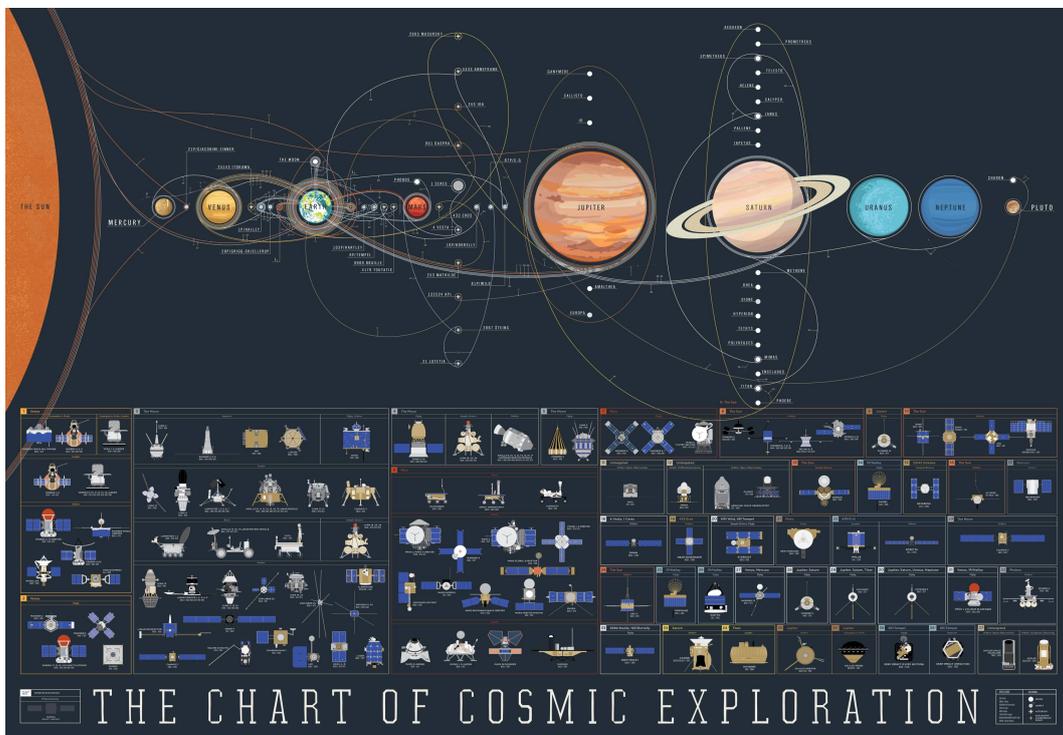
4.3	Modelagem da incerteza.	73
4.3.1	Simulação com incertezas.	76
4.3.2	Simulação com incerteza nas matrizes M , K e D	78
4.3.2.1	Caso com 10% de incerteza	79
4.3.2.2	Simulação com 30% de incerteza	83
4.3.3	Influencia das incertezas nas matrizes M , D e K , no caso em que o controlador é projetado com o método H–infinito.	87
4.3.3.1	Simulação com 10% de incerteza	88
4.3.3.2	Simulação com 30% de incerteza	98
4.4	Projeto da lei de controle usando a técnica \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI	110
4.4.1	Simulação sem incerteza.	111
4.4.2	Simulação com incertezas.	127
4.4.2.1	Simulação com incerteza de 10%.	127
4.4.2.2	Simulação com incerteza de 30%.	131
4.4.3	Influencia das incertezas nas matrizes M , D e K , no caso em que o controlador é projetado com o método H–infinito com alocação de polos via LMI.	135
4.4.3.1	Simulação com incerteza de 10%.	135
4.4.3.2	Simulação com incerteza de 30%.	146
4.5	Sinopse do capítulo	157
5	Investigação do desempenho do ganho linear aplicado na planta não linear.	161
5.1	Modelo não linear	161
5.2	Simulação do caso em que se admite a não linearidade apenas na matriz Massa.	164
5.3	Simulação do caso em que se admite a não linearidade apenas na matriz Amortecimento.	168
5.4	Simulação do caso em que se admite a não linearidade em todo modelo.	172
5.5	Sinopse do capítulo	177
6	CONCLUSÕES	179
6.1	Projeto do controlador H-infinito para um satélite rígido–flexível com <i>slosh</i>	179
6.2	Projeto do controlador H-infinito com alocação de polos via LMI para um satélite rígido–flexível com incertezas.	180
6.3	Investigação do desempenho do ganho linear aplicado na planta não linear.	181
6.4	Principais contribuições deste trabalho.	182

6.5	Sugestões para trabalhos futuros.	183
6.6	Trabalhos publicados	184
6.6.1	Artigos completos publicados em periódico	184
6.6.2	Trabalhos completos publicados em anais de congressos	184
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		187
ANEXO A - MECÂNICA ANALÍTICA		193
A.1	Quasi-coordenadas	193
A.2	Equações de Lagrange	193
A.3	Função de dissipação de Rayleigh	194

1 INTRODUÇÃO

A indústria espacial vem se desenvolvendo amplamente, exigindo que os sistemas de controle de atitude e órbita (SCAO, em inglês AOCS - *Attitude and Orbit Control System*) sejam cada vez mais, confiáveis e robustos. As missões espaciais tem como objetivos estudar e analisar as características da Terra e de outros planetas, enviar e dar suporte a vida, garantir e prover sistemas de comunicação e localização, explorar o espaço profundo (“*Deep space*”). Para ilustrar isto, na Figura 1.1 estão representadas as missões de exploração ao longo do sistema solar.

Figura 1.1 - Concepção artística das explorações espaciais de 1959 à 2015.

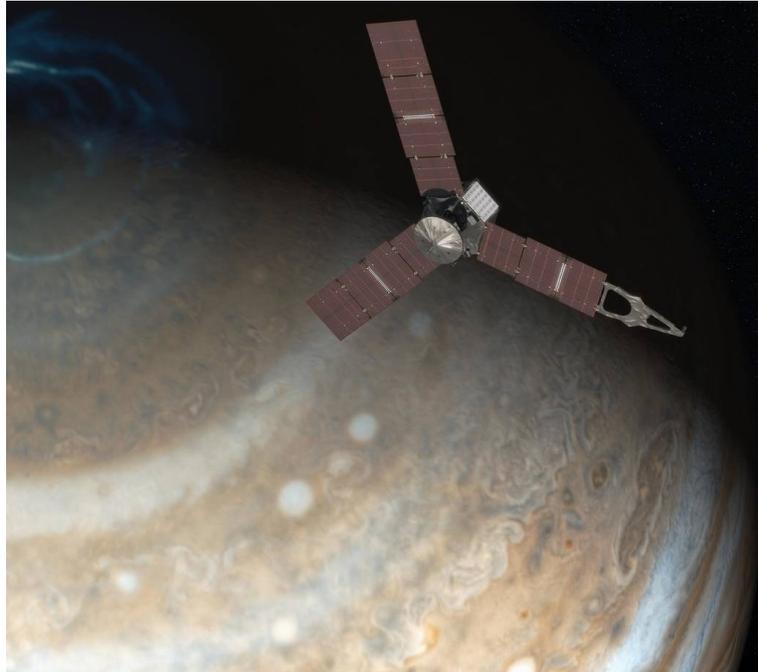


Fonte: http://i.kinja-img.com/gawker-media/image/upload/t_original/13vye3e2fuammmbkjqm2.png acessado em 27 de setembro de 2016.

O exemplo mais recente do aumento da complexidade do projeto de SCA é, a missão espacial do satélite (rígido-flexível) Juno ao planeta Júpiter. A Juno está programada para fazer 37 aproximações e chegar a apenas 4,667 metros das nuvens de Júpiter, se tornando assim o satélite que chegou mais próximo do planeta desde a sonda Pioneer 11, em 1974 (JPL, 2011). Para que estes conjuntos de manobras orbitais e de atitude

tenham êxito o SCAO precisou ser projetado e testado em seus vários níveis e modos de operação.

Figura 1.2 - Concepção artística de Juno orbitando Júpiter.



Fonte: https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/images/index.html acessado em 27 de setembro de 2016.

Com isso se exigem naves espaciais (do inglês *spacecrafts*) específicas que devem atender a requisitos de atitude (velocidade angular, ângulos de apontamento, tempo de aquisição de atitude. . .) rigorosos. Essas *spacecrafts* podem ser: satélites de diferentes tamanhos, veículos transportadores, sondas científicas, naves com manutenção da vida (NASA, 2014). As *spacecrafts* de forma geral, podem ter suas estruturas separadas em dois grupos (SIDI, 1997): Parte interna (corpo) e externa (ligadas ao corpo). Na parte interna é onde estão todos os equipamentos necessários e suficientes para o SCAO (atuadores, sensores, tanques de combustível, eletrônica), assim como toda a carga útil necessária para a missão (sensores de observação, câmeras, computador(es) de bordo), e na parte externa da estrutura é onde ficam fixados os apêndices: antenas, painéis solares, em sua maioria construídos com materiais leves e/ou flexíveis (SIDI, 1997).

Para o projeto do sistema de controle de atitude (SCA) deve se considerar a ação dos movimentos vibracionais dos componentes flexíveis e do movimento do líquido confinado em tanques (chamado na literatura de *sloshing*), pois os eles atuam diretamente na atitude do *spacecraft*. A ação de torques faz com que os componentes flexíveis e/ou o líquido sejam excitados, causando um par ação–reação no corpo, que introduz perturbações (vibrações) na dinâmica do satélite e, conseqüentemente, afeta o desempenho do seu SCA. Estas perturbações estimulam os modos flexíveis podendo causar uma perda de precisão da atitude, ou mesmo desestabilizar o satélite (BRYSON, 1994), fazendo com que o esforço de controle ultrapassa a largura de banda e desestabilizando os modos de vibração, para isto se dá nome de “*spillover*”.

Os métodos de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são as duas principais correntes, na teoria de controle robusto, aplicáveis ao controle de sistemas rígido–flexíveis. A principal vantagem do uso destes métodos é a possibilidade da inserção de incertezas na planta suprimindo as imperfeições da modelagem, o que possibilita o projeto de um controlador mais robusto e menos conservador (ZHOU; DOYLE, 1998), além disso, estes métodos permitem o uso de desigualdades matriciais lineares (LMI – Linear Matrix Inequality) na síntese do controlador, que corrigem, ou melhoram seu desempenho e robustez.

Na última década se desenvolveu algoritmos numéricos capazes de resolver os problemas de desigualdades matriciais lineares (LMI), com isto o LMI surgiu como uma ferramenta útil para resolver uma ampla variedade de problemas de controle especialmente para problemas multicritério (WU et al., 2009). Através das LMI pode-se modificar os métodos convencionais e juntar os resultados em uma estrutura comum (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Assim as LMI’s podem ser usadas para se mesclar a síntese do \mathcal{H}_∞ restringindo a posição dos polos para uma dada região no plano complexo (CHILALI; GAHINET, 1996), evitando que os polos sejam alocados em posições indesejáveis. Sendo útil para controlar tanto o comportamento transiente como os aspectos de desempenho e robustez (CHILALI, 1994).

De acordo com Charbonnel (2004) os desafios de tais técnicas inovadoras são de dois tipos: 1) Encarar requisitos cada vez mais rigorosos de controle de atitude (em termos de desempenho e robustez); 2) Reduzir drasticamente o tempo necessário para projetar uma lei de controle apropriada (através de uma abordagem metodológica mais direta e simplificada).

1.1 Revisão Bibliográfica

Na dissertação de mestrado (SOUZA, 2013) é explorado a influência no controle a interação da flexibilidade com o movimento de líquido (*slosh*). São apresentados quatro modelos: apenas corpo rígido, corpo rígido mais *slosh*, corpo rígido com flexibilidade e corpo rígido com *slosh* e flexibilidade. A estes modelos são aplicadas leis de controle projetadas com os métodos LQR (*Linear Quadratic Regulator*), LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). Para o modelo corpo rígido flexível é projetado, de forma adicional, um controlador do tipo \mathcal{H}_∞ . A partir do conceito de análogos mecânicos o movimento do líquido (*sloshing*) é modelado a partir de um pêndulo e com o auxílio de um filtro de Kalman é estimado um parâmetro do *slosh*, garantindo as propriedades dessa dinâmica. Os resultados mostraram que os controladores obtiveram um bom desempenho controlando a atitude dos satélites, o que significa dizer que a lei de controle baseada no método \mathcal{H}_∞ para um satélite rígido–flexível foi capaz de controlar a atitude, embora num intervalo de tempo muito maior do que os obtidos com as outras leis de controle implementadas.

No artigo Reyhanoglu (2011) é apresentado o equacionamento de um satélite baseado na mecânica Lagrangiana, e são apresentados dois tipos de análogos mecânicos que podem substituir a complexa dinâmica do *sloshing*. Um sistema massa–mola e um modelo de um pêndulo. Para o modelo em que se substitui o *sloshing* pela dinâmica de um pêndulo, são projetadas duas leis de controle, uma baseada em Lyapunov e outra usando o método LQR. Estas duas leis são aplicadas a dinâmica não linear do satélite. Os resultados obtidos mostraram que ambas as leis conseguiram amortecer o movimento do líquido satisfatoriamente.

A fim de modelar o *slosh* para melhor estudar as irregularidades da dinâmica que foram apresentadas durante manobras de rotação do Saturn S–IVB, Dodge (1969) propôs uma comparação entre o *slosh*, modelado com um equivalente mecânico, com um modelo em escala capaz de obter os dados do comportamento do *slosh*. Concluiu-se que a dinâmica do pêndulo representou de forma excelente o comportamento do *slosh*, quando comparado ao modelo experimental, outra conclusão importante obtida foi que apenas sete por cento do líquido participa no movimento de corpo rígido do tanque durante a excitação de rotação.

Na dissertação de mestrado (PINHEIRO, 2013) é explorada a técnica de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como uma introdução a técnica de alocação de polos via LMI (*Linear Matrix Inequality*) aplicado em um satélite rígido. Um nano satélite é modelado, considerado que existe incerteza em seus momentos de inércias. Em um primeiro

momento é inserido ao controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ a incerteza dos momentos de inercia. Em seguida é considerada uma alocação de polos usando o LMI sobre esse controle misto. Para a alocação de polos via LMI é usado um cone, com abertura virada para o semi-plano esquerdo, como fronteira para essa alocação. As simulações numéricas mostraram que os controladores baseados na técnica mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com e sem LMI foram capazes de atenuar as perturbações inseridas via torques externos.

No que diz respeito a implementações numéricas do método H-infinito, Chilali (1994) descrevem uma *toolbox* baseada em MatLab® para o projeto de controladores via LMI e suas aplicações voltadas para o controle de sistemas espaciais.

O artigo (CHARBONNEL, 2004) propõe uma metodologia para se selecionar a melhor, ou a mais apropriada, estratégia para a aplicação de uma lei de controle de atitude usando \mathcal{H}_∞ / LMI para modelos com grandes apêndices flexíveis. Os resultados foram aplicados com sucesso durante os estudos de fase A do projeto *Sample Return Mars* para o modo *Rendez-Vous*.

Em Magarottot et al. (1998) são comparadas duas abordagens LMI para técnicas de projeto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. As abordagens são, uma primeira com uma fase de otimização e uma segunda substituindo a etapa de otimização por uma via de realização (*feasibility*). Estas duas técnicas são aplicadas a duas aplicações aeroespaciais usando um design assistido por computador para sistemas espaciais desenvolvidos por MMS, chamado ASTROLAB. A conclusão obtida da implementação do $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ foi capaz de prover um alto nível de eficiência para a otimização do desempenho, mostrando que o uso dos *solvers* LMI são uma boa alternativa para os clássicos *solvers* da Equação Algébrica de Riccati.

No artigo Chilali e Gahinet (1996) é proposto o projeto de um controlador \mathcal{H}_∞ com retroalimentação em que deve ser satisfeitos condições de contorno para a alocação dos polos em malha fechada. Estas condições são expressas em forma de desigualdades matriciais (LMI). Também é apresentado um exemplo do projeto de um controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ utilizando a técnica das restrições de alocação de polos. Os resultados apresentados introduziram uma nova caracterização LMI para regiões convexas demonstrando a utilidade dessa síntese para a alocação de polos para \mathcal{H}_∞ .

Em Pittet et al. (2000) é projetado um controlador multiobjectivo baseado em desigualdades matriciais (LMI). Uma otimização \mathcal{H}_∞ é usada para controlar a dinâmica de um micro-satélite sujeito a perturbações, levando em conta o atraso

(*delay*) dos sensores, a saturação dos atuadores e os modos flexíveis. O controlador projetado é comparado com um controlador de atraso de fase e validado com o modelo não linear do satélite. As conclusões obtidas mostraram que o controlador \mathcal{H}_∞ teve um resultado melhor no ponto de vista de estabilidade, sem saturação dos atuadores, tempo de resposta e amortecimento obtendo uma maior robustez paramétrica e este resultado comparativo também foi confirmado na simulação do modelo não-linear.

Na dissertação de mestrado [Valdivia \(2007\)](#) é mostrado à modelagem um satélite rígido flexível com seus estados flexíveis estimados via filtro de Kalman. Este modelo é submetido a três leis de controle projetadas usando os métodos LQR, LQG e LQG/LTR (*Loop Transfer Recovery*). A partir de simulações numéricas concluiu-se que as boas propriedades de robustez e desempenho do LQR são perdidas no LQG, pois este é o LQR associado a um estimador de estados (Filtro de Kalman). As boas propriedades de robustez do LQR, como também um tempo de resposta rápida, são novamente obtidas quando é inserida na malha a técnica do LTR.

Na tese de doutorado [Souza \(1992\)](#) é apresentado um modelo rígido-flexível que representa a dinâmica da configuração MB-1 da estação espacial. É projetado um controlador robusto usando o método LQG, baseado em uma versão modificada do PRLQG (*Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian*), levando em conta as incertezas dos parâmetros e da dinâmica não modelada. O objetivo do controlador robusto é atuar na atitude e suprimir as vibrações do modelo MB-1 da estação espacial levando em conta as incertezas citadas no modelo. A partir de simulações numéricas, observou-se que mesmo sobre condições iniciais severas, o controlador projetado foi capaz de controlar a atitude da estrutura rígido-flexível rapidamente e amortecer o deslocamento flexível dos painéis. Cabe ressaltar que esta técnica foi inovadora, por que a métrica das incertezas fazia parte dos valores dos parâmetros de ajustes da metodologia de controle PRLQG proposta.

No artigo [Sales et al. \(2013\)](#) é proposto uma estratégia de controle passivo usando transdutores piezoelétricos. O modelo usado é de um satélite com dois painéis flexíveis idênticos, contendo elementos piezoelétricos simetricamente fixados em suas superfícies e que usa uma roda de reação para o controle de atitude. As equações do modelo flexível, proposto no artigo, são baseadas no método dos modos assumidos, considerando a eletrodinâmica acoplada e a presença de dois tipos de circuito. Os resultados demonstram que controlando as vibrações dos painéis, também se controlava os níveis de acoplamento entre os movimentos de corpo rígido e flexível,

reduzindo assim significativamente a energia utilizada em ambos os circuitos, embora tal eficácia mostrou-se maior para os circuitos de derivação resistiva-indutivos.

No artigo [Bigot e Souza \(2013\)](#) estudam-se as dificuldades de se controlar um servo mecanismo, rígido-flexível, devido a suas características não lineares, por meio de técnicas de controle linear. Na verdade mostra-se que é quase impossível controlar o deslocamento flexível e que por isso o despenho e a robustez do controlador não podem ser melhorados. De modo a contornar esse problema foi usado o método conhecido como Estado Dependente da Equação de Riccati (SDRE – *State Dependent Riccati Equation*) para o projeto do controle do modelo de um satélite rígido-flexível não linear composto por uma viga flexível acoplada a uma parte central rígida. A inovação da técnica empregada permitiu estabelecer uma relação direta entre os parâmetros de ajuste do método SDRE e os estados do sistema como posição angular, velocidade angular e deslocamento flexível.

No artigo [Fenili e Souza \(2004\)](#) investiga-se a resposta da ação de um controlador, projetado para o modelo linear, aplicado no modelo não linear de um sistema que compreende um feixe flexível ligado a um atuador (motor DC). A lei de controle é projetada e testada para o modelo linear sem influência da dinâmica da estrutura sobre a fonte de energia, e para o modelo matemático linear e não-ideal, em que a dinâmica da estrutura interage com a dinâmica da fonte de energia. A curvatura do feixe é considerada linear e o único termo não-linear presente aqui vem de efeitos centrípetos. Embora o ganho do controlador seja obtido usando o modelo linear, seu desempenho é testado também para o modelo não-linear com bons resultados. As baixas e altas velocidades são investigadas para verificar a robustez da lei de controle proposta ao lidar com o termo não inicialmente considerado.

No trabalho de [Tafazoli e Khorasani \(2006\)](#) é apresentado um estudo a respeito da estabilidade da lei de controle em malha fechada de um satélite rígido flexível usando o método de Lyapunov. O sistema é implementado em um simulador de alta fidelidade de ambiente amigável (*user friendly*), em que se investiga o controle da atitude do satélite usando uma abordagem de linearização que basicamente separam o problema em duas partes; 1) parte externa linearizável em que o controlador é facilmente implementado e 2) parte interna não linear e não observável associado a um zero dinâmico. Em ambos os casos o sistema foi verificado como sendo assintoticamente estável.

Em [Axelsson et al. \(2014\)](#) é proposta uma síntese de um projeto de um controlador \mathcal{H}_∞ , para uma junta flexível, com características não lineares, tendo em vista que as

não linearidades do modelo atuam em uma determinada região do amortecimento, se servindo do paradigma de Lyapunov que permite reescrever as não linearidades de modo a obter um problema de otimização convexa, o que caracteriza o problema LMI. Este método foi então validado ao se projetar um controlador para uma junta flexível que opera em um robô industrial.

Em Zhang et al. (2008) projeta-se uma classe de controladores não lineares para um satélite com um par de apêndices flexíveis, ao qual se aplica um torque não linear por realimentação. Nesta técnica, os controladores também são projetados a partir da conversão das equações da dinâmica do satélite flexível em um problema de otimização convexa restrito a LMI. Simulações numéricas são apresentadas, em que o desempenho do controle das manobras rotacionais foi realizado de forma eficiente, e com boa precisão concomitantemente ao amortecimento das vibrações.

Em Saad et al. (2012) é apresentado um estudo da comparação entre o modelo linear e o modelo não linear de uma haste flexível sujeita a movimentos rápidos. As equações da dinâmica são obtidas a partir da mecânica Lagrangiana sujeitas a vínculos. As simulações comparam o comportamento dos modelos linear e não linear. Foi concluído que, para pequenas amplitudes, a diferença entre as duas dinâmicas são imperceptíveis, mas para grandes amplitudes a diferença é significativa.

Na tese de doutorado de Pazelli (2011) é apresentado o projeto e construção de um simulador de braço robótico e a aplicação de um controle adaptativo robusto baseado em \mathcal{H}_∞ . Esta tese é dividida em duas partes: 1) focada no projeto e construção do controlador; 2) a junção da adaptabilidade das redes neurais com a robustez de um controlador \mathcal{H}_∞ não linear, obtendo-se um controlador para o simulador do braço robótico. Por fim é apresentada uma série de simulações numéricas que comparavam a eficácia do controlador e comparam sua resposta quando aplicado ao simulador obtendo uma resposta satisfatória com relação aos requisitos propostos pelo autor.

Na dissertação de mestrado de Gonzales (2009) é apresentado o projeto de uma lei de controle para o simulador de sistema de controle de atitude similar ao do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais). Para minimizar a possibilidade de baixo desempenho e instabilidade, a lei de controle foi projetada para um modelo não linear do simulador. A utilização da técnica de controle conhecida como SDRE, associada à técnica do filtro de Kalman, permitiu incorporar as não linearidades do modelo do simulador no projeto do controlador e a estimação dos estados do sistema que não eram obtidos por leitura direta dos sensores. Nas simulações numéricas apresentadas observa-se que o controlador baseado no SDRE foi capaz de controlar a atitude e a

velocidade angular da plataforma com dinâmica não linear, o que não foi possível ser feito ao se comparar com o controlador obtido pela técnica LQR.

1.2 Objetivos

Com a revisão da literatura observou-se que existem algumas lacunas no desenvolvimento teórico e na aplicação prática da técnica de controle robusto conhecida como métodos \mathcal{H}_∞ quando as incertezas do modelo são consideradas no projeto do controlador. Tais lacunas serão estudadas e investigadas nesta tese por meio dos cinco principais objetivos, que são sumarizados a seguir.

- 1) Modelar um satélite rígido–flexível e, em seguida, modelar o satélite rígido–flexível considerando o movimento de líquido em seu interior (*sloshing*¹).
- 2) Estudar a aplicação da técnica de controle \mathcal{H}_∞ no projeto do controlador do satélite rígido–flexível e do satélite com um tanque semipreenchido com líquido, como sugerido por Souza (2013), a fim de obter um sistema de controle com maior robustez.
- 3) Estudar e aplicar a técnica de controle \mathcal{H}_∞ com e sem alocação de polos via LMI no projeto do controlador do satélite rígido–flexível com incertezas paramétricas, visando obter um sistema de controle mais robusto. Verificar o comportamento dos polos. Comparar o desempenho, robustez e posição dos polos entre os controladores \mathcal{H}_∞ com e sem alocação de polos via LMI, como o proposto por Pinheiro (2013).
- 4) Estudar e explorar as propriedades de robustez do método \mathcal{H}_∞ no controle de sistemas espaciais rígido–flexíveis levando em consideração as incertezas do modelo no projeto do controlador.
- 5) Investigar a influência das não linearidades do modelo rígido–flexíveis no desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ .

1.3 Organização da tese

Esta tese foi organizada na seguinte forma:

No Capítulo 2 é apresentado um resumo dos principais aspectos da teoria de controle robusto, em particular no método \mathcal{H}_∞ e na técnica de controle que permite a fusão

¹nome dado ao movimento de líquido confinado em tanque parcial preenchido.

do método \mathcal{H}_∞ com as propriedades do LMI. Apresenta-se também um resumo sobre o modelamento dos tipos de incertezas e a sua introdução no projeto de controle objetivando torna-lo mais robusto.

No Capítulo 3 apresenta-se uma breve revisão sobre a teoria que descreve o movimento de líquidos (*sloshing*) e o modelamento de um satélite rígido-flexível com *slosh*. O modelo do satélite é obtido usando a mecânica lagrangiana e o movimento do líquido é modelado através de um análogo mecânico do tipo pendulo. Além disso, apresentam-se os principais aspectos e procedimentos para se projetar um sistema de controle robusto usando o método \mathcal{H}_∞ , cujo objetivo é controlar a atitude do satélite rígido-flexível e ao mesmo tempo reduzir a interação *slosh*-flexibilidade.

No Capítulo 4 apresenta-se uma breve revisão sobre a teoria de corpos flexíveis, em particular de uma viga, o qual satisfatoriamente pode ser utilizado para representar um painel flexível. Derivam-se as equações de movimento de um satélite rígido-flexível usando a mecânica lagrangiana e o método dos modos assumidos. Apresenta-se também o procedimento para se projetar um Sistema de Controle de Atitude (SCA) de um satélite rígido-flexível por meio do método de controle \mathcal{H}_∞ com e sem incerteza no modelo. Em seguida, apresenta-se o projeto de um SCA mesclando a técnica \mathcal{H}_∞ com alocação via LMI com e sem incerteza. Por fim, apresenta-se um estudo detalhado sobre a influência da incerteza paramétrica no desempenho dos controladores \mathcal{H}_∞ /LMI projetados.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões e as principais contribuições que este estudo gerou e fornece sugestões para novas pesquisas.

2 A TEORIA DE CONTROLE H-INFINITO, REPRESENTAÇÃO DA INCERTEZA E A TÉCNICA DE ALOCAÇÃO DE POLOS VIA LMI

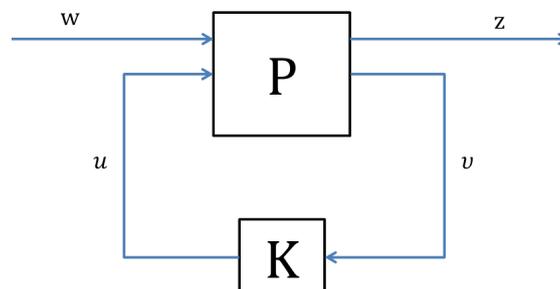
O objetivo de um controlador é moldar a resposta do sistema dado a uma referência e obter (ou manter) o sistema estável em malha fechada com um desempenho desejado (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Um controlador robusto, por sua vez, deve ser capaz de manter o desempenho desejado e a estabilidade, mediante a presença de incertezas e/ou perturbações na planta, salientando as diferenças entre o modelo real da planta e o modelo usado para o projeto.

2.1 O método de controle H infinito (\mathcal{H}_∞)

Nas últimas décadas vem se aperfeiçoando um método de otimização que apresentou resultados muito motivadores com respeito à robustez, mostrando ser bem eficaz para sistemas de controle lineares e invariantes no tempo. Este método é o \mathcal{H}_∞ . De uma forma geral o problema do \mathcal{H}_∞ consiste em: Dados os requisitos do projeto, montar um sistema, com os devidos filtros (matrizes pesos), de forma a adequar o sistema para as condições de desempenho e robustez e, em seguida, criar um problema de minimização da matriz função de transferência, em malha fechada, usando a norma infinita.

Para uma síntese desta técnica, primeiro deve ser introduzido o conceito de planta generalizada, desenvolvida por Doyle (em 1983; 1984) (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), a qual será seguida daqui por diante, e que permite organizar o sistema em uma forma compacta, como mostra a Figura 2.1:

Figura 2.1 - Configuração geral da malha de controle (planta generalizada).



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Na Figura 2.1 P é o modelo da planta generalizada, que inclui o modelo da planta, o modelo das perturbações e a interconexão estrutural entre a planta e o controlador (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). O bloco P também pode armazenar funções peso (filtros); K é o controlador; w é a entrada exógena/externa dos comandos, perturbações e ruídos; z é a saída exógena/externa dos erros dos sinais a serem minimizados; v é a entrada de controle para a configuração geral, que alimenta o sistema com comandos, a medida da saída da planta, medidas das perturbações entre outras. Em casos específicos pode ser escrito como: $r - y$ (erro); u é o sinal de controle.

De um modelo em espaço de estados em que a entrada é dada por $u = u(t)$, a saída por $y = y(t)$ e os estados representados por $x = x(t)$, tem-se o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

O conjunto A , B , C e D representam um modelo padrão para os problemas de otimização multivariável. Ao se decompor este sistema, separando as componentes provenientes da entrada e da saída do sistema, obtém-se o conjunto de equações:

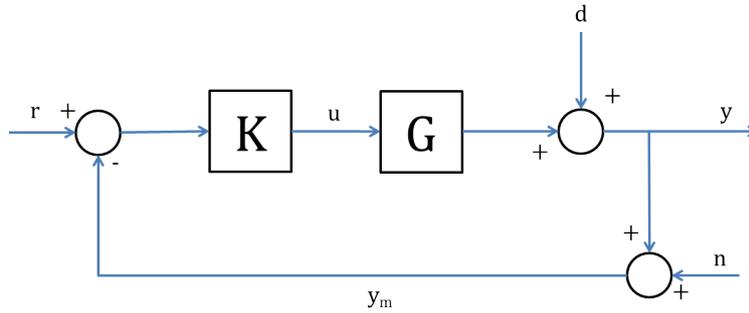
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u\end{aligned}\tag{2.2}$$

Organizando o conjunto de equações (Equação 2.2) se tem a planta generalizada em forma matricial, que é dada por:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \end{array} \right)\tag{2.3}$$

A Equação (2.3) representa a planta generalizada escrita de forma geral em espaço de estados. Para determinar P e K , para um caso específico (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Deve-se encontrar uma representação tal que seja possível identificar os sinais w , z , v e u . Partindo do diagrama do problema, expresso na Figura 2.2.

Figura 2.2 - Configuração de controle com um grau de liberdade.

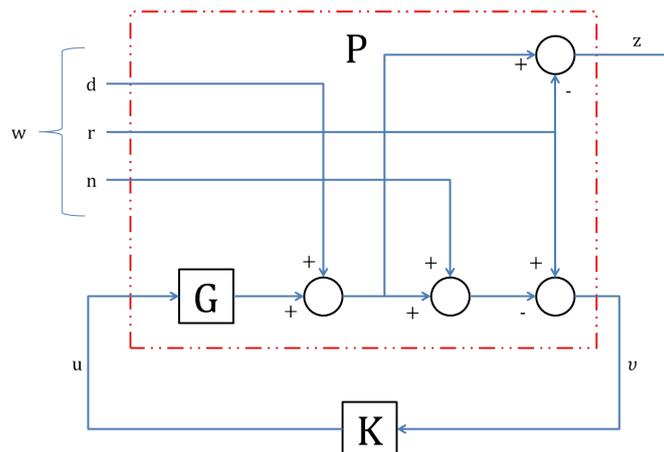


Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Na Figura 2.2 é exposto um sistema de controle em que K representa o controlador, G a planta, r o sinal de referência, u o sinal de controle, η representa ruídos, d distúrbios, y o sinal de saída e y_m é o sinal de saída corrompido.

Resolvendo a álgebra de blocos e abrindo as malhas que entram e saem do controlador e da planta, pode se escrever o diagrama de blocos representado na Figura 2.3:

Figura 2.3 - Representação equivalente a Figura 2.2



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Na Figura 2.3 tem-se exatamente as mesmas informações contidas na Figura 2.2, só que representadas de forma a mostrar o arranjo da planta generalizada P (destacado dentro do quadrado vermelho). Assim fica mais fácil visualizar as partes que a nova planta engloba. As variáveis d , r e η representam os sinais de perturbação (ruído de processo), de referencia e medida do ruído, respectivamente.

Para expressar algebricamente a planta generalizada, deve-se resolver o diagrama de blocos (Figura 2.3).

$$\omega = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

A Equação 2.4 representa as entradas exógenas do sistema e, de acordo com Skogestad e Postlethwaite (2001), também pode se escrever que:

$$\begin{aligned} z_1 &= W_K s u \\ z_2 &= W_T G u \\ z_3 &= W_S \omega + W_S G u \\ v &= -\omega - G u \end{aligned} \quad (2.5)$$

com isto:

$$\begin{aligned} z &= y - r = G u + d - r = I w_1 - I w_2 + 0 w_3 + G u \\ v &= r - y_m = r - G u - d - n = -I w_1 + I w_2 - I w_3 - G u \end{aligned} \quad (2.6)$$

com I sendo uma matriz identidade. Por fim P representa a matriz função de transferência de $[wu]$ para $[zv]$, assumindo a expressão matricial:

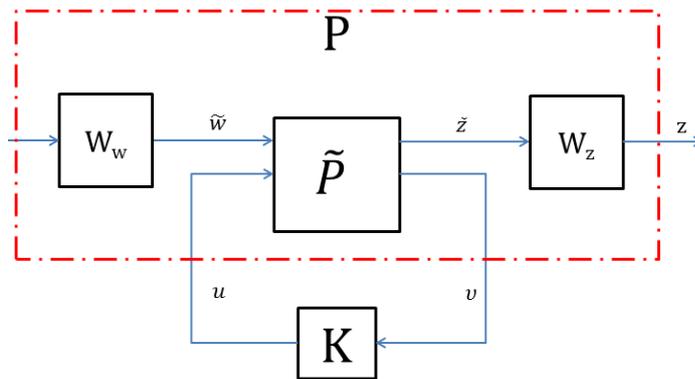
$$P = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Desta forma obtém-se um exemplo de determinação algébrica da planta generalizada, representada pela matriz P , para um caso com a configuração de controle de realimentação com um grau de liberdade. Este caso é discutido com mais detalhes em Skogestad e Postlethwaite (2001).

Outra configuração para o projeto do controlador consiste em acrescentar funções peso a planta generalizada. Essas funções peso W_z e W_w estão relacionadas com a entrada e a saída da planta.

A função W_z está relacionada com as entradas \tilde{w} que informam os sinais físicos do sistema: perturbações, referências e ruídos. A função W_w está relacionada com a saída \tilde{z} , que geralmente se encarrega de minimizar o erro de controle $y - r$ e da manipulação do sinal de controle u . Em uma representação em diagrama de blocos, tem-se a Figura 2.4.

Figura 2.4 - Configuração para o caso com funções peso.



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Da Figura 2.4 tem-se que $\omega = W_w \tilde{w}$ e $z = W_z \tilde{z}$. Na maioria dos casos se considera, sem perda de generalidade, que $W_w(s)$ e $W_z(s)$ são estáveis e de mínima fase.

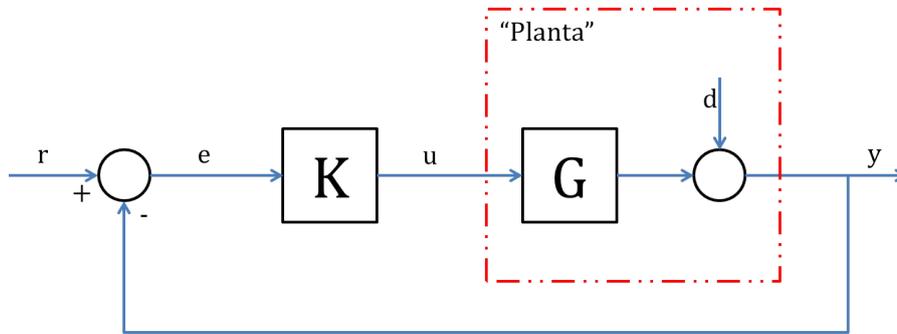
Aproveitando a discussão realizada em Skogestad e Postlethwaite (2001). Em que se considera um problema \mathcal{H}_∞ com o objetivo de relacionar $\bar{\sigma}(S)$ (máximo valor singular da função sensibilidade) para o desempenho, $\bar{\sigma}(T)$ (máximo valor singular da função sensibilidade complementar) para robustez e diminuir a sensibilidade a ruído e $\bar{\sigma}(KS)$ para reduzir entradas muito grandes, organiza-se o sistema da seguinte forma:

$$\min_K \|K\|_\infty, \quad N = \begin{bmatrix} W_{KS}KS \\ W_T T \\ W_S S \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

em que K é um controlador estabilizador.

As funções peso W_{KS} , W_T e W_S tem como objetivo ponderar o desempenho, robustez e a energia consumida pelo sistema, atuando sobre as funções sensibilidade S , sensibilidade complementar T e da relação KS .

Figura 2.5 - Diagrama de um sistema multivariável.



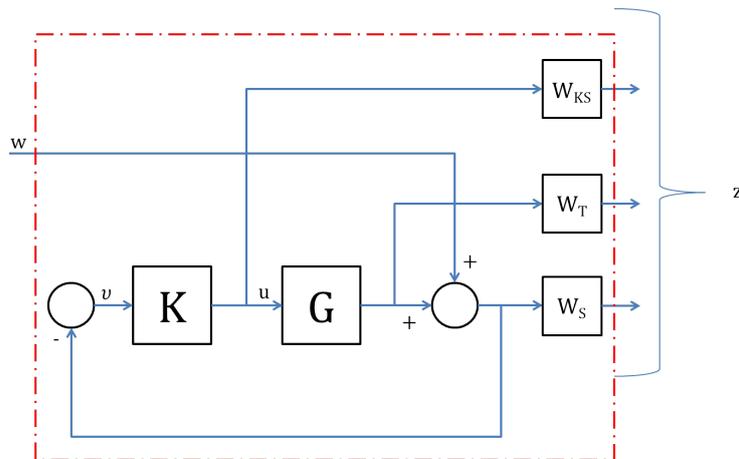
Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Da Figura 2.5 pode se definir as funções S e T como sendo:

$$\begin{aligned} S(s) &= (I + G(s)K(s))^{-1} \\ T(s) &= G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = I - S(s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

A Equação 2.9 mostra as funções S e T no domínio da frequência $s = j\omega$. A Figura 2.6 representa uma possível configuração para a solução do problema.

Figura 2.6 - Diagrama correspondente a Equação 2.8 em que $z = Nw$



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

A partir do diagrama de blocos expresso na Figura 2.6 tem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 z1 &= W_{KS}u \\
 z2 &= W_TGu \\
 z3 &= W_S\omega + W_SGu \\
 v &= -\omega - Gu
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

E por fim, reorganizando a Equação 2.10, tem-se P , que representa a função de transferência de $[w \ u]^T$ à $[z \ v]^T$, assumindo a expressão:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_u \\ 0 & W^T \\ W_p I & W_p G \\ -I & -G \end{bmatrix}
 \tag{2.11}$$

Na Equação 2.11 temos o modelo da planta generalizada para este caso.

2.1.1 A otimização do método de controle \mathcal{H}_∞

Tendo como referencia o diagrama de blocos generalizado apresentado na Figura 2.1, o problema do controlador ótimo \mathcal{H}_∞ consiste em estabilizar o controlador K e

minimizar a expressão:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(F_l(P, K)(i\omega)) \quad (2.12)$$

A norma \mathcal{H}_∞ possui diferentes interpretações em termos de desempenho. Uma delas consiste em minimizar o pico do máximo do valor singular de $F_l(P, K)(i\omega)$. Uma interpretação no domínio do tempo pode ser estabelecida como sendo o pior do caso norma-2.

Considerando que um sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$u = K(s)v \quad (2.14)$$

sendo que a matriz P pode ser dada por:

$$P \stackrel{s}{=} \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$F_l(P, K)\omega = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.16)$$

e que $F_l(P, K)\omega$ representa a função de transferência em malha fechada de w até z .

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_{\omega(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} \quad (2.17)$$

na qual $\|z(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i |z_i(t)|^2 dt}$ que é a norma-2 do sinal do vetor $z(t)$. Sendo γ_{min} o valor mínimo de $\|F_l(P, K)\|_\infty$. Então o problema de controle dará $\gamma > \gamma_{min}$, a fim de estabilizar os controladores K de forma que:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (2.18)$$

Este, por sua vez, é resolvido usando o algoritmo, desenvolvido por Doyle e outros em 1989 (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), o qual por uma redução iterativa do valor de, γ obtém-se uma solução ótima. Entretanto, antes da aplicação do algoritmo, deve-se verificar se as condições abaixo são válidas para o sistema considerado.

A planta generalizada apresentada na Equação 2.3 deve satisfazer as condições:

- a) (A, B_2, C_2) devem ser estabilizáveis e detectáveis
- b) D_{12} e D_{21} devem possuir posto (“rank”) completo;
- c) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ deve possuir posto completo para todo ω ;
- d) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ deve possuir posto completo para todo ω ;
- e) $D_{11} = 0$ e $D_{22} = 0$

A condição (a) garante a existência de um controlador K , a condição (b) é suficiente para garantir que o controlador seja próprio e realizável. As condições (c) e (d) garantem que o controlador ótimo não tente cancelar polos e zeros no eixo imaginário, o que resultaria em uma instabilidade em malha fechada (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Estas condições são verificadas nos softwares do *Robust Control toolbox*, *mu-Tools* do Matlab $\text{\textcircled{R}}$, projetados para resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ .

Em suma, o controlador K_{inf} projetado deve ser capaz de estabilizar a planta e minimizar a função de desempenho dada por:

$$\|F_l(K_{H\text{inf}}, P)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_{KS} K S \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.19)$$

Tipicamente usam-se as funções *hinfsyn*, *hinfric*, *hinflmi*, *loopsyn* e *mixsyn*, pré-definidas na biblioteca *robust control toolbox* do Matlab $\text{\textcircled{R}}$, para calcular o ganho do controlador. As funções apresentadas por sua vez possuem como entrada os valores das funções peso (W_S , W_{KS} e W_T) e a planta $G(j\omega)$ escrita no domínio da frequência. Elas oferecem como saída o ganho do controlador K_{inf} e a planta generalizada P . A diferença entre as funções citadas está no modo pelo qual resolve a equação de Riccati, de como fazem a interação do fator γ e como organizam a planta generalizada.

2.1.2 Seleção das funções peso

A seleção das funções peso, ou parâmetros de ajuste (*parameters tuning*), frequentemente requerem várias iterações, de modo a obter os pesos que determinam um bom controlador. É muito difícil encontrar um conjunto de funções peso que funcionem bem para qualquer caso (ZHOU; DOYLE, 1998). Entretanto, nas literaturas (D.WU et al., 2005) e (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), é possível encontrar sugestões, e/ou ponto de partida, para análises e iterações. Essas tais funções estão expostas a seguir:

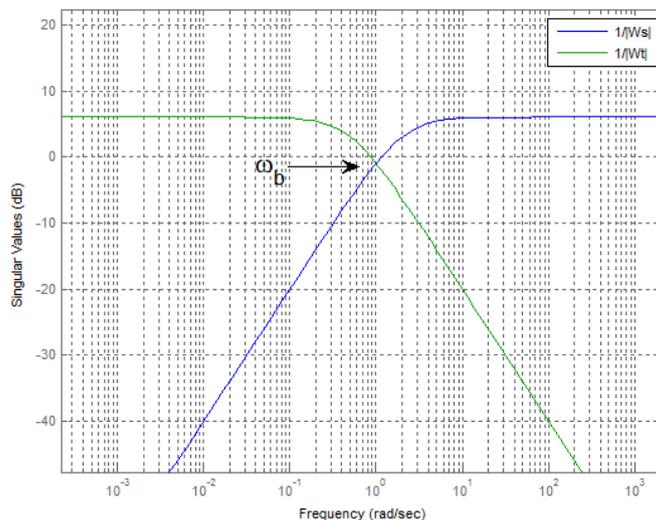
$$W_S = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b}{s + A\omega_b} \quad (2.20)$$

Na Equação 2.20 a função W_S se relaciona com a função sensibilidade ($S(j\omega)$) para caracterizar o desempenho do controlador, em que A está relacionado com o erro de estado estacionário (*steady state offset*), ω_b é a banda passante desejada para a função sensibilidade e M está relacionado com o máximo sobre sinal de S (ZHOU; DOYLE, 1998).

$$W_T = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M}}{As + \omega_{bc}} \quad (2.21)$$

Na Equação 2.21 a função W_T se relaciona com a função sensibilidade complementar ($T(j\omega)$) para caracterizar a robustez do controlador, em que ω_{bc} é a banda passante desejada para a função sensibilidade complementar (ZHOU; DOYLE, 1998), W_T é simétrico a W_S em torno da linha $\omega = \omega_b$, como mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7 - Comparação entre W_S com W_T



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Se desejado uma transição mais acentuada entre baixa frequência e alta frequência, as funções W_S e W_T podem ser modificadas como se segue:

$$W_S = \left(\frac{\frac{s}{\sqrt[k]{M}} + \omega_b}{s + \sqrt[k]{A}\omega_b} \right)^k \quad (2.22)$$

$$W_T = \left(\frac{s + \frac{\omega_{bc}}{\sqrt[k]{M}}}{\sqrt[k]{A}s + \omega_{bc}} \right)^k \quad (2.23)$$

em que $k \geq 1$. Este parâmetro k atua na inclinação da curva (*roll off*).

A função W_{KS} atua no controlador restringindo a magnitude dos sinais de entrada, em outras palavras, que regula o esforço do controlador, é normalmente admitida como sendo uma constante.

Usualmente as funções peso devem ser estáveis e de mínima fase (D.WU et al., 2005). As funções W_S e W_T possuem influencia sobre a posição dos zeros e polos (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001). Assim sendo surge um problema de acordos (*trade-off*) na

escolha dos parâmetros destas funções, ficando a critério dos requisitos do projeto em estudo.

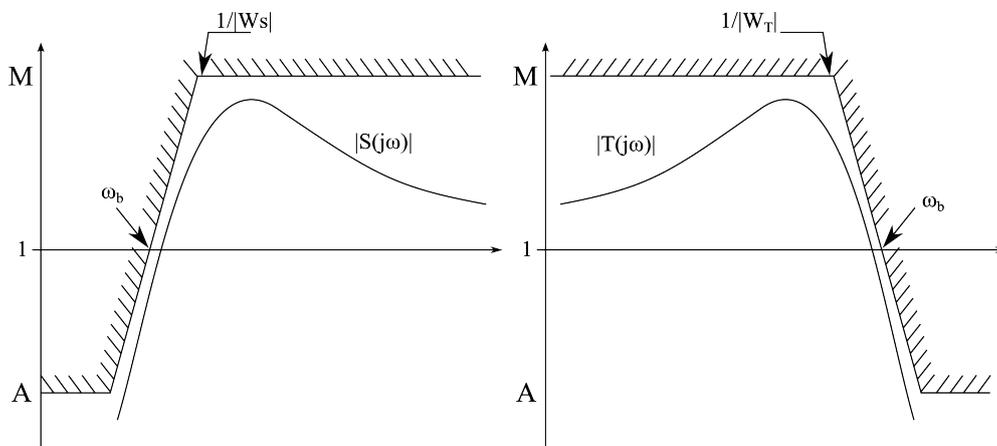
Para garantir um bom desempenho o valor singular máximo da função sensibilidade ($\bar{\sigma}S(j\omega)$) e da função sensibilidade complementar ($\bar{\sigma}T(j\omega)$) devem ser menores que o inverso do módulo das funções pesos W_S e W_T (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), como mostram as equações abaixo:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) < \frac{1}{|W_S(j\omega)|} \quad (2.24)$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) < \frac{1}{|W_T(j\omega)|} \quad (2.25)$$

Na Figura 2.8 tem-se a representação gráfica da Equação 2.24 e 2.24, que mostram a regra para o desempenho ótima do controlador a ser calculado pelo método \mathcal{H}_∞ .

Figura 2.8 - Relação de desempenho



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

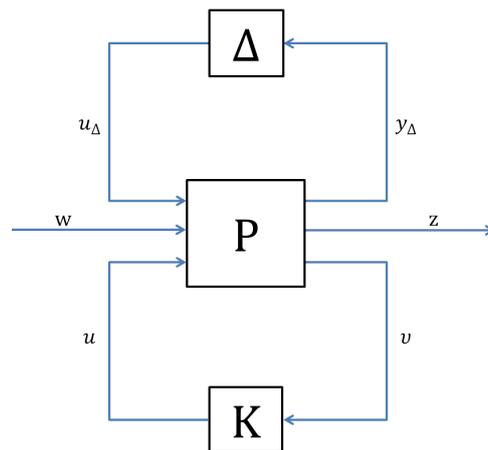
2.1.3 Representação e modelamento das Incertezas

De acordo com Schweppe (1973), incerteza é algo indeterminado, indefinido, não realizável, desconhecido e/ou não definido claramente. Em outras palavras, incerteza é a incapacidade de se conhecer o valor absoluto de um parâmetro e/ou as características

do modelo que são negligenciadas (simplificadas, linearizadas).

Ao se modelar um sistema, se busca a forma mais simples de descreve-lo dentro do contexto desejado. Com isto se negligencia certas características que poderão ter forte influencia quando submetidas ao sistema real (D.WU et al., 2005). Ao se projetar um controlador deve-se ter o cuidado de verificar as hipóteses tomadas no processo de modelagem e a ação dos agentes externos (perturbações) (MEIROVITCH; POSTLETHWAITE, 1967) que sobre o sistema real. Uma vez verificado, cabe ao projetista encontrar a melhor heurística para lidar com esses obstáculos e criar um controlador capaz de suportá-los. Para o controlador capaz de superar, todo o processo de linearização, a ação da falta da exatidão na medida de alguns parâmetros, as perturbações e estabilizando o sistema real, se dá o nome de controlador robusto.

Figura 2.9 - Representação da planta generalizada com incerteza



Fonte: Adaptado de Skogestad e Postlethwaite (2001).

Um método para projetar controladores robustos é considerar a influencia das incertezas atuando diretamente no modelo. Como mostra a Figura 2.9, em que a incerteza é representada pela matriz Δ , atua sobre a planta generalizada P , que é controlada pelo controlador K .

Segundo Skogestad e Postlethwaite (2001), D.Wu et al. (2005), Maciejowski (1989), Zhou e Doyle (1998), as incertezas possuem diversas origens; 1) Falta de conhecimento sobre determinados parâmetros; 2) Ação das não linearidades; 3) Imprecisão das

medidas; 4) Desconhecimento do comportamento em altas frequências; 5) Dinâmica não modelada (negligenciada).

Devido a grande variedade da natureza das incertezas, elas são classificadas em dois grupos, ou tipos: a) Incertezas paramétricas (estruturadas); b) Incertezas dinâmicas (não estruturadas).

No primeiro grupo, incertezas paramétricas (PINHEIRO, 2013), a estrutura do modelo é conhecida e alguns de seus parâmetros são incertos. No segundo grupo, incertezas dinâmicas, são consideradas os erros do modelo devido às respectivas linearizações e premissas que foram introduzidas no processo de modelamento.

Para quantificar as incertezas paramétricas, admite-se que o parâmetro possua um intervalo definido de valores $[a_{min}, a_{max}]$, em outra linguagem:

$$a_p = \bar{a} (1 + r_a \delta_a) \quad (2.26)$$

em que a_p é o parâmetro, \bar{a} é o valor nominal do parâmetro, r_a é a razão de $((a_{max} - a_{min}) / (a_{max} + a_{min}))$ e δ_a é um escalar real que satisfaz $|\delta_a| \leq 1$.

Já as incertezas dinâmicas são menos precisas e de alta complexidade, o que dificulta encontrar uma forma de quantificá-la. Porém, elas podem ser representadas no domínio da frequência (PINHEIRO, 2013). Dessa forma, a incerteza dinâmica é uma perturbação complexa a qual é normalizada de maneira tal que obedeça à condição $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

2.2 Desigualdades matriciais lineares (LMI - *Linear Matrix Inequality*)

Lyapunov, em 1890, foi o responsável pela introdução do uso de LMI na análise de sistemas dinâmicos, quando publicou seu trabalho sobre estabilidade que deu origem da hoje conhecida teoria de Lyapunov (BOYD et al., 1994). Ele mostrou que a equação diferencial,

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (2.27)$$

é estável, se e somente se existir uma matriz P positiva definida, tal que

$$A^T P + P A < 0 \quad (2.28)$$

A Equação 2.28 é chamada de inequação de Lyapunov em P , que é uma forma especial de LMI. Para resolver esta inequação basta escolher qualquer matriz simétrica $Q > 0$ e resolver a equação linear $A^T P + P A = -Q$. Para a matriz P é garantido que ela seja positiva definida se o sistema da Equação 2.27 for estável.

Um dos requisitos usuais para o projeto de um sistema de controle é que o sistema controlado seja estabilizado. No entanto, num ponto de vista prático, é desejável que o controlador forneça uma resposta rápida e amortecida, que pode fazer com que o transiente demore a se estabilizar (CHILALI; GAHINET, 1996). Uma técnica que garante um transitório satisfatório é a alocação dos polos do sistema em malha fechada dentro de uma região do plano complexo. Para essa técnica se dá o nome de alocação de polos regional (PINHEIRO, 2013) e para isso se usa LMI.

2.2.1 As regiões das LMI

É definido como sendo uma região LMI, um subconjunto qualquer do plano complexo D que pode ser definido como (CHILALI et al., 1999):

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\} \quad (2.29)$$

com,

$$L = L^T = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} \quad M = M^T = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} \quad (2.30)$$

em que z é um elemento qualquer de um plano complexo, \bar{z} é seu complexo conjugado, M é uma matriz real e L é uma matriz real simétrica.

As propriedades fundamentais das regiões LMI, de acordo com Chilali et al. (1999), são: 1) A interseção entre regiões LMI resulta em uma região LMI; 2) Qualquer região convexa simétrica, com respeito ao eixo real, pode ser aproximada por uma região LMI; 3) Uma matriz A é dita D -Estável (todos os seus autovalores pertencem a região LMI D), se e somente se existir uma matriz Q simétrica que satisfaça a Equação 2.31;

$$M_D(A, Q) = L \otimes Q + M \otimes (QA) + M^T \otimes (A^T Q) < 0, \quad Q > 0 \quad (2.31)$$

o símbolo \otimes representa o produto de Kronecker¹. Este resultado pode ser visto como uma generalização do teorema de Lyapunov para estabilidade de uma região usual $f_D = z + z < 0$. Assim a Equação 2.31 se reduz à:

$$I \otimes (Q, A) + I \otimes (A^T Q) = A^T Q + QA < 0, \quad Q > 0 \quad (2.32)$$

Abaixo serão listadas as principais regiões LMI.

1. Um semi-plano $Re(z) \leq \alpha$

$$L = 2\alpha, \quad M = 1 \quad (2.33)$$

2. Disco centrado na origem do plano complexo com raio r

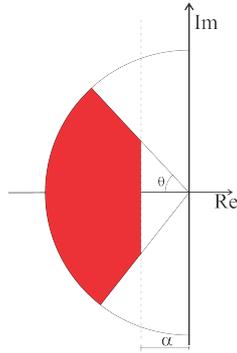
$$L = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

3. Setor cônico com ápice na origem do plano complexo e ângulo interno de 2θ

$$L = 0, \quad M = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

¹ $A \otimes B = [A_{ij}B]_{ij}$

Figura 2.10 - Representação da região LMI $S(\alpha, r, \theta)$



Fonte: Adaptado de Chilali e Gahinet (1996), Chilali et al. (1999)

A interseção destas três regiões é dada pela Figura 2.10 (que também é uma região LMI), garante uma alocação de polos tal que a resposta transitória fica com (CHILALI; GAHINET, 1996): 1) Taxa de decaimento igual a α ; 2) Frequência natural de amortecimento mínima $\zeta = \cos(\theta)$; 3) Frequência natural não amortecida $\omega_d = r \sin(\theta)$. Este por sua vez limita o máximo *overshoot*, a frequência de vibração dos modos, o tempo de atraso, o tempo de subida e o tempo de acomodamento (CHILALI; GAHINET, 1996). Deste modo a alocação de polos do sistema em malha fechada nessa região fornece uma resposta transitória satisfatória.

2.2.2 A técnica da alocação de polos via LMI

Dada uma realização em espaço de estados de uma planta P :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z_\infty = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ z_2 = C_2x + D_{22}u \end{cases} \quad (2.36)$$

a representação deste sistema em malha fechada é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2K)x + B_1w \\ z_\infty = (C_1 + D_{12}K)x + D_{11}w \\ z_2 = (C_2 + D_{22}K)x \end{cases} \quad (2.37)$$

O objetivo da formulação LMI é satisfazer a condição de desempenho da norma \mathcal{H}_∞ e da norma \mathcal{H}_2 no sistema em malha fechada (GAHINET ARKADI NEMIROVSKI; CHILALI, 1995).

O desempenho da norma \mathcal{H}_∞ no sistema em malha fechada ($\|T\|_{wz_\infty}$) é garantida (WU et al., 2009; SCHERER., 1990), se e somente se $\|T\|_{wz_\infty} < \gamma$ e que exista uma matriz simétrica X_∞ tal que:

$$\begin{bmatrix} (A + B_2K)X_\infty + X_\infty(A + B_2K)^T & B_1 & X_\infty(C_1 + D_{12}K)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{12}K)X_\infty & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad X_\infty > 0 \quad (2.38)$$

O desempenho da norma \mathcal{H}_2 no sistema em malha fechada ($\|T\|_2$) é garantido (WU et al., 2009; SCHERER., 1990), se somente se $\|T\|_2$ não excede o valor de ν e que exista duas matriz simétricas X_2 e Q tal que:

$$\begin{bmatrix} (A + B_2K)X_2 + X_2(A + B_2K)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (C_2 + D_{22}K)X_2 \\ X_2(C_2 + D_{22}K)^T & X_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$tr(Q) < \nu^2$$

Para os polos do sistema em malha fechada estarem vinculados a uma região LMI (WU et al., 2009), como a dada pela Equação 2.29, é necessário que exista uma matriz simétrica X_{pol} que satisfaça:

$$\left[\lambda_{i,j}X_{pol} + \mu_{i,j}(A + B_2K)X_{pol} + \mu_{i,j}X_{pol} + \mu_{i,j}X_{pol}(A + B_2K)^T \right]_{1 \leq i,j \leq m} < 0, \quad X_{pol} > 0 \quad (2.40)$$

Com este conjunto de condições se cria um problema de otimização não convexa com variáveis Q , K , X_∞ , X_2 e X_{pol} . Na estrutura do LMI se busca uma única matriz de Lyapunov (GAHINET ARKADI NEMIROVSKI; CHILALI, 1995). Desta forma, para

unir os objetivos, é assumido que:

$$X := X_{pol} = X_{\infty} = X_2 \quad (2.41)$$

Ao efetuar a mudança de variável $Y := KX$, leva à seguinte síntese da formulação do problema sub-ótimo LMI: Minimizar $\alpha\gamma^2 + \beta tr(Q)$ sobre X, Y, Q e γ^2 que satisfaça:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2Y + Y^T B_2^T & B_1 & XC_1^T + Y^T D_{12}^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12}Y & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_2X + D_{22}Y \\ XC_2^T + Y^T D_{22}^T & X \end{bmatrix} > 0,$$

$$[\lambda_{i,j} + \mu_{i,j}(AX + B_2Y) + \mu_{i,j}(XA^T + Y^T B_2^T)]_{1 \leq i,j \leq m} < 0 \quad (2.43)$$

$$tr(Q) = \sqrt{\nu_0^2} \quad (2.44)$$

$$\gamma^2 < \gamma_0^2 \quad (2.45)$$

Sendo que a solução ótima $(X^*, Y^*, Q^*, \gamma^*)$ corresponde a um ganho de realimentação de estado dado por:

$$K^* = Y^* X^{-1*} \quad (2.46)$$

e este ganho garante o desempenho de pior caso,

$$\|T_{\infty}\|_{\infty} \leq \gamma^* \quad (2.47)$$

$$\|T_2\|_2 \leq \sqrt{tr(Q^*)}$$

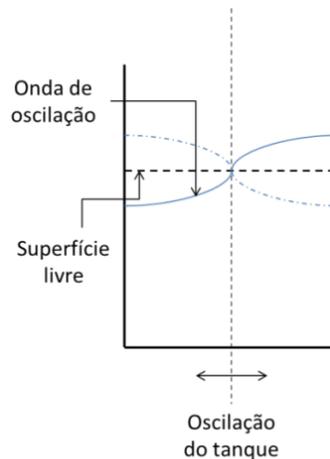
Note que K^* não é globalmente ótimo, devido a generalização feita na Equação 2.41.

3 PROJETO DO CONTROLADOR H-INFINITO PARA UM SATELITE RIGIDO-FLEXIVEL COM SLOSH

O nome *sloshing* é dado ao movimento livre da superfície de um líquido que preenche parcialmente um compartimento. O movimento livre efetuado por está camada do líquido é um movimento vibratório que depende da forma do tanque, da aceleração da gravidade e/ou da aceleração axial do tanque. Ao oscilar a massa de líquido o centro de massa do corpo também oscila, perturbando assim a parte rígida-flexível do veículo em estudo.

Como o dito em Souza (2013), o movimento vibratório efetuado pelo líquido é considerado como sendo uma onda estacionária na superfície livre do líquido, como mostra a Figura 3.1.

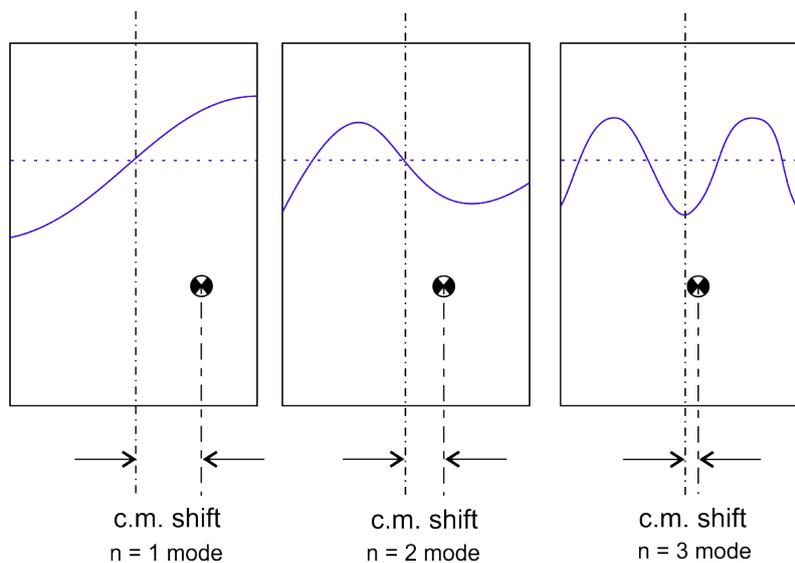
Figura 3.1 - Ilustração do fenômeno de sloshing.



Fonte: Adaptado de Abramson (1966).

Para este fenômeno os modos de vibração que causam maior perturbação no sistema são o primeiro e segundo. Apesar de possuírem menor frequência de vibração, move grande quantidade de massa, deslocando assim o centro de massa do líquido (SOUZA, 2013). A Figura 3.2 mostra a correlação entre a vibração e o deslocamento do centro de massa do líquido.

Figura 3.2 - Deslocamento do centro de massa do líquido.



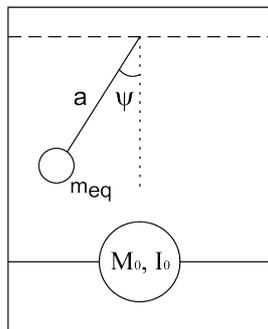
Fonte: Adaptado de Abramson (1966).

3.1 Apresentação do modelo do sloshing

O modelamento do *sloshing* teve início na década de sessenta a partir do artigo de Abramson (1966), não sofrendo muitas modificações desde então. Devido à complexidade de se criar analiticamente um modelo para o fluido que se move livremente dentro de um recipiente fechado, recorre-se para um sistema simplificado chamado de análogo mecânico.

Para modelar usando um análogo mecânico é necessário obedecer os critérios apresentados em Sidi (1997); a) Pequenos deslocamentos, pequenas velocidades e pouco escoamento do líquido na superfície livre; b) Tanque rígido; c) Fluido pouco viscoso, incompressível e homogêneo; d) Campo de fluxo não rotacional. Com isto a dinâmica do *sloshing* pode ser aproximada para um sistema mecânico composto por um sistema composto de massa-mola, ou por um conjunto de pêndulos (ABRAMSON, 1966). Aqui, como em Souza (2013), será escolhido o modelo do pêndulo para descrever o *slosh*. A Figura 3.3 mostra o sistema pendular que representa o *sloshing*.

Figura 3.3 - Sistema análogo do tipo pêndulo.



Fonte: Adaptado de Abramson (1966).

A Figura 3.3 mostra o análogo mecânico (pêndulo) em que: m_{eq} representa a massa equivalente deslocada, a o comprimento da haste do pêndulo, ψ o ângulo correspondente ao movimento do pêndulo (*sloshing*), M_0 a massa das partes rígidas e I_0 o momento de inércia em torno do centro de massa.

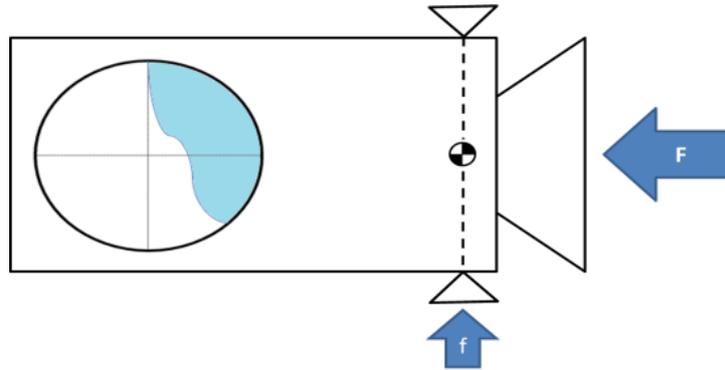
De acordo com Abramson (1966) os parâmetros dos análogos mecânicos dependem: dos parâmetros geométricos do tanque e das características físico-químicas do fluido usado. O tamanho equivalente da haste do pendulo é dado a partir da frequência de vibração do liquido (ω_v) obtida experimentalmente.

A Equação 3.1 que descreve a frequência de vibração do pendulo é dada por:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (3.1)$$

em que g é uma aceleração e a o tamanho da haste do pêndulo (SIDI, 1997). Admitindo um sistema como o mostrado na Figura 3.4.

Figura 3.4 - Modelo de *sloshing*.



Fonte: Adaptado de Sidi (1997).

Na Figura 3.4 é representada a ação de duas forças: F constante e f uma força de perturbação ou controle. A ação da força F empurra o líquido para trás, no sentido contrário a aceleração provocada, e quando o sistema é perturbado pela força f o líquido tende a oscilar em torno da posição de equilíbrio (SIDI, 1997). Assim sendo a equação da aceleração pode ser expressa pela Equação 3.2:

$$g = \sqrt{\frac{F}{M_0 + m_{eq}}} \quad (3.2)$$

substituindo a Equação 3.2 na Equação 3.1, é determinado o tamanho a da haste do pêndulo (SIDI, 1997).

$$a = \frac{F}{(M_0 + m_{eq})\omega_v^2} \quad (3.3)$$

3.1.1 Modelagem do satélite rígido-flexível com *sloshing*

O modelo adotado foi inspirado na *spacecraft* europeia ATV – *Automated Transfer Vehicle* – construído pela ESA (*European Space Agency*), que tem como missão transportar suprimentos e combustível para a estação espacial internacional (ISS – *International Space Station*).

Figura 3.5 - Concepção artística do ATV

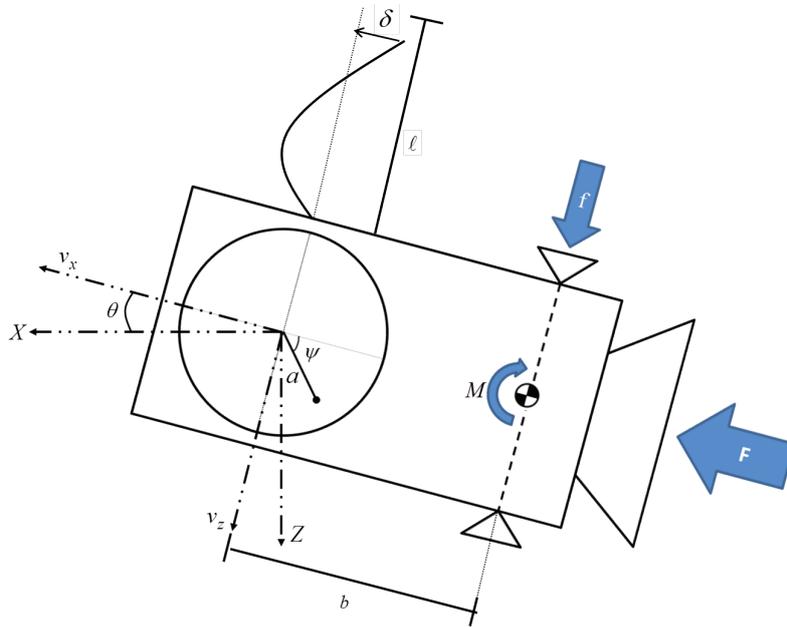


Fonte: http://www.dw.com/image/17821154_303.jpg acessado em 08 de dezembro de 2016.

Este veículo, mostrado na Figura 3.5, tem a capacidade de transportar 7 toneladas (sendo quase uma tonelada em suprimentos líquidos) foi lançada pela primeira vez em 2008 (ESA, 2008). O seu SCAO (Sistema de Controle de Atitude e Orbita) conta com quatro motores capazes de gerar individualmente um empuxo de $490N$ e mais vinte e oito motores de pequeno porte capazes de gerar individualmente $220N$. E uma vez acoplado na estação, seus atuadores auxiliam o SCAO da ISS nas manobras de atitude (ESA, 2008) do conjunto.

Na Figura 3.6 está representado o modelo simplificado do ATV. Os parâmetros representados na Figura 3.6 são: b distância do ponto de fixação do pêndulo até o centro de massa do corpo rígido, a o comprimento da haste do pêndulo, m massa do corpo sem líquido (combustível), I momento de inércia do corpo sem líquido, m_f massa do líquido, I_f momento de inércia do líquido, m_p é a massa do apêndice flexível e ℓ é o comprimento do apêndice. Como variáveis: θ ângulo de atitude do satélite (corpo rígido) em respeito à base de referência e ψ o ângulo formado entre a haste do pêndulo com o eixo de referência, representando o *slosh*, δ a representação da deformação elástica, f força transversal (torque externo), M momento de pitching (torque interno). A força F do jato inferior é considerado constante (SOUZA; SOUZA, 2014). As componentes radial e transversal da velocidade do centro do tanque são dadas por v_x e v_z , respectivamente.

Figura 3.6 - Modelo rígido - flexível com slosh.



Fonte: Souza (2013).

Os parâmetros m_f (massa de líquido), I_f (momento de inércia do líquido) e a (tamanho da haste do pêndulo) dependem da forma do tanque, das características químico-físicas do combustível e de sua taxa de vazão (ABRAMSON, 1966).

O equacionamento da dinâmica é obtido a partir do equacionamento das energias cinéticas e potencial, admitindo uma dissipação de energia expressa por meio da função de dissipação de Rayleigh aplicadas as equações de movimento de Lagrange, como o apresentado em Souza (2013).

Segundo Souza e Souza (2014) o vetor posição do centro de massa no sistema de coordenadas fixado no corpo, é dado por

$$\vec{r} = (x - b)\hat{i} + z\hat{k} \quad (3.4)$$

Sendo \vec{r} o vetor posição, x a posição sob o eixo longitudinal em que está fixado o centro do tanque, z a posição sob o eixo transversal onde está fixado o centro do tanque, b a distância do centro de massa do corpo até o ponto onde está fixado o pêndulo e \hat{i} , \hat{k} são os versores alinhados com os eixos X e Z , vide Figura 3.6.

Derivando a Equação 3.4 se tem a velocidade do vetor posição do centro de massa (SOUZA; SOUZA, 2014):

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x} + z\dot{\theta}) \hat{i} + (\dot{z} - x\dot{\theta} + b\dot{\theta}) \hat{k} \quad (3.5)$$

Escrevendo $v_x = \dot{x} + z\dot{\theta}$ e $v_z = \dot{z} - x\dot{\theta}$, tem-se

$$\dot{\vec{r}} = v_x \hat{i} + (v_z + b\dot{\theta}) \hat{k} \quad (3.6)$$

De forma análoga podemos determinar o vetor posição do centro de massa do líquido na coordenada fixada no corpo (SOUZA; SOUZA, 2014):

$$\vec{r}_f = (x - \cos(\psi)a) \hat{i} + (z + \sin(\psi)a) \hat{k} \quad (3.7)$$

Derivando a Equação 3.7 se tem a velocidade do centro de massa do tanque (SOUZA; SOUZA, 2014):

$$\dot{\vec{r}}_f = (v_x + \sin(\psi)a(\dot{\theta} + \dot{\psi})) \hat{i} + (v_z + \cos(\psi)a(\dot{\theta} + \dot{\psi})) \hat{k} \quad (3.8)$$

Para o apêndice flexível, considera-se que ele é sujeito a dois tipos de movimento (SIDI, 1997): a) mesmo movimento angular θ que o corpo, com velocidade linear de $\ell\dot{\theta}$; b) A deformação δ com relação ao eixo Z , com velocidade $\dot{\delta}$. Assim, para pequenas deformações, tem-se

$$v_p = \dot{\delta} + \ell\dot{\theta} \quad (3.9)$$

A energia cinética total do sistema pode ser escrita como:

$$T_{total} = T_{corpo} + T_{slosh} + T_{apêndice} \quad (3.10)$$

Expandindo os termos vem,

$$T_{sa} = \frac{1}{2} (m\dot{r}^2 + I\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} (m_f \dot{r}_f^2 + I_f (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2) + \frac{1}{2} m_p (\dot{\delta} + \ell\dot{\theta})^2 \quad (3.11)$$

em que a representa o somatório das energias cinéticas do corpo rígido, do *sloshing* e do apêndice flexível.

Admitindo que haja dissipação de energia devido ao *sloshing*:

$$R = \frac{1}{2} \varepsilon \dot{\psi}^2 \quad (3.12)$$

em que na Equação 3.12: ε é uma constante de amortecimento e $\dot{\psi}^2$ é a velocidade angular do pêndulo em relação ao eixo de referência.

Admitindo que haja dissipação de energia devido a vibração do apêndice flexível:

$$D = \frac{\delta^2}{2} k_d \quad (3.13)$$

na Equação 3.13: k_d é uma constante de dissipação. Admite-se também uma energia potencial elástica para o apêndice, da forma:

$$E_{potencial} = \frac{\delta^2}{2} k \quad (3.14)$$

em que k é a constante elástica do apêndice.

Com isto a lagrangiana ($\mathcal{L}_{sa} = T_{sa} - E_{potencial}$) para este sistema fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sa} = \frac{1}{2} ((m + m_f)(v_x^2 + v_z^2) + m(2v_z b\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2) + m_f(a(\dot{\theta} + \dot{\psi})(a((\dot{\theta} + \dot{\psi}) + \\ + 2(v_x \text{sen}(\psi) + v_z \text{cos}(\psi)))) + I\dot{\theta}^2 + I_f(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 + \\ + m_p(\dot{\delta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\delta} + \ell^2\dot{\theta}^2 + \delta^2 k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aplicando a Equação 3.15 nas equações de movimento para *quasi*-coordenadas ¹,

¹ver anexo A.1

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial V} \right) + \omega^\times \frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial V} = \tau_t \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial \omega} \right) + \omega^\times \frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial \omega} + V^\times \frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial V} = \tau_r \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial \psi} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{sa}}{\partial \delta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}} = 0 \quad (3.19)$$

As equações 3.16 à 3.19 representam as equações de Lagrange descritos em quasi-coordenadas ???. Tendo que \mathcal{L}_{sa} é a Lagrangiana, R e D são funções de dissipação de Rayleigh, V é a matriz velocidade linear, ω é a matriz velocidade angular, τ_t é o vetor generalizado dos torques externos que atuam na base do corpo, τ_r é o vetor generalizado dos torques internos que atuam na base do corpo e V^\times , ω^\times representam as matrizes antissimétricas das velocidades lineares e angulares respectivamente.

Efetuando os cálculos, obtêm-se os seguinte conjunto de equações não lineares:

$$(m + m_f) a_x + mb\dot{\theta}^2 + m_f a (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \text{sen}(\psi) + m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \cos(\psi) = F \quad (3.20)$$

$$(m + m_f) a_z + m_f a (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \cos(\psi) - m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \text{sen}(\psi) + mb\ddot{\theta} = f \quad (3.21)$$

$$(mb^2 + I_f + m_p \ell^2) \ddot{\theta} + \ddot{\delta} m_p \ell + mba_z - \varepsilon \dot{\psi} = M + fb \quad (3.22)$$

$$(m_f a^2 + I_f) (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) + m_f a (\text{sen}(\psi) a_x + \cos(\psi) a_z) + \varepsilon \dot{\psi} = 0 \quad (3.23)$$

$$\ddot{\delta}m_p + \ddot{\theta}m_p\ell + \dot{\delta}k_d + \delta k = 0 \quad (3.24)$$

Isolando a_x e a_z nas Equações 3.20 e 3.21, tem-se:

$$a_x = \frac{F - mb\dot{\theta}^2 - m_f a (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \text{sen}(\psi) - m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \cos(\psi)}{m + m_f} \quad (3.25)$$

$$a_z = \frac{f - m_f a (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \cos(\psi) + m_f a (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \text{sen}(\psi) - mb\ddot{\theta}}{m + m_f} \quad (3.26)$$

Substituindo 3.25 e 3.26 nas Equações 3.22 e 3.23,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} (I + m_p\ell^2 + m^*(b^2 - ba) \cos(\psi)) + m_p\ell\ddot{\delta} - m^*ab\ddot{\psi} \cos(\psi) + \\ + m^*ab(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \text{sen}(\psi) - \varepsilon\dot{\psi} = M + b^*f \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} (I_f + m^*(a^2 - bacos(\psi))) + \ddot{\psi} (I_f + m^*a^2) + (a^*F - m^*ab\dot{\theta}^2) \text{sen}(\psi) + \\ + \varepsilon\dot{\psi} = -a^*f \cos(\psi) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\ddot{\delta}m_p + \ddot{\theta}m_p\ell + \dot{\delta}k_d + \delta k = 0 \quad (3.29)$$

em que $m^* = \frac{m_fm}{m_f+m}$, $a^* = \frac{m_fa}{m+m_f}$ e $b^* = \frac{m_fb}{m+m_f}$.

Admitindo pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio (valores próximos de zero, tal que, $\text{sen}(\hat{\text{angulo}}) \cong \hat{\text{angulo}}$) (SOUZA; SOUZA, 2014), obtém-se as equações linearizadas do movimento.

$$\ddot{\theta} = \frac{(I + m_p\ell^2 + m^*(b^2 - ba))}{(M + b^*f - m_p\ell\ddot{\delta} + m^*ab\ddot{\psi} + \varepsilon\dot{\psi})} \quad (3.30)$$

$$\ddot{\psi} = \ddot{\theta} \left(\frac{m^*ba}{I_f + m^*a^2} - 1 \right) - \dot{\psi} \left(\frac{\varepsilon}{I_f + m^*a^2} \right) - \psi \left(\frac{a^*F}{I_f + m^*a^2} \right) - \frac{a^*f}{I_f + m^*a^2} \quad (3.31)$$

$$\ddot{\delta} = \ddot{\theta}\ell - \dot{\delta} \frac{k_d}{m_p} - \delta \frac{k}{m_p} \quad (3.32)$$

3.2 Projeto da lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞

A partir do modelamento desenvolvido no item 3.1.1 deste capítulo, será projetado uma lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞ .

Os maiores desafios em se projetar um sistema de controle em que se considera o *sloshing*, são: a não existência de mecanismos capazes de agir e/ou observar a dinâmica do líquido e a interação entre o *sloshing* e a flexibilidade. Assim sendo o controle é feito de forma indireta, ou seja, ele é controlado pela reação da ação de todos os atuadores utilizados no controle de atitude e orbita.

Para o projeto do controlador \mathcal{H}_∞ o desafio está em encontrar um conjunto de funções pesos que satisfaçam as condições de desempenho e robustez necessárias para o controle da interação da flexibilidade com *slosh*.

Caso seja mal projetada a lei de controle, pode ocorrer o fenômeno conhecido como *spill-over* (BRYSON, 1994), que tem como característica desestabilizar o sistema excitando os modos de vibração causando um esforço de controle muito maior que o esperado, trazendo consequências indesejáveis para a missão.

Com isto os objetivos deste controlador se limitam a estabilizar o ângulo de atitude (θ) minimizando os efeitos do *sloshing* e da flexibilidade, atuando apenas no controle do corpo rígido.

3.2.1 Seleção das funções peso

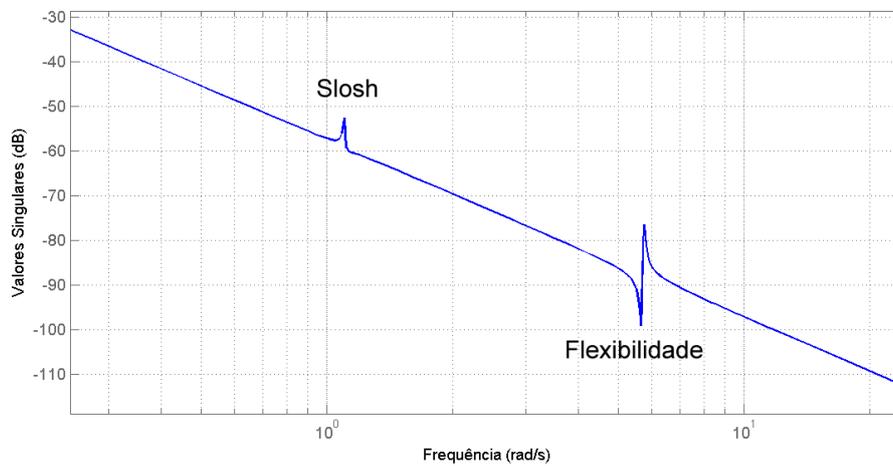
De acordo com a teoria exposta no capítulo 2.1.2, admite-se as funções peso W_S e W_T representadas pela Equação 3.33, reproduzidas abaixo:

$$W_S = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b}{s + A\omega_b}, \quad W_T = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M}}{As + \omega_{bc}} \quad (3.33)$$

tem seus parâmetros das funções admitidos como: ω_b valor igual ao valor da banda passante da planta, ou seja, $\omega_b = 0,05 \text{ rad/s}$ (como mostra a Figura 3.7); ω_{bc} – como sendo proporcional a $15 \cdot \omega_b$; A – de modo que o erro de estado estacionário seja da ordem de 10^{-3} , valor tradicionalmente sugerido nas literaturas (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001) e (ZHOU; DOYLE, 1998); M – de forma que o *overshoot* seja limitado a 2 (previne amplificação do ruído);

Para o projeto do controlador não se levou em consideração a ponderação do sinal de controle dada pela função W_{KS} .

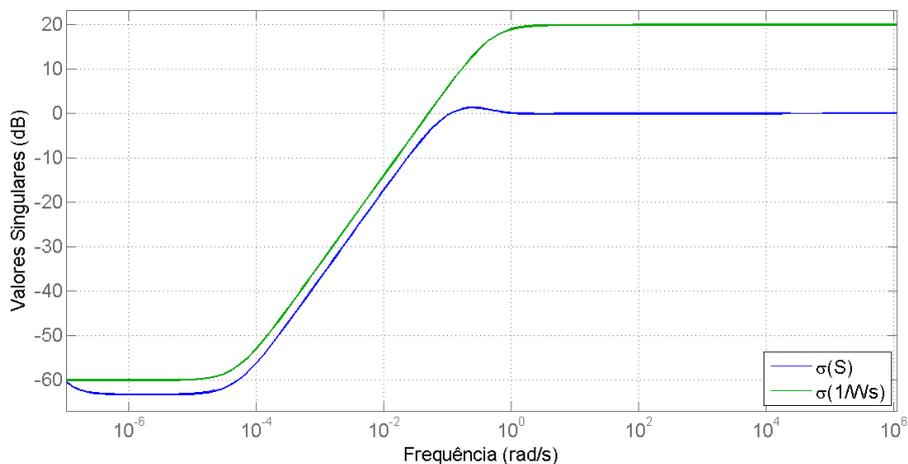
Figura 3.7 - Valores singulares da planta.



Assim sendo, resta verificar se as funções projetadas satisfazem os requisitos fornecidos pelas Equações 2.24 e 2.25, mostradas abaixo, respectivamente;

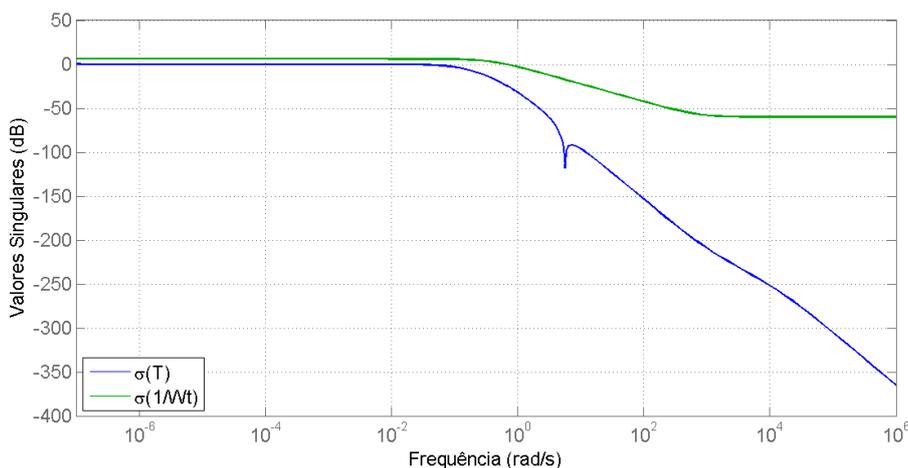
$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}, \quad \bar{\sigma}(T(j\omega)) < \frac{1}{|W_T(j\omega)|} \quad (3.34)$$

Figura 3.8 - Valores singulares da função sensibilidade S com $\frac{1}{W_S}$.



Na Figura 3.8 se tem os valores singulares da função sensibilidade e da inversa da função peso W_S , mostrando que o requisito fornecido pela Equação (3.34) é obedecido.

Figura 3.9 - Valores singulares da função sensibilidade T com $\frac{1}{W_T}$.



Na Figura 3.9 se tem os valores singulares da função sensibilidade complementar e da inversa da função peso W_T , mostrando que o requisito fornecido pela Equação (3.34) é obedecido.

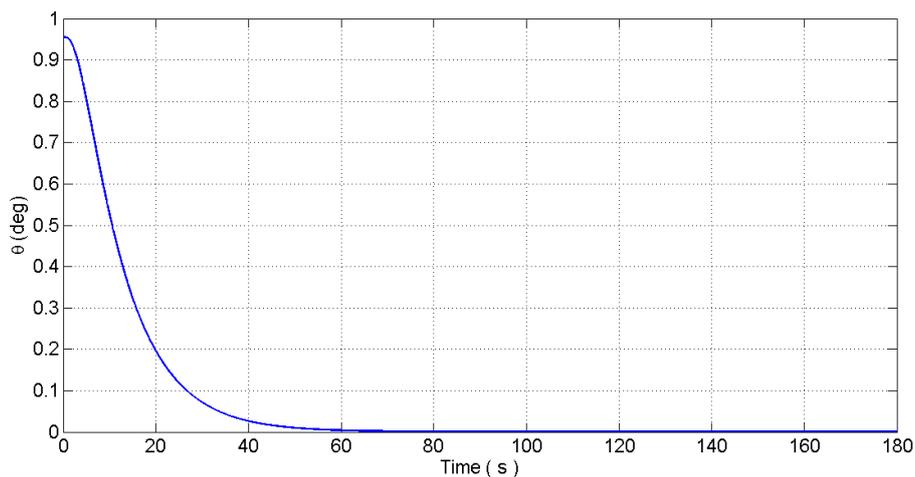
é obedecido. Assim, os critérios de desempenho e robustez do \mathcal{H}_∞ são obedecidos, garantindo a existência de um controlador.

3.3 Simulações

Para as simulações foram adotados os seguintes parâmetros: Para o corpo rígido, $m = 600 \text{ kg}$, $I = 720 \text{ kgm}^2$, $b = 0,25 \text{ m}$, $F = 500 \text{ N}$, $\epsilon = 0,19 \text{ kgm}^2/\text{s}$. Sendo m , I , b , F , ϵ a massa do corpo rígido sem a porção líquida, momento de inercia, distancia dos atuadores ao centro de massa, uma força constante e a constante de dissipação de energia interna, respectivamente. Para o *slosh*, $m_f = 100 \text{ kg}$, $a = 0,33 \text{ m}$, $I_f = 10 \text{ kgm}^2$. Sendo m_f a massa de líquido em deslocamento, a tamanho da haste do pêndulo e I_f momento de inercia do líquido. Ressaltando que o tamanho da haste do pêndulo, usado no análogo mecânico que representa o *slosh*, é o mesmo calculado na dissertação de mestrado de Souza (2013). Para o apêndice flexível, $m_p = 10 \text{ kg}$, $\ell = 1,5 \text{ m}$, $k = 300 \text{ kgrad}^2/\text{s}^2$, $k_d = 0,48 \text{ kgrad}^2/\text{s}$. Sendo m_p a massa do painel (apêndice flexível), ℓ o tamanho do painel, k é a constante elástica e k_d é a constante de dissipação de energia.

As simulações foram feitas para um intervalo de tempo de três minutos com uma condição inicial ($\theta = 1^\circ$).

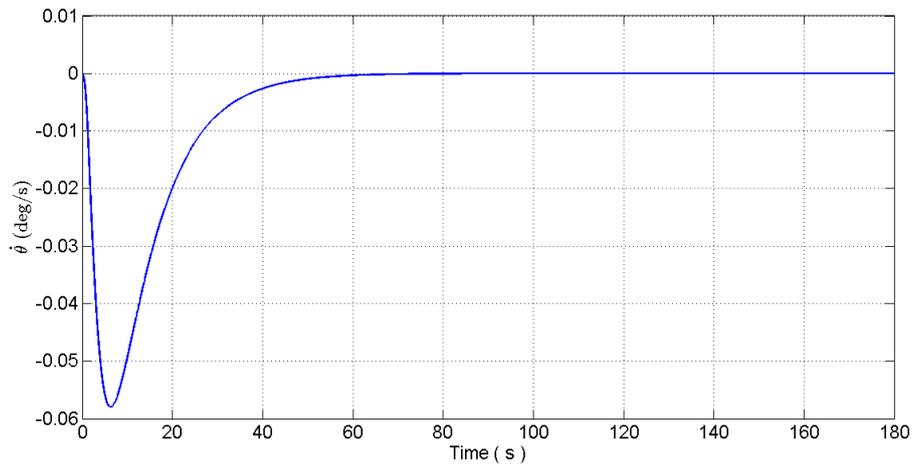
Figura 3.10 - Resposta a condição inicial para θ .



Na Figura 3.10 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável θ , que

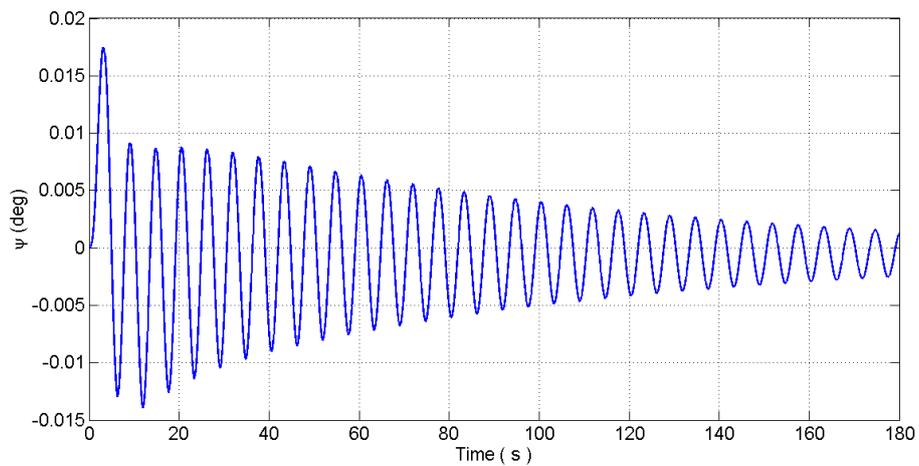
corresponde ao ângulo de atitude (ângulo do corpo rígido). Esta variável retorna a posição de equilíbrio (0°) e é estabilizada em torno de $60s$.

Figura 3.11 - Resposta a condição inicial para $\dot{\theta}$.



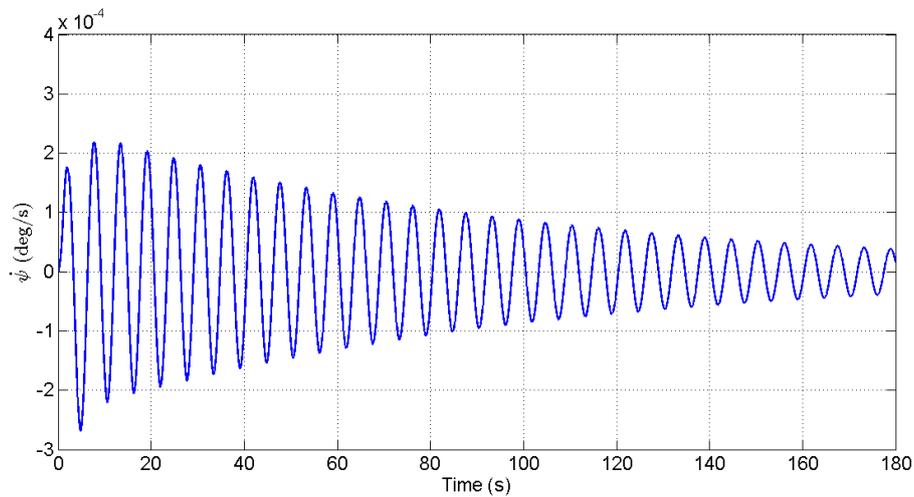
Na Figura 3.11 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável $\dot{\theta}$, que corresponde a velocidade angular da atitude (velocidade angular do corpo rígido). Esta variável é excitada e retorna ao repouso em torno de $50s$.

Figura 3.12 - Resposta a condição inicial para ψ .



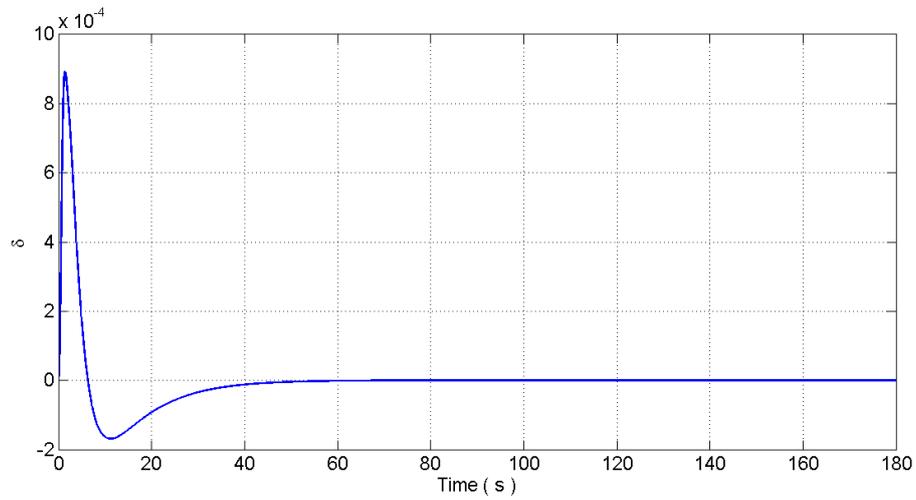
Na Figura 3.12 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável ψ que corresponde ao movimento angular do análogo mecânico (pendulo), que representa a *sloshing*. Apesar desta variável não ter se estabilizado dentro dos três minutos da simulação, ela teve sua amplitude reduzida de aproximadamente 90%, o suficiente para amenizar sua influencia sobre as outras variáveis.

Figura 3.13 - Resposta a condição inicial para $\dot{\psi}$.



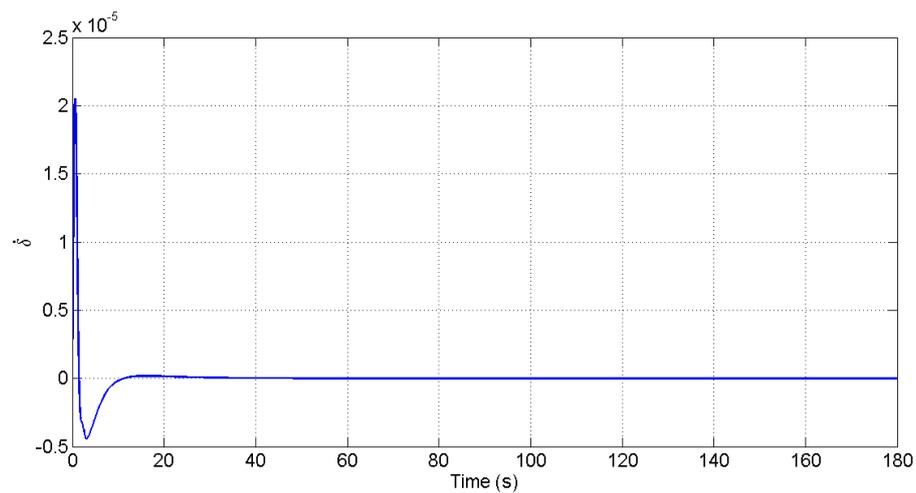
Na Figura 3.13 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável $\dot{\psi}$ que corresponde a velocidade angular do análogo mecânico (pendulo) que representa a velocidade com que ocorre o sloshing. Esta variável foi excitada na ordem de 10^{-4} , o suficiente para perturbar a situação de equilíbrio, e pode se considerar que ela estabiliza dentro dos três minutos.

Figura 3.14 - Resposta a condição inicial para δ .



Na Figura 3.14 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável δ , que corresponde ao deslocamento elástico. Esta variável foi levemente perturbada e retorna a posição de equilíbrio em 30s.

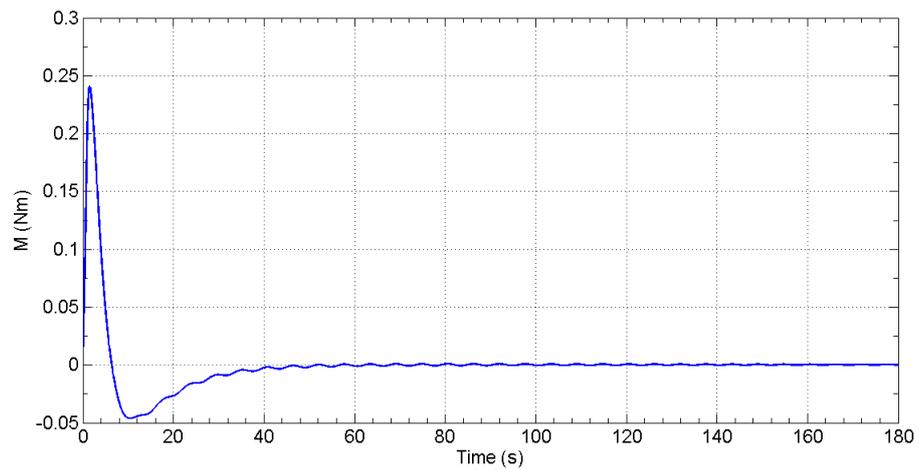
Figura 3.15 - Resposta a condição inicial para $\dot{\delta}$.



Na Figura 3.15 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável $\dot{\delta}$, que

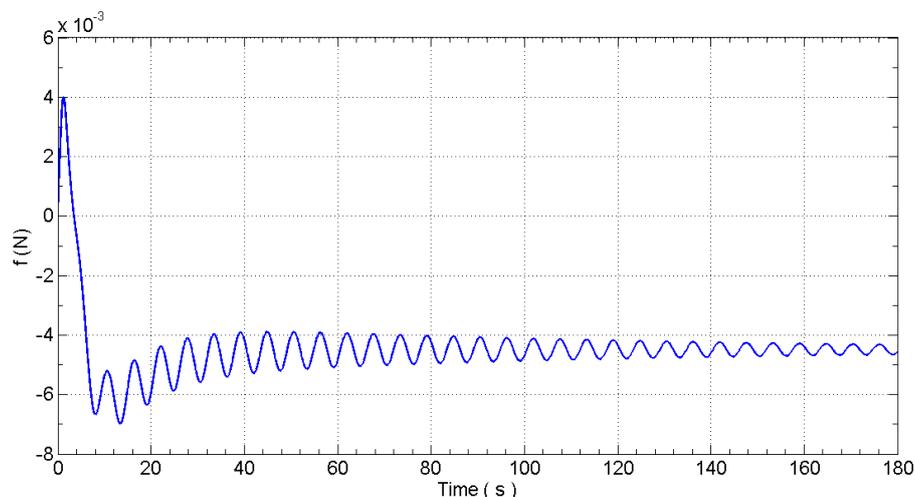
corresponde a velocidade do deslocamento elástico. Esta variável retorna a posição de equilíbrio em 20s, mas devido sua ordem de grandeza de 10^{-6} , pode se considerar que ela foi muito pouco excitada.

Figura 3.16 - Resposta para o esforço de controle M .



Na Figura 3.16 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável M , que corresponde a um torque interno. Foi gerado um pico de aproximadamente 0,25 Nm e a ação deste atuador cessou em 45 s.

Figura 3.17 - Resposta para o esforço de controle f .



Na Figura 3.17 se tem a resposta da ação da lei de controle sobre a variável f que corresponde a ação de uma força externa. Para este atuador houve um pico de $7 \cdot 10^{-3} N$ e em seguida ele cai para $4,5 \cdot 10^{-3} N$.

Das simulações foi observado que o ângulo de atitude foi controlado, que o *sloshing* teve seu efeito minimizado e o apêndice flexível teve sua vibração amortecida mostrando a eficácia da lei de controle projetada. Entretanto, para manter a estabilização, os atuadores continuaram ativos gerando um torque da ordem de $4,5 \cdot 10^{-3} Nm$.

3.4 Sinopse do capítulo

Neste capítulo foi apresentado as características e uma forma específica de modelagem do *sloshing* com flexibilidade. As equações de movimento do modelo foram obtidas usando os conceitos de mecânica Lagrangiana. Foi feito o projeto da lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞ , ressaltando os principais desafios existentes no controle de um sistema em que se considera o *sloshing* e a flexibilidade. As simulações mostraram o bom desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ , uma vez que este controlou e estabilizou o ângulo de atitude (θ) minimizando os efeitos da interação entre o *sloshing* e a flexibilidade, embora para manter a estabilização os atuadores continuassem ativos, o que significa que permaneceram consumindo energia. Finalmente, ressalta-se que, apesar da extensa revisão bibliográfica feita pelo autor, não foi encontrado o modelamento de um satélite rígido-flexível que também considerasse a influência do

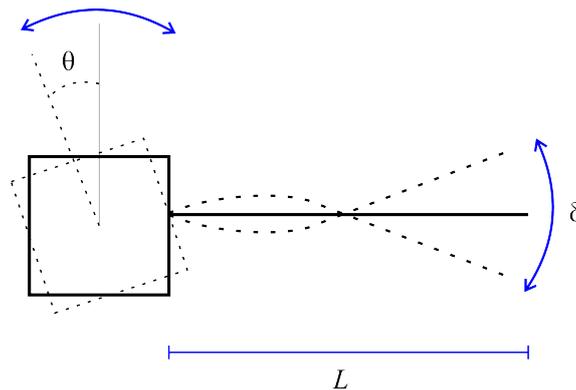
movimento de líquido no seu interior (*sloshing*). Consequentemente, os resultados obtidos e o projeto do controlador por meio do método \mathcal{H}_∞ para um satélite rígido-flexível com *sloshing* representa uma contribuição relevante deste estudo.

4 PROJETO DO CONTROLADOR H-INFINITO COM ALOCAÇÃO DE POLOS VIA LMI PARA UM SATÉLITE RÍGIDO-FLEXÍVEL COM INCERTEZAS.

Em se tratando de estruturas espaciais, existem diversos equipamentos que estão suscetíveis a este fenômeno. Dentre eles podemos citar antenas, painéis solares, velas entre outros.

As estruturas flexíveis tendem a vibrar quando excitadas por forças ou torques externos. Essa vibração, por sua vez, é sentida no corpo do satélite, prejudicando assim o sistema de controle e dificultando o apontamento e a precisão dos sensores inerciais.

Figura 4.1 - Concepção artística de um satélite com um apêndice flexível.



Fonte: Adaptado de Sidi (1997).

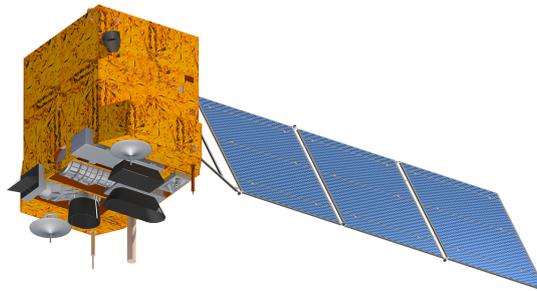
Na Figura 4.1 é representada a ação da flexibilidade no corpo rígido quando este está livre no espaço. Ao vibrar o “braço vibra o corpo”. Temos que θ é o deslocamento angular do corpo rígido, δ a deformação do painel e L o comprimento do apêndice.

Uma forma usual de se modelar um satélite com apêndice(s) flexível(is) é representá-lo com sendo uma haste(s) fixada(s) a um servomotor (JUNKINS; KIM, 1993).

Este tipo de simplificação é feita quando se deseja focar, ou estudar, nos efeitos da flexibilidade (UREK, 2011). Evidentemente que isto aumenta a incerteza do modelo matemático em comparação ao modelo real. Desta forma deve-se buscar um comprometimento entre a realidade e o modelo projetado de modo a atingir os

requisitos estabelecidos (CASTRO, 2009).

Figura 4.2 - China-Brazil Earth Resources Satellite, Satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestre (CBERS).



Fonte: http://www.cbears.inpe.br/imagens/ilustra1_descricao3e4_amplia.jpg acessado em 19 de novembro de 2015.

Na Figura 4.2 é mostrado o satélite sino-brasileiro (CBERS), que é composto por um corpo rígido e uma estrutura flexível. Esta configuração pode ser representada pelo modelo mostrado na Figura 4.3.

Figura 4.3 - Rotary Servo Base Unit (SRV02).



Fonte: <http://www.adeptscience.co.uk/wp-content/uploads/2012/07/497-800-600.jpg> acessado em 23 de novembro de 2015.

O sistema mecânico da empresa Quanser® Rotary Servo Base Unit (SRV02) é mostrado na Figura 4.3. Este tipo de mecanismo pode ser usado para verificar e

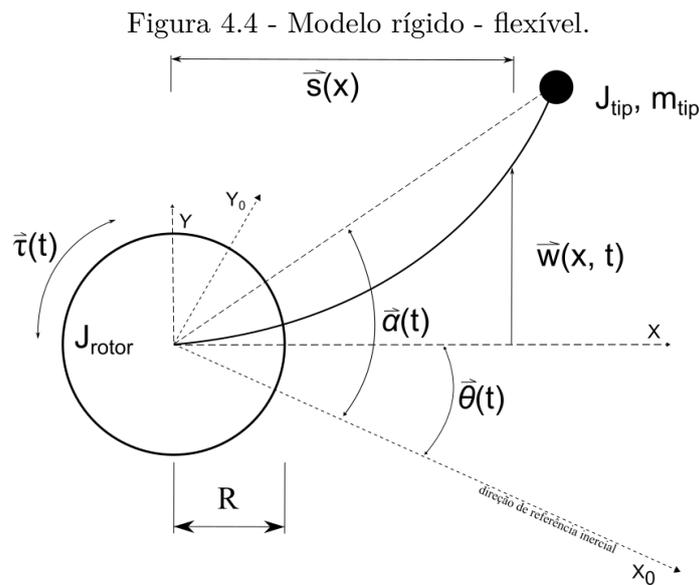
projetar o SCA de um satélite rígido–flexível levando em conta a ação da flexibilidade (dentro das devidas escalas).

4.1 Modelo do satélite rígido–flexível usando o método dos modos assumidos.

O sistema a ser modelado consiste em um satélite rígido flexível simplificado por um análogo mecânico, que possui um rotor elétrico com uma haste flexível com uma massa de prova em sua ponta.

Na Figura 4.4 é mostrado o sistema da haste flexível. O rotor tem posição angular $\theta(t)$, raio R , componente de atrito viscoso b_m , momento de inércia J_{ROTOR} e desenvolve um torque τ . A haste possui comprimento L , densidade linear ρ , coeficiente de amortecimento k_e , rigidez EI (E é o módulo de Young e I é o momento de inércia seccional) e $\alpha(t)$ é a posição do braço em relação à referência. A massa de prova (considerada pontual) possui massa m_{tip} e momento de inercia J_{tip} . A deformação elástica da haste é dada por $w(x, t)$. Esta deformação será discretizada por meio do método dos modos assumidos, conforme descrito em (SOUZA, 1992), obtendo-se uma variável em função do tempo e outra em função do deslocamento elástico.

É assumido que a deformação elástica da haste se dá no plano horizontal, perpendicular ao eixo X e possui pequena magnitude em relação ao tamanho da haste.



Fonte: Adaptado de D.Wu et al. (2005).

4.1.1 Equações de movimento do satélite rígido–flexível

Para determinar as equações do movimento do análogo mecânico será utilizado o método lagrangiano em combinação com o método dos modos assumidos. A haste flexível é considerada como sendo uma viga do tipo Euler-Bernoulli (INMAN, 1989). Assim sendo, para vibrações livres da haste, é considerada a seguinte equação diferencial parcial (Equação 4.1).

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

As condições de contorno para uma viga de comprimento L , fixada em x_0 . Como a viga está fixada em x_0 então neste ponto não existe deslocamento flexível (INMAN, 1989), logo:

$$w(0, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

Na outra extremidade da viga $x = L$ a viga é livre de qualquer esforço ou torque (INMAN, 1989), então matematicamente:

$$\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^3 w(L, t)}{\partial x^3} - \frac{m_{tip}}{EI} \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.5)$$

Usando a técnica de separação de variáveis,

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.6)$$

Inserindo a Equação 4.6 na Equação 4.1,

$$\frac{C^2}{X(x)} \left(\frac{d^4}{dx^4} X(x) \right) = -\frac{1}{T(t)} \left(\frac{d^2}{dt^2} T(t) \right) = \omega^2 \quad (4.7)$$

em que $C^2 = EI/m$. Desta forma:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2} T(t) \right) + \omega^2 T(t) = 0 \\ \left(\frac{d^4}{dx^4} X(x) \right) - \frac{\omega^2}{C^2} X(x) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Usando as equações de contorno apresentadas em 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 obtêm-se a seguinte solução para a equação dependente do espaço.

$$X(x) = C_1 \left(\cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - \left(\frac{\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}{\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)} \right) (\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)) \right) \quad (4.9)$$

em que,

$$\frac{\omega_i^2}{C^2} = \beta_i^4 \rightarrow \omega_i = \sqrt{C^2 \beta_i^4} \rightarrow \omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (4.10)$$

C_1 é uma constante de normalização e β_i , com $(i = 1, 2, 3, \dots)$, são as raízes positivas da equação transcendental, dada por:

$$\cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) - K (\cos(\beta_i L) \sinh(\beta_i L) - \cosh(\beta_i L) \sin(\beta_i L)) = 1 \quad (4.11)$$

em que $K = m_{tip}/\rho$

O modelo apresentado na Figura 4.4 pode ter sua energia cinética total T_{total} escrita como

$$T_{total} = T_{rotor} + T_{dm} + T_{tip} \quad (4.12)$$

na Equação 4.12 se tem o somatório das energias cinéticas, T_{rotor} para a parte do

rotor, T_{dm} para um elemento de massa da viga e T_{tip} para a massa na ponta da viga. Expandindo os termos,

$$T = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \left(J_{rotor} + \rho \left(\int_0^L w^2 dx + \frac{1}{3}(R+L)^3 - \frac{1}{3}R^3 \right) + m_{tip}(w_L^2 + (R+L)^2) + J_{tip} \right) + \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(2\rho \int_0^L \dot{w}(R+s)dx + 2m_{tip}\dot{w}_L + J_{tip} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\rho \int_0^L \dot{w}^2 dx + m_{tip} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) \right) \quad (4.13)$$

Na Equação 4.13 a função espacial $s(x)$ representa a distancia da origem do sistema de referencia (X, Y) até um elemento de massa (dm) na haste.

Dado que o potencial é função da rigidez EI (E é o modulo de Young e I é o momento de inércia seccional) e da segunda derivada da deformação elástica a energia potencial é descrita por (JUNKINS; KIM, 1993), (SOUZA; SOUZA, 2016),

$$V = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.14)$$

O sistema ainda é sujeito a uma dissipação de energia, modelada como sendo uma função de dissipação de Rayleigh,

$$R = \frac{1}{2}b_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K_eEI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.15)$$

em que k_e é um coeficiente de amortecimento.

O deslocamento flexível $w(x, t)$ é discretizado por meio do método dos modos assumidos (SOUZA, 1992), em que se supõe que o deslocamento flexível é uma combinação linear do somatório dos produtos de uma função dependendo do tempo e de outra função dependendo da posição, dada por:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)\eta_i(t) \quad (4.16)$$

em que $\varphi_i(x)$, com ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), são as autofunções dos i -éssimos modos

(função de forma) e $\eta_i(t)$ são as coordenadas generalizadas (estas representam o deslocamento temporal da função de forma) dos i -éssimos modos.

A função de forma φ_i deve satisfazer as condições de normalização (JUNKINS; KIM, 1993) abaixo citadas:

$$\rho \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + m_{tip}\varphi_i(L)\varphi_j(L) = 0 \quad i \neq j \quad (4.17)$$

$$\rho \int_0^L \varphi_i(x)dx + m_{tip}\varphi_i^2(L) = 1 \quad i = j \quad (4.18)$$

A solução da equação de Euler–Bernoulli (Equação 4.1) será a função de forma $\varphi_i(x)$. Assim,

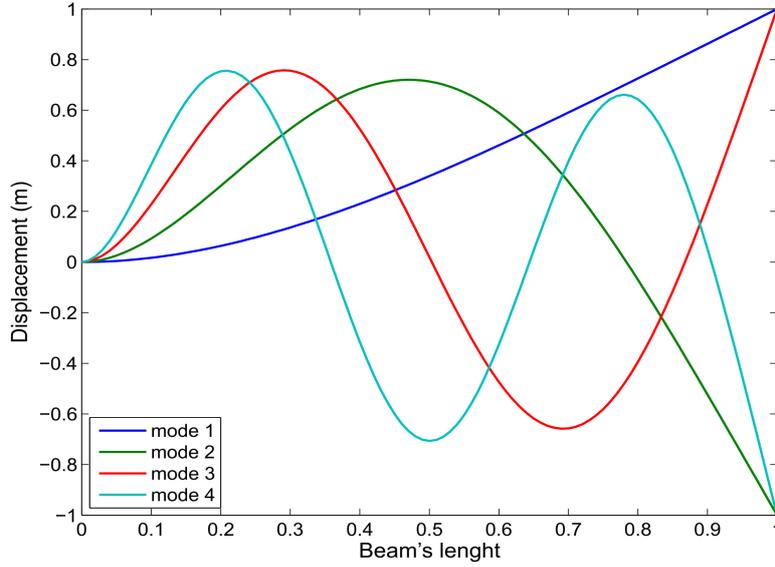
$$\varphi_i(x) = C_1 \left(\cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - \left(\frac{\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}{\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)} \right) (\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)) \right) \quad (4.19)$$

em que C_1 é determinada através das equações de normalização (Equações 4.17 e 4.18), β_i são as raízes positivas da Equação 4.11 e a frequência angular de cada modo ω_i é dada por:

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (4.20)$$

A Figura 4.5 mostra a forma dos quatro primeiros modos da função de forma $\varphi_i(x)$, já normalizada.

Figura 4.5 - Função de forma para os quatros primeiros modos.



Fonte: Bigot e Souza (2013)

Como o proposto em Junkins e Kim (1993), D.Wu et al. (2005) e Saad et al. (2012). A energia cinética do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 & \left[J_{rotor} + \rho \left[\int_0^L w^2 dx + \frac{1}{3}(R+L)^3 - \frac{1}{3}R^3 \right] + m_{tip} [w_L^2 + (R+L)^2] + J_{tip} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \dot{\theta} \left[2\rho \int_0^L \dot{w}(R+s) dx + 2m_{tip} \dot{w}_L + J_{tip} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\rho \int_0^L \dot{w}^2 dx + m_{tip} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Escrevendo as grandezas vetoriais $\varphi(x)$ e $\eta(t)$ na forma matricial ϕ e q . Com as equações da energia potencial (Equação 4.14) e cinética (Equação 4.21), é possível escrever a lagrangeana ($\mathcal{L} = T - V$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 & \left[J_{rotor} + q^T \rho \int_0^L \phi \phi^T dx q + \rho \frac{1}{3} (R + L)^3 + m_{tip} (q^T \phi_L \phi_L^T q + (R + L))^2 + J_{tip} \right] \\
& + \frac{1}{2} \dot{\theta} \left[2\rho \dot{q}^T \int_0^L \phi (R + s) dx + 2m_{tip} \dot{q}^T \phi_L (R + L) + J_{tip} \dot{q}^T \phi' \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[\rho \dot{q}^T \int_0^L \phi \phi^T dx \dot{q} + m_{tip} \dot{q}^T (\phi_L \phi_L^T) \dot{q} + J_{tip} \dot{q} (\phi' \phi'^T) \dot{q} \right] \\
& - \frac{1}{2} q^T EI \int_0^L \phi'' \phi'' dx q
\end{aligned} \tag{4.22}$$

em que $d\phi/dx = \phi'$, $d^2\phi/dx^2 = \phi''$ e $\phi_L = \phi(L)$.

Aplicando a Equação 4.15 e a Equação 4.22 na Equação 4.23:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{L} \right] - \frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial p_i} R = Q_i \tag{4.23}$$

em que $p = [\theta \quad q]$ representa os estados e $Q_i = [\tau \quad 0]$ o torque generalizado.

Da Equação 4.23 se tem as equações do movimento:

$$\ddot{\theta} [I_t + q^T C_{rr} q] + \dot{q}^T M_{rf} + \dot{\theta} [2q^T C_{rr} \dot{q} + b_m] = \tau \tag{4.24}$$

$$\ddot{\theta} M_{rf} + M_{ff} \ddot{q} - \dot{\theta}^2 C_{rr} q + K_{ff} q + B_{ff} \dot{q} = 0 \tag{4.25}$$

Na Equação 4.24 e na Equação 4.25 se tem que:

$$\begin{aligned}
I_t &= J_{rotor} + \frac{1}{3}\rho \left((R+L)^3 - R^3 \right) + m_{tip}(R+L)^2 + J_{tip} \\
C_{rr} &= \rho \int_0^L \phi \phi^T dx + m_{tip} \phi_L \phi_L^T \\
M_{ff} &= \rho \int_0^L \phi \phi^T dx + m_{tip} \phi_L \phi_L^T + \frac{1}{2} J_{tip} \phi_L' \phi_L' \\
M_{rf} &= \rho \int_0^L \phi (R+x) dx + m_{tip} (R+L) \phi_L + \frac{1}{2} J_{tip} \phi_L' \\
B_{ff} &= K_e EI \int_0^L \phi'' \phi''^T dx \\
K_{ff} &= EI \int_0^L \phi'' \phi''^T dx
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Organizando as Equações 4.24 e 4.25 em uma forma matricial onde se tem em evidência a matriz massa (M), matriz de amortecimento (D), matriz de rigidez (K), os termos não lineares ($f(\cdot)$) e Q o torque:

$$M\ddot{p} + D\dot{p} + Kp + f(p) = Q \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_t + q^T C_{rr} q & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\dot{\theta} q^T C_{rr} \dot{q} \\ -\dot{\theta}^2 C_{rr} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

De acordo com (D.WU et al., 2005), para obter um modelo linear do satélite, não se considera os termos não lineares $q^T C_{rr} q$, $\dot{\theta} q^T C_{rr} \dot{q}$ e $-\dot{\theta}^2 C_{rr} q$, devido a hipótese das pequenas deformações, seus efeitos são pouco significantes, podendo assim serem negligenciados. Logo se tem as equações linearizadas,

$$\begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Fazendo um analogia entre a Equação 4.27 com a Equação 4.29, se tem as matrizes M , K e D .

$$M = \begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$D = \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Para poder descrever essa dinâmica na forma de espaço de estado ($\dot{x} = Ax + Bu$, $u = -k_{controlador}x$), se deve fazer o seguinte procedimento:

Da Equação 4.27 se isola os termos de segundo grau, como mostrado abaixo,

$$\ddot{p} = M^{-1}Qu - M^{-1}D\dot{p} - M^{-1}Kp \quad (4.33)$$

Fazendo a substituição de variáveis com $X_1 = \theta$ e $X_2 = \dot{q} = \dot{\eta}_i$,

$$\begin{aligned} p &= X_1 \\ \dot{p} &= X_2 = \dot{X}_1 \\ \ddot{p} &= \dot{X}_2 \end{aligned}$$

Por fim, obtemos as equações onde θ , η e u representam os movimentos rígido, flexível e o torque de controle respectivamente do satélite, que na forma matricial é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}Q \end{bmatrix} u \quad (4.34)$$

Como resultado, X é a matriz dos estados e u a variável de controle.

4.2 Projeto da lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞ .

A partir do modelamento desenvolvido no item 4.1.1, será projetado uma lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞ .

Considerando-se o modelo com dois modos vibrações, o objetivo desta lei de controle é estabilizar a ponta da haste do braço flexível, trazendo-a para uma posição de repouso.

4.2.1 Seleção das funções peso

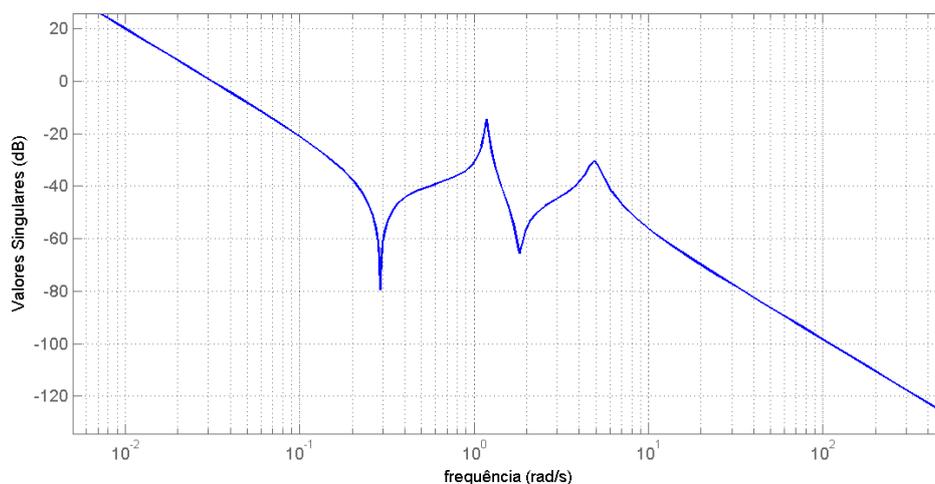
De acordo com a teoria exposta no capítulo 2.1.2, admite-se as funções peso W_S e W_T representadas pela Equação 4.35, reproduzidas abaixo:

$$W_S = \frac{s}{M} + \omega_b, \quad W_T = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M}}{As + \omega_{bc}} \quad (4.35)$$

Os parâmetros das funções são admitidos como: $\omega_b = 0,1$ rad/s; ω_{bc} - como proporcional a $100 \cdot \omega_b$; A - de modo que o erro de estado estacionário seja da ordem de 10^{-3} , valor tradicionalmente sugerido na literatura (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001; ZHOU; DOYLE, 1998); M - de forma que o *overshoot* seja limitado a 10, prevenindo assim a amplificação do ruído;

Vale a pena ressaltar que neste trabalho não se levou em consideração a ponderação do sinal de controle dada pela função W_{KS} .

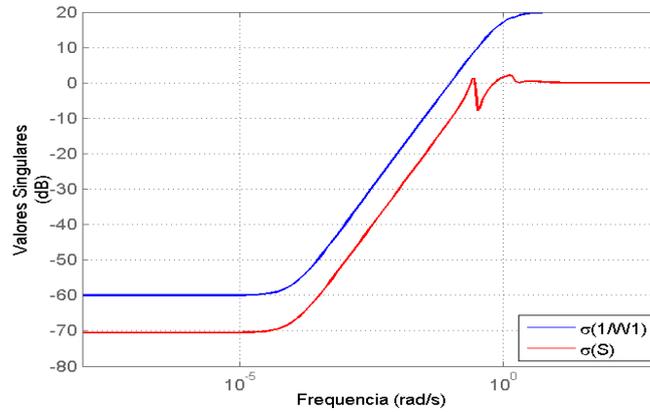
Figura 4.6 - Valores singulares da planta.



Assim sendo, resta verificar se as funções projetadas satisfazem os requisitos fornecidos pelas Equações 4.36, mostradas abaixo, respectivamente;

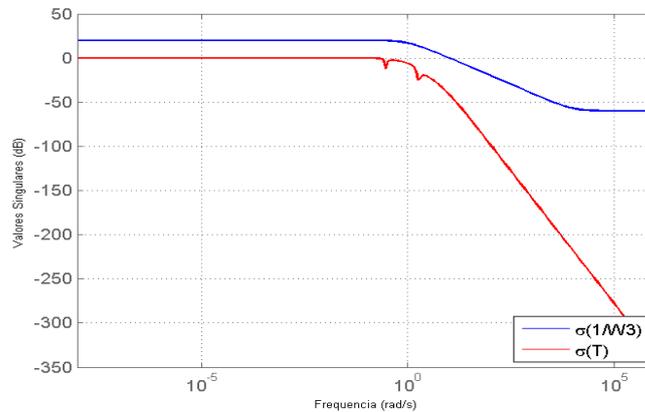
$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}, \quad \bar{\sigma}(T(j\omega)) < \frac{1}{|W_T(j\omega)|} \quad (4.36)$$

Figura 4.7 - Valores singulares da função sensibilidade S com $\frac{1}{W_S}$.



Na Figura 4.7 se tem os valores singulares da função sensibilidade e da inversa da função peso W_S , mostrando que o requisito fornecido pela Equação 4.36 é obedecido.

Figura 4.8 - Valores singulares da função sensibilidade T com $\frac{1}{W_T}$.



Na Figura 4.8 se tem os valores singulares da função sensibilidade complementar e da

inversa da função peso W_T , mostrando que o requisito fornecido pela Equação (4.36) é obedecido. Assim os critérios de desempenho e robustez do \mathcal{H}_∞ são obedecidos, garantindo a existência de um controlador.

4.2.2 Simulação sem incerteza

Para as simulações foram adotados os seguintes parâmetros, extraídos de (D.WU et al., 2005) e (SAAD et al., 2012). O rotor tem raio $R = 0,05 \text{ m}$, componente de atrito viscoso $b_m = 0,15 \text{ m}^2/\text{s}$, momento de inércia $J_{rotor} = 0,3 \text{ kgm}^2$. A haste possui comprimento $L = 1,5 \text{ m}$, densidade linear $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, coeficiente de amortecimento $ke = 0,03$, rigidez $EI = 18,4 \text{ Nm}^2$ (E é o módulo de Young e I é o momento de inércia seccional); A massa de prova possui massa $m_{tip} = 0,25 \text{ kg}$ e momento de inercia $J_{tip} = 0,04 \text{ kgm}^2$.

Os auto-valores estão relacionados diretamente com a frequência natural dos modos de vibração considerados (INMAN, 1989). Afim de obter um modelo simples, mas fiel as características vibracionais, é apresentado a Tabela 4.1 com os auto-valores dos sete modos de vibração do modelo flexível.

Tabela 4.1 - Análise dos Auto-Valores

MOD	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5	CASO 6	CASO 7
1	1,4610	1,1784	1,1768	1,1767	1,1767	1,1767	1,1767
2	—	4,9225	3,8324	3,8169	3,8146	3,8141	3,8140
3	—	—	1,0158	8,0235	7,9746	7,9648	7,9620
4	—	—	—	1,6945	1,3760	1,3660	1,3635
5	—	—	—	—	2,5157	2,1047	2,0881
6	—	—	—	—	—	3,4738	2,9887
7	—	—	—	—	—	—	4,5673

*Medidos em rad/s

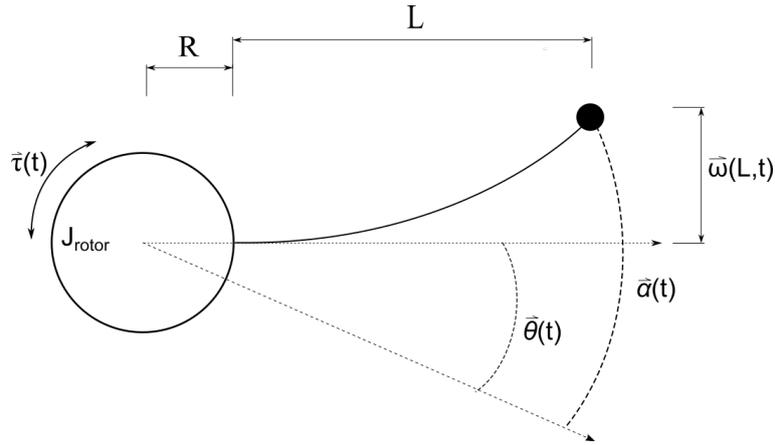
Os valores da Tabela 4.1 mostram os auto-valores respectivos dos sete modos de vibração do modelo flexível. Da análise dos auto-valores Tabela 4.1 observa-se que os valores das frequências do primeiro e segundo modo permanecem praticamente constantes a partir do modelo com três modos, indicando que este modelo é um bom candidato para as simulações.

Para verificar o desempenho deste modelo com três modos de vibração submete-se ele a lei de controle projetada no capítulo 4.2 sem a presença de incertezas.

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo rígido, as coordenadas generalizadas

que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 , η_2 e η_3 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ que mostra a deformação da ponta da viga, τ a ação do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em relação à referência $\alpha(t)$, como mostra a Figura 4.9:

Figura 4.9 - Modelo de referência.



em que $w(L, t)$ é a deformação elástica, R é o raio do rotor, L o comprimento da aste e θ o ângulo do corpo rígido. O ângulo $\alpha(t)$ é obtido a partir da Equação 4.37,

$$\alpha(t) = \arctan \left[\frac{w(L, t)}{L + R} \right] + \theta(t) \quad (4.37)$$

e a deformação elástica da ponta da viga é obtida por,

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \eta_i(t) = \varphi_1(L) \eta_1(t) + \varphi_2(L) \eta_2(t) \quad (4.38)$$

Excitando este modelo com três modos de vibração com uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$ obtêm-se os resultados, mostrados abaixo:

Na Figura 4.10 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido). Para estas variáveis o controlador projetado estabilizou em torno de 130s.

Figura 4.10 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).

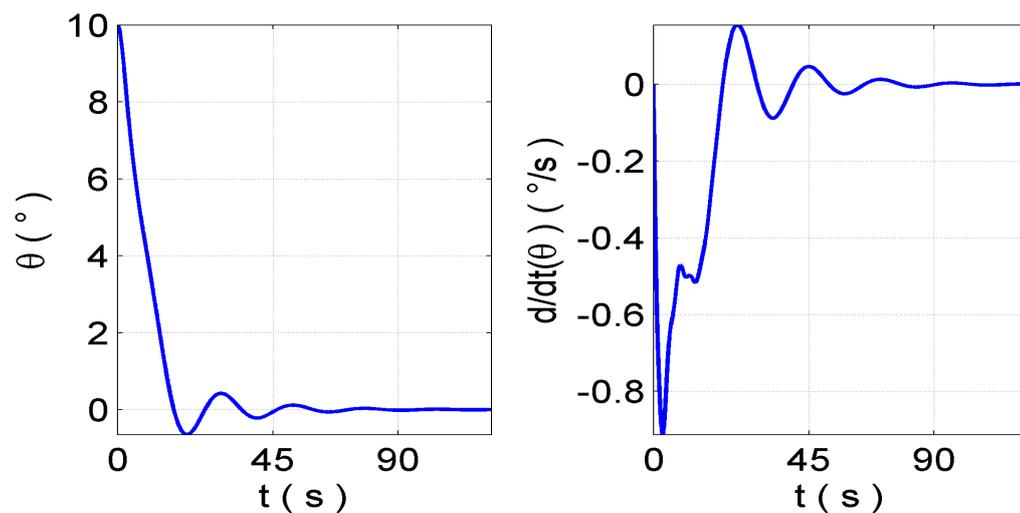
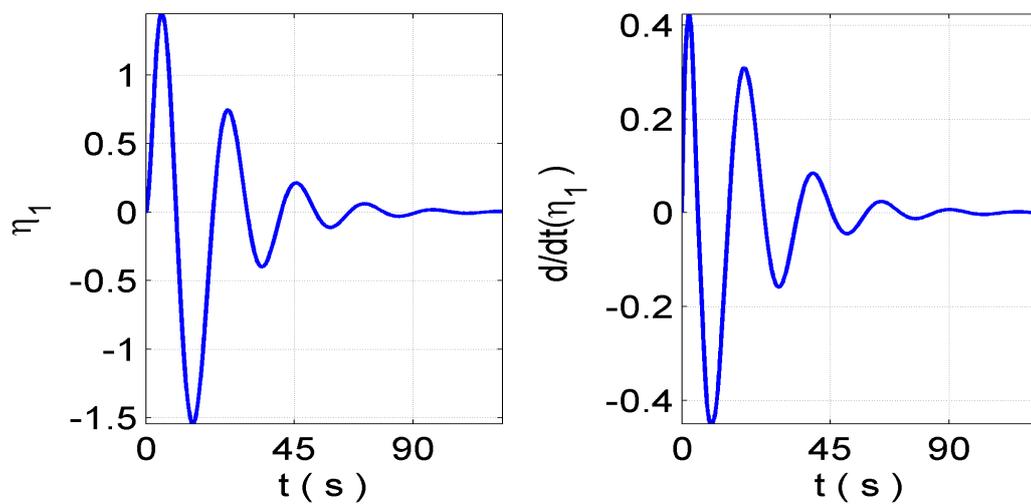
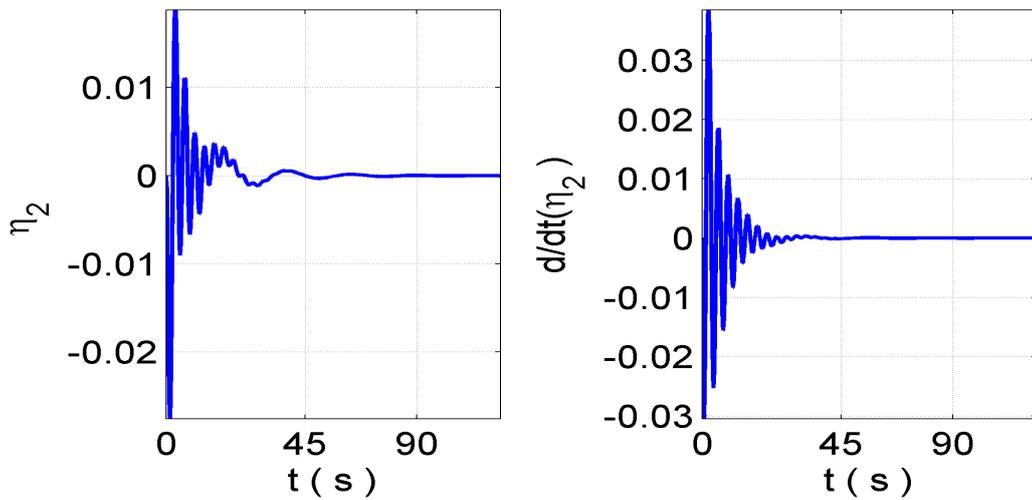


Figura 4.11 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).



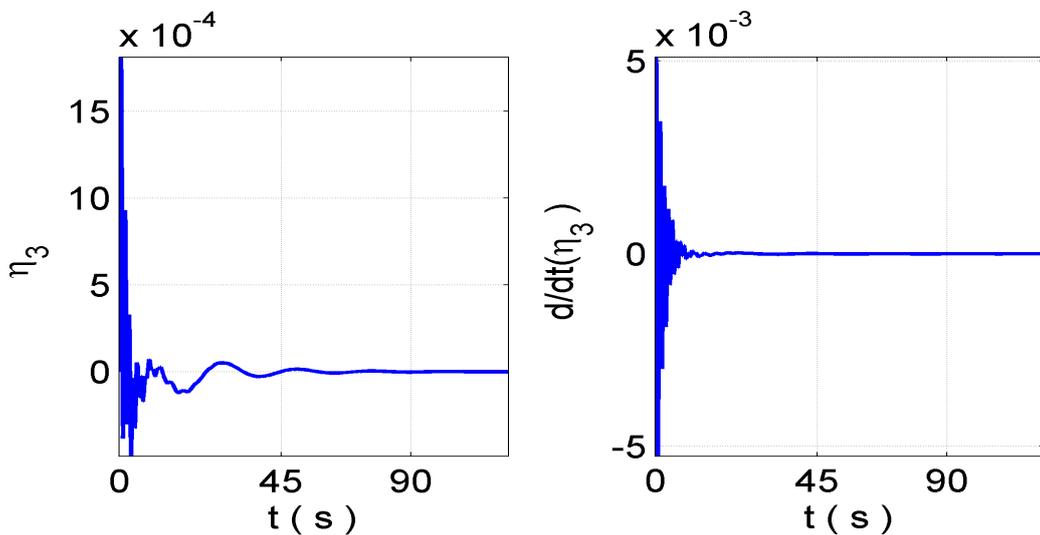
Na Figura 4.11 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$. As variáveis se estabilizam em um tempo maior que os 180s considerados.

Figura 4.12 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).



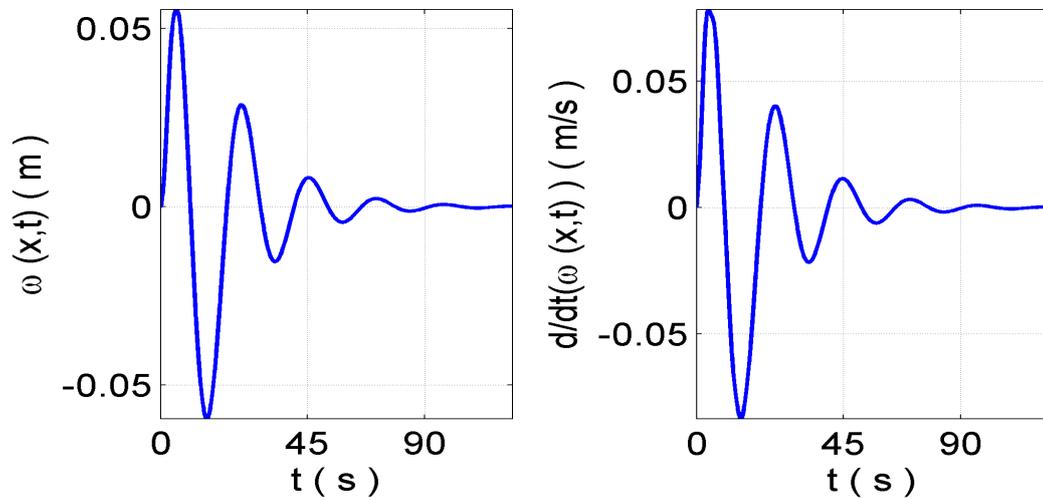
Na Figura 4.12 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$. As variáveis se estabilizam em torno de 60s.

Figura 4.13 - Resultado da simulação para a variável η_3 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_3$ (direita).



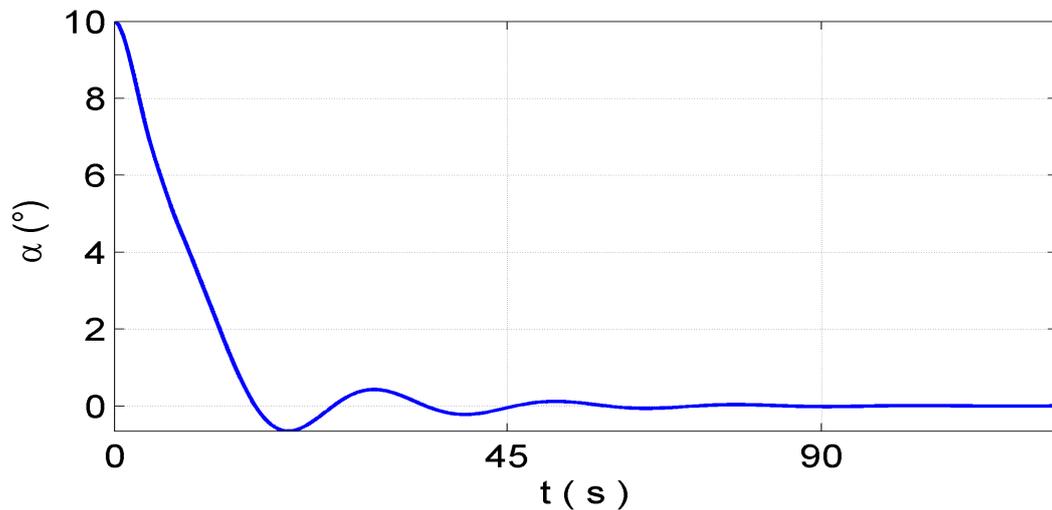
Na Figura 4.13 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_3 e $\dot{\eta}_3$. Para a variável η_3 o sistema se estabiliza em aproximadamente 60s e observa-se que o maior valor desta variável foi da ordem de 10^{-3} e para a variável $\dot{\eta}_3$ o sistema se estabilizou em menos de 45s.

Figura 4.14 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



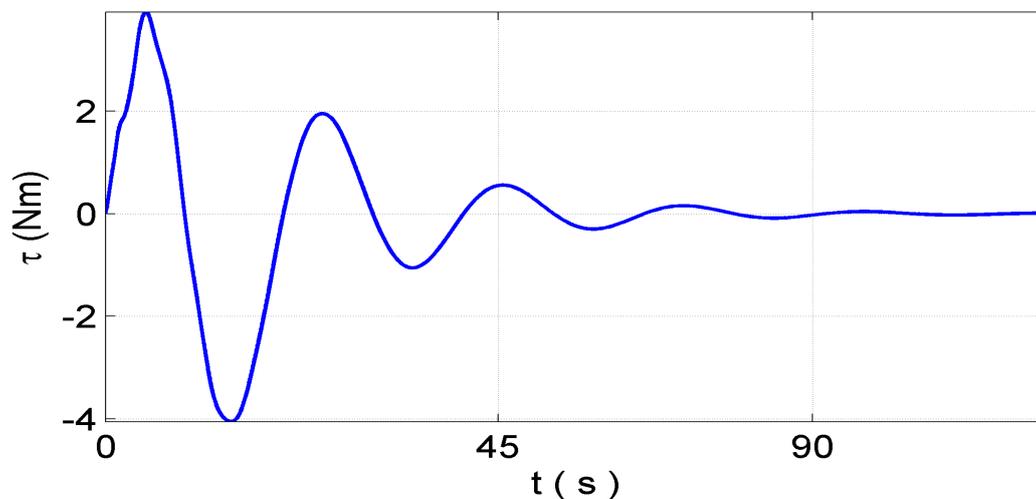
Na Figura 4.20 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\omega(\dot{L}, t)$. Da simulação desta variável observa-se que a viga teve sua ponta flexionada de 0,05 m e retornou a posição sem deformação em 100 s.

Figura 4.15 - Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .



Na Figura 4.15 é apresentado o resultado da simulação para as variável α (comportamento angular da ponta da viga). Pode-se observar que o braço retornou em 0° em aproximadamente 135s.

Figura 4.16 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).



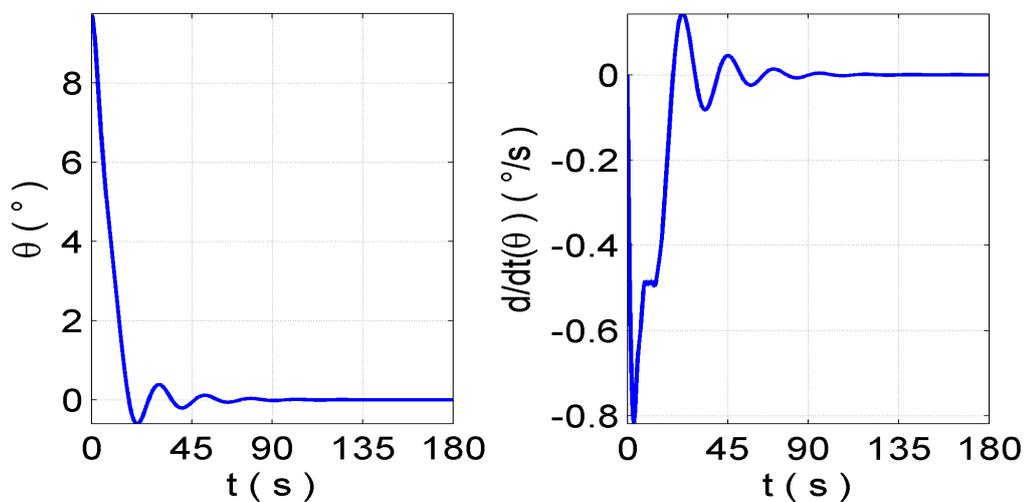
Na Figura 4.16 é apresentado o resultado da simulação para a ação do atuador. O torque máximo gerado é da ordem de $6Nm$, e cessa sua ação gerando um torque de aproximadamente $0N$ em torno de $140Ns$.

Dos resultados obtidos observa-se que há pouca influência da ação do terceiro modo. Assim sendo opta-se pela utilização com o modelo que se considera apenas os dois primeiros modos. E, por sua vez, este modelo com dois modos de vibração será utilizado para todas as simulações a seguir.

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo rígido, as coordenadas generalizadas que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 e η_2 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ (Equação 4.38) que mostra a deformação da ponta da viga, τ a ação do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em relação à referência $\alpha(t)$, como mostrado na Figura 4.9:

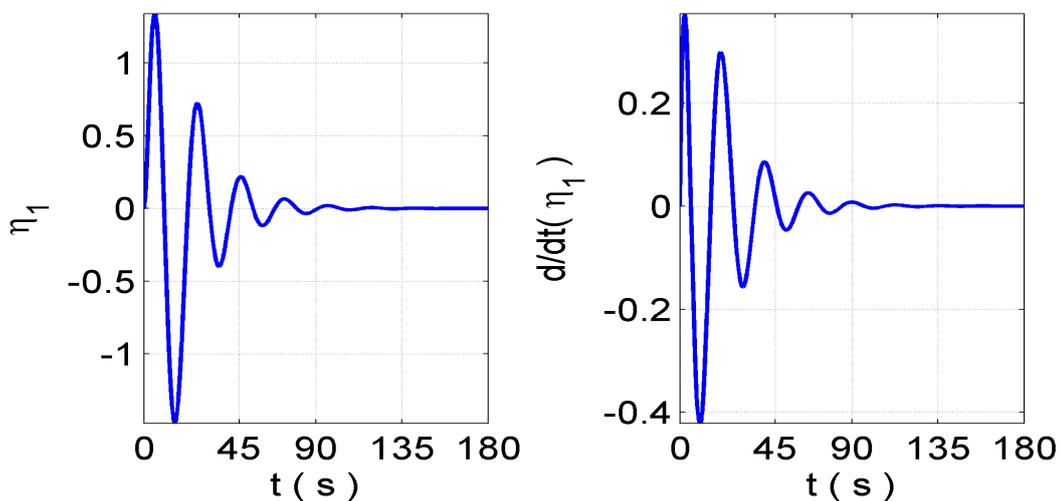
Partindo de uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$ se obtém os resultados, mostrados na sequencia,

Figura 4.17 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).



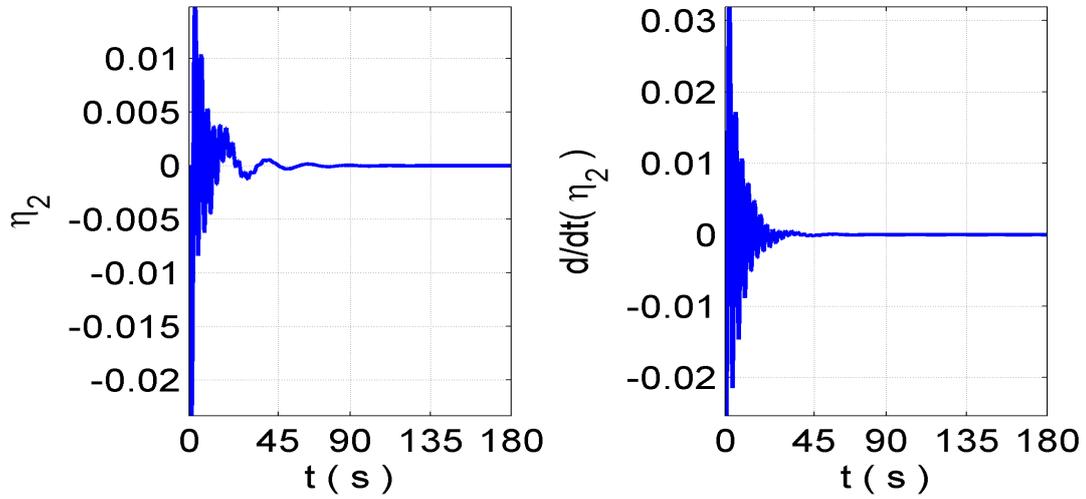
Na Figura 4.17 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do angulo do corpo rígido). As variáveis se estabilizam em torno de 90 s.

Figura 4.18 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).



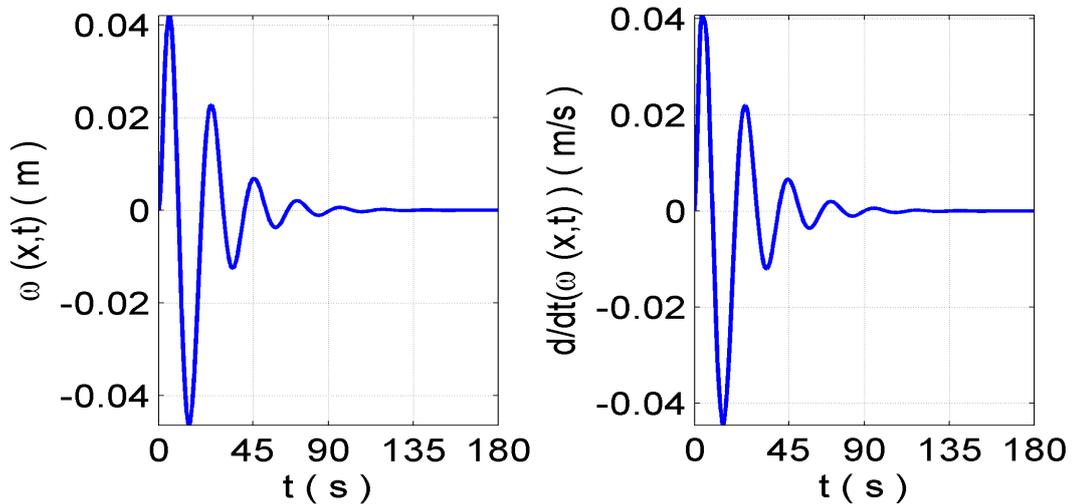
Na Figura 4.18 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$. As variáveis se estabilizam em torno de 100 s.

Figura 4.19 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).



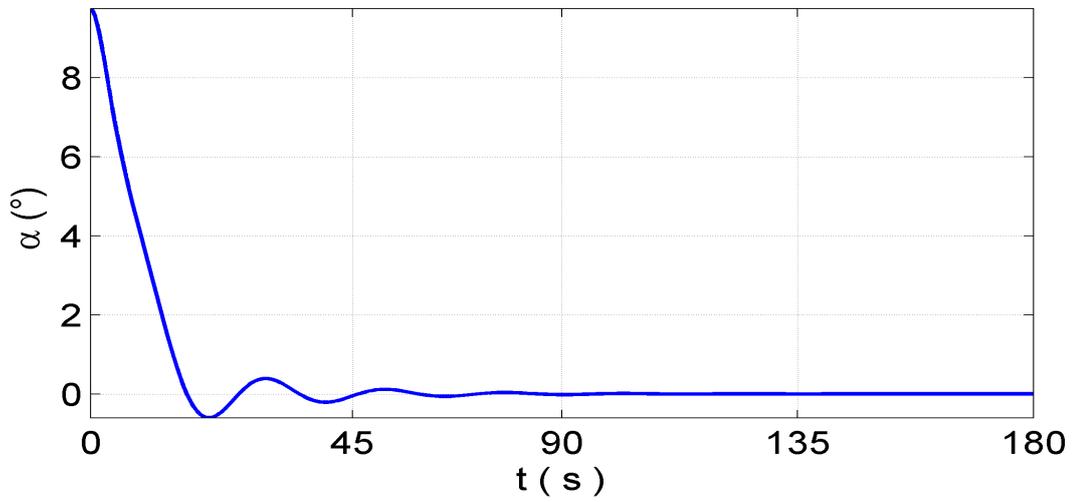
Na Figura 4.19 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$. As variáveis se estabilizam em torno de 90 s.

Figura 4.20 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



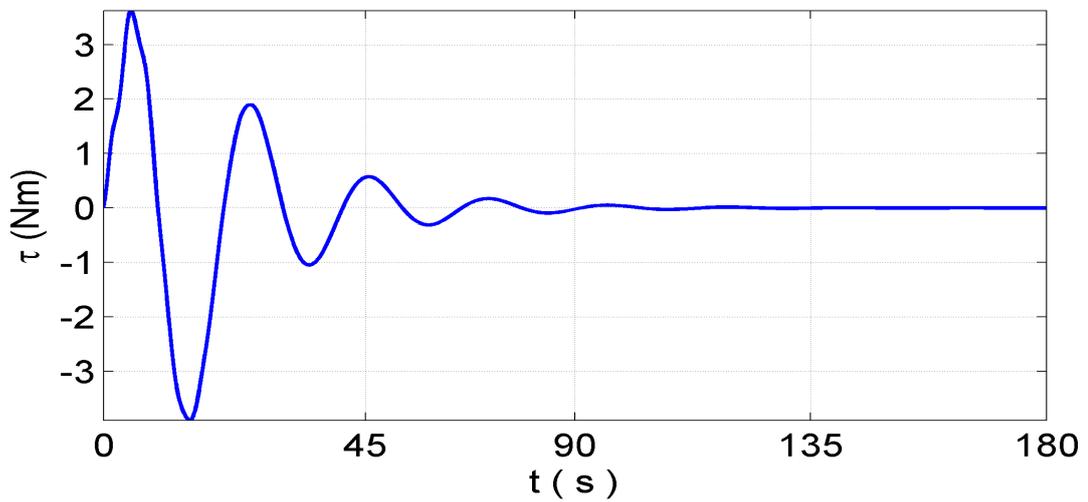
Na Figura 4.20 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$. Da simulação desta variável observa-se que a viga teve sua ponta flexionada de 0,04 m e retornou a posição sem deformação em 100 s.

Figura 4.21 - Resultado da simulação para o comportamento do angulo α .



Na Figura 4.21 é apresentado o resultado da simulação para as variável α (comportamento angular da ponta da viga). Pode-se observar que o braço retornou em 0° em aproximadamente 80s.

Figura 4.22 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).



Na Figura 4.22 é apresentado o resultado da simulação para a ação do atuador. O torque máximo gerado é da ordem de $4 Nm$, e cessa sua ação em torno de $90 s$.

4.3 Modelagem da incerteza.

A Equação 4.39 representa de forma compacta (JUNKINS; KIM, 1993; INMAN, 1989), a dinâmica do modelo flexível dada pela Equação 4.29.

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = \tau \quad (4.39)$$

Em um sistema mais realístico, os parâmetros M , D e K não são exatos, mas existe uma incerteza em torno de seus valores (D.WU et al., 2005). Assim se reescreve a Equação 4.39 na forma

$$\bar{M}(I + p_m\delta_m)\ddot{x} + \bar{D}(I + p_d\delta_d)\dot{x} + \bar{K}(I + p_k\delta_k)x = \tau \quad (4.40)$$

em que I é a matriz identidade, \bar{M} , \bar{D} e \bar{K} , são os valores nominais, p_m , p_d e p_k são os valores da incerteza e δ_m , δ_d e δ_k representam as possíveis amplitudes destes parâmetros. Os valores de δ estão confinados entre -1 e 1 ($-1 \leq \delta_m, \delta_d, \delta_k \leq 1$).

Observa-se que a quantidade M^{-1} pode ser representada como uma transformação linear fracional (LFT - *linear fraction transformation*) em δ_M (D.WU et al., 2005),

$$\bar{M}^{-1} = (\bar{M}^{-1}(I + p_m\delta_m))^{-1} = F_U(M_{mi}, \delta_m) \quad (4.41)$$

com

$$M_{mi} = \begin{bmatrix} -p_m & \bar{M}^{-1} \\ -p_m & \bar{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

De forma similar (D.WU et al., 2005), para o parâmetro $D = \bar{D}(I + p_d\delta_d)$, pode ser representado na LFT em δ_d , $d = F_U(M_d, \delta_D)$, com

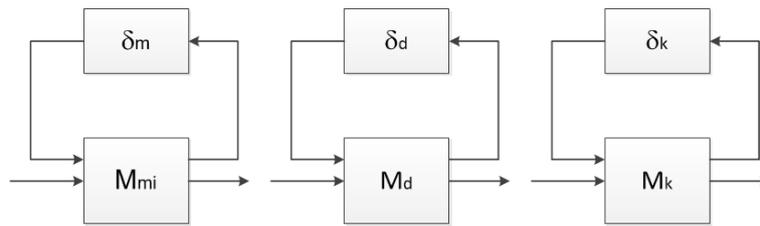
$$M_d = \begin{bmatrix} 0 & \bar{D} \\ p_d & \bar{D} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

e o parâmetro $k = \bar{K}(1 + p_k\delta_k)$ pode ser representado na LFT em δ_K , $K = F_U(M_k, \delta_k)$, com

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & \bar{K} \\ p_k & \bar{K} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Essas LFT podem ser representadas na forma de diagrama de blocos, como mostrado na Figura 4.23:

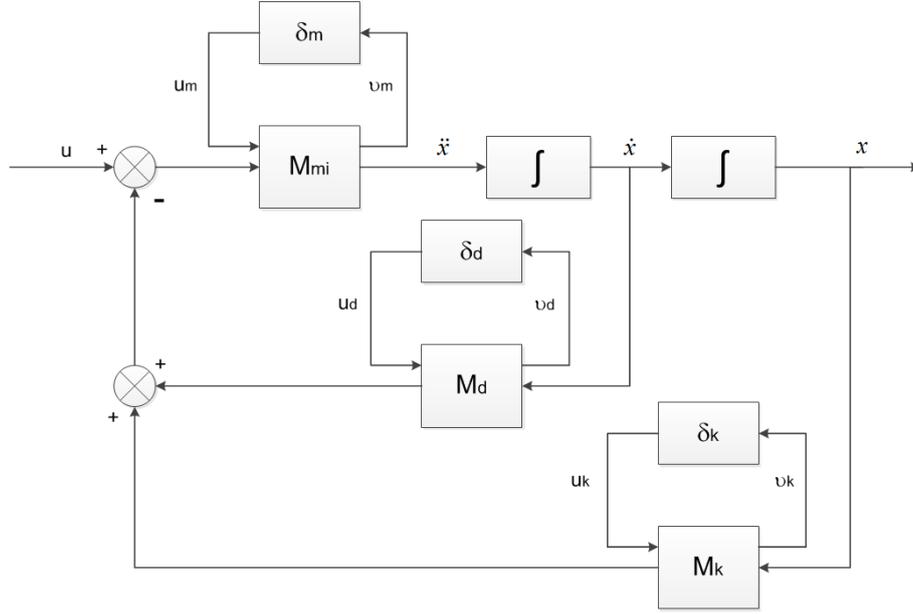
Figura 4.23 - Representação das incertezas paramétricas como LFT.



Fonte: D.Wu et al. (2005).

Para mostrar a correlação entre as incertezas, recorre-se a uma representação em diagrama de blocos em que se mostram as entradas (δ_m , δ_d e δ_k) e saídas (ν_m , ν_d e ν_k) das LFT, como mostrado na Figura 4.24

Figura 4.24 - Diagrama de blocos do sistema com incerteza paramétrica.



Fonte: D.Wu et al. (2005).

Traduzindo o diagrama de blocos da Figura 4.24 para uma linguagem matemática, análogo ao feito em (D.WU et al., 2005):

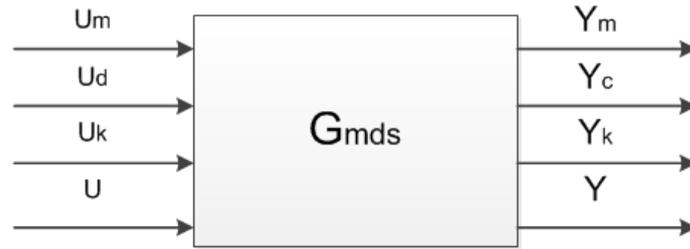
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dots \\ Y_m \\ Y_d \\ Y_k \\ \dots \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{D} & | & -p_m & -\bar{M}^{-1}p_k & -\bar{M}^{-1}p_d & | & -\bar{M}^{-1} \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{D} & | & -p_m & -\bar{M}^{-1}p_k & -\bar{M}^{-1}p_d & | & -\bar{M}^{-1} \\ 0 & \bar{D} & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \bar{K} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ I & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ U_m \\ U_d \\ U_k \\ \dots \\ U \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\begin{bmatrix} U_m \\ U_d \\ U_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_d & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_m \\ Y_d \\ Y_k \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

As Equações 4.45 e 4.46 representam o sistema representado pela Figura 4.24. Assim sendo,

observa-se que existem quatro matrizes de entrada (U_m , U_d e U_k), quatro matrizes de saída (Y_m , Y_d e Y_k) e dois vetores de estado (X_1 e X_2). Na Figura 4.25 se tem uma representação mais genérica da entrada/saída na planta (G_{mds}):

Figura 4.25 - Diagrama de entrada/saída do sistema.



Fonte: D.Wu et al. (2005).

4.3.1 Simulação com incertezas.

As simulações apresentadas a seguir serão para o sistema modelado com incertezas, sessão 4.3, e submetendo-o a lei de controle projetada na sessão 4.2.

O modelo a ser simulado é representando pela Equação 4.47.

$$\bar{M}(I + p_m \Delta_m) \ddot{x} + \bar{D}(I + p_d \Delta_d) \dot{x} + \bar{K}(I + p_k \Delta_k) x = \tau \quad (4.47)$$

As matrizes $\Delta_{m,d,k} = \text{diag}(\delta_{m,d,k}, \delta_{m,d,k}, \delta_{m,d,k})$ representam a amplitude do valor da incerta.

Em forma matricial a expressão $\bar{M}(I + p_m \Delta_m)$ fica:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \bar{m}_{23} \\ \bar{m}_{31} & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_m \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & p_m \delta_m & 0 \\ 0 & 0 & p_m \delta_m \end{bmatrix} \right) \quad (4.48)$$

De forma análoga temos para as matrizes $\bar{D}(I + p_d \Delta_d)$ e $\bar{K}(I + p_k \Delta_k)$

$$\begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \bar{d}_{13} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} & \bar{d}_{23} \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_d \delta_d & 0 & 0 \\ 0 & p_d \delta_d & 0 \\ 0 & 0 & p_d \delta_d \end{bmatrix} \right) \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_k \delta_k & 0 & 0 \\ 0 & p_k \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & p_k \delta_k \end{bmatrix} \right) \quad (4.50)$$

Cada variável δ_m, d, k pode assumir três valores $(-1, 0, 1)$. Assim sendo, distribuídas em uma matriz $n \times n$, gerará uma combinação de 3^n matrizes distintas. Para este caso as Equações 4.48, 4.49 e 4.50 são do tipo 3×3 . Logo se tem 27 combinações possíveis, como o expressado na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Variação das matrizes δ_m, δ_d e δ_k .

Caso 1 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 4 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Caso 5 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 6 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 7 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 8 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Caso 9 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Caso 10 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 11 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 12 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Caso 13 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 14 Nominal $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 15 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 16 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Caso 17 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 18 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Caso 19 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 20 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Caso 21 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 22 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 23 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Caso 24 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 4.2 - Continuação

Caso 25	Caso 26	Caso 27
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dentre as combinações existem três casos especiais: 1. O caso em que a incerteza referente as M , D e K são somadas (Caso 1); 2. O caso em que a variação da incerteza é nulo, ou seja, o caso nominal (Caso 14); 3. O caso em que a incerteza referente as M , D e K são subtraídas (Caso 27).

Afim de se estudar a ação das incertezas no sistema de controle, a seguir serão mostradas as simulações da resposta a condição inicial, em que se considera quatro casos: O primeiro caso é considerado que todas as matrizes M , K e D são incertas, no segundo caso a matriz M é nominal e as matrizes k e D são incertas, no terceiro caso a matriz K é nominal e as matrizes D e M são incertas e no quarto caso a matriz D é nominal e as matrizes M e K são incertas.

4.3.2 Simulação com incerteza nas matrizes M , K e D

As simulações a seguir são referentes ao caso em que se considera todas as matrizes M , K e D como incertas, com a lei de controle projetada com o método do \mathcal{H}_∞ . Desta forma, como visto no capítulo 4.3.1, cada matriz M , K e D terá 27 combinações. O que gera 27 simulações.

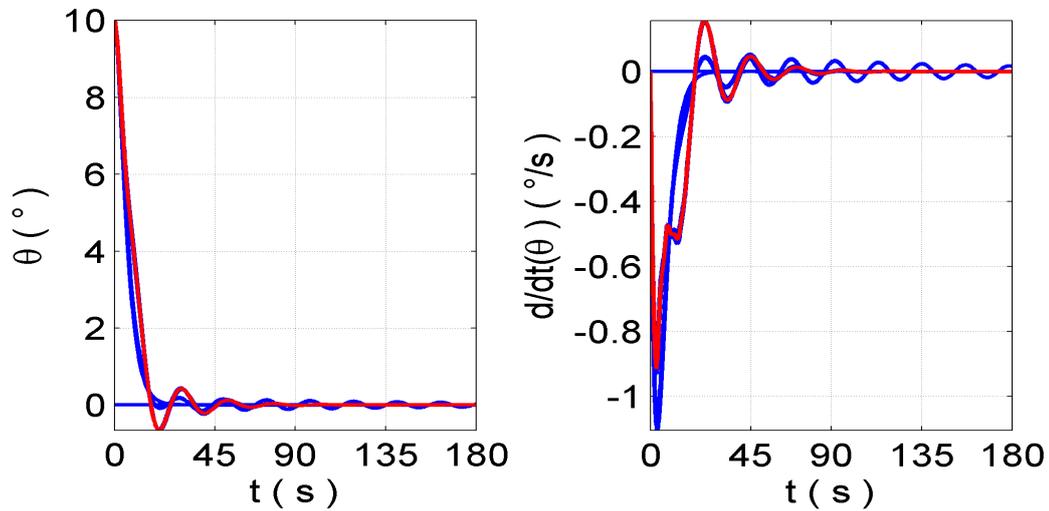
Para as simulações com incerteza foram adotadas incertezas de 10% e 30%, ou seja, $p_d = p_d = p_k = 10\%$ e $p_d = p_d = p_k = 30\%$. Vale lembrar que, para cada conjunto de incerteza, é calculado um novo ganho.

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo rígido, as coordenadas generalizadas que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 e η_2 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ (Equação 4.38) que mostra a deformação da ponta da viga, τ a ação do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em relação à referência $\alpha(t)$, como mostrado na Figura 4.9:

Para uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$ se obtém os seguintes resultados para uma incertezas de 10% e 30%.

4.3.2.1 Caso com 10% de incerteza

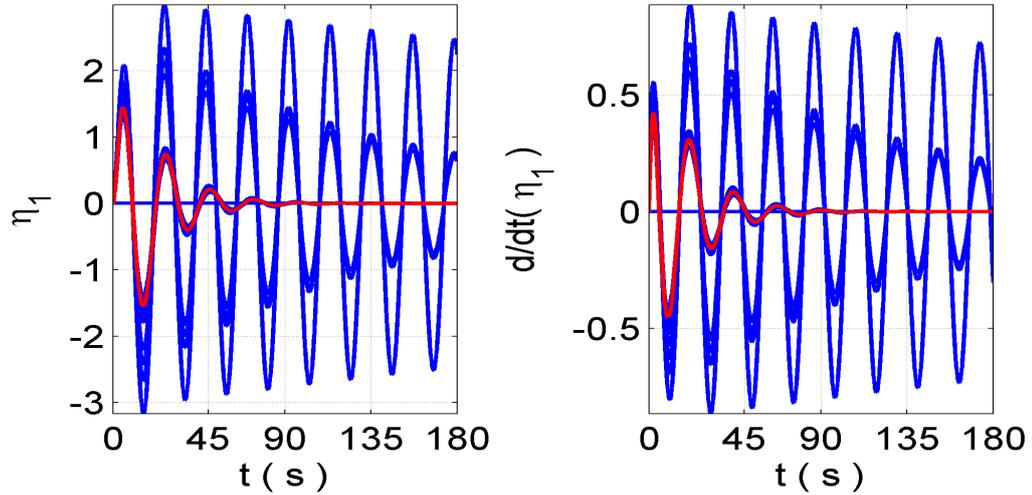
Figura 4.26 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.26 é apresentado o resultado da simulação com 10% de incerteza para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do angulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para estas variáveis, dentre os 27 casos analisados, 10 retornam a posição de equilíbrio dentro dos 180s. Para alguns casos se percebe que a resposta da simulação com a incerteza chega a convergir mais rápido do que a nominal.

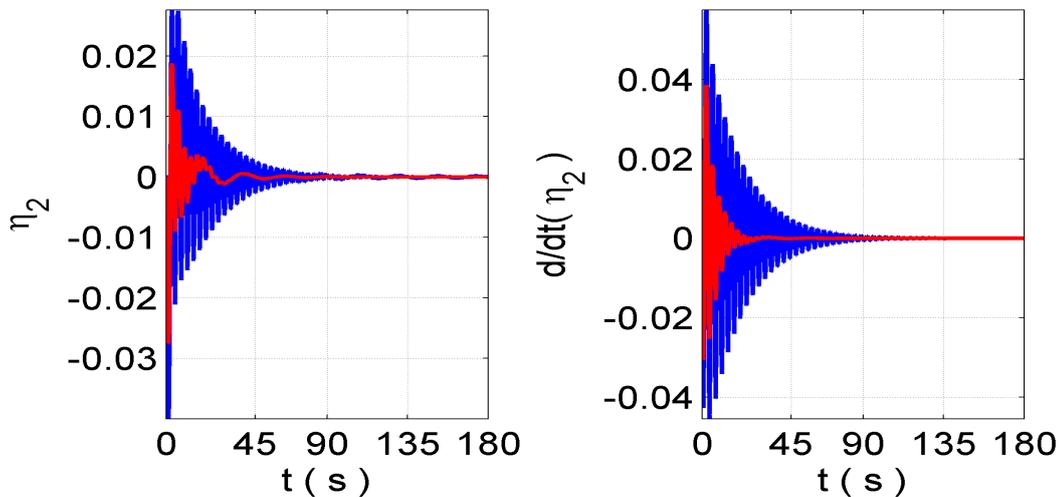
Observou-se nas simulações que o sistemas formados pelos casos 1, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 21, 24, e 27 (ver Tabela 4.2) violaram as condições de existência do método \mathcal{H}_∞ apresentadas no capítulo 2.1.1 e assim sendo não se geram uma resposta. Logo se tem apenas 14 casos em que obteve-se resposta.

Figura 4.27 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



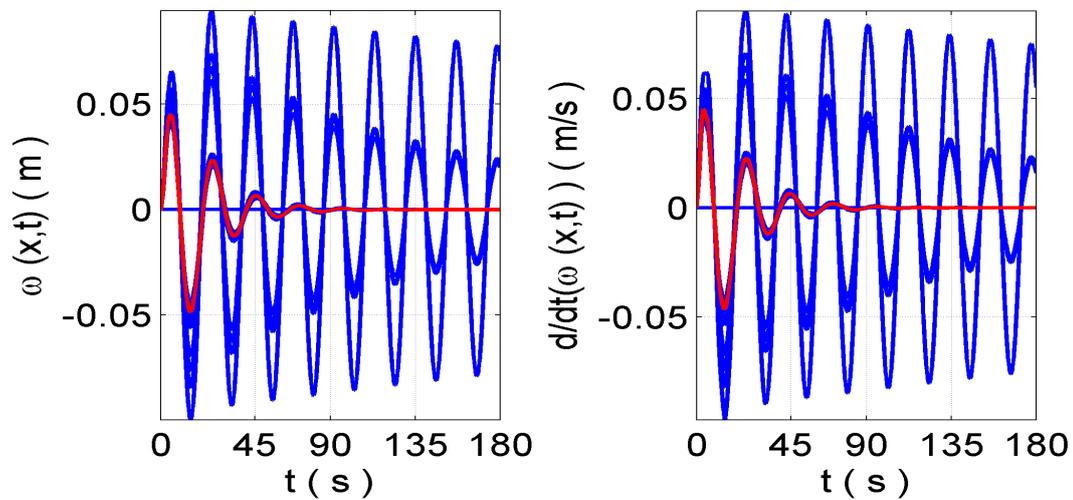
Na Figura 4.27 é apresentado o resultado da simulação com 10% de incerteza para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para estas variáveis observou-se que apenas 10 dos 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro dos 180s considerados.

Figura 4.28 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



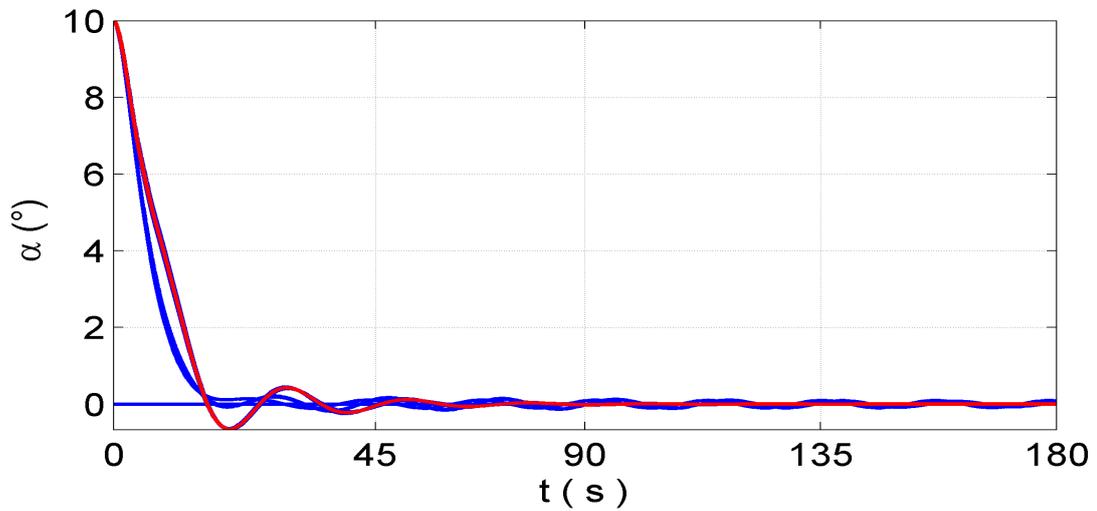
Na Figura 4.28 é apresentado o resultado da simulação com 10% de incerteza para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao segundo modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para estas variáveis observou-se que para todos os 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro de 100s.

Figura 4.29 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita), com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



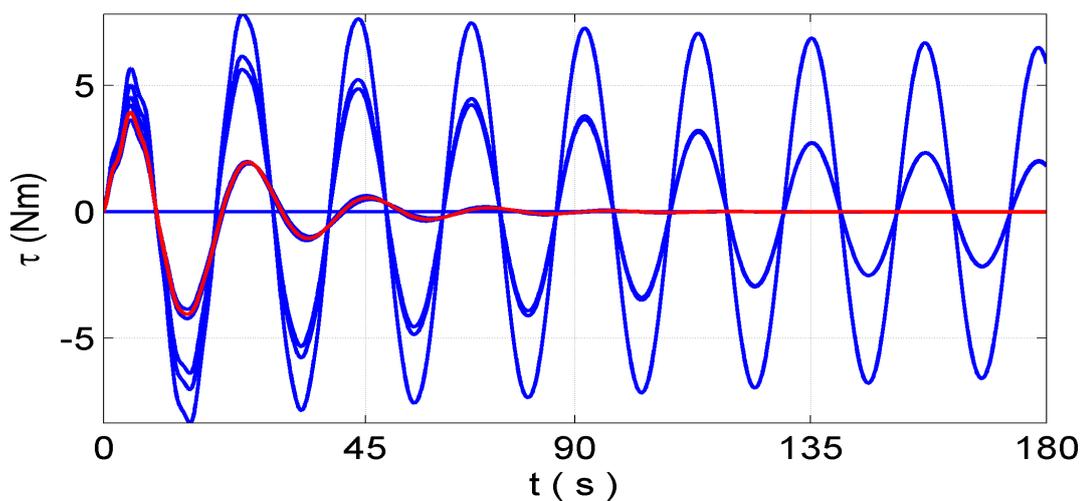
Na Figura 4.29 é apresentado o resultado da simulação com 10% de incerteza $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Observa-se que para os 27 casos apresentados, houve uma deflexão máxima de 0,06 m e 10 dos 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro de 180s.

Figura 4.30 - Resultado da simulação para a variável α , com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.30 é apresentado o resultado da simulação com 10% de incerteza para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Para esta variável, 10 dos 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro de 180s. E assim como na Figura 4.26, observou-se que a resposta da simulação com a incerteza de 10%, em alguns casos, chega a convergir mais rápido do que a nominal.

Figura 4.31 - Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle, com 10% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.

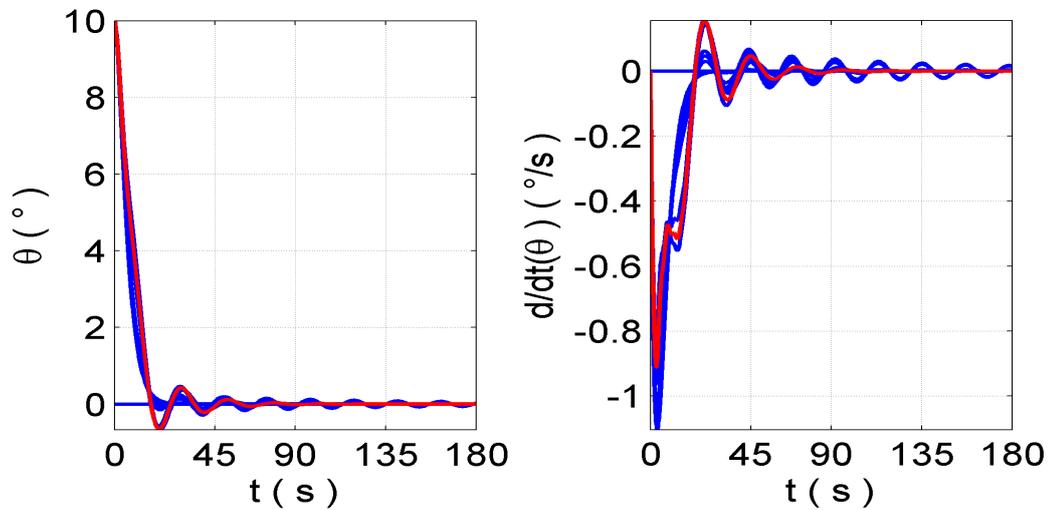


Na Figura 4.31 é apresentado o resultado da simulação com 10% de incerteza para a ação

do atuador (esforço de controle). Para esta variável apenas 10 dos 27 casos converge a zero dentro dos 180s considerados. Alguns casos em que essa variável retorna a zero apresentam um pico indicado um fornecimento maior de torque ao sistema, o que explica o porque que na Figura 4.17 e na Figura 4.21 a resposta converge mais rápido para o sistema com incerteza do que para o sistema nominal.

4.3.2.2 Simulação com 30% de incerteza

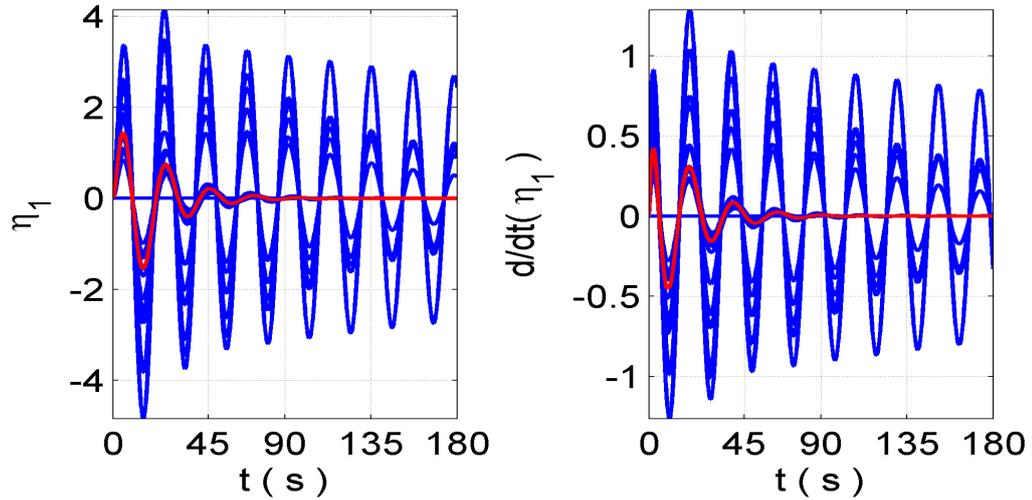
Figura 4.32 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.32 é apresentada o resultado da simulação com 30% de incerteza para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do angulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para estas variáveis, dentre os 27 casos analisados, 19 retornam a posição de equilíbrio dentro dos 180s. Para alguns casos se percebe que a resposta da simulação com a incerteza, em alguns casos, chega a convergir mais rápido do que a nominal.

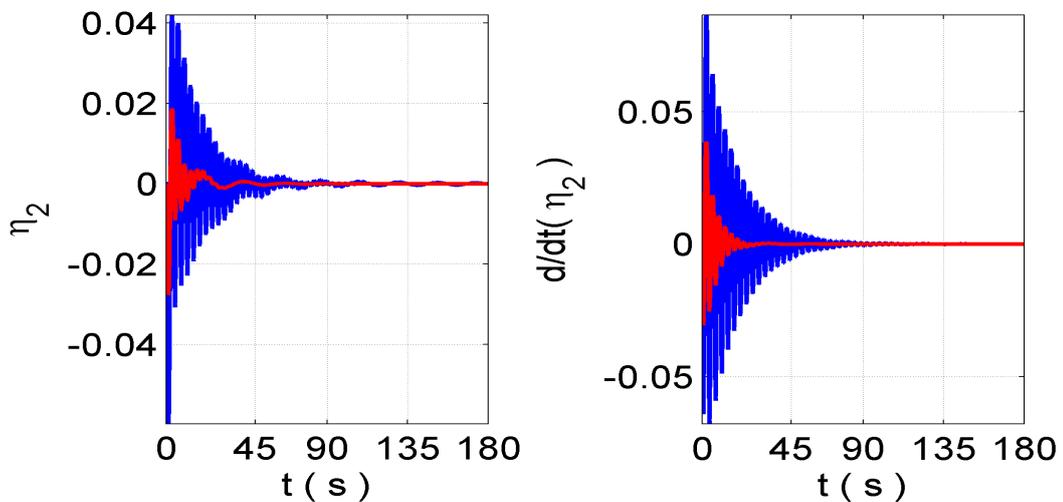
Observou-se nas simulações que o sistemas formados pelos casos 1, 2, 17, 19, 21, 22, 25 e 26 (ver Tabela 4.2) violaram as condições de existência do método \mathcal{H}_∞ apresentadas no capítulo 2.1.1, assim sendo, não se geram uma resposta. Logo se tem apenas 19 casos em que obteve-se resposta.

Figura 4.33 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



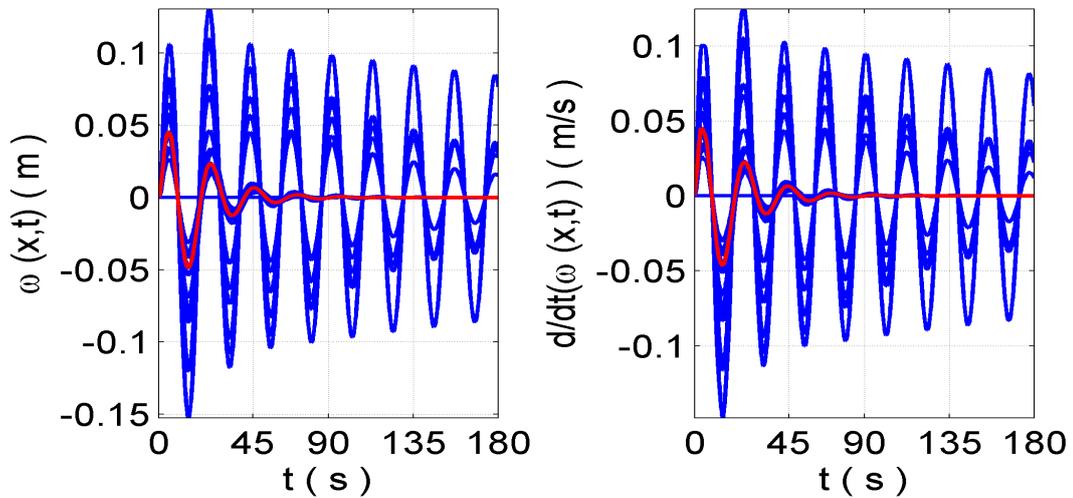
Na Figura 4.33 é apresentado o resultado da simulação com 30% de incerteza para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para estas variáveis observou-se que apenas 14 dos 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro dos 180s considerados.

Figura 4.34 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



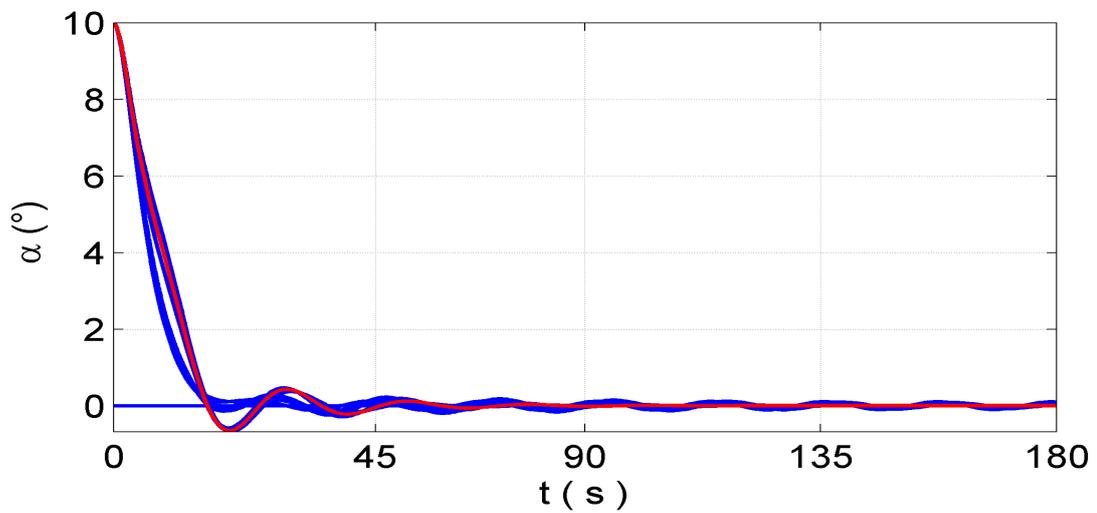
Na Figura 4.34 é apresentado o resultado da simulação com 30% de incerteza para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao segundo modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para estas variáveis observou-se que para todos os 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro de 100s.

Figura 4.35 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita), com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



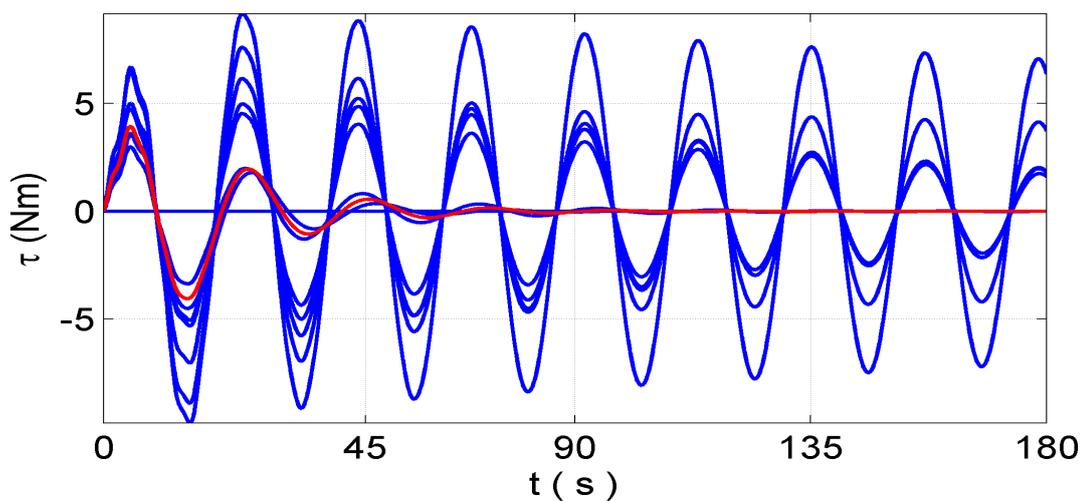
Na Figura 4.35 é apresentado o resultado da simulação com 30% de incerteza $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Observa-se que para os 27 casos apresentados, houve uma deflexão máxima de 0,15 m e 13 dos 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro de 180s.

Figura 4.36 - Resultado da simulação para a variável α , com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.36 é apresentado o resultado da simulação com 30% de incerteza para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Para esta variável, 18 dos 27 casos retornaram a posição de equilíbrio dentro de 180s. E assim como na Figura 4.32 observou-se que a resposta da simulação com a incerteza, em alguns casos, chega a convergir mais rápido do que a nominal.

Figura 4.37 - Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle, com 30% de incerteza. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.37 é apresentado o resultado da simulação com 30% de incerteza para a ação

do atuador (esforço de controle). Para esta variável apenas 18 dos 27 casos convergem a zero dentro dos 180s considerados. Alguns casos em que essa variável retorna a zero apresentam um pico indicando um fornecimento maior de torque ao sistema, o que explica o porque que na Figura 4.17 e na Figura 4.21 a resposta converge mais rápido para o sistema com incerteza do que para o sistema nominal.

4.3.3 Influencia das incertezas nas matrizes M , D e K , no caso em que o controlador é projetado com o método H-infinito.

Afim de analisar a influencia da incerteza sobre as matrizes M , D e K , a seguir será apresentado um conjunto de simulações em que será inserido a incerteza em uma das matrizes, e as outras duas permanecerão com seus valores nominais.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \bar{M}(I \pm p_m \Delta) \ddot{x} + \bar{D} \dot{x} + \bar{K} x = \tau_m \\
 (b) \quad & \bar{M} \ddot{x} + \bar{D}(I \pm p_d \Delta) \dot{x} + \bar{K} x = \tau_d \\
 (c) \quad & \bar{M} \ddot{x} + \bar{D} \dot{x} + \bar{K}(I \pm p_k \Delta) x = \tau_k
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Nas Equações 4.51 se tem M (matriz massa), D (matriz amortecimento) e K (matriz rigidez); p_m , p_d e p_k referentes a magnitude das incertezas; I é uma matriz identidade; τ_m , τ_d e τ_k são as variáveis referentes aos torques gerados; por fim Δ representa a amplitude da incerteza, que por sua vez vem da Tabela 4.2.

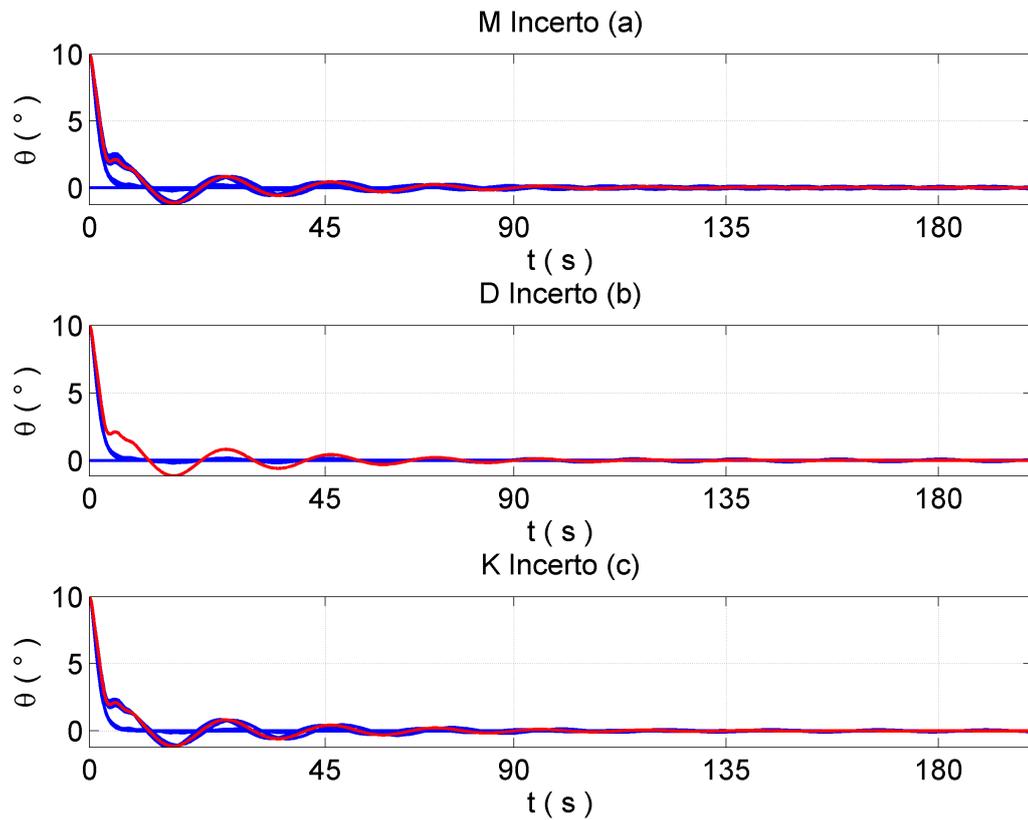
A seguir serão novamente simulado o sistema para os 27 casos de incertezas, mas com a incerteza agindo de acordo com a Equação 4.51. As interpretações dos resultados a seguir serão baseados nas quantidades de linhas apresentadas, pois a cada linha visível indica que houve uma mudança de comportamento entre um “set” e outro de incerteza, indicando uma influência direta da incerteza sobre a matriz considerada.

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo rígido, as coordenadas generalizadas que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 e η_2 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ (Equação 4.38) que mostra a deformação da ponta da viga, τ a ação do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em relação à referência $\alpha(t)$, como mostrado na Figura 4.9:

Para uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$ se obtém os seguintes resultados para uma incertezas de 10% e 30%.

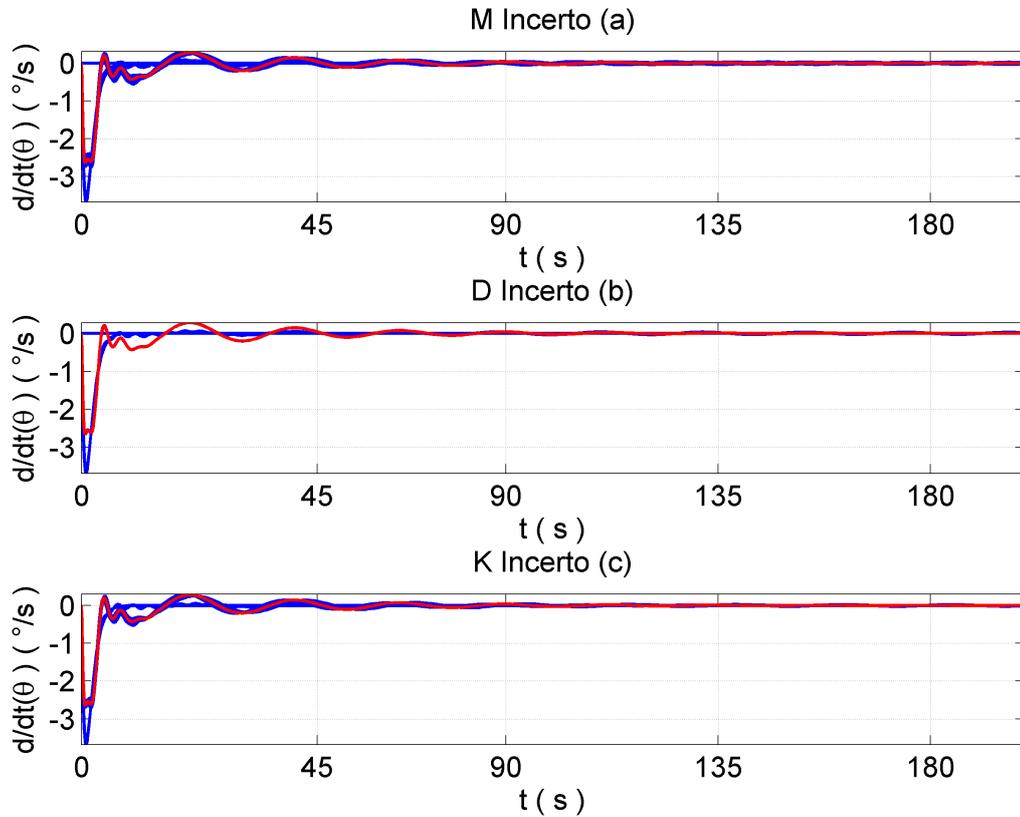
4.3.3.1 Simulação com 10% de incerteza

Figura 4.38 - Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho é o caso nominal



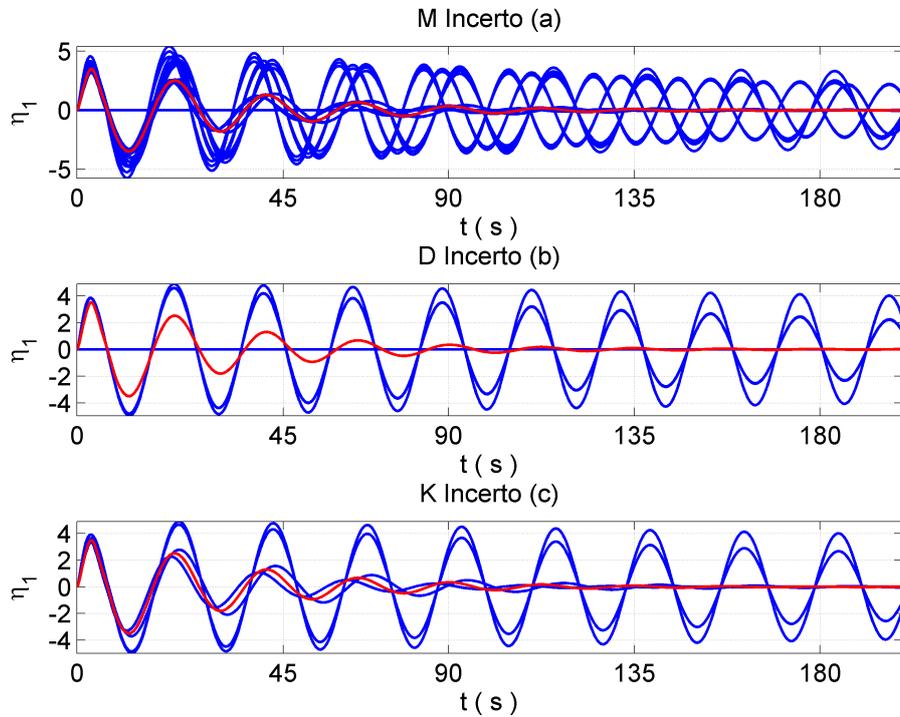
Na Figura 4.38 está representado a resposta temporal da variável θ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e D tiveram maior influência do que para a aplicada sobre a matriz K .

Figura 4.39 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho é o caso nominal



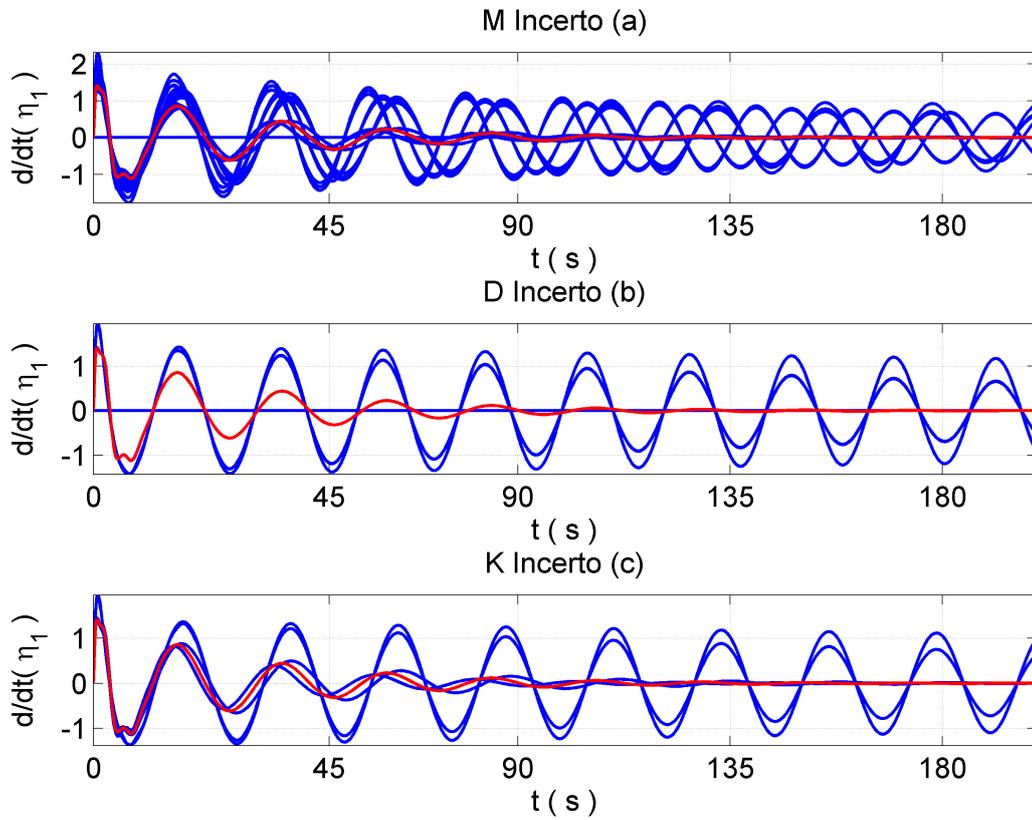
Na Figura 4.39 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\theta}$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Assim como na figura anterior observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K .

Figura 4.40 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho é o caso nominal



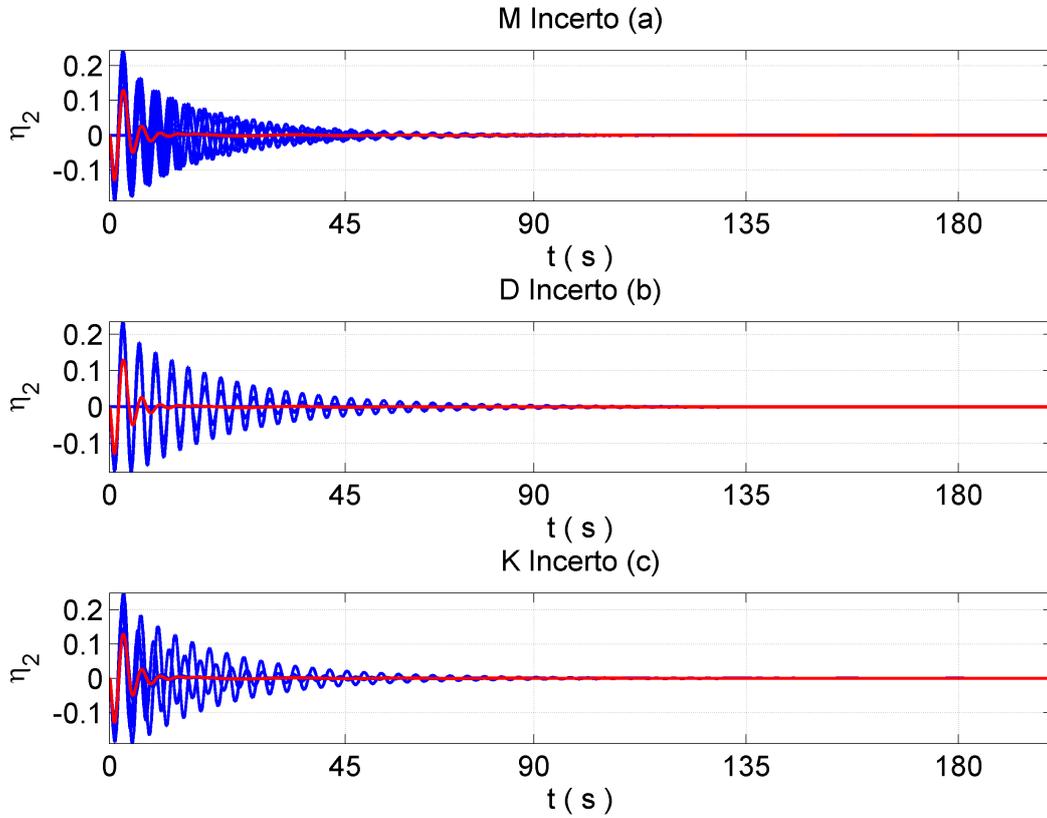
Na Figura 4.40 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K , apesar de que para esta variável houve um conjunto de incertezas que impediram a estabilização dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 4.41 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho é o caso nominal



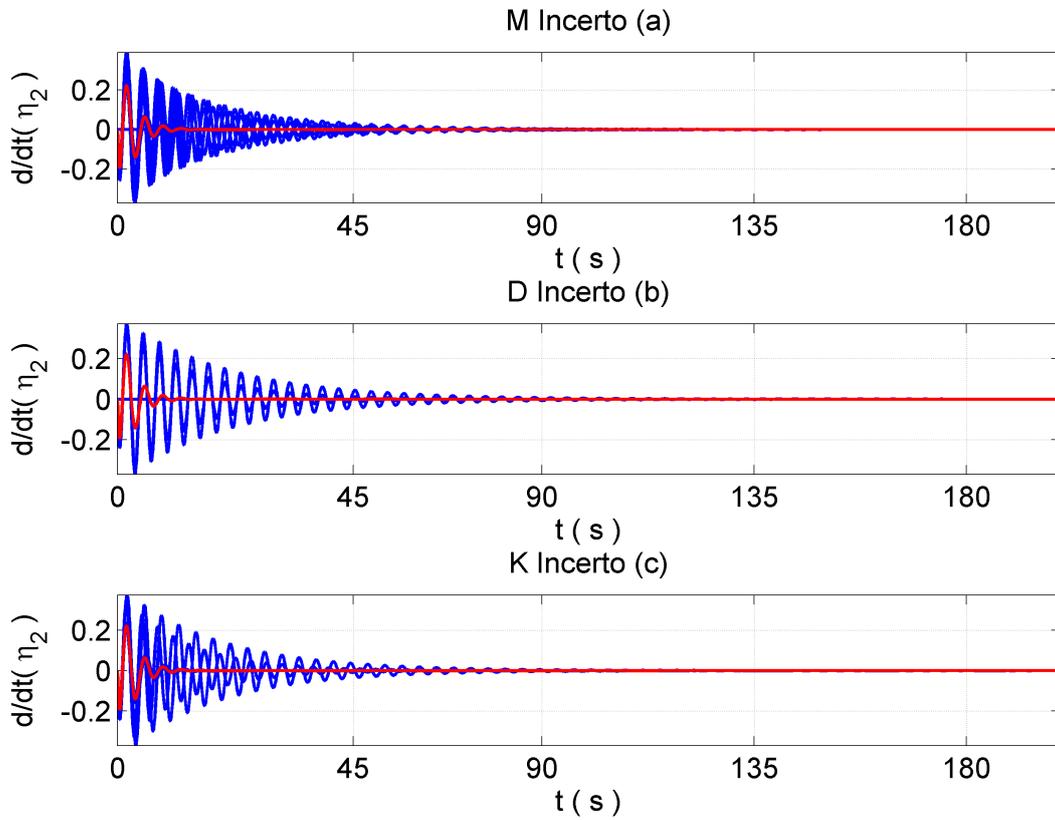
Na Figura 4.41 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K , apesar de que para esta variável houve um conjunto de incertezas que impediram a estabilização dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 4.42 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho é o caso nominal



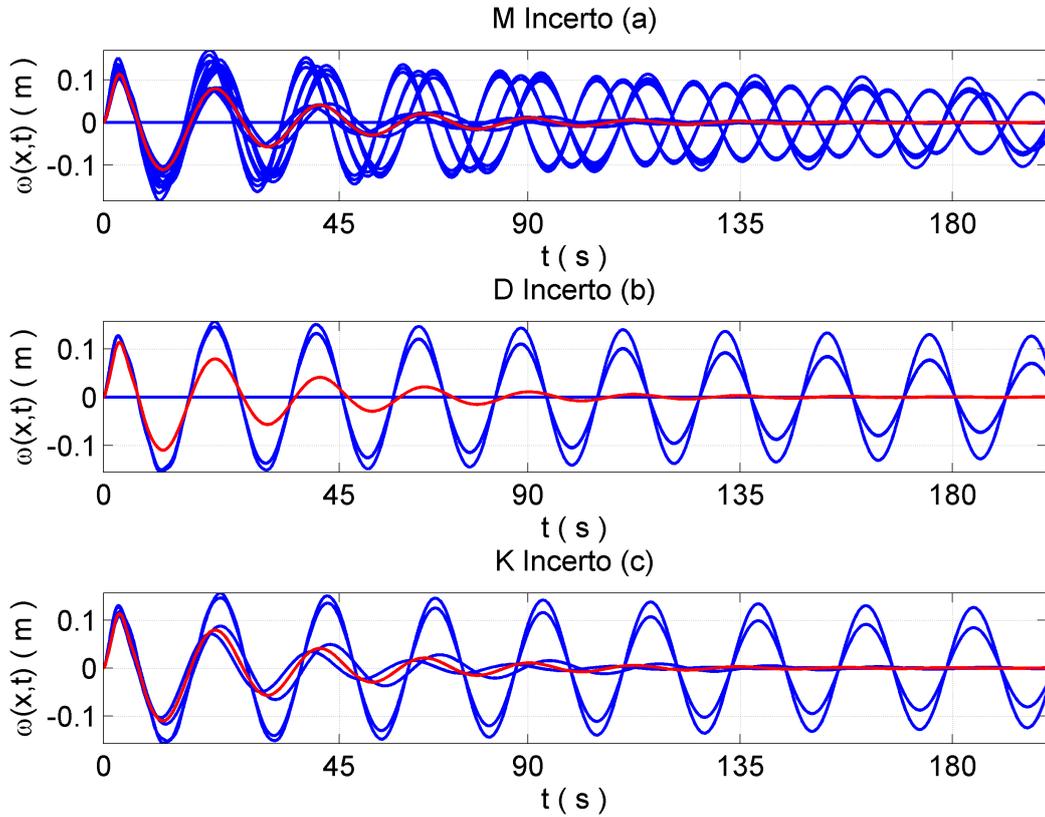
Na Figura 4.42 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura se nota que a influência da incerteza não impediu a estabilização da variável, para todos os casos, em torno de 90s.

Figura 4.43 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho é o caso nominal



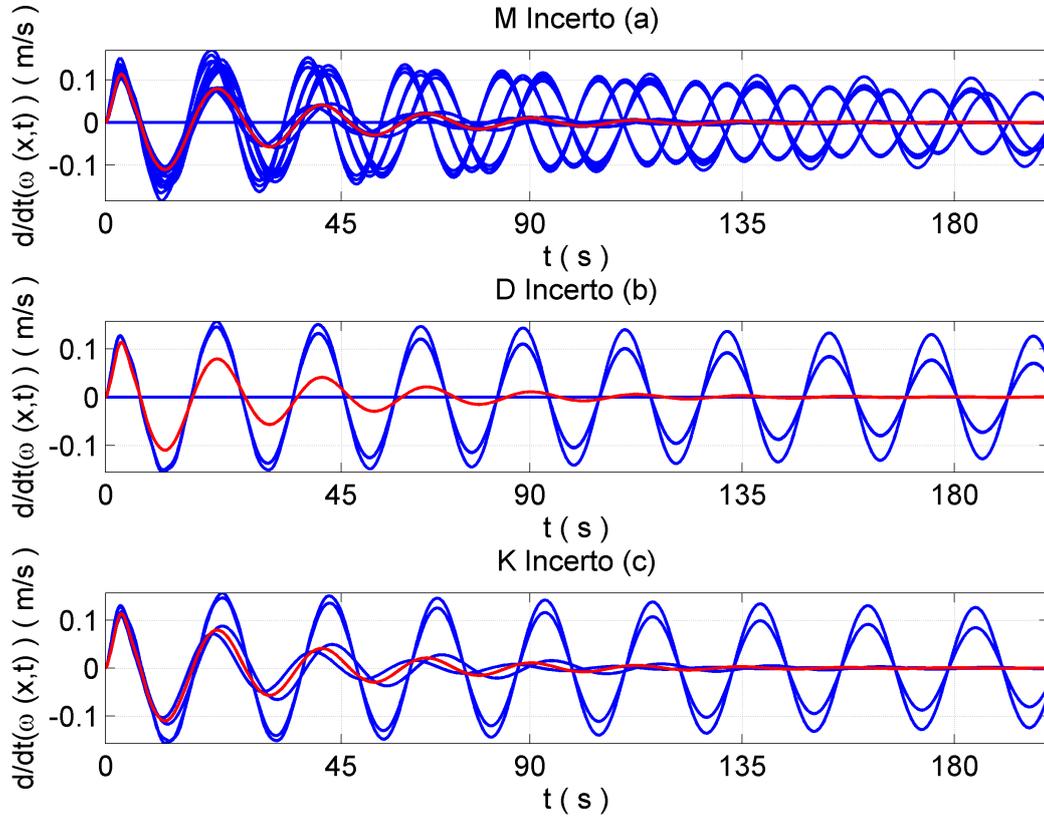
Na Figura 4.43 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura se nota que a influência da incerteza não impediu a estabilização da variável, para todos os casos, em torno de 90s.

Figura 4.44 - Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal



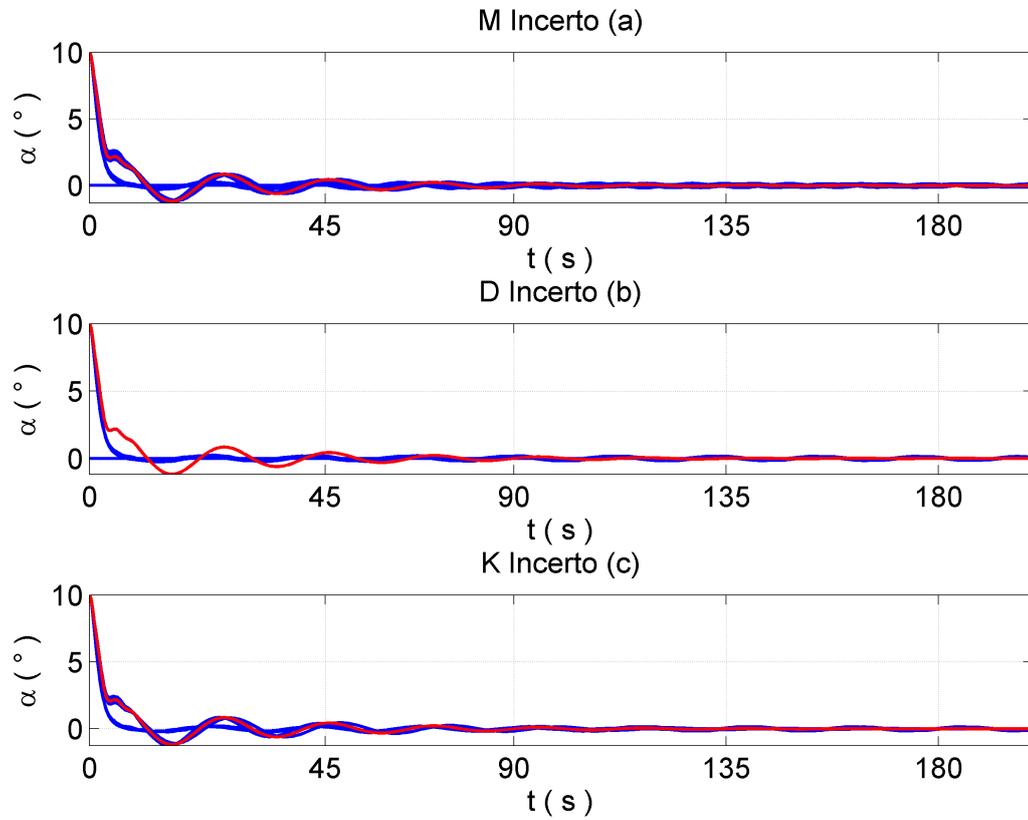
Na Figura 4.44 é apresentado o resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga) para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz D , apesar de que para esta variável houve um conjunto de incertezas que impediram a estabilização dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 4.45 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\omega}(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal



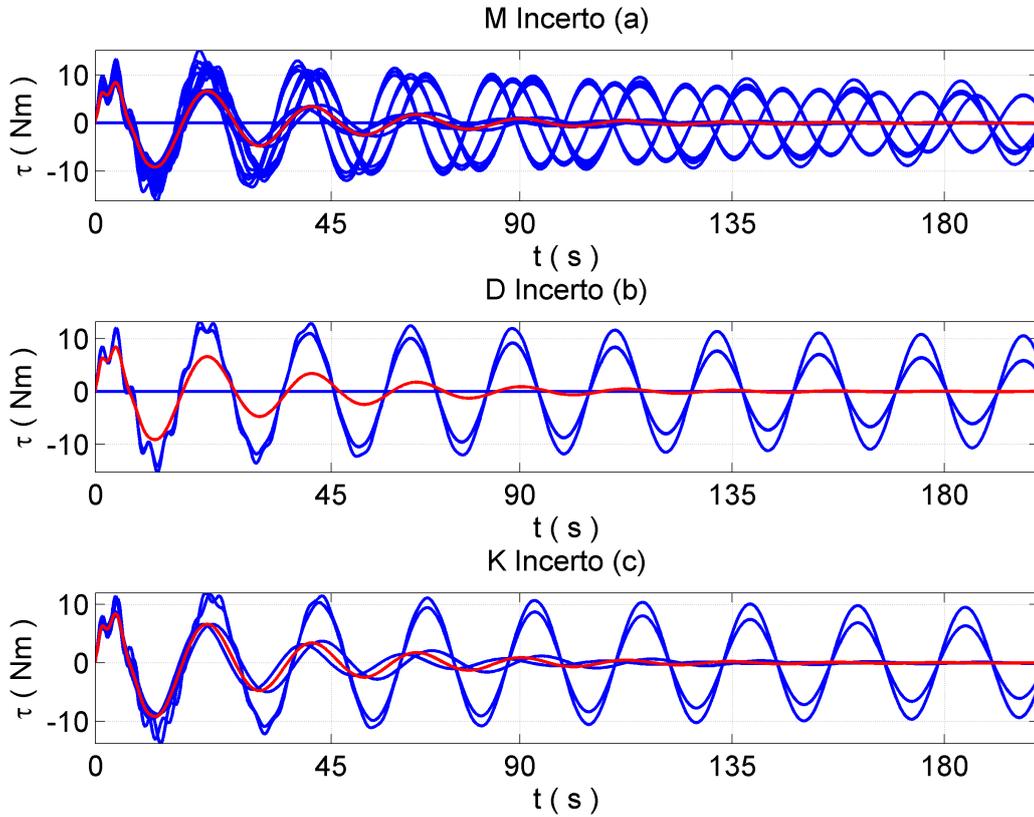
Na Figura 4.43 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\omega}(L, t)$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz D , apesar de que para esta variável houve um conjunto de incertezas que impediram a estabilização dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 4.46 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho é o caso nominal



Na Figura 4.46 está representado a resposta temporal da variável α para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K teve maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K .

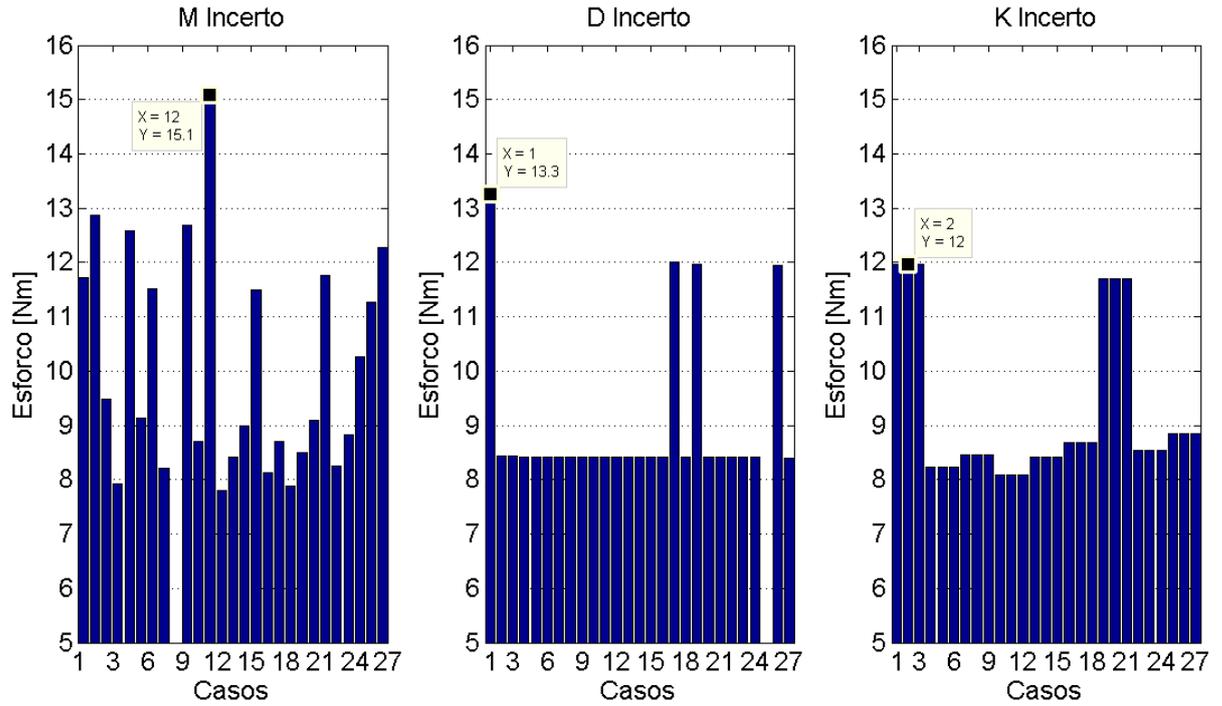
Figura 4.47 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho é o caso nominal



Na Figura 4.47 está representado a resposta temporal para a ação do atuador (τ) para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K , apesar de que houveram casos em que o torque gerado não cessou dentro dos 180s.

Afim de se estudar em qual matriz a incerteza teve maior influencia, será considerado o diagrama de barras (Figura 4.48) composto pelo maior valor de torque gerado.

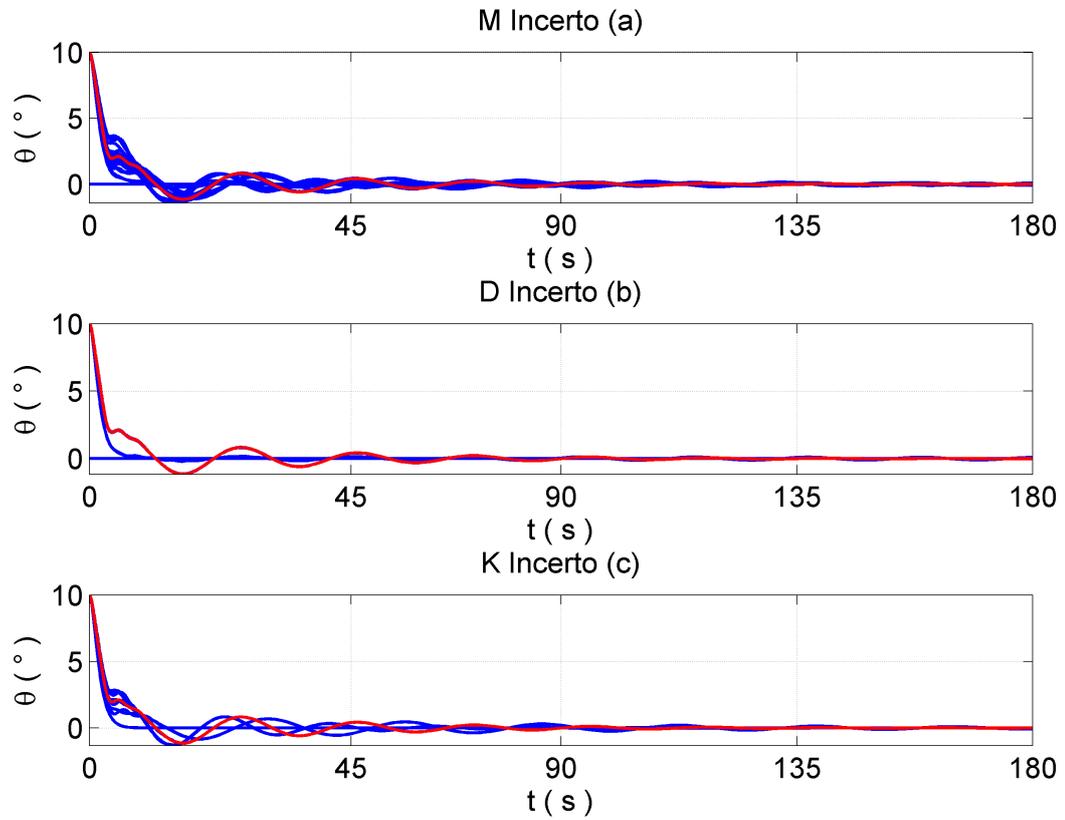
Figura 4.48 - Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.



Na Figura 4.48 é mostrado um diagrama de barras do torque máximo gerado (eixo y) e o caso de incerteza associado (eixo x). Se observa que a incerteza sobre a matriz M é aquela que exige um maior valor de torque, dando um forte indicativo de que a influencia da incerteza sobre esta matriz é maior que nas outras. Em outras palavras, a incerteza torna mais difícil controlar as variáveis prejudicando o tempo de assentamento e provocando nas variáveis um excitação maior que nos outros casos. Para estes casos apresentados notou-se que a influencia da incerteza na matriz M gerou situações em que o controlador projetado não foi capaz de controlar as variáveis dentro dos 180s.

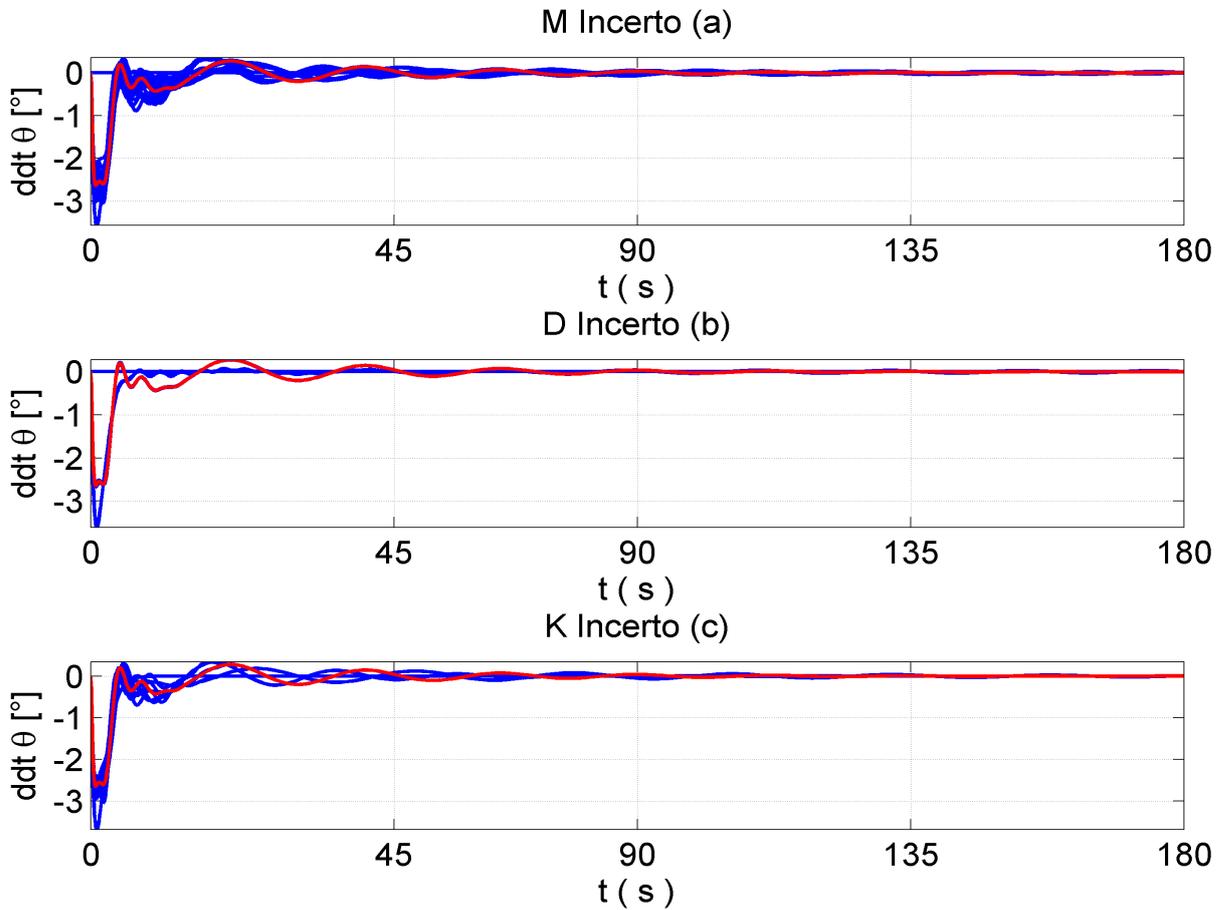
4.3.3.2 Simulação com 30% de incerteza

Figura 4.49 - Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho é o caso nominal



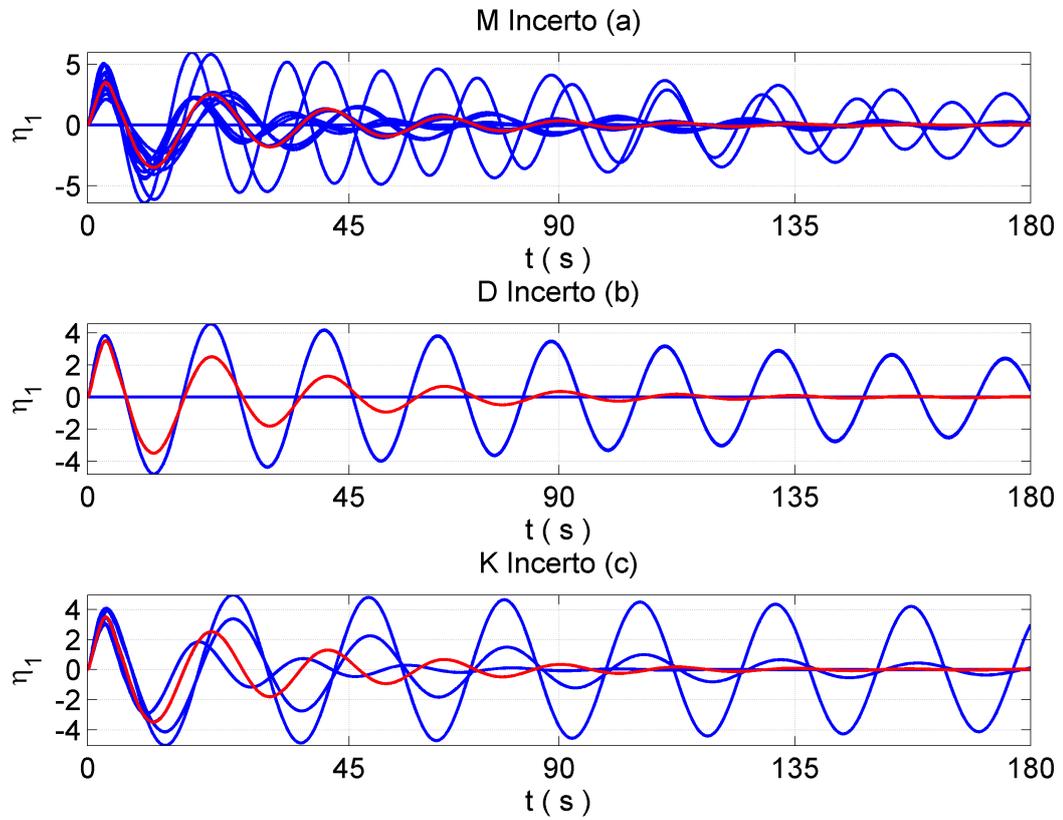
Na Figura 4.49 está representado a resposta temporal da variável θ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K .

Figura 4.50 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho é o caso nominal



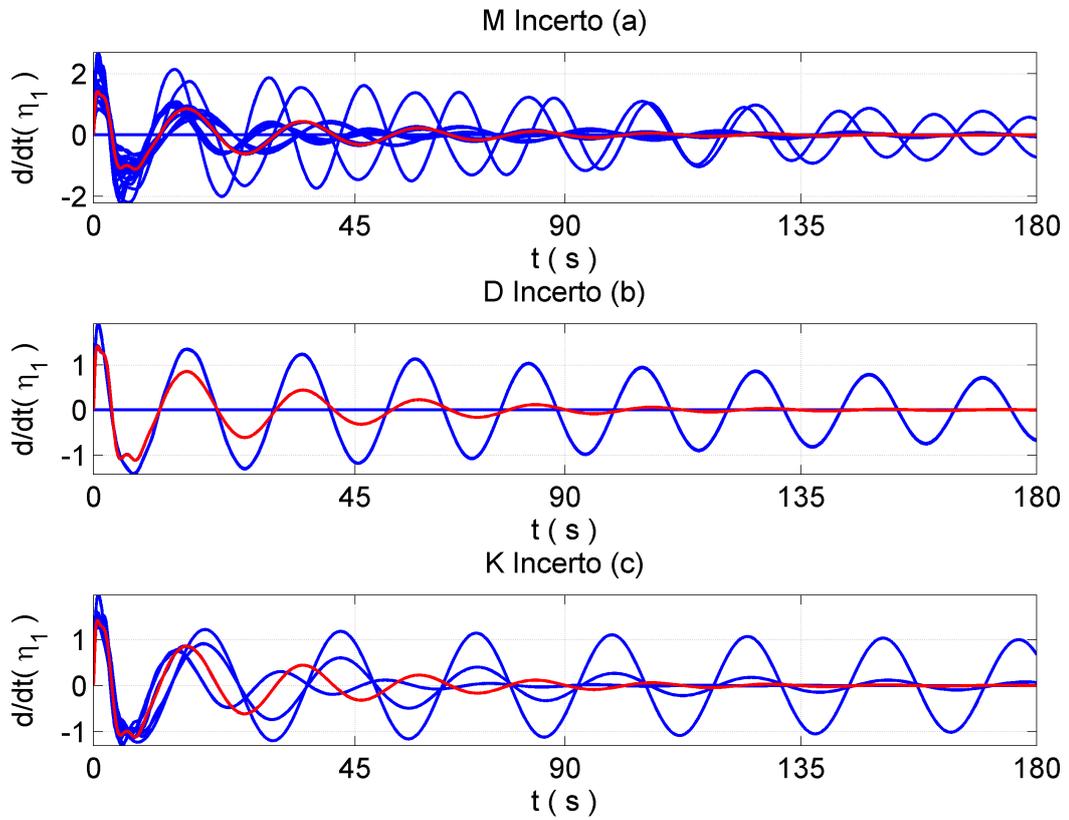
Na Figura 4.50 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\theta}$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Assim como na figura anterior observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influência do que para a aplicada sobre a matriz K .

Figura 4.51 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho é o caso nominal



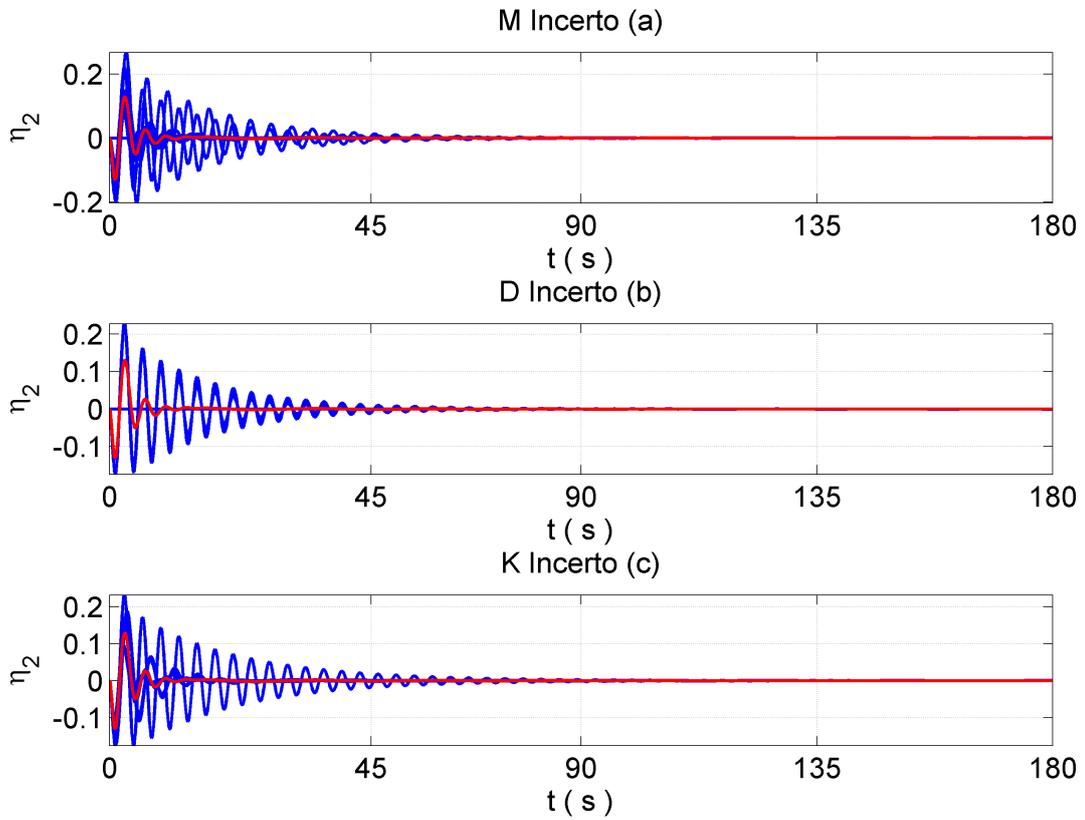
Na Figura 4.51 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influência do que para a aplicada sobre a matriz K , apesar de que para esta variável houve um conjunto de incertezas que impediram a estabilização dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 4.52 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho é o caso nominal



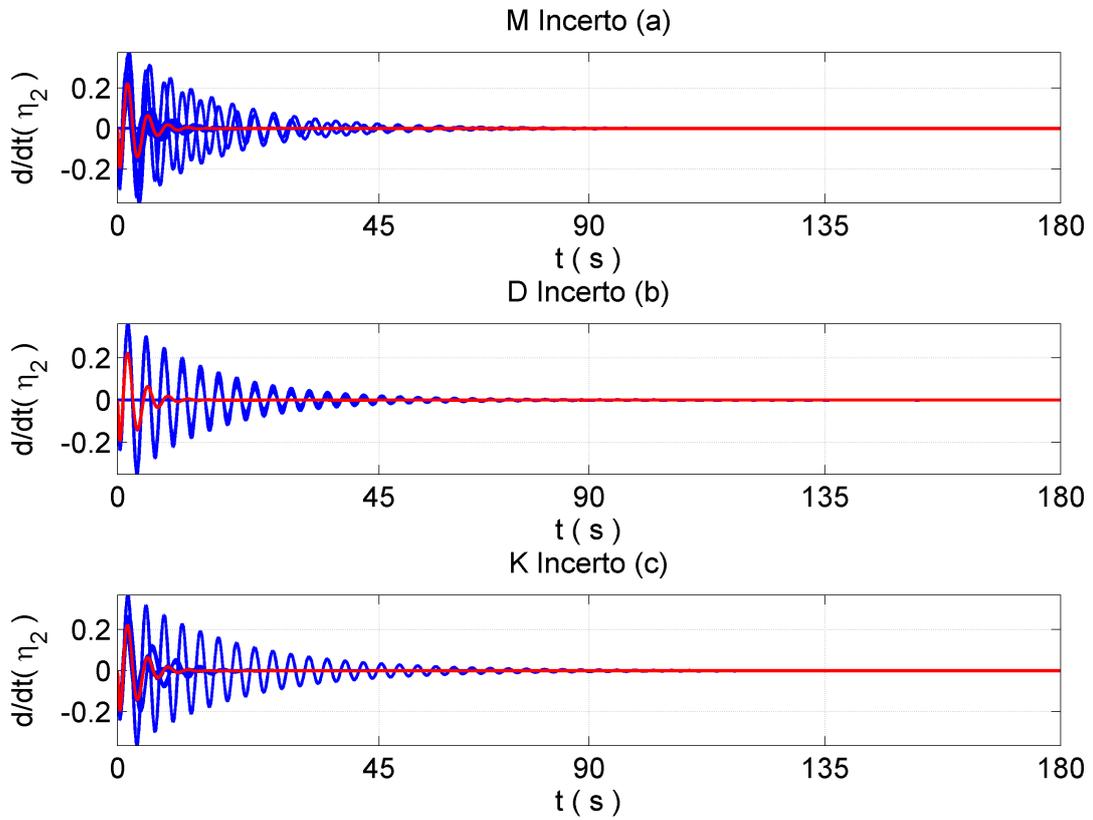
Na Figura 4.52 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K , apesar de que para esta variável houve um conjunto de incertezas que impediram a estabilização dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 4.53 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho é o caso nominal



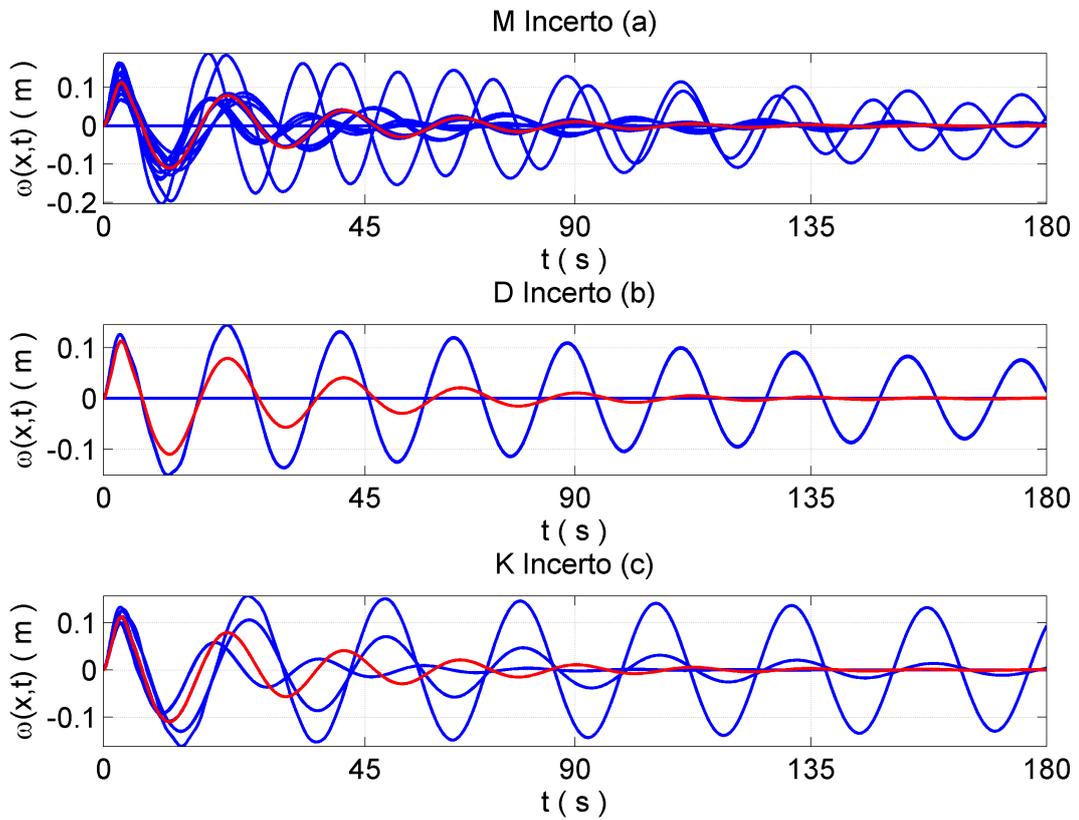
Na Figura 4.53 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura se nota que a influência da incerteza não impediu a estabilização da variável, para todos os casos, em torno de 90s.

Figura 4.54 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho é o caso nominal



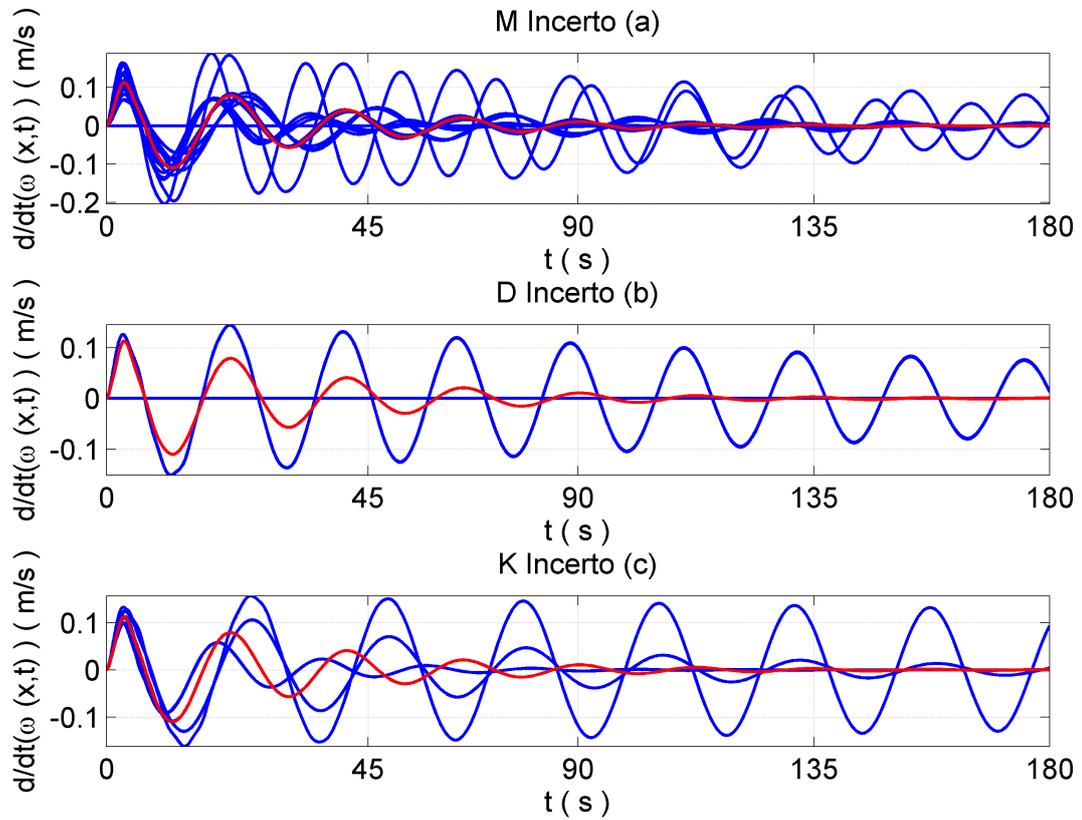
Na Figura 4.54 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura se nota que a influência da incerteza não impediu a estabilização da variável, para todos os casos, em torno de 90s.

Figura 4.55 - Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal



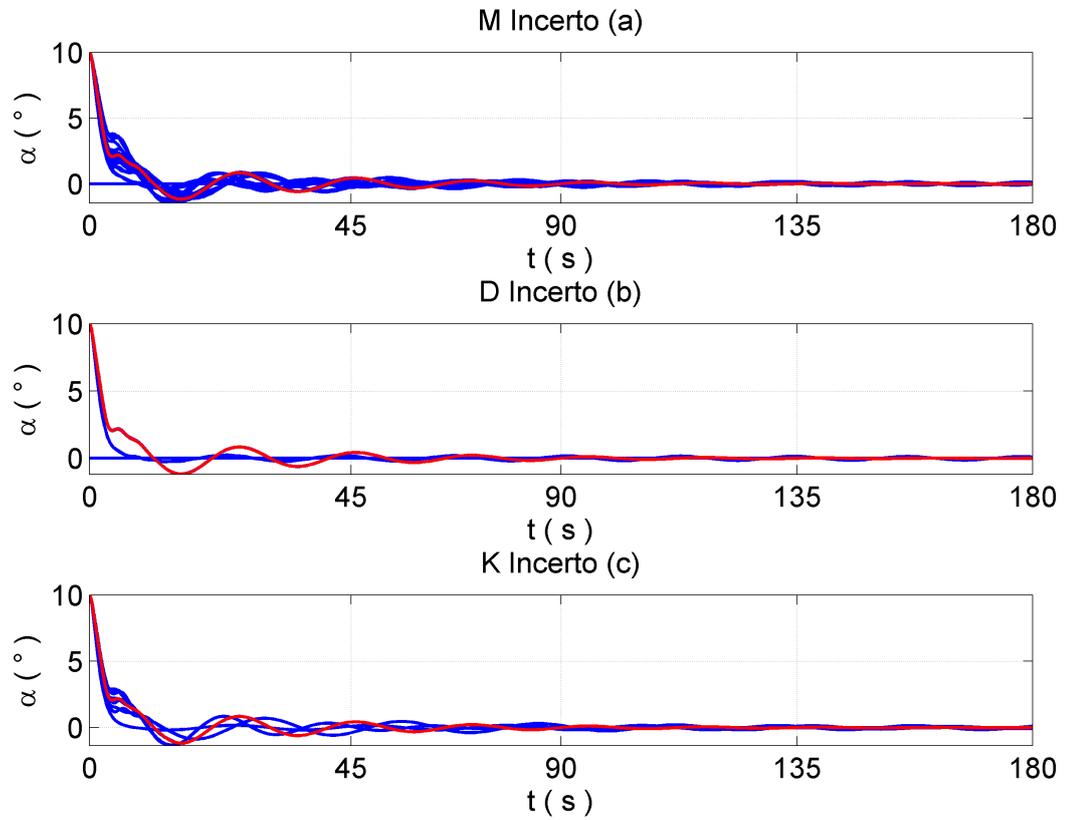
Na Figura 4.55 está representado a resposta temporal da variável $\omega(L, t)$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influência do que para a aplicada sobre a matriz K .

Figura 4.56 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\omega}(L, t)$. Em vermelho é o caso nominal



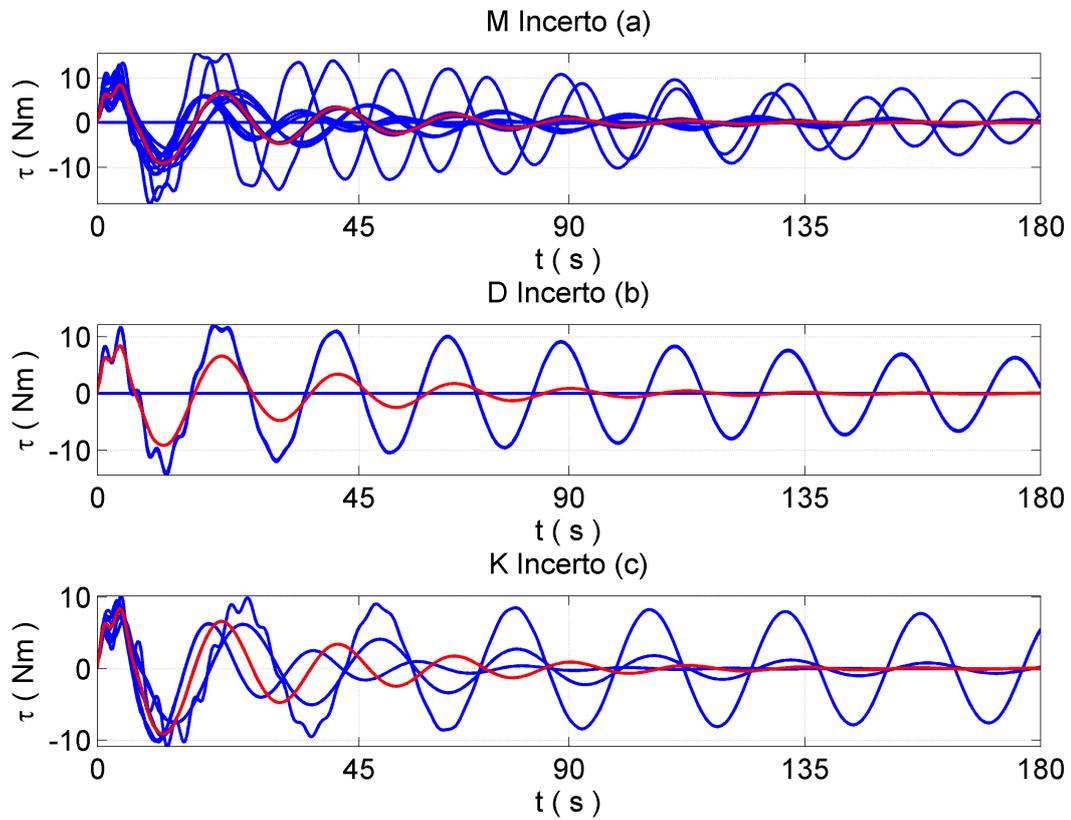
Na Figura 4.56 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\omega}$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influência do que para a aplicada sobre a matriz K .

Figura 4.57 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho é o caso nominal



Na Figura 4.57 está representado a resposta temporal da variável α para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incerteza nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K .

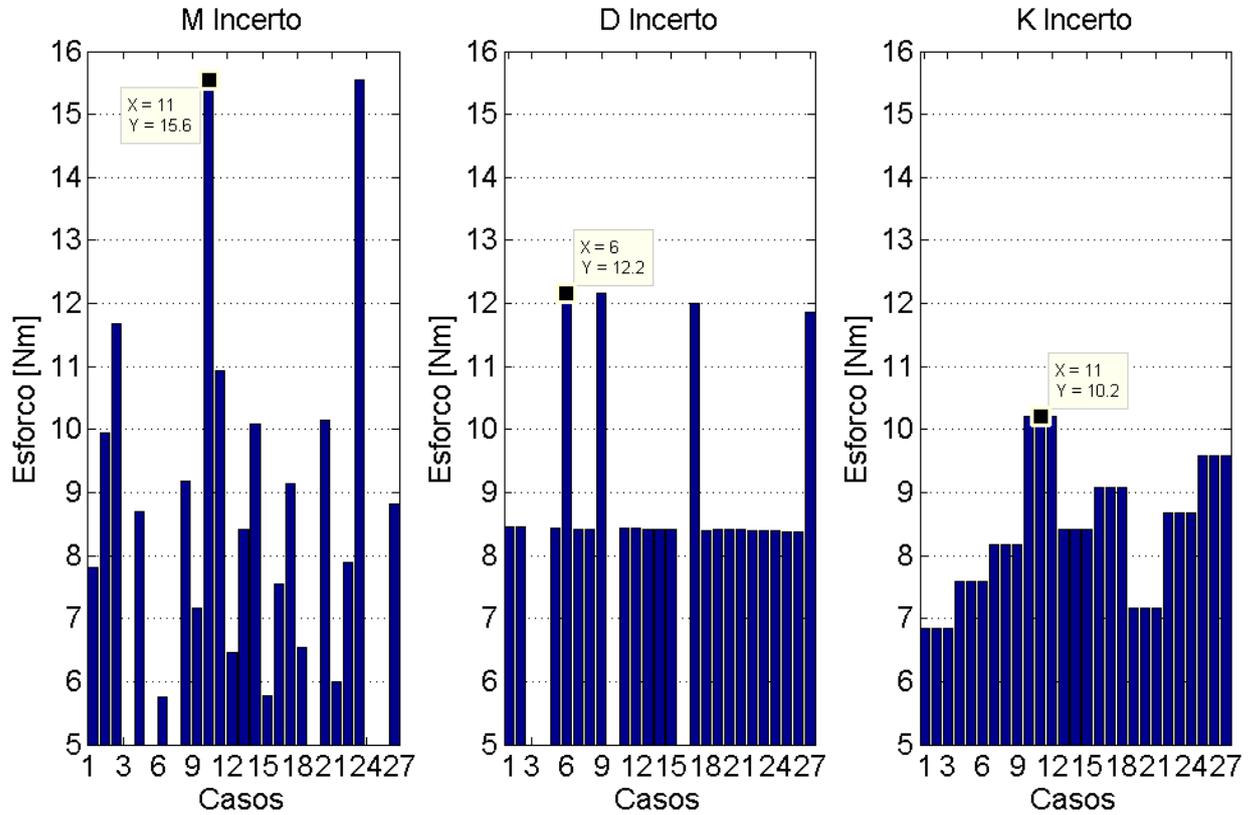
Figura 4.58 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho é o caso nominal



Na Figura 4.58 está representado a resposta temporal para a ação do atuador (τ) para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Nesta figura observa-se que a influência da incertezas nas matrizes M e K tiveram maior influencia do que para a aplicada sobre a matriz K , apesar de que houveram casos em que o torque gerado não cessou dentro dos 180s considerados.

Afim de se estudar em qual matriz a incerteza teve maior influencia, será considerado o diagrama de barras (Figura 4.59) composto pelo maior valor de torque gerado.

Figura 4.59 - Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.



Na Figura 4.59 é mostrado um diagrama de barras do torque máximo gerado (eixo y) e o caso de incerteza associado (eixo x). Se observa que a incerteza sobre a matriz M é aquela que exige um maior valor de torque, assim como visto para o caso anterior com a incerteza de 10% (Figura 4.48). Logo, a influencia da incerteza sobre esta matriz foi maior que nas outras tanto para uma incerteza de 10% como para uma de 30%.

Das simulações foi possível observar que algumas configurações de incerteza violaram as condições de existência do \mathcal{H}_∞ , impossibilitando o calculo de um ganho para aquele conjunto de incertezas. Desta forma, para abranger um maior número de casos de incertezas, será explorado, a técnica de controle que mescla a alocação de polos via LMI com método do \mathcal{H}_∞ .

4.4 Projeto da lei de controle usando a técnica \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI

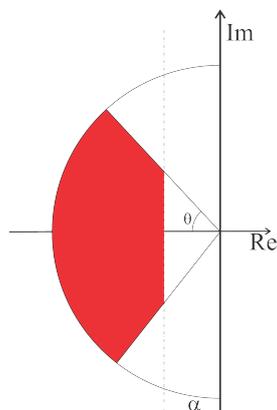
Para o projeto da lei de controle usando a técnica do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI, se faz necessário selecionar uma região convexa no plano complexo para a alocação dos polos, em outras palavras uma região LMI (LOPES, 2005). Como já sabido pela teoria de controle, o comportamento do transiente de um sistema linear é influenciado pela posição de seus polos e zeros. Assim sendo, a escolha da região LMI é um fator decisivo para um bom desempenho do controlador. Usualmente se deseja ao projetar um controlador que ele forneça uma boa taxa de amortecimento, um baixo “overshoot” e uma boa resposta de transiente. Logo, o que se deseja definir para a região é que ela englobe as posições onde esses objetivos sejam atingíveis (LOPES, 2005) e que possam ser equacionados em forma de uma função $S(\alpha_{lmi}, r_{lmi}, \theta_{lmi})$.

Para satisfazer as condições acima citadas, serão usadas três curvas nas quais suas interseções fornecem uma região LMI capaz de moldar o comportamento desejado. Então, para $S(\alpha_{lmi}, r_{lmi}, \theta_{lmi})$ se tem (CHILALI; GAHINET, 1996):

- Um plano com origem em α_{lmi} do semi-plano esquerdo, usada para regular a velocidade da resposta do transiente da planta (Constante de decaimento).
- $|a + bi| \langle r_{lmi}^1$, Uma região circular que determina a alocação da frequência natural.
- A região cônica $(\text{atan}(\theta_{lmi}), -|b|)$ que representa a constante de amortecimento.

¹ $z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi$

Figura 4.60 - Representação da região LMI $S(\alpha_{lmi}, r_{lmi}, \theta_{lmi})$



Fonte: Adaptado de Chilali e Gahinet (1996), Chilali et al. (1999)

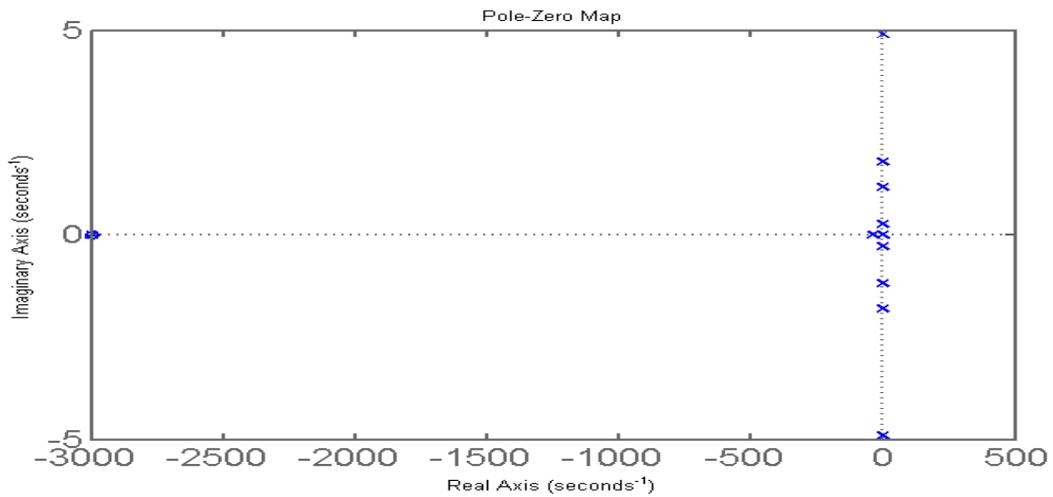
A Figura 4.60 mostra em vermelho a região LMI em que os polos deverão ser alocados, a explicação acima é detalhada no capítulo 2.2.1 junto com a revisão teórica do assunto.

4.4.1 Simulação sem incerteza.

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo rígido, as coordenadas generalizadas que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 e η_2 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ (Equação 4.38) que mostra a deformação da ponta da viga, τ a ação do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em relação à referência $\alpha(t)$. Partindo de uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$.

Para determinar a região LMI é necessário analisar a posição dos pólos e zeros do sistema controlado com o método \mathcal{H}_∞ em malha fechada e sem incertezas.

Figura 4.61 - Localização dos pólos e zeros, \mathcal{H}_∞ sem alocação se pólos



Na Figura 4.61 é apresentado a localização dos polos e zeros do sistema em malha fechada, quando controlado pelo \mathcal{H}_∞ apresentado na sessão 4.2.2.

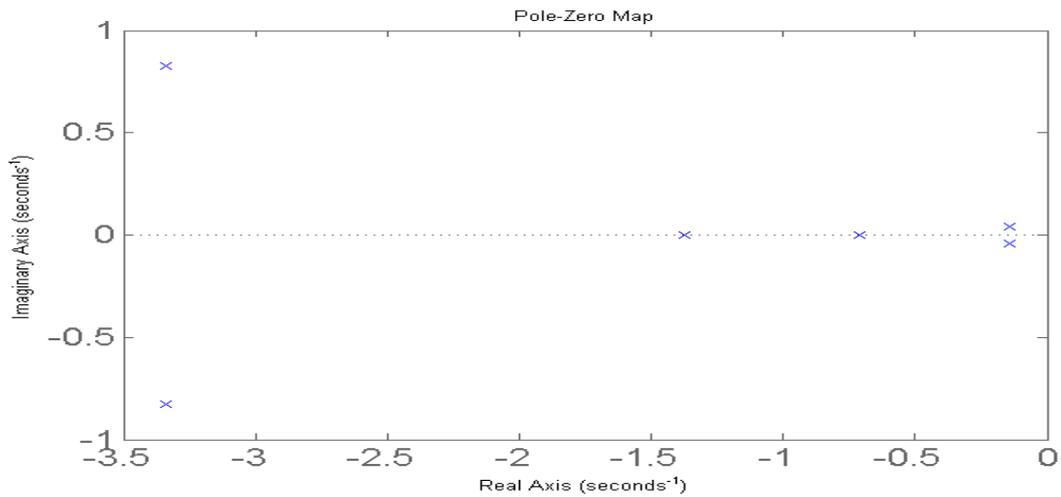
Se baseando na posição dos polos e zeros foi escolhido o conjunto de regiões LMI apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Parâmetros das regiões LMI

$S(\alpha_{lmi}, r_{lmi}, \theta_{lmi})$	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
α_{lmi}	-0, 1	-1	-0, 1	-0, 1
r_{lmi}	5	5	3	3
θ_{lmi}	$0, 4 * \pi$	$0, 4 * \pi$	$0, 4 * \pi$	$0, 25 * \pi$

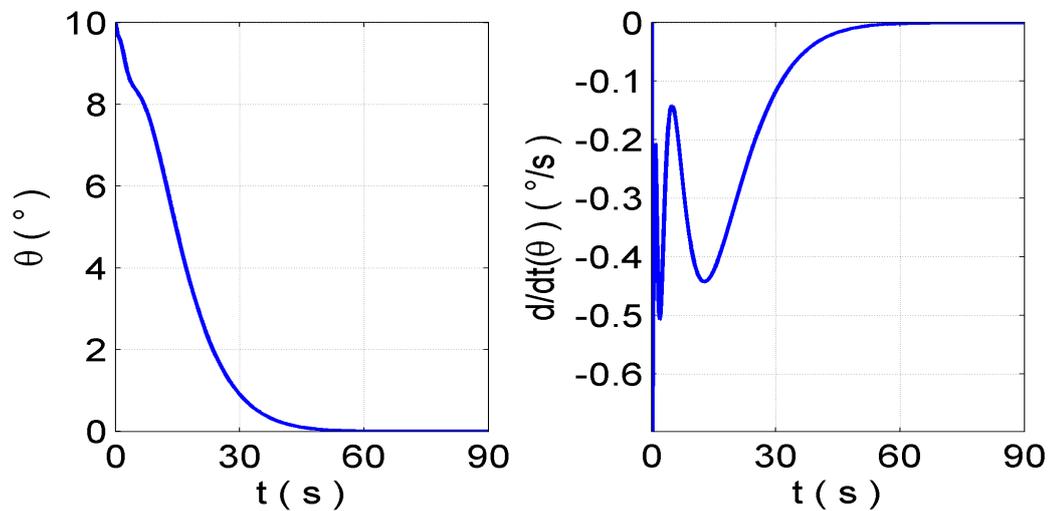
Para a Região 1 se tem o seguinte diagrama de polos e zeros, para o sistema em malha fechada, que mostra a alocação na região escolhida.

Figura 4.62 - Localização dos pólos e zeros para a região 1



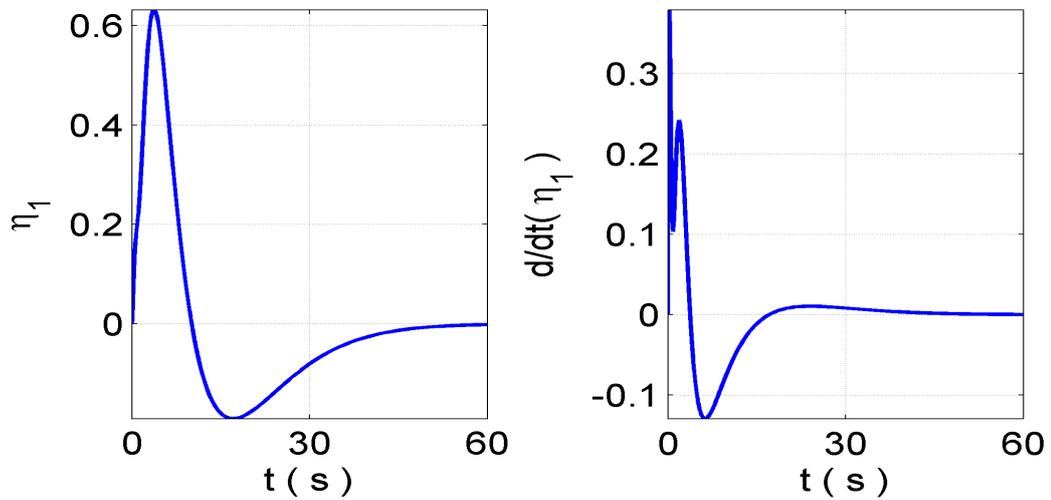
Na Figura 4.62 é apresentado a localização dos pólos e zeros do sistema em malha fechada quando se usa a técnica do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI sob a restrição da região 1.

Figura 4.63 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).



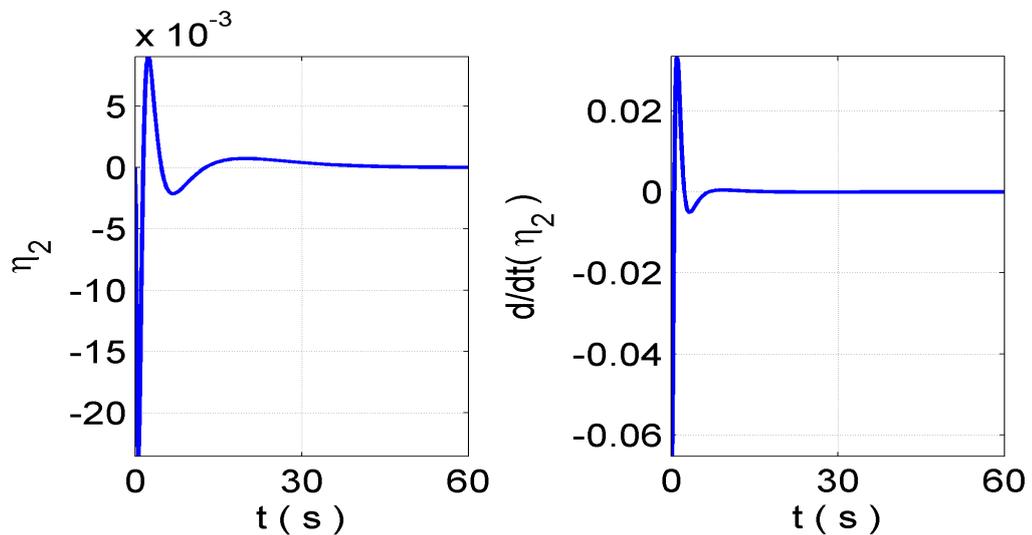
Na Figura 4.63 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do angulo do corpo rígido). A variável θ se estabiliza em torno de 60 s e a variável $\dot{\theta}$ em torno de 70 s.

Figura 4.64 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).



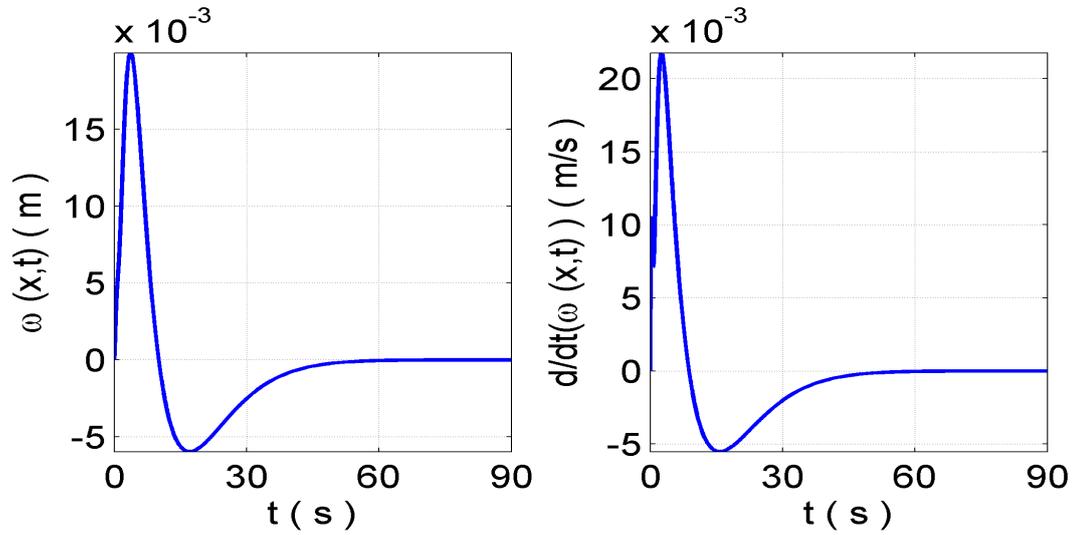
Na Figura 4.64 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$. As variáveis se estabilizam em torno de 60 s.

Figura 4.65 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).



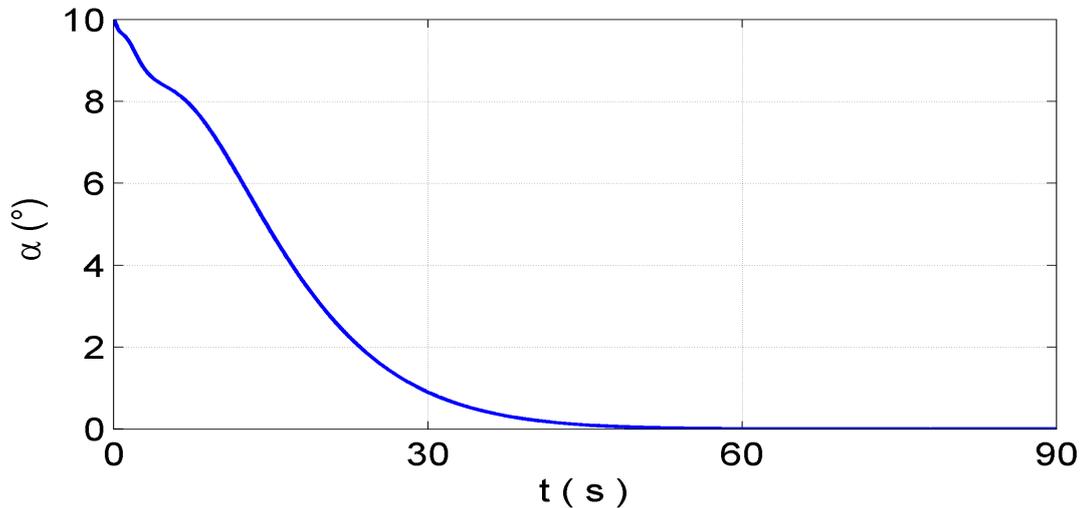
Na Figura 4.65 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$. As variáveis se estabilizam em torno de 50 s.

Figura 4.66 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



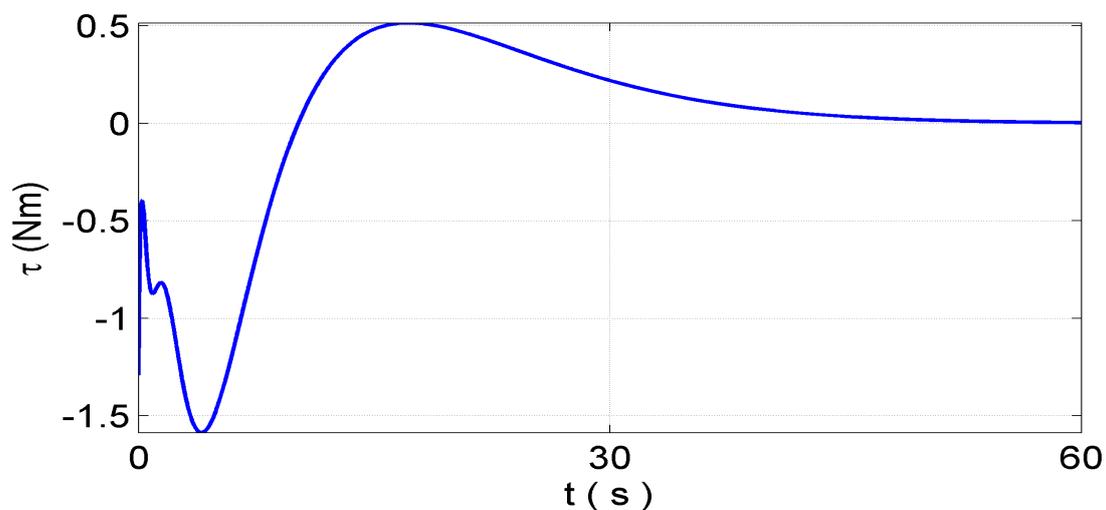
Na Figura 4.66 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deflexão e taxa de variação da deflexão da ponta da viga). Observar-se que o braço se deslocou $16 \times 10^{-3} \text{ m}$ e retornou para a posição de equilíbrio em aproximadamente 60 s.

Figura 4.67 - Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .



Na Figura 4.67 é apresentado o resultado da simulação para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Observar-se que o braço retornou em 0° em aproximadamente 60 s.

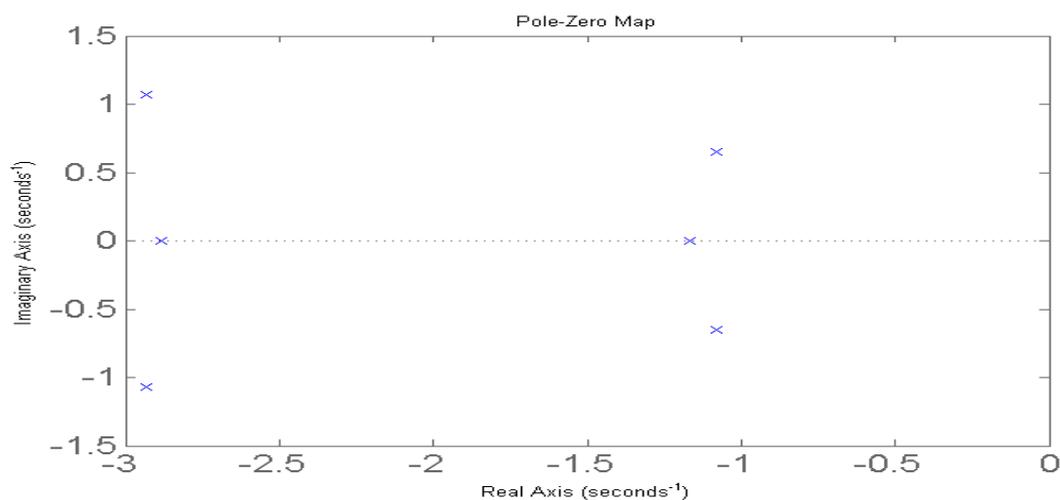
Figura 4.68 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).



Na Figura 4.68 é apresentado o resultado da simulação para a ação do atuador. O torque máximo gerado é da ordem de $1,6 \text{ Nm}$, e cessa sua ação gerando um torque de aproximadamente 0 Nm em torno de 60 s .

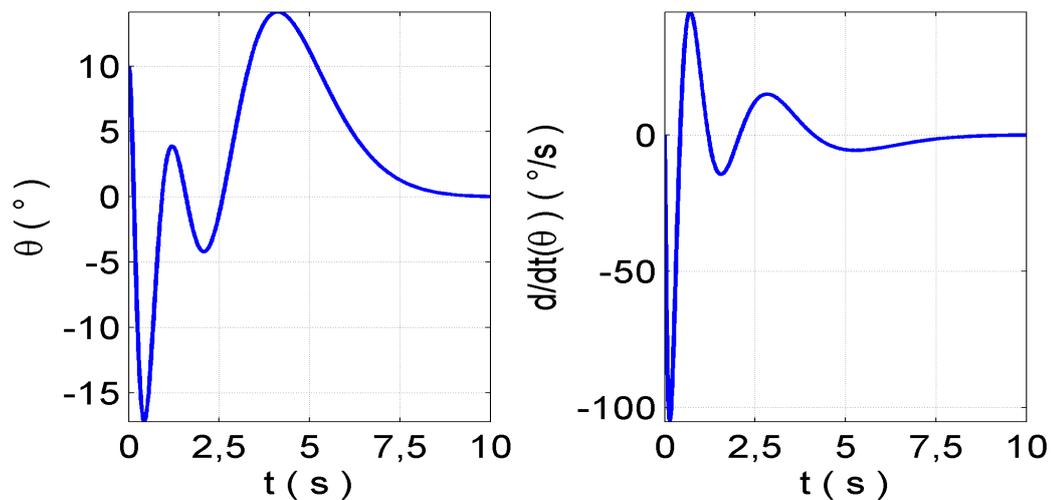
Para a Região 2 se tem o seguinte diagrama de polos e zeros, para o sistema em malha fechada, que mostra a alocação na região escolhida.

Figura 4.69 - Localização dos pólos e zeros para a região 2



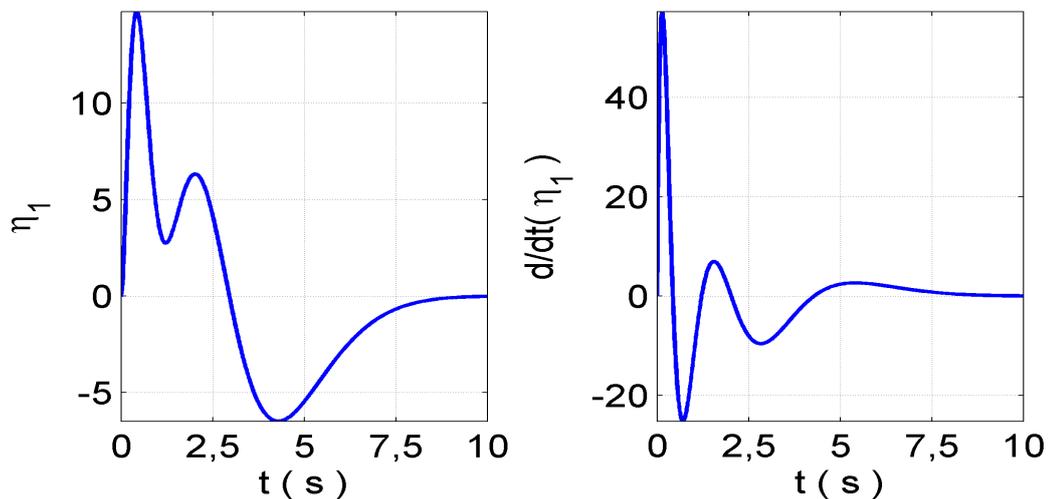
Na Figura 4.69 é apresentado a localização dos pólos e zeros do sistema em malha fechada quando se usa a técnica do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI sob a restrição da região 2.

Figura 4.70 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).



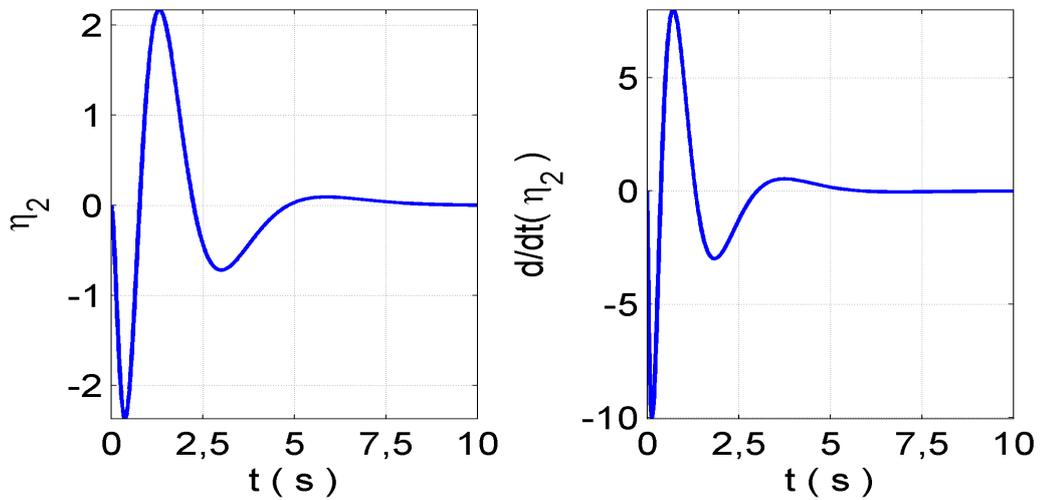
Na Figura 4.70 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido). As variáveis se estabilizam em torno de 10 s.

Figura 4.71 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).



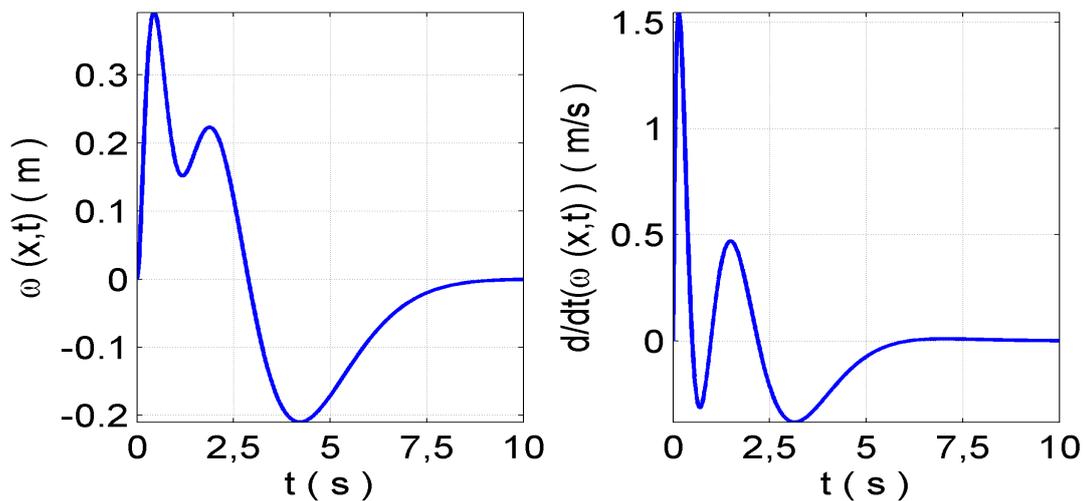
Na Figura 4.71 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$. As variáveis se estabilizam em torno de 10 s.

Figura 4.72 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).



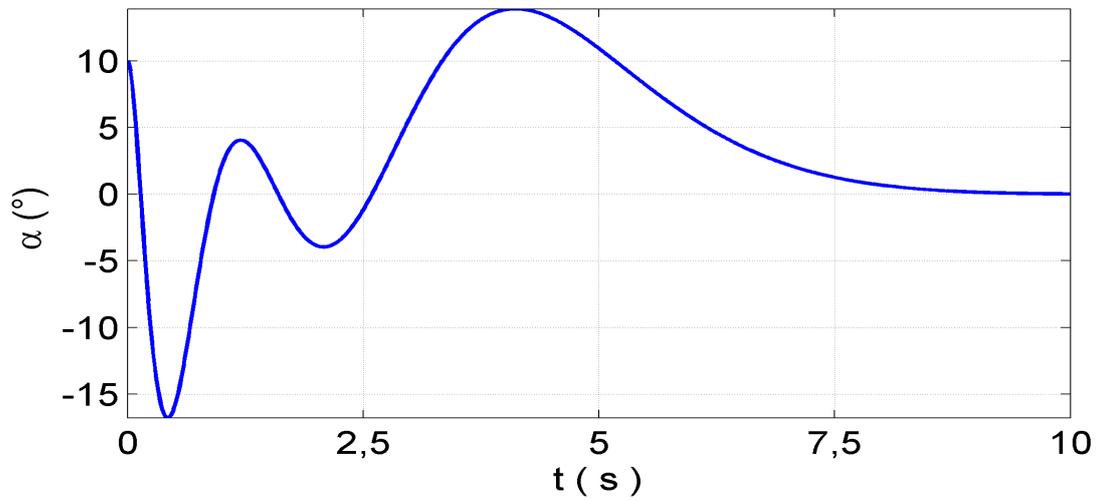
Na Figura 4.72 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$. As variáveis se estabilizam em torno de 10 s.

Figura 4.73 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



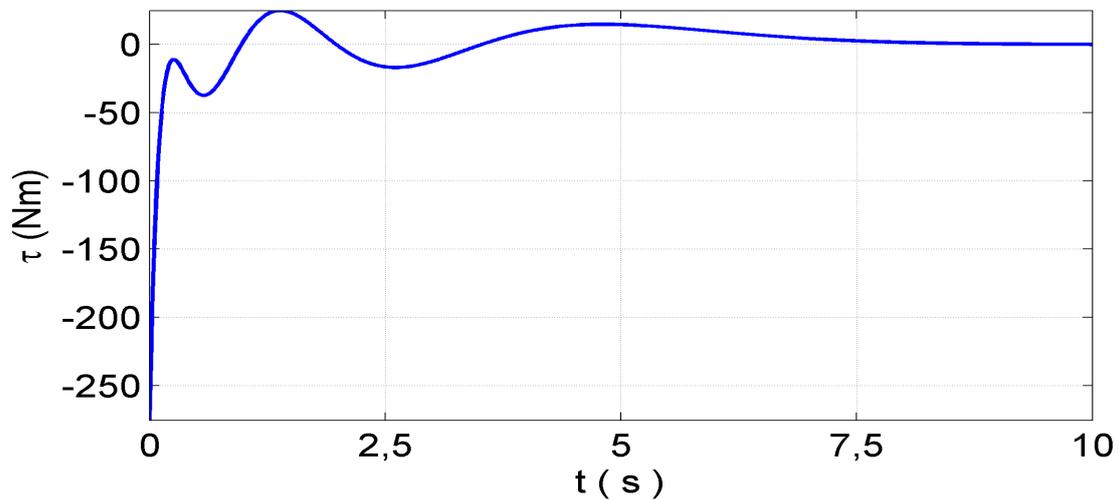
Na Figura 4.73 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deflexão e taxa de variação da deflexão da ponta da viga). Observar-se que o braço se deslocou 0,4 m e retornou para a posição de equilíbrio em aproximadamente 7 s.

Figura 4.74 - Resultado da simulação para o comportamento do angulo α .



Na Figura 4.74 é apresentado o resultado da simulação para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Observar-se que o braço retornou em 0° em aproximadamente 10 s.

Figura 4.75 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).

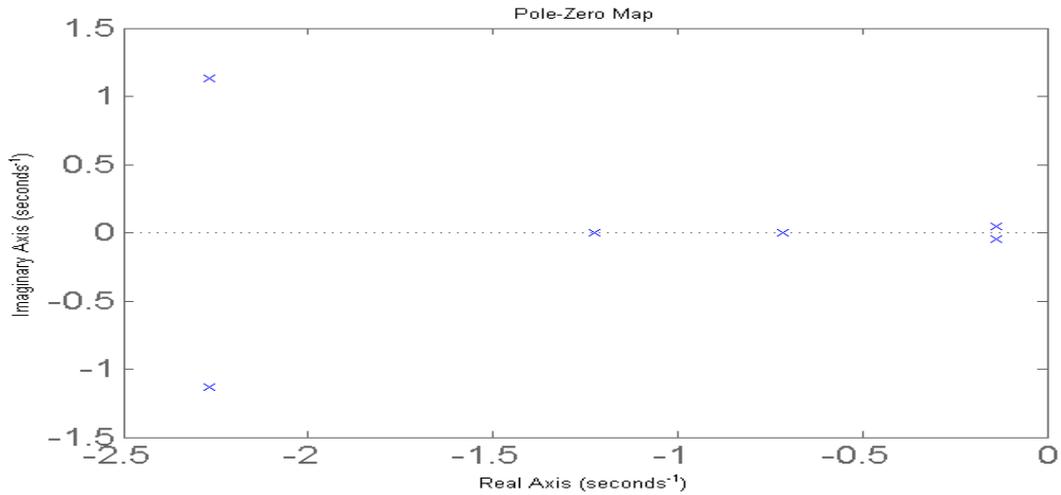


Na Figura 4.75 é apresentado o resultado da simulação para a ação do atuador. O torque máximo gerado é da ordem de 250 Nm , e cessa sua ação gerando um torque de aproximadamente 0 Nm em torno de 10 s.

Para a Região 3 se tem o seguinte diagrama de polos e zeros, para o sistema em malha

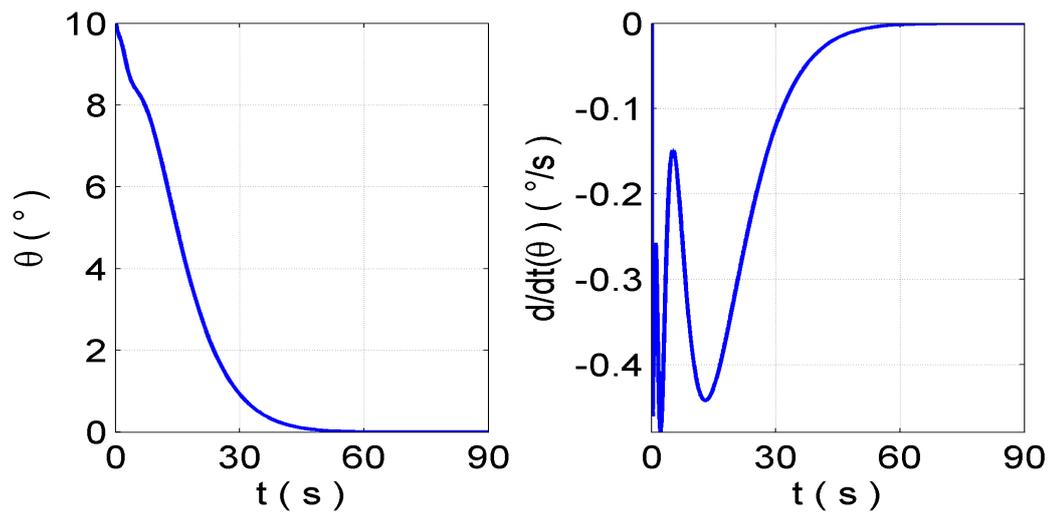
fechada, que mostra a alocação na região escolhida.

Figura 4.76 - Localização dos pólos e zeros para a região 3



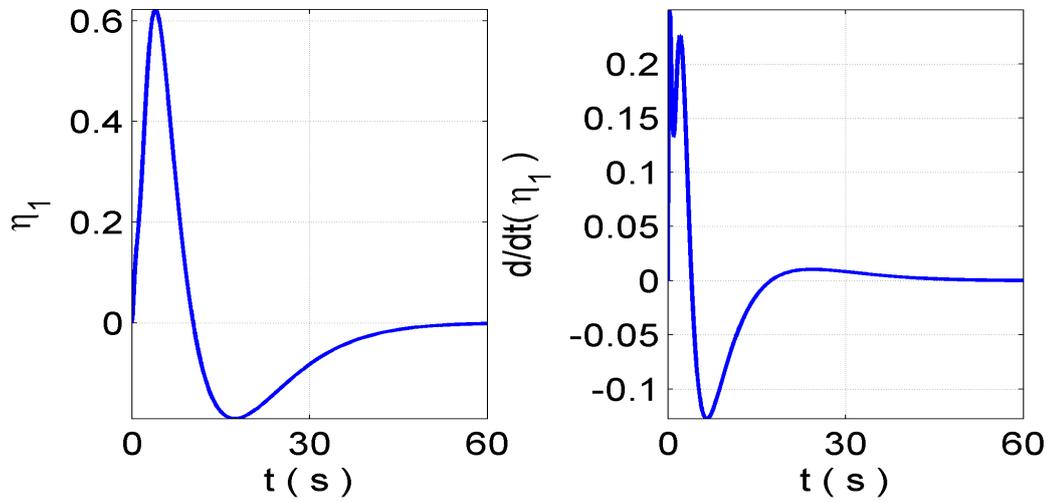
Na Figura 4.76 é apresentado a localização dos pólos e zeros do sistema em malha fechada quando se usa a técnica do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI sob a restrição da região 3.

Figura 4.77 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).



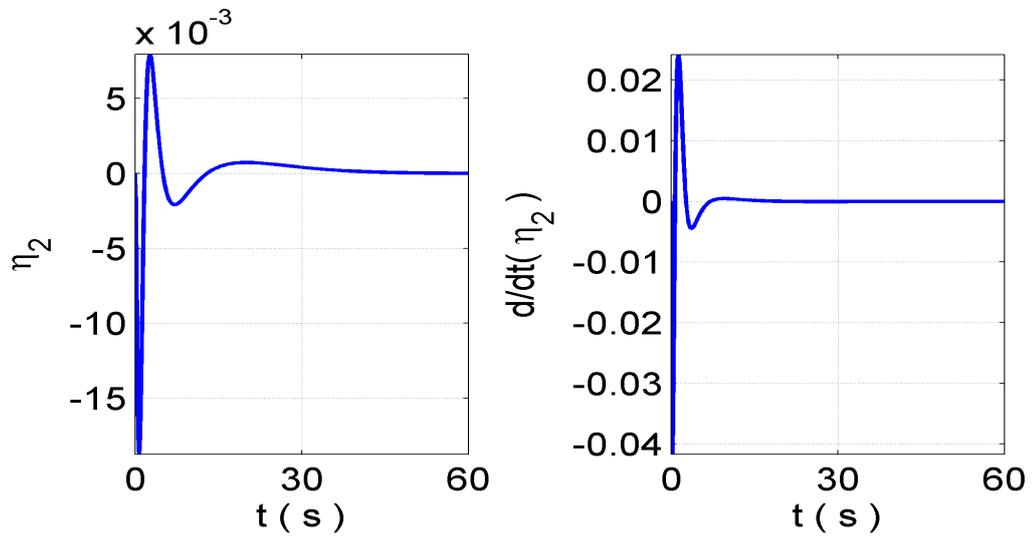
Na Figura 4.77 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido). As variáveis se estabilizam em torno de 60 s.

Figura 4.78 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).



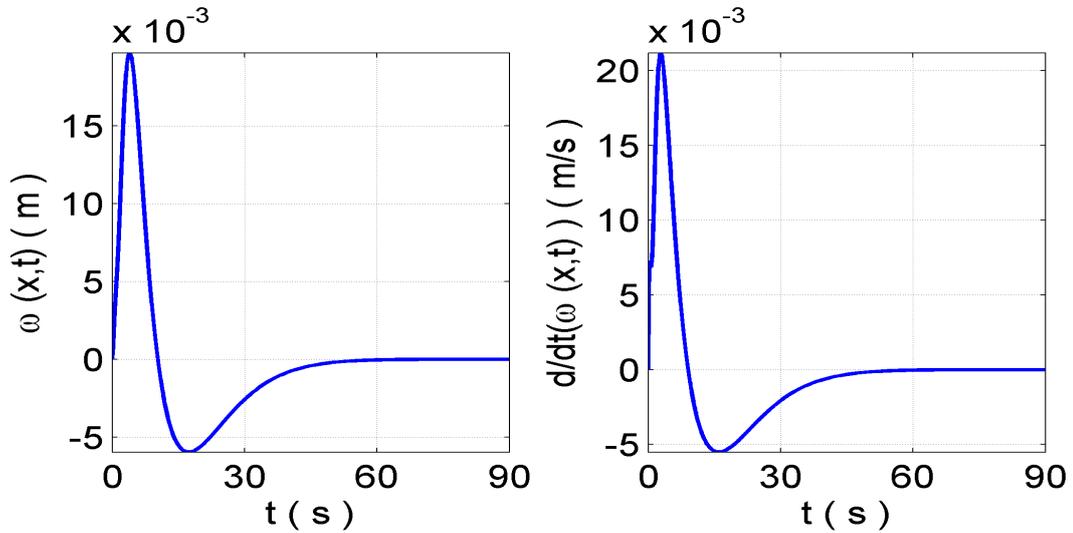
Na Figura 4.78 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$. As variáveis se estabilizam em torno de 60 s.

Figura 4.79 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).



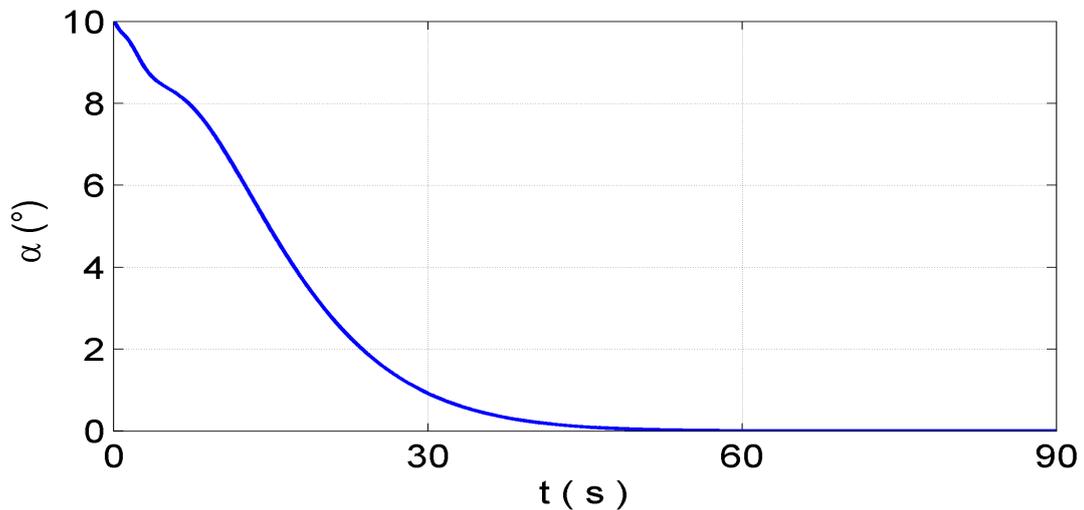
Na Figura 4.79 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$. As variáveis se estabilizam em torno de 50 s.

Figura 4.80 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



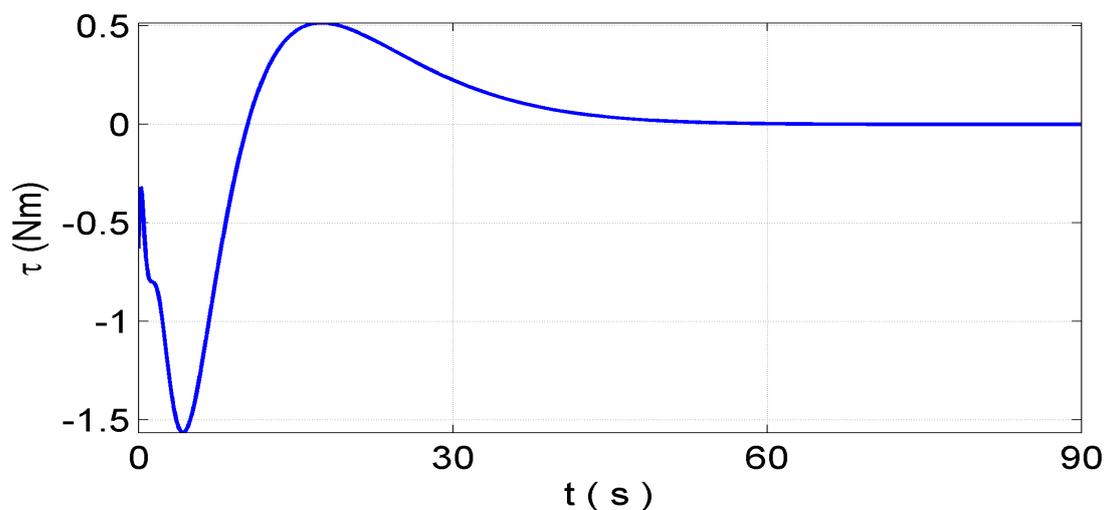
Na Figura 4.80 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deflexão e taxa de variação da deflexão da ponta da viga). Observar-se que o braço se deslocou $18 \times 10^{-3} m$ e retornou para a posição de equilíbrio em aproximadamente 60 s.

Figura 4.81 - Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .



Na Figura 4.81 é apresentado o resultado da simulação para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Observar-se que o braço retornou em 0° em aproximadamente 60 s.

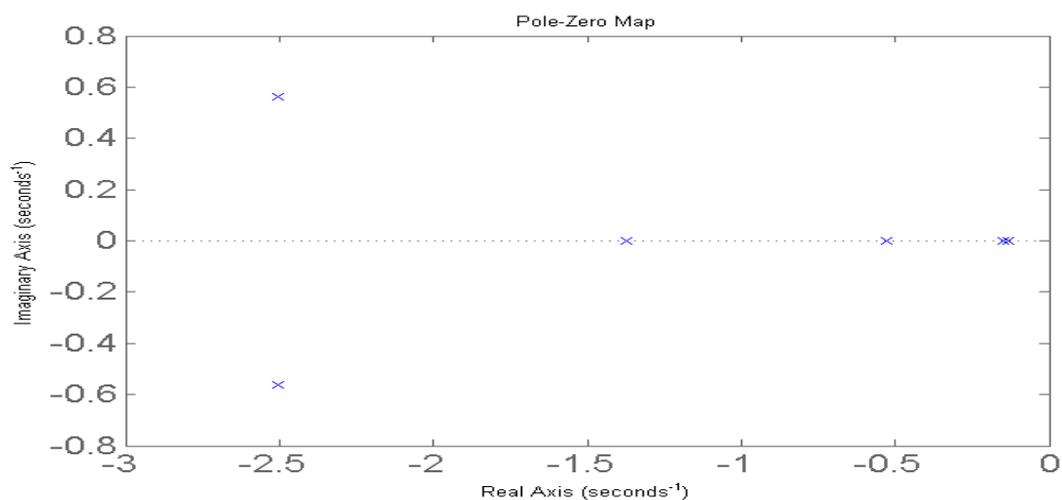
Figura 4.82 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).



Na Figura 4.82 é apresentado o resultado da simulação para a ação do atuador. O torque máximo gerado é da ordem de $1,55 \text{ Nm}$, e cessa sua ação gerando um torque de aproximadamente 0 N em torno de 60 s .

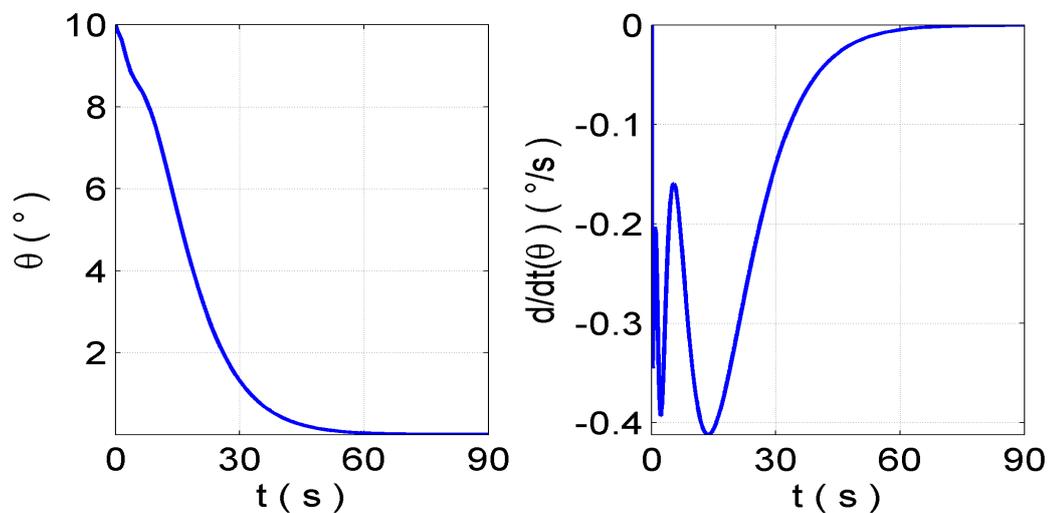
Para a Região 4 se tem o seguinte diagrama de polos e zeros, para o sistema em malha fechada, que mostra a alocação na região escolhida.

Figura 4.83 - Localização dos pólos e zeros para a região 4



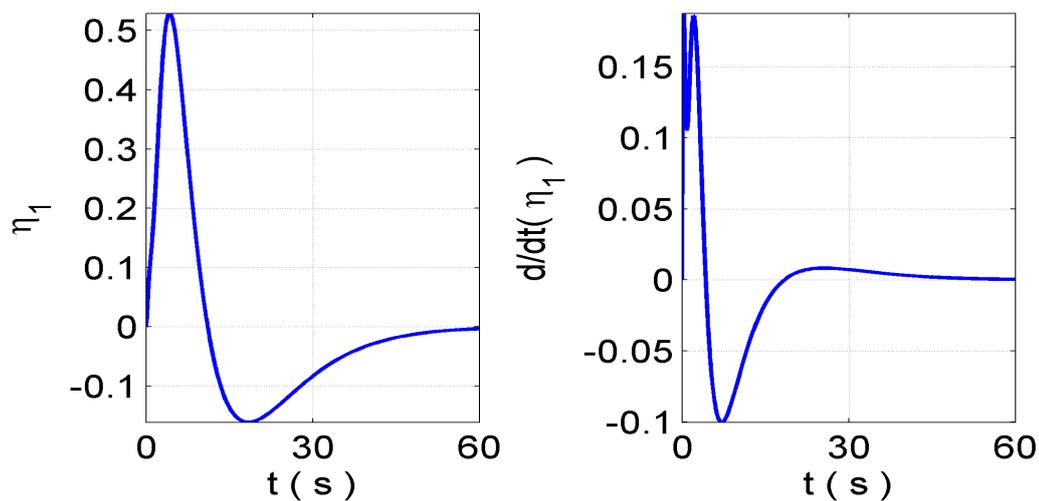
Na Figura 4.83 é apresentado a localização dos pólos e zeros do sistema em malha fechada quando se usa a técnica do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI sob a restrição da região 4.

Figura 4.84 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita).



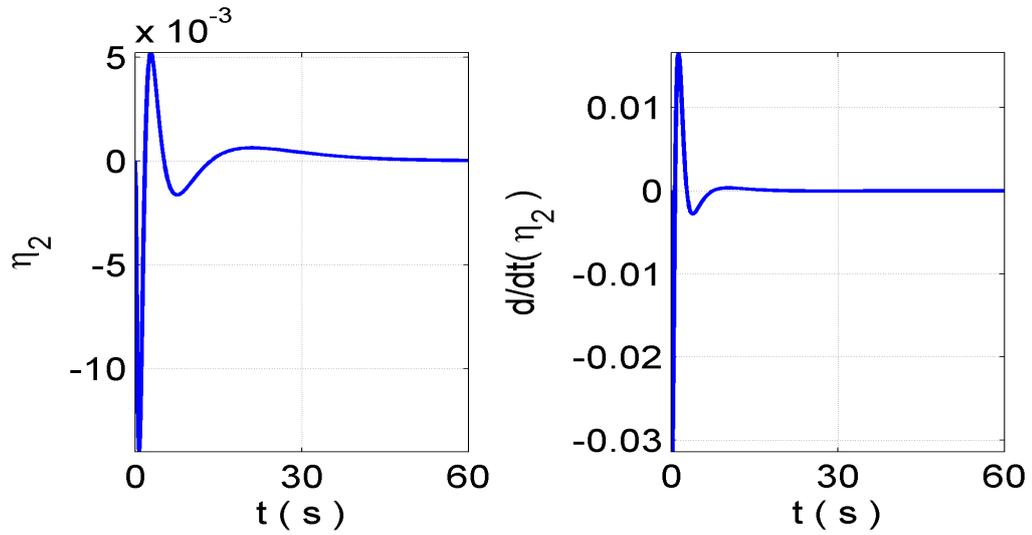
Na Figura 4.84 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do angulo do corpo rígido). A variável θ se estabiliza em torno de 70s e a variável $\dot{\theta}$ em torno de 80s.

Figura 4.85 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita).



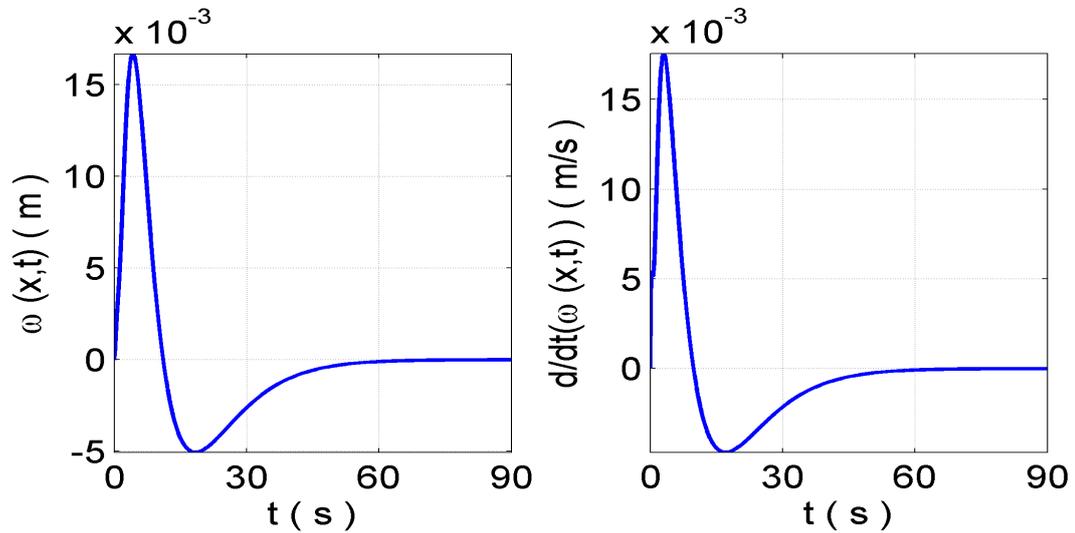
Na Figura 4.85 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$. As variáveis se estabilizam em torno de 60s.

Figura 4.86 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita).



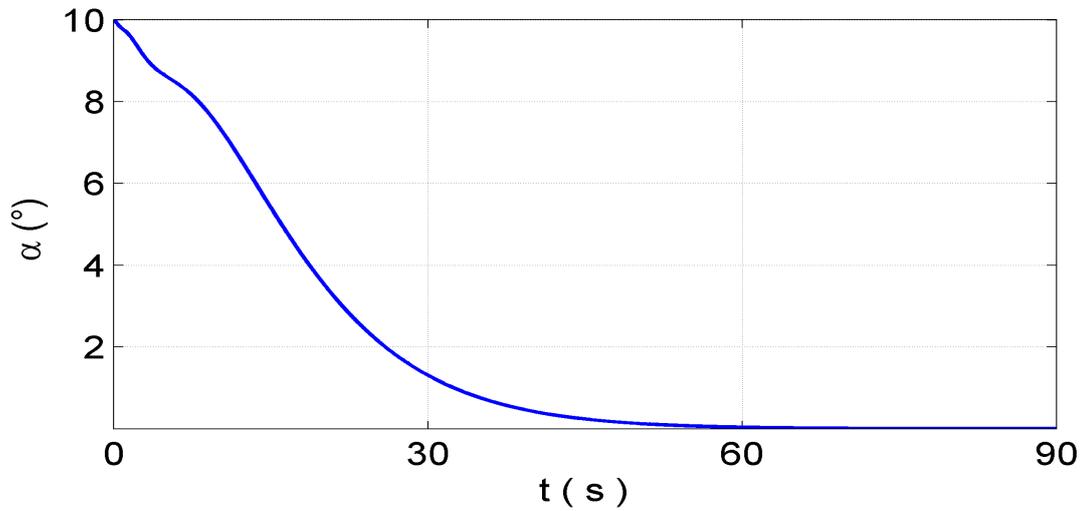
Na Figura 4.86 é apresentado o resultado da simulação para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$. A variável η_2 se estabiliza em torno de 60 s e a variável $\dot{\eta}_2$ se estabilizam em torno de 25 s

Figura 4.87 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



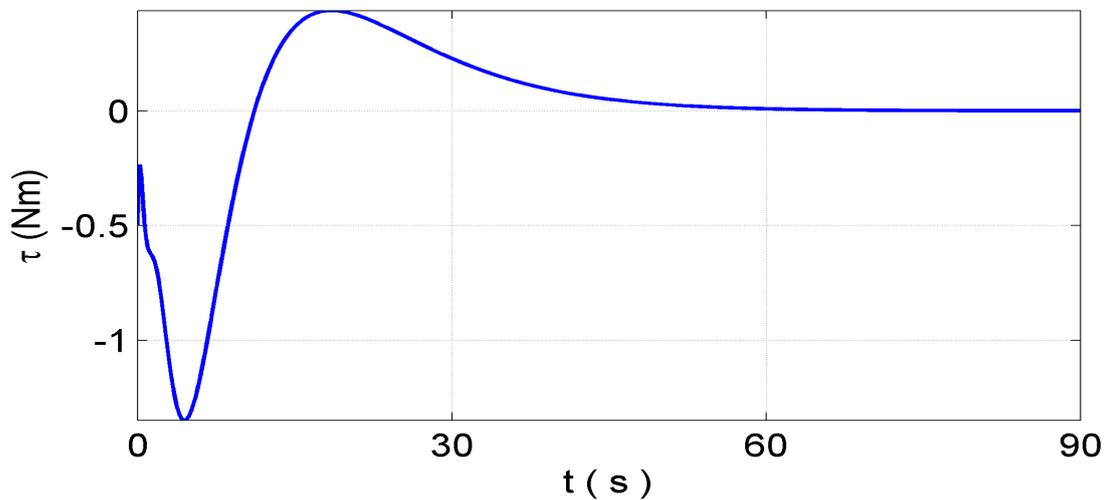
Na Figura 4.80 é apresentado o resultado da simulação para as variável $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deflexão e taxa de variação da deflexão da ponta da viga). Observar-se que o braço se deslocou $16 \times 10^{-3} m$ e retornou para a posição de equilíbrio em aproximadamente 60 s.

Figura 4.88 - Resultado da simulação para o comportamento do ângulo α .



Na Figura 4.88 é apresentado o resultado da simulação para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Observar-se que o braço retornou em 0° em aproximadamente 60 s.

Figura 4.89 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque).



Na Figura 4.89 é apresentado o resultado da simulação para a ação do atuador. O torque máximo gerado é da ordem de 1,30 Nm, e cessa sua ação gerando um torque de aproximadamente 0 Nm em torno de 60 s.

Foram simulados leis de controle projetadas usando 4 regiões LMI com suas características

expressas na Tabela 4.3. A região que obteve o pior desempenho foi a região de número 2, que exigiu um torque de 250 Nm , sendo este o maior valor solicitado, mesmo quando comparado com os casos em que se projetou a lei de controle usando apenas o método do \mathcal{H}_∞ (Figura 4.22). As outras regiões apresentaram respostas praticamente similares, mas entre elas se destaca a região de número 4, que para controlar o sistema solicitou apenas 3 Nm de torque e estabilizou as variáveis em torno de 50 s . De todas as simulações feitas está foi que teve o melhor desempenho, tendo como critério a quantidade de torque exigido e o tempo que se gasta para estabilizar as variáveis.

4.4.2 Simulação com incertezas.

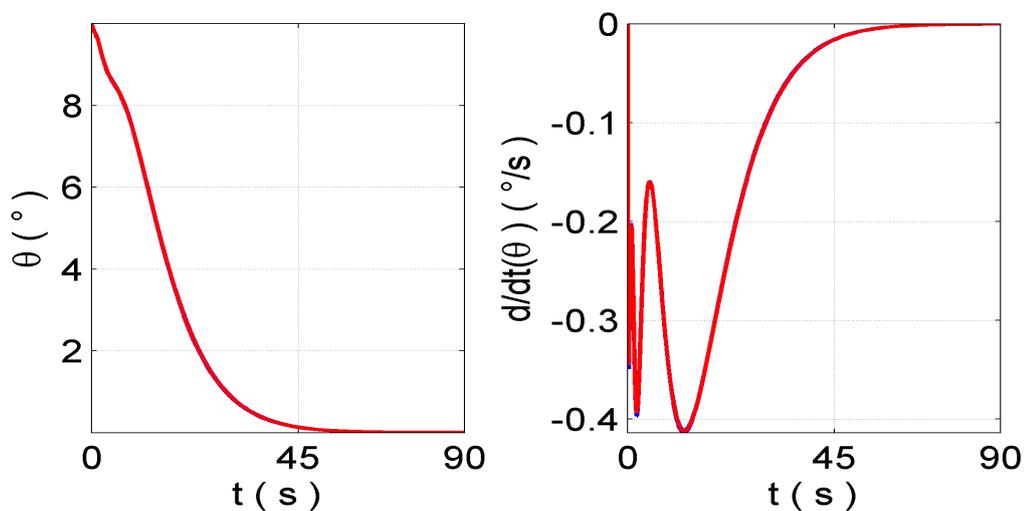
Aqui serão apresentadas as simulações da lei de controle projetada com a técnica do \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI, com a inserção de incertezas de 10% e 30%. Seguindo a mesma ideia mostrada na sessão 4.3.1, serão simulados os 27 casos de incerteza apresentados na Tabela 4.2. Primeiramente agindo sobre todo o sistema, para analisar a robustez da técnica e, em seguida, agindo nas matrizes M , D e K para ver em qual das matrizes a incerteza exerce maior influência.

Para a alocação de pólos foi escolhida a região 4, apresentada na sessão 4.4.1. As simulações continuam sendo feitas a partir de excitação na variável θ (ângulo do corpo rígido) de 10° .

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo rígido, as coordenadas generalizadas que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 e η_2 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ que mostra a deformação da ponta da viga, τ a ação do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em relação à referência $\alpha(t)$, como mostra a Figura 4.9. Partindo de uma condição inicial de $\theta = 10^\circ$.

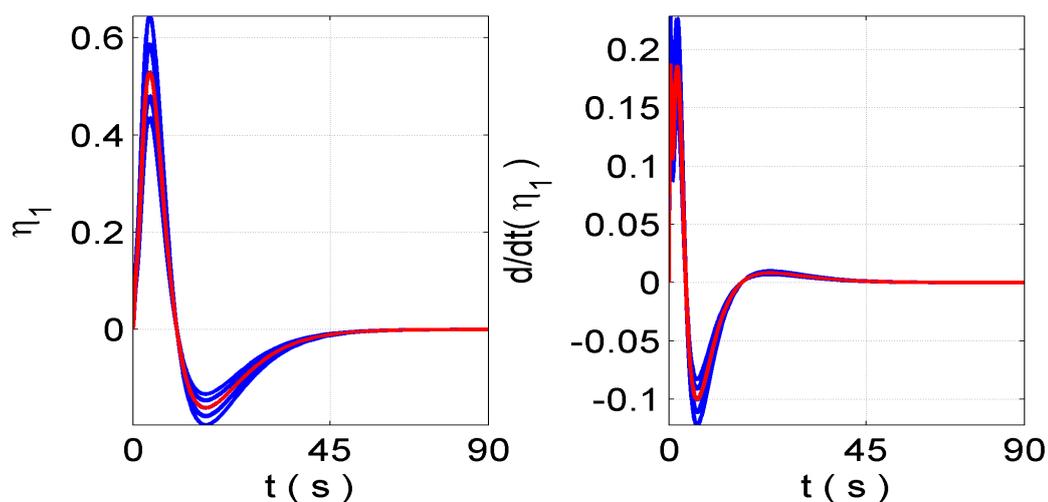
4.4.2.1 Simulação com incerteza de 10%.

Figura 4.90 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.90 é apresentada o resultado da simulação, com incertezas, para a variável θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. As simulações indicam que praticamente não houve variação entre os casos com incerteza e o caso nominal, a variável θ foi estabilizada em torno de 50 s e a variável $\dot{\theta}$ em torno de 80 s.

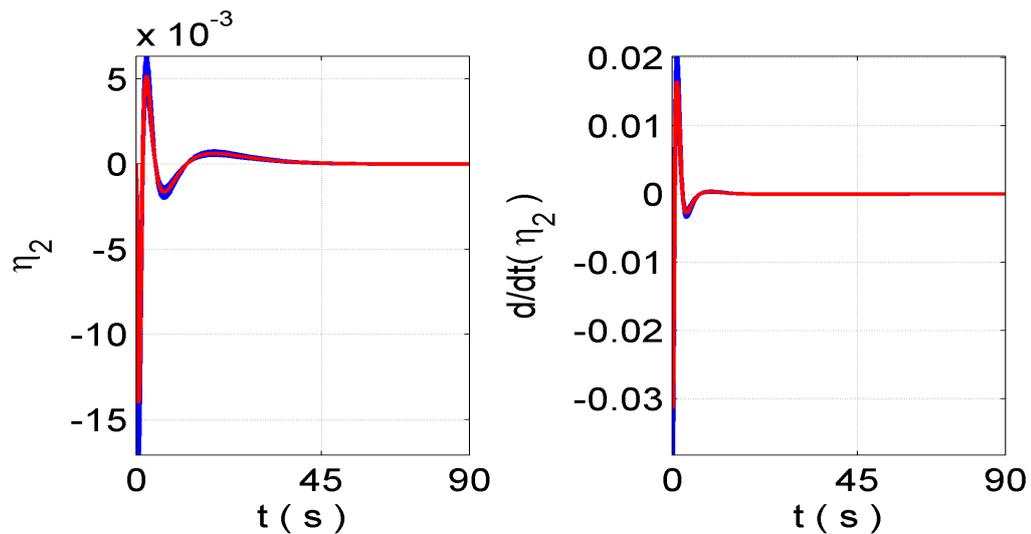
Figura 4.91 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.91 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variáveis η_1

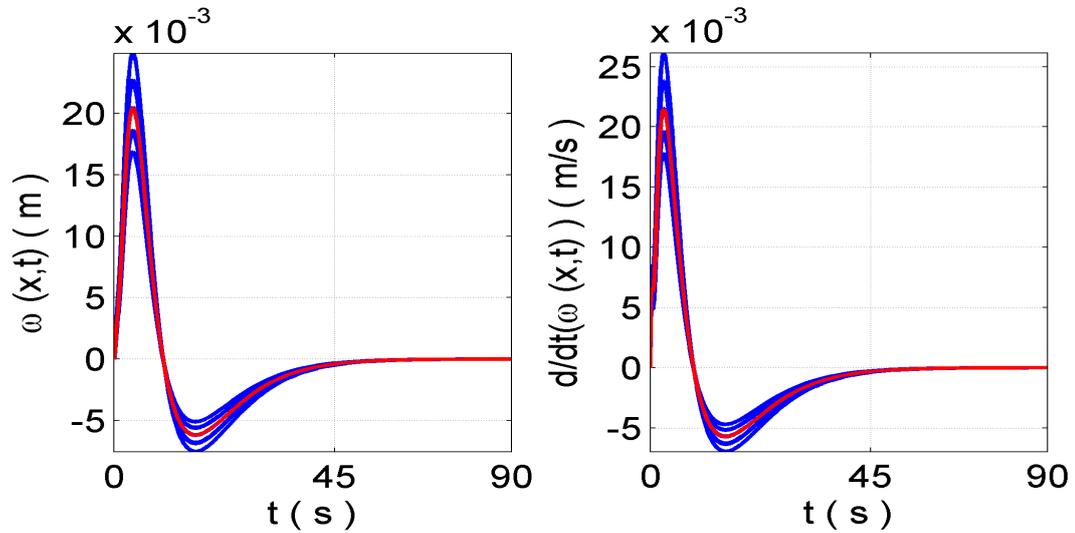
e η_1 (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Houve uma variação entre os casos de incerteza em relação ao nominal, mas as variáveis (η_1 e $\dot{\eta}_1$) se estabilizaram, em todos os casos, em torno de 80 s.

Figura 4.92 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.



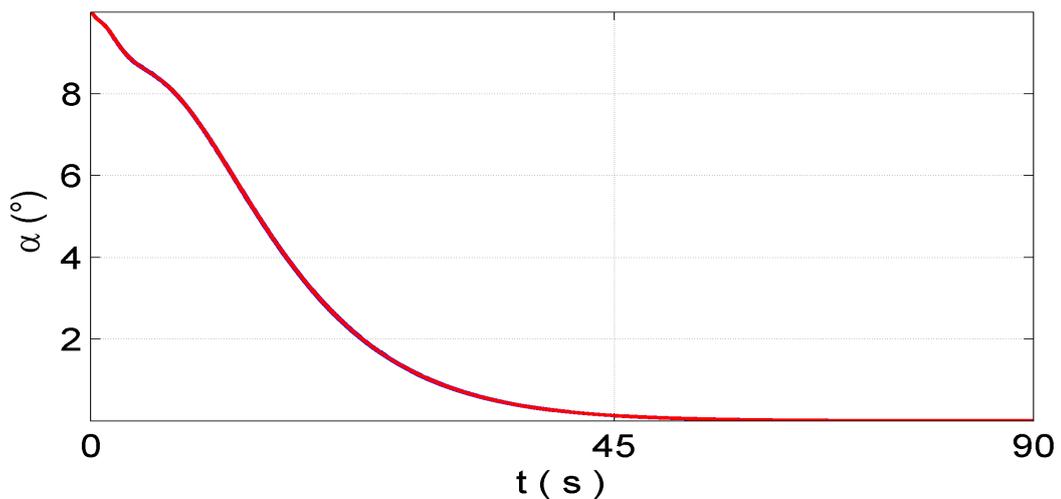
Na Figura 4.92 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao segundo modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Houve uma variação entre os casos de incerteza em relação ao nominal, mas as variáveis (η_2 e $\dot{\eta}_2$) se estabilizaram, em todos os casos, em torno de 50 s. Observa-se também que a variável η_2 foi pouco excitada gerando uma amplitude da ordem de 10^{-3} .

Figura 4.93 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



Na Figura 4.93 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Houve uma variação entre os casos de incerteza em relação ao nominal, mas as variáveis ($\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$) se estabilizaram, em todos os casos, em torno de 50 s. Observa-se também que a deflexão máxima foi de $23 \times 10^{-3} m$.

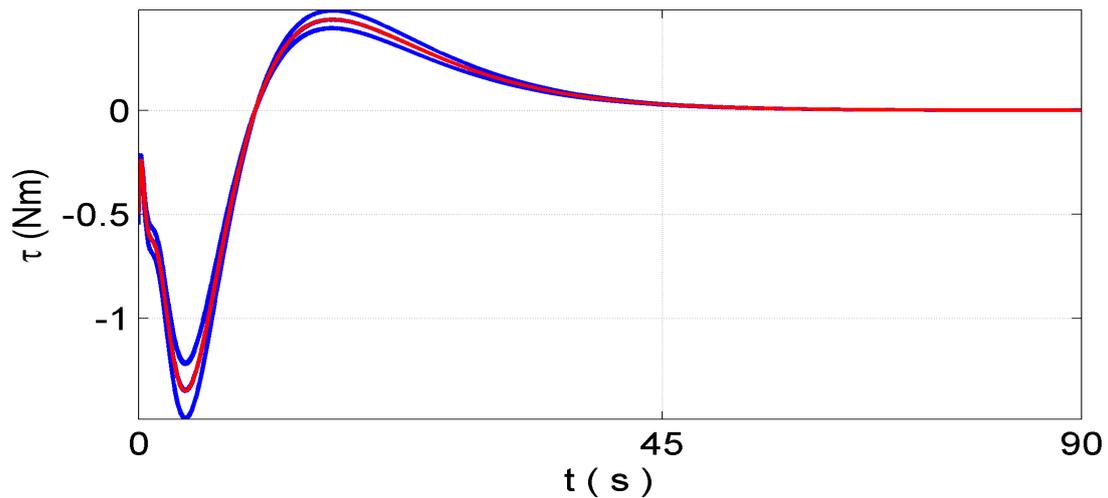
Figura 4.94 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.94 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variável

α (comportamento angular da ponta da viga). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Observa-se que praticamente não houve variação entre os casos com incerteza com o nominal, e a variável foi estabilizada em torno de 50 s.

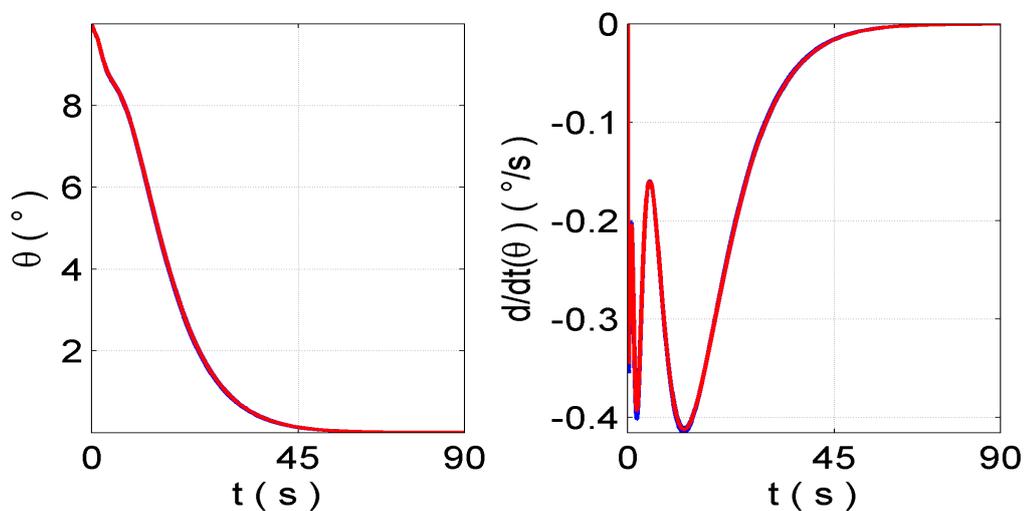
Figura 4.95 - Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.95 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para a ação do atuador (esforço de controle). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para o torque gerado obteve como limitantes, torque máximo entre 1,5 Nm e 0,45 Nm e mínimo entre 1,3 Nm e 0,3 Nm, mas em todos os casos a variável se estabilizou, em todos os casos, em torno de 90 s.

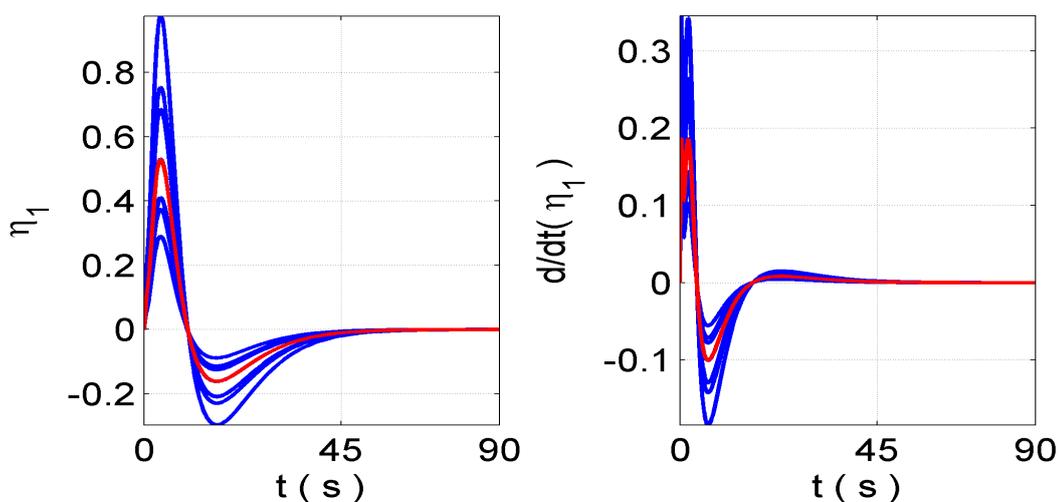
4.4.2.2 Simulação com incerteza de 30%.

Figura 4.96 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.96 é apresentada o resultado da simulação, com incertezas, para a variável θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. As simulações indicam que praticamente não houve variação entre os casos com incerteza e o caso nominal, a variável θ foi estabilizada em torno de 50 s e a variável $\dot{\theta}$ em torno de 90 s.

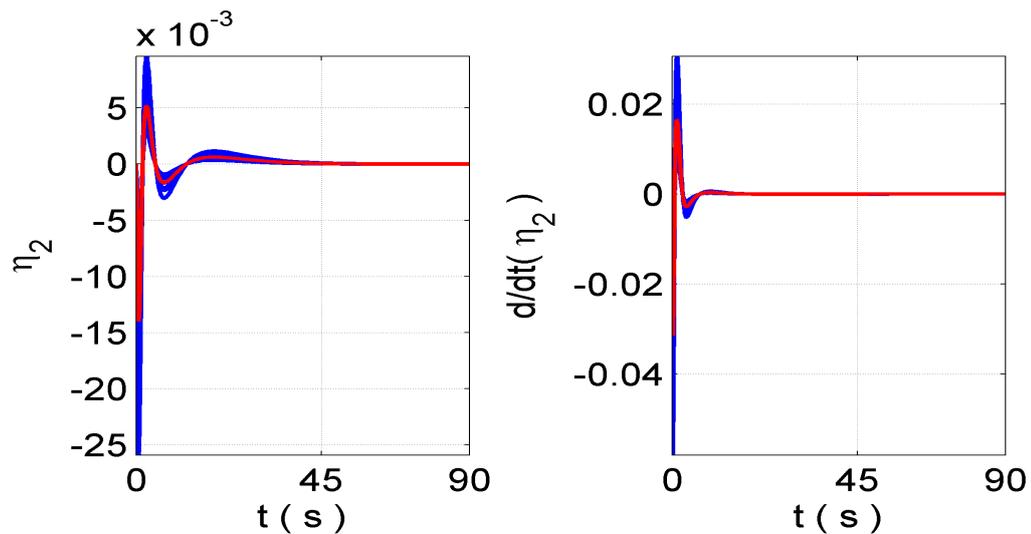
Figura 4.97 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.97 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variáveis η_1

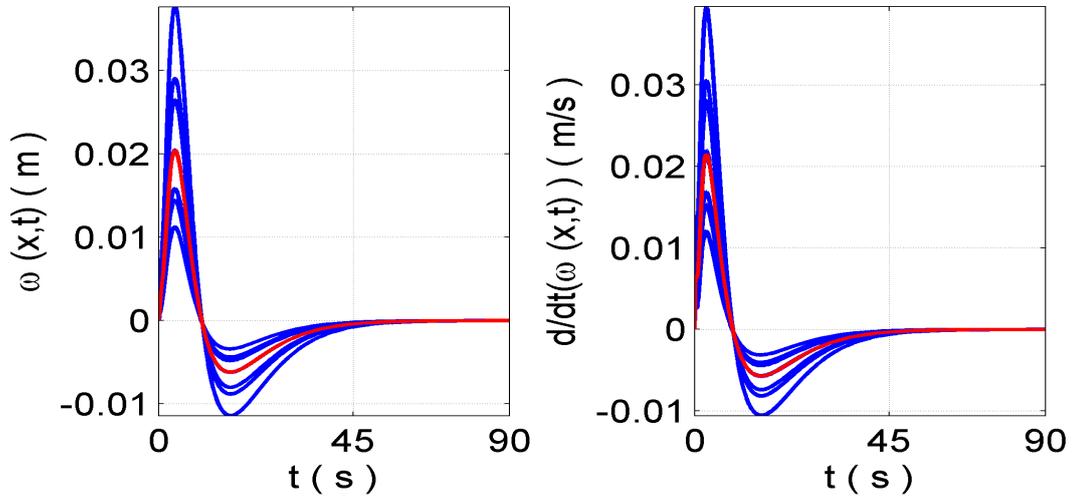
e η_1 (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Houve uma variação entre os casos de incerteza em relação ao nominal, mas as variáveis (η_1 e $\dot{\eta}_1$) se estabilizaram, em todos os casos, em torno de 80 s.

Figura 4.98 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho a resposta para os valores nominais.



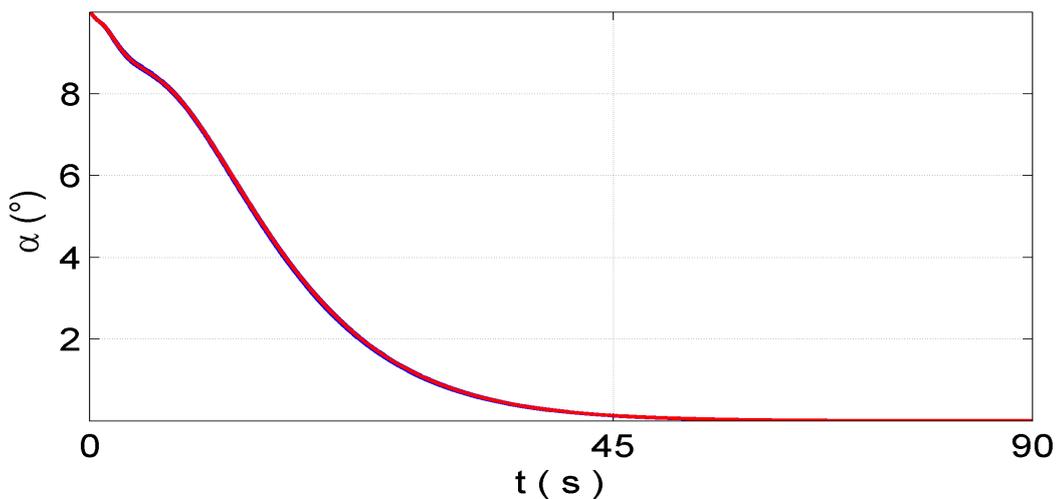
Na Figura 4.98 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao segundo modo de vibração, assim como sua derivada). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Houve uma variação entre os casos de incerteza em relação ao nominal, mas as variáveis (η_2 e $\dot{\eta}_2$) se estabilizaram, em todos os casos, em torno de 50 s. Observa-se também que a variável η_2 foi pouco excitada gerando uma amplitude da ordem de 10^{-3} .

Figura 4.99 - Resultado da simulação para o deslocamento flexível $\omega(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{\omega}(L, t)$ (direita).



Na Figura 4.99 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variáveis $\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Houve uma variação entre os casos de incerteza em relação ao nominal, mas as variáveis ($\omega(L, t)$ e $\dot{\omega}(L, t)$) se estabilizaram, em todos os casos, em torno de 50 s. Observa-se também que a deflexão máxima foi de 0,035 m.

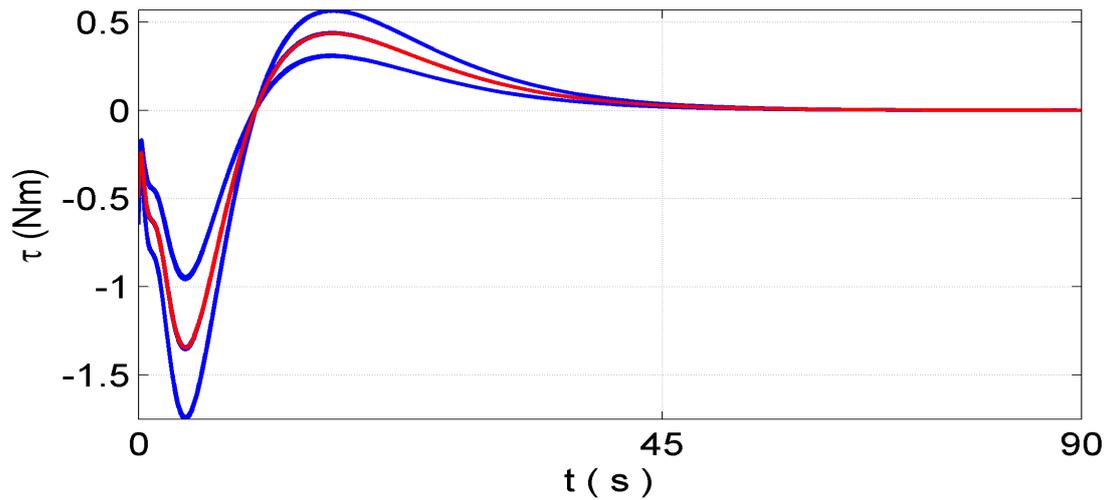
Figura 4.100 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.100 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para as variável

α (comportamento angular da ponta da viga). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Observa-se que praticamente não houve variação entre os casos com incerteza com o nominal, e a variável foi estabilizada em torno de 50 s.

Figura 4.101 - Resultado da simulação para a variável τ relacionada ao esforço de controle. Em vermelho a resposta para os valores nominais.



Na Figura 4.101 é apresentado o resultado da simulação, com incerteza, para a ação do atuador (esforço de controle). Em vermelho a simulação para o valor nominal. Para o torque gerado obteve como limitantes, torque máximo entre 1,6 Nm e 0,55 Nm e mínimo entre 0,6 Nm e 0,8 Nm, mas em todos os casos a variável se estabilizou, em todos os casos, em torno de 90 s.

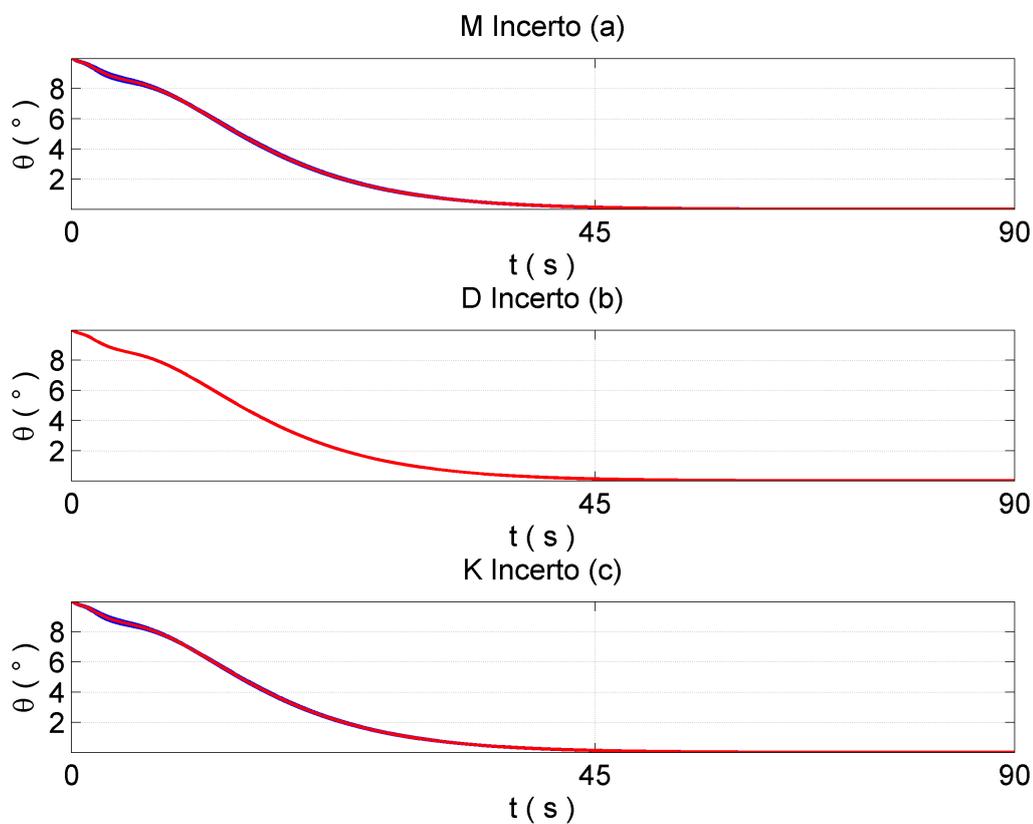
Dos resultados apresentados neste item notou-se que mesmo com algumas perturbações, esta técnica se mostrou robusta, pois foi capaz de fornecer um controlador capaz de controlar o sistema para todos os casos de incerteza analisados.

4.4.3 Influencia das incertezas nas matrizes M , D e K , no caso em que o controlador é projetado com o método H-infinito com alocação de polos via LMI.

Assim como o estudado na sessão 4.3.3, serão analisados a influencia da incerteza sob as matrizes M , D e K .

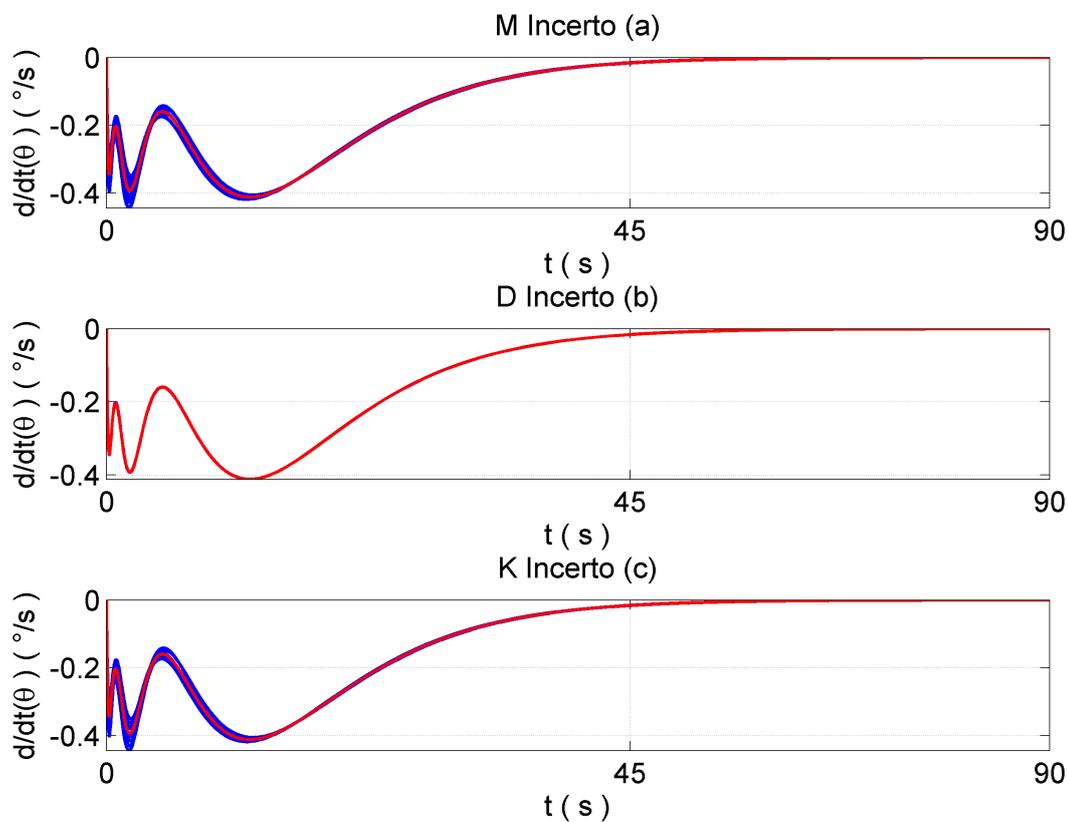
4.4.3.1 Simulação com incerteza de 10%.

Figura 4.102 - Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho o caso nominal.



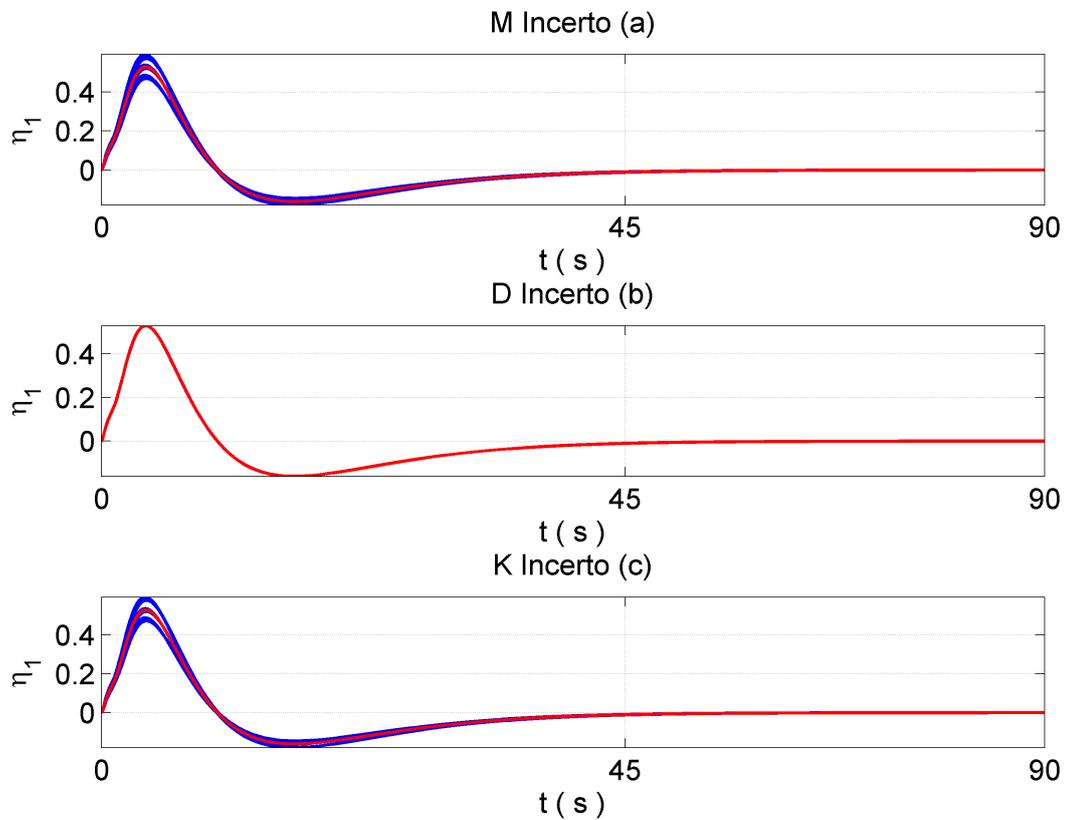
Na Figura 4.102 está representado a resposta temporal da variável θ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50 s.

Figura 4.103 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.



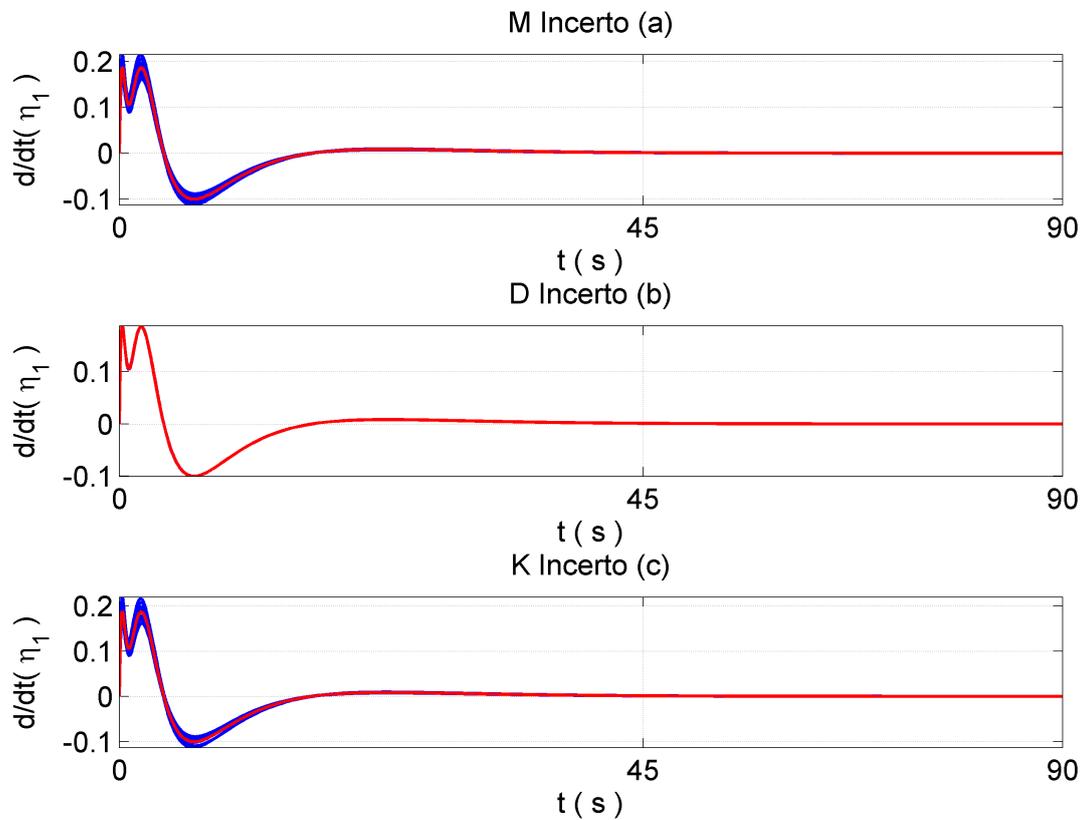
Na Figura 4.103 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\theta}$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 70 s.

Figura 4.104 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho o caso nominal.



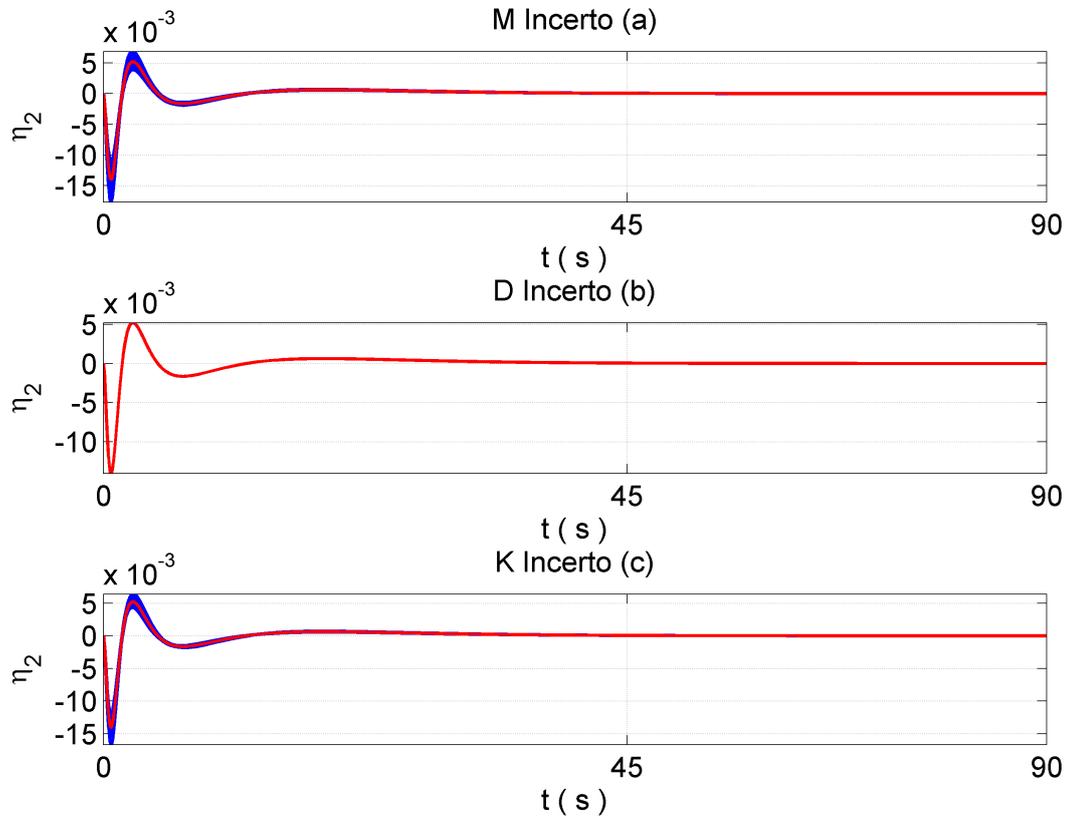
Na Figura 4.104 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50s.

Figura 4.105 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho o caso nominal.



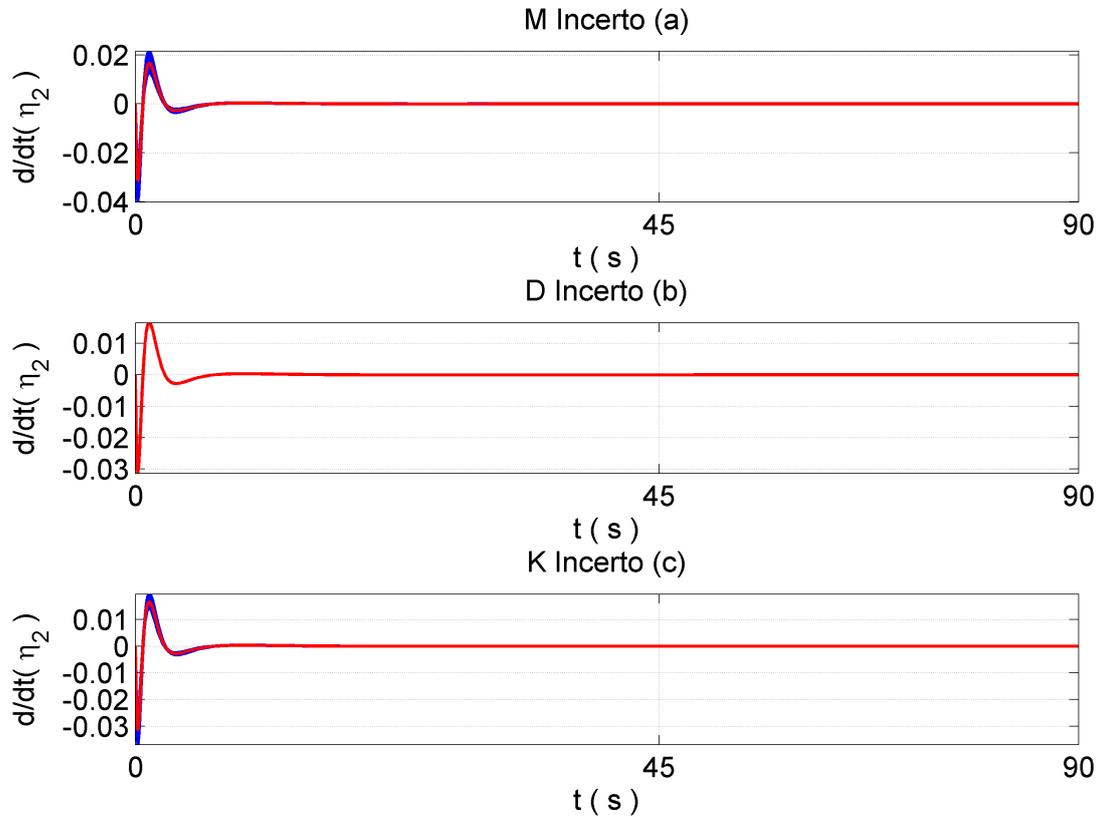
Na Figura 4.105 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 20 s.

Figura 4.106 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho o caso nominal.



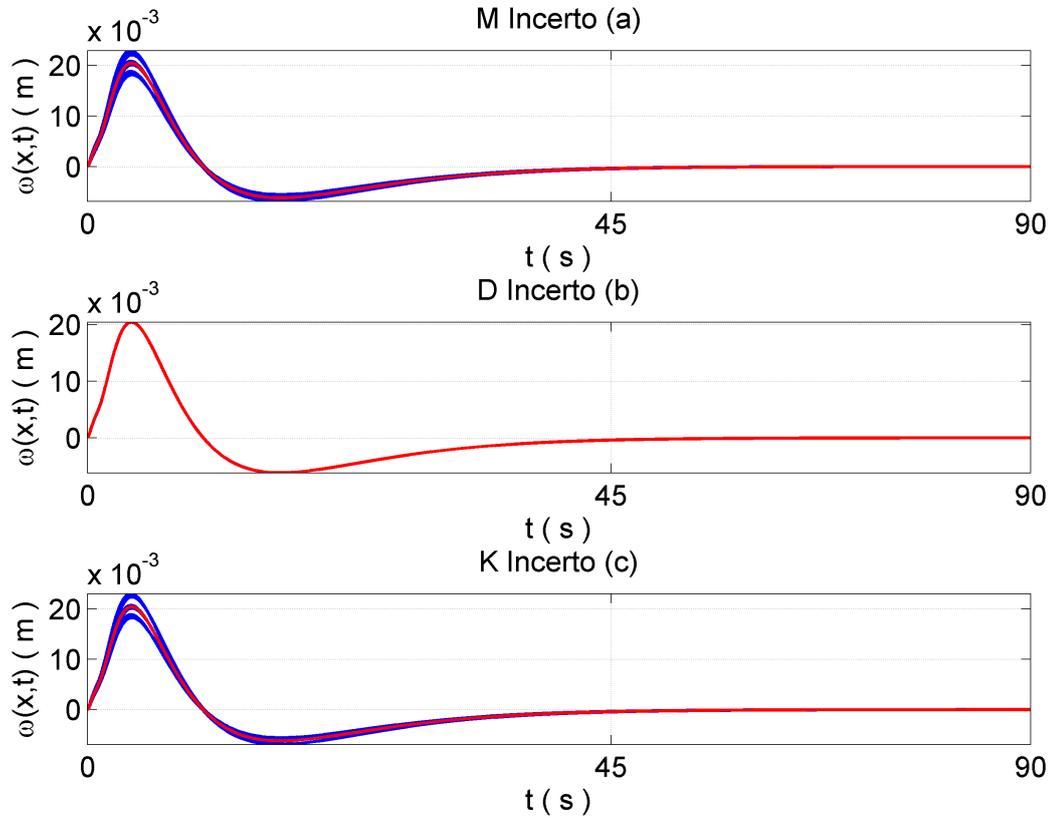
Na Figura 4.106 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 20 s.

Figura 4.107 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho o caso nominal.



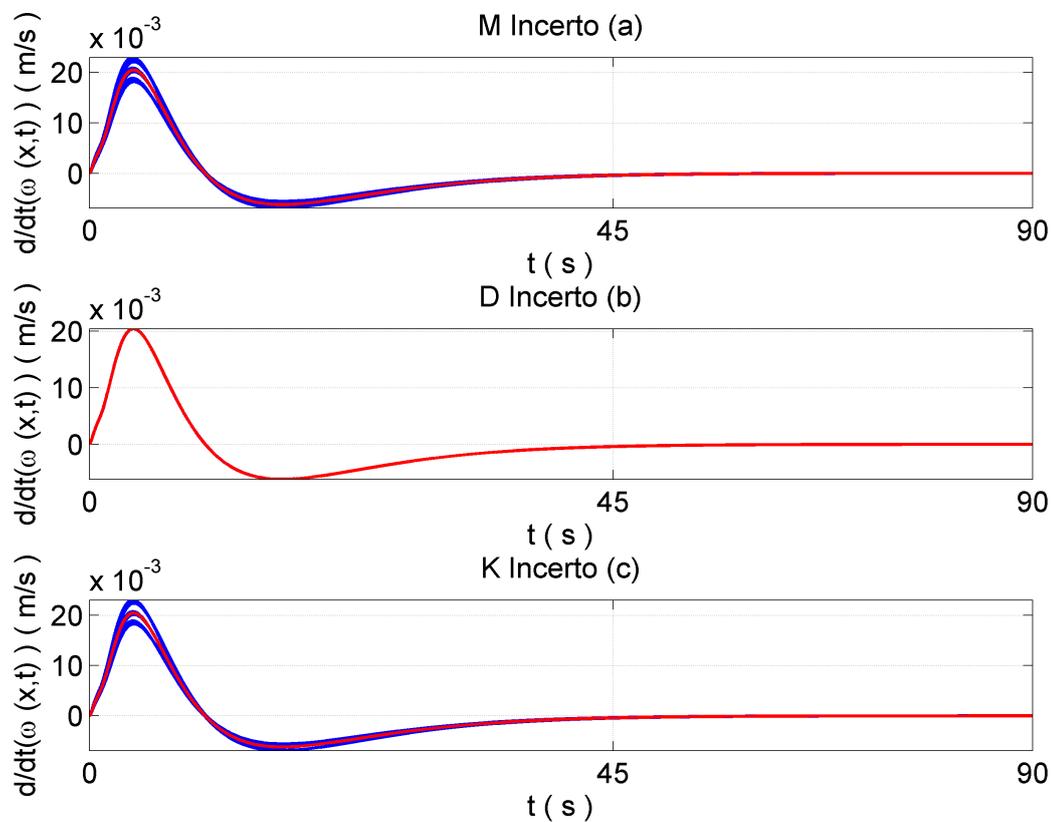
Na Figura 4.107 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 20 s.

Figura 4.108 - Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho o caso nominal.



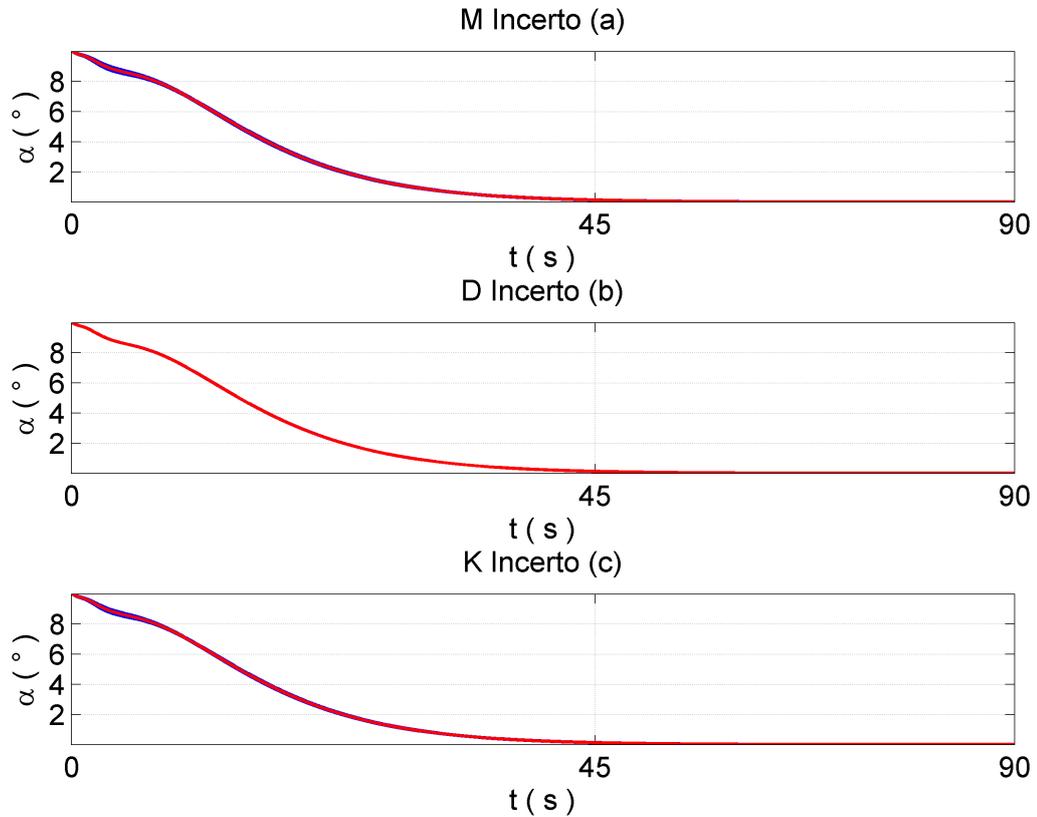
Na Figura 4.108 está representado a resposta temporal da variável $\omega(L, t)$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50 s.

Figura 4.109 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.



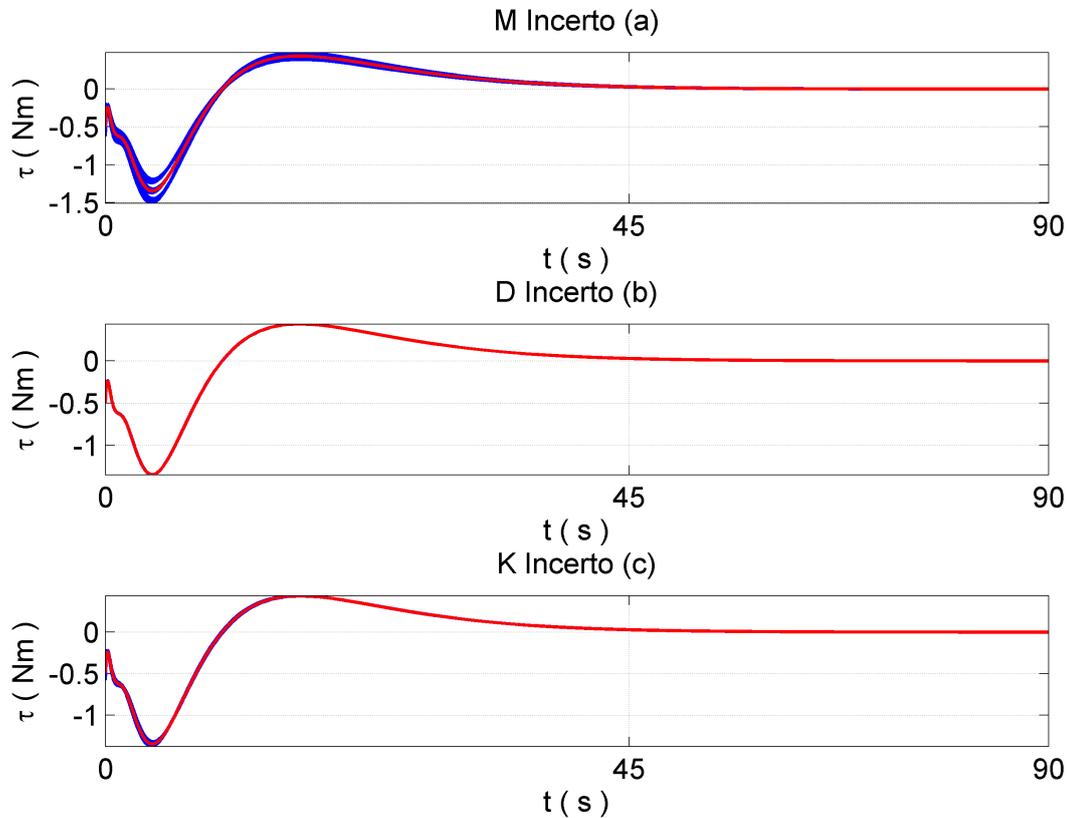
Na Figura 4.109 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\omega}(L, t)$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 45 s.

Figura 4.110 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso nominal.



Na Figura 4.110 está representado a resposta temporal da variável α para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50 s.

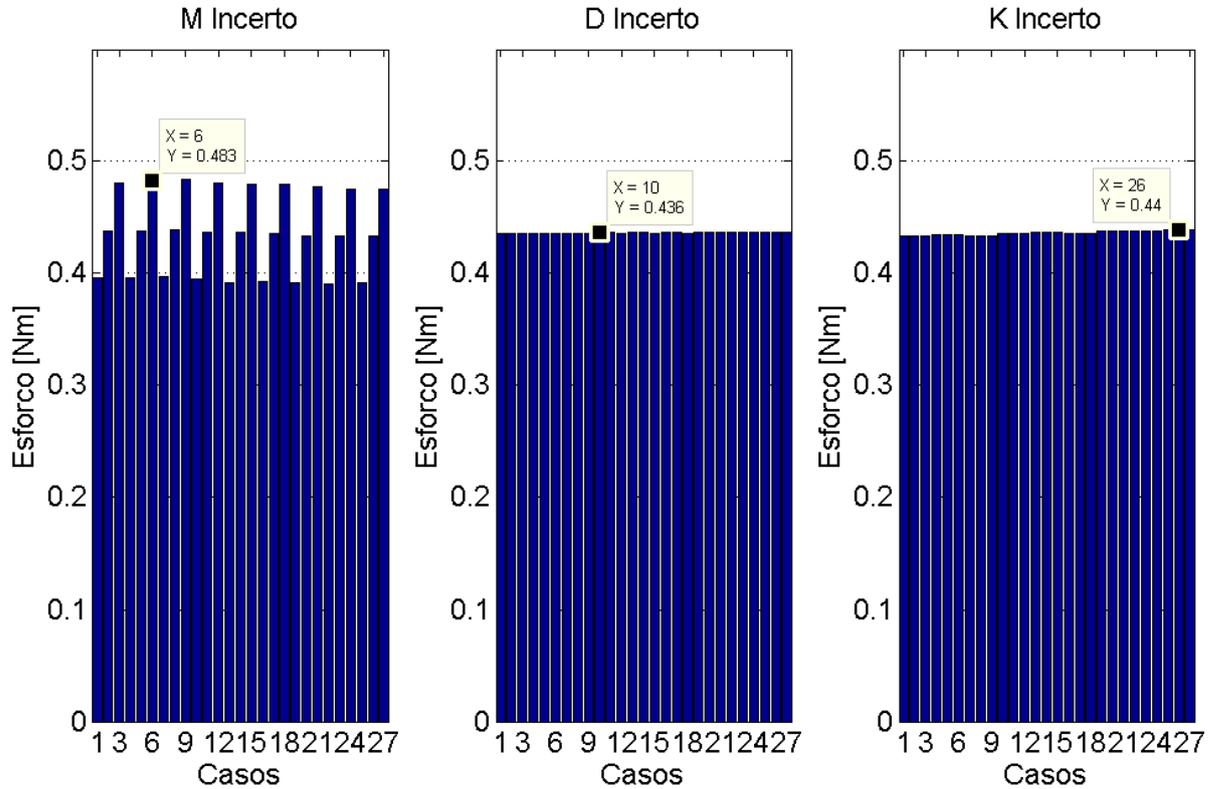
Figura 4.111 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso nominal.



Na Figura 4.111 está representado a resposta temporal para a ação do atuador (τ) para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras, se observa que a influencia da incerteza na matriz M foi maior que nas outras, pois foi nela em que se apresentou a maior variação de torque. Nos outros casos praticamente não houveram variações. E para todos os casos a variável se estabilizou em torno de 50 s.

Afim de se estudar em qual matriz a incerteza teve maior influencia, será considerado o diagrama de barras (Figura 4.59) composto pelo maior valor de torque gerado.

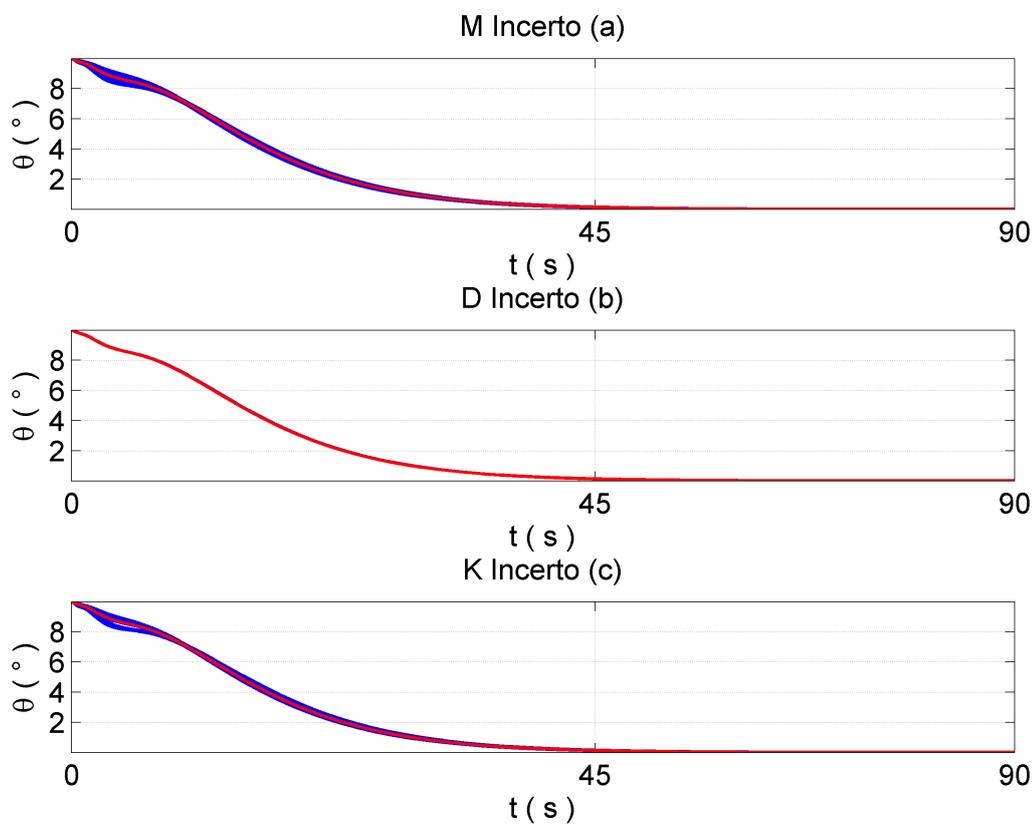
Figura 4.112 - Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.



Na Figura 4.112 é mostrado um diagrama de barras do torque máximo gerado (eixo y) e o caso de incerteza associado (eixo x). Se observa que a incerteza sobre a matriz M é aquele que exige um maior valor de torque, dando um forte indicativo de que a influencia da incerteza sobre esta matriz é maior que nas outras, em outras palavras, a incerteza atuou modificando o perfil de resposta de cada caso, gerando um aumento e/ou diminuição de excitação sobre as variáveis.

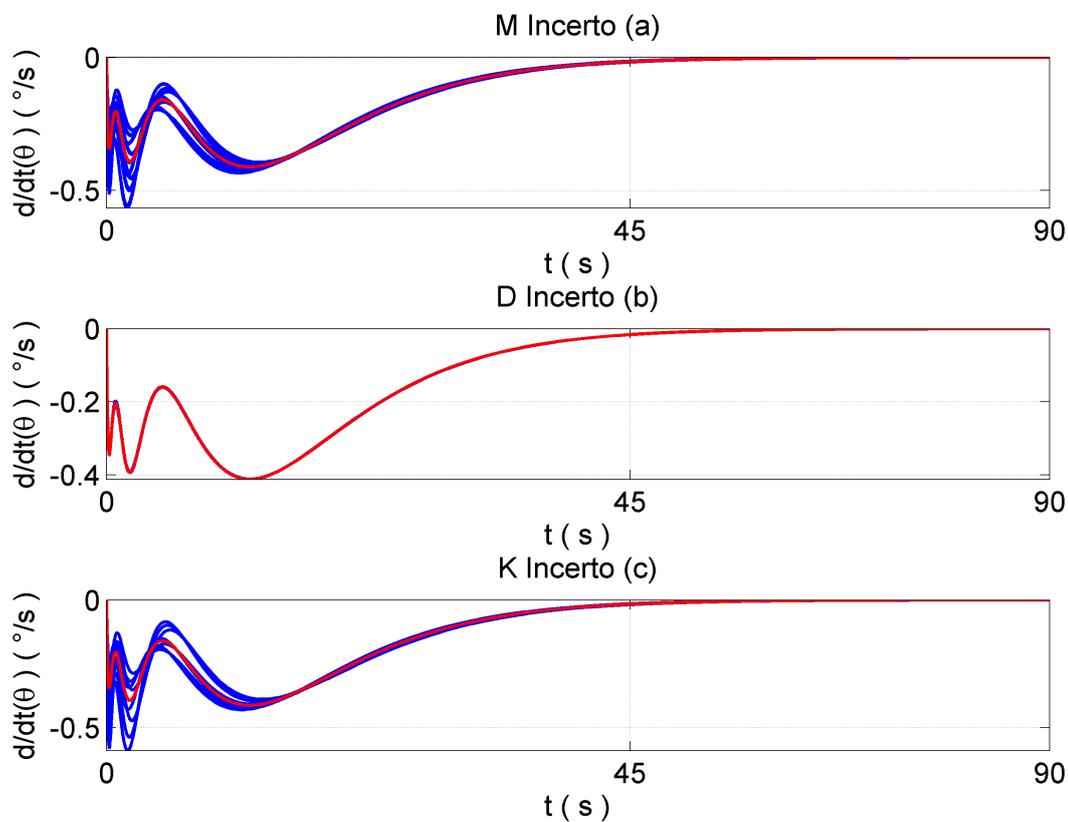
4.4.3.2 Simulação com incerteza de 30%.

Figura 4.113 - Resultado da simulação para a variável θ . Em vermelho o caso nominal.



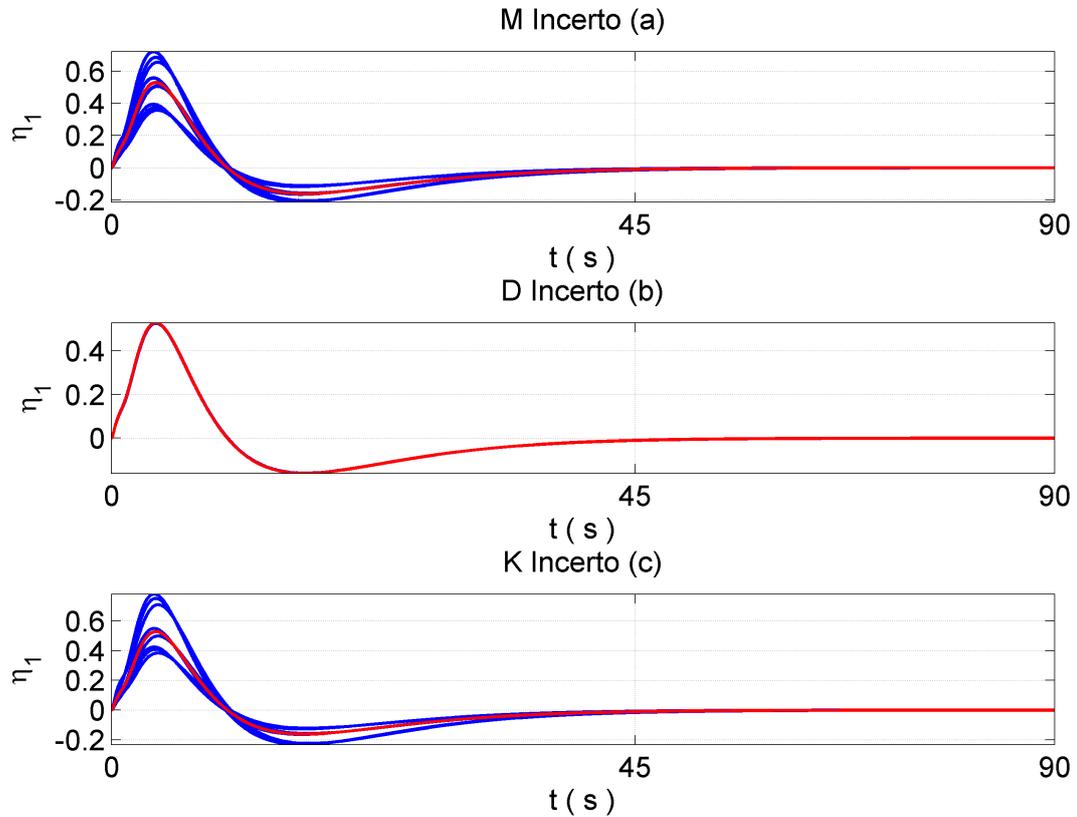
Na Figura 4.113 está representado a resposta temporal da variável θ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50 s.

Figura 4.114 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.



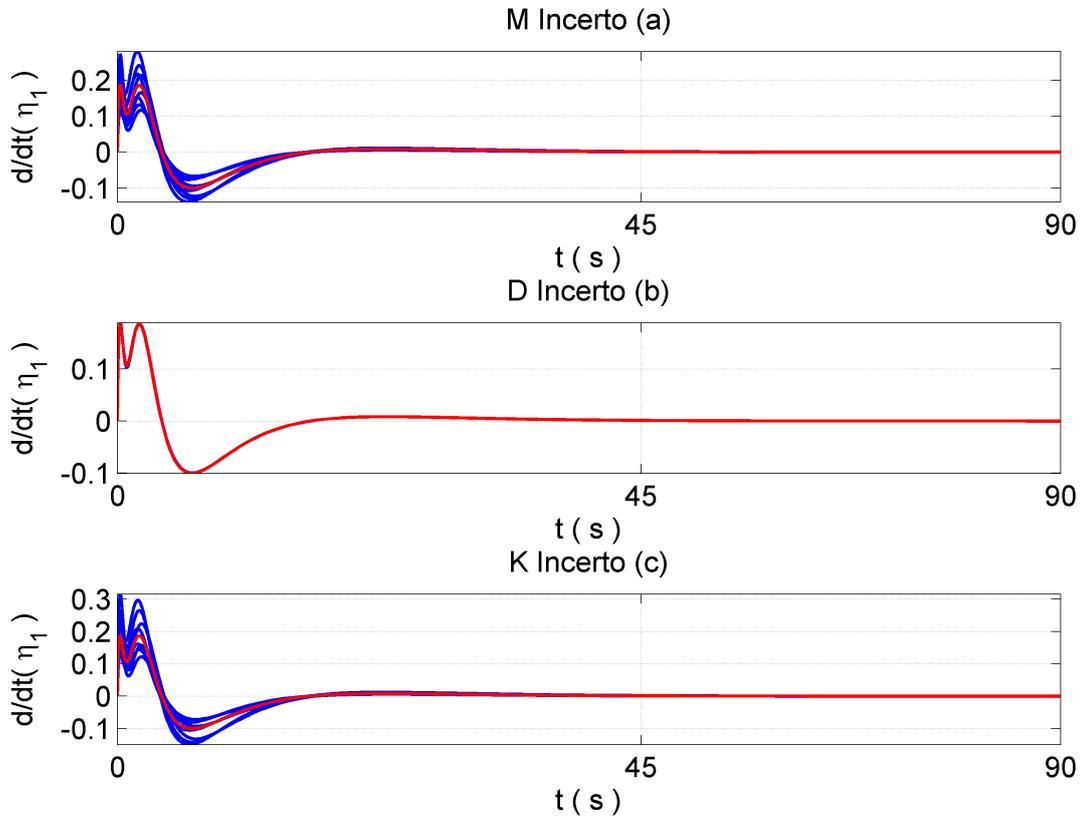
Na Figura 4.114 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\theta}$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 90 s.

Figura 4.115 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho o caso nominal.



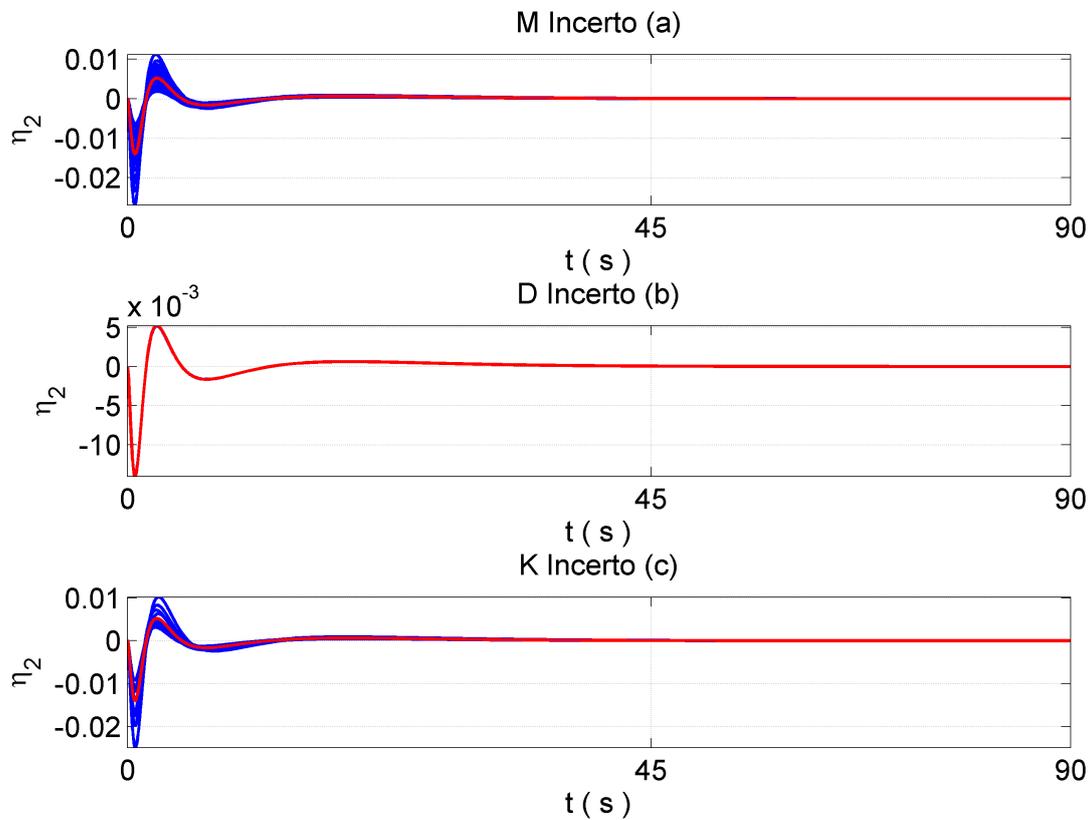
Na Figura 4.115 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 70 s.

Figura 4.116 - Resultado da simulação para a variável η_1 . Em vermelho o caso nominal.



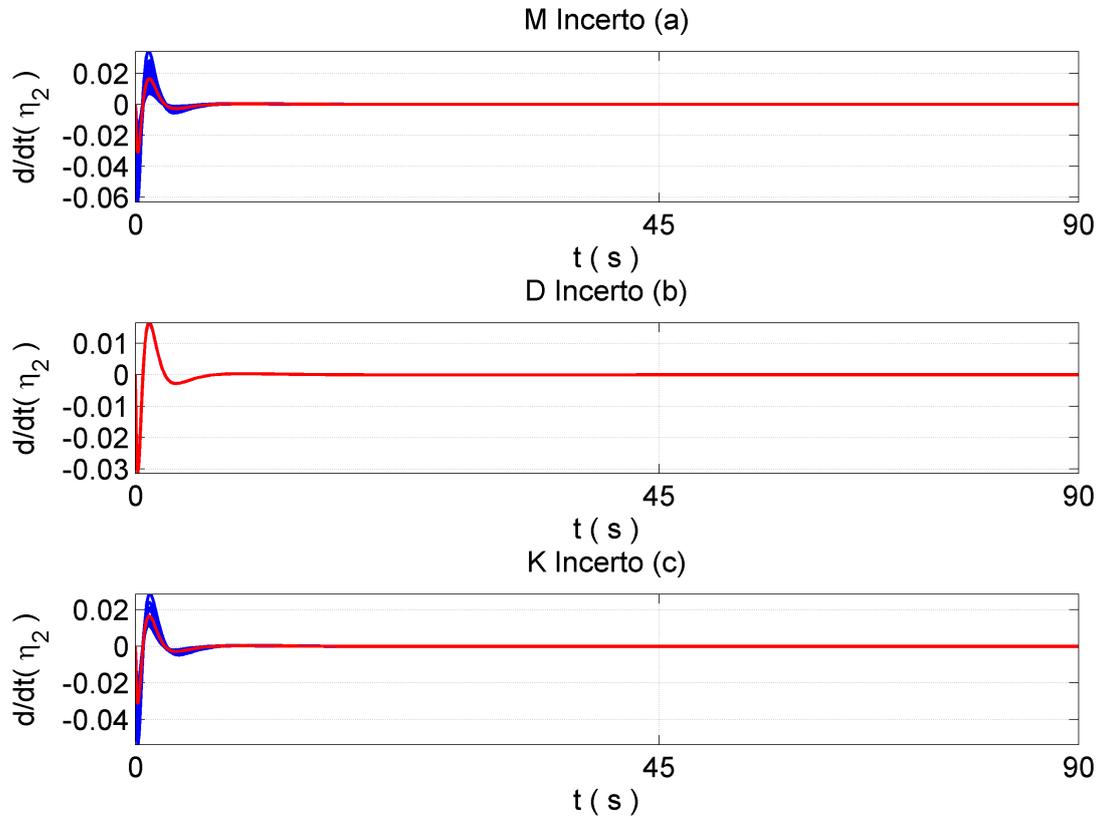
Na Figura 4.116 está representado a resposta temporal da variável η_1 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 60 s.

Figura 4.117 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho o caso nominal.



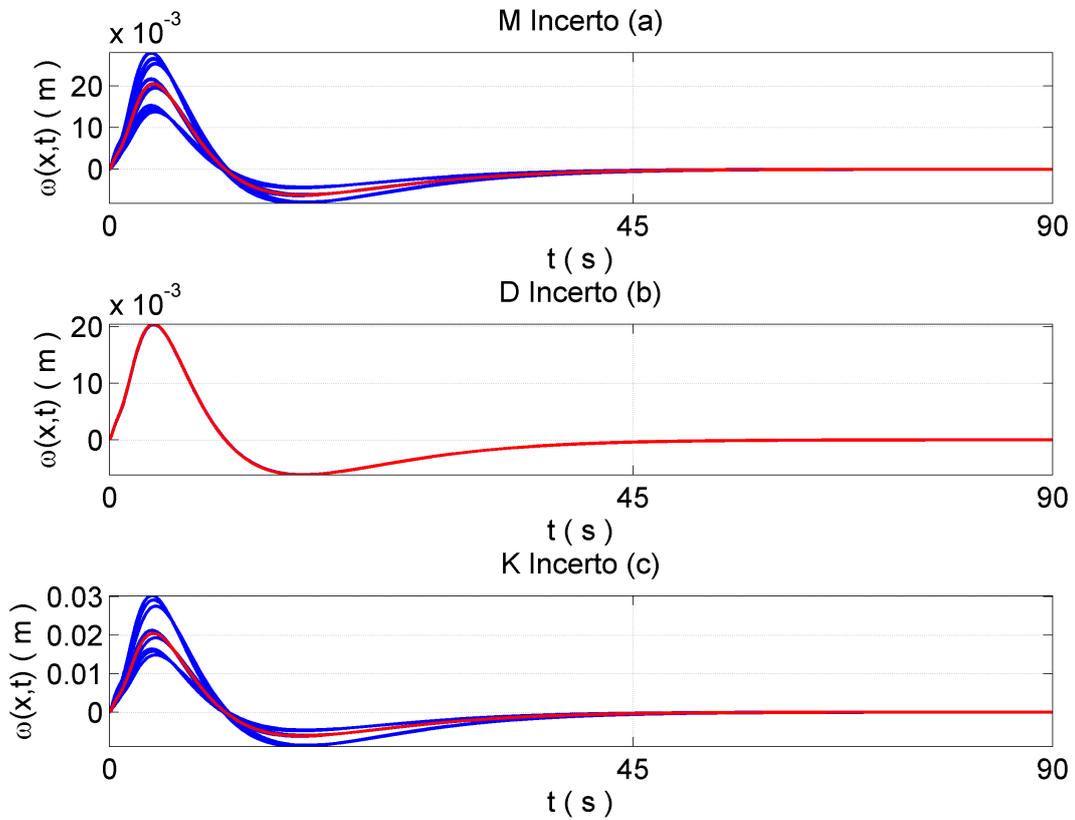
Na Figura 4.117 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50 s.

Figura 4.118 - Resultado da simulação para a variável η_2 . Em vermelho o caso nominal.



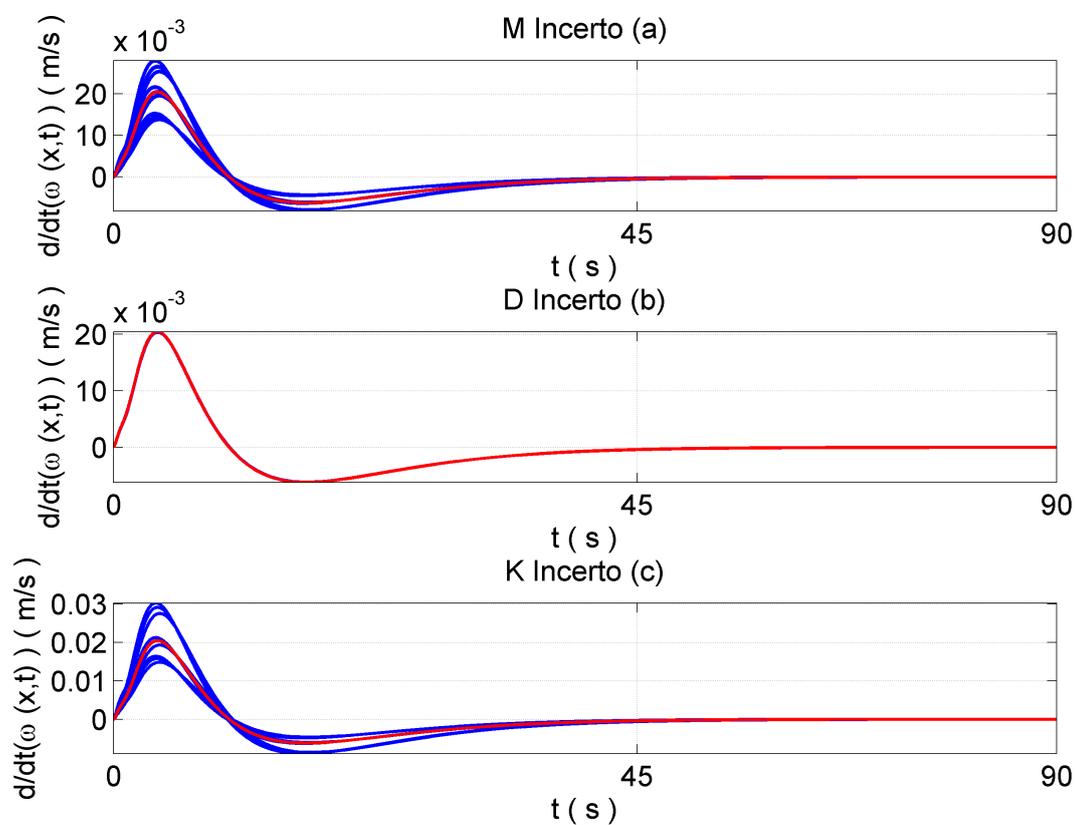
Na Figura 4.118 está representado a resposta temporal da variável η_2 para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 30 s.

Figura 4.119 - Resultado da simulação para a variável $\omega(L, t)$. Em vermelho o caso nominal.



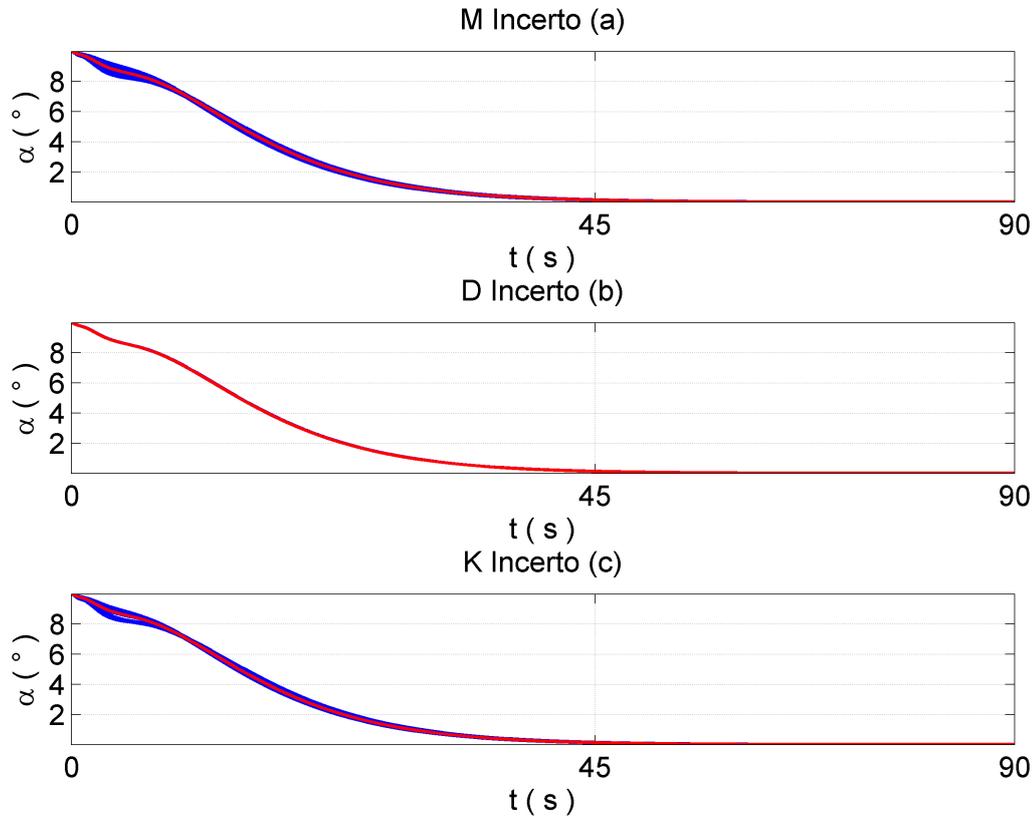
Na Figura 4.119 está representado a resposta temporal da variável $\omega(L, t)$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 50 s.

Figura 4.120 - Resultado da simulação para a variável $\dot{\theta}$. Em vermelho o caso nominal.



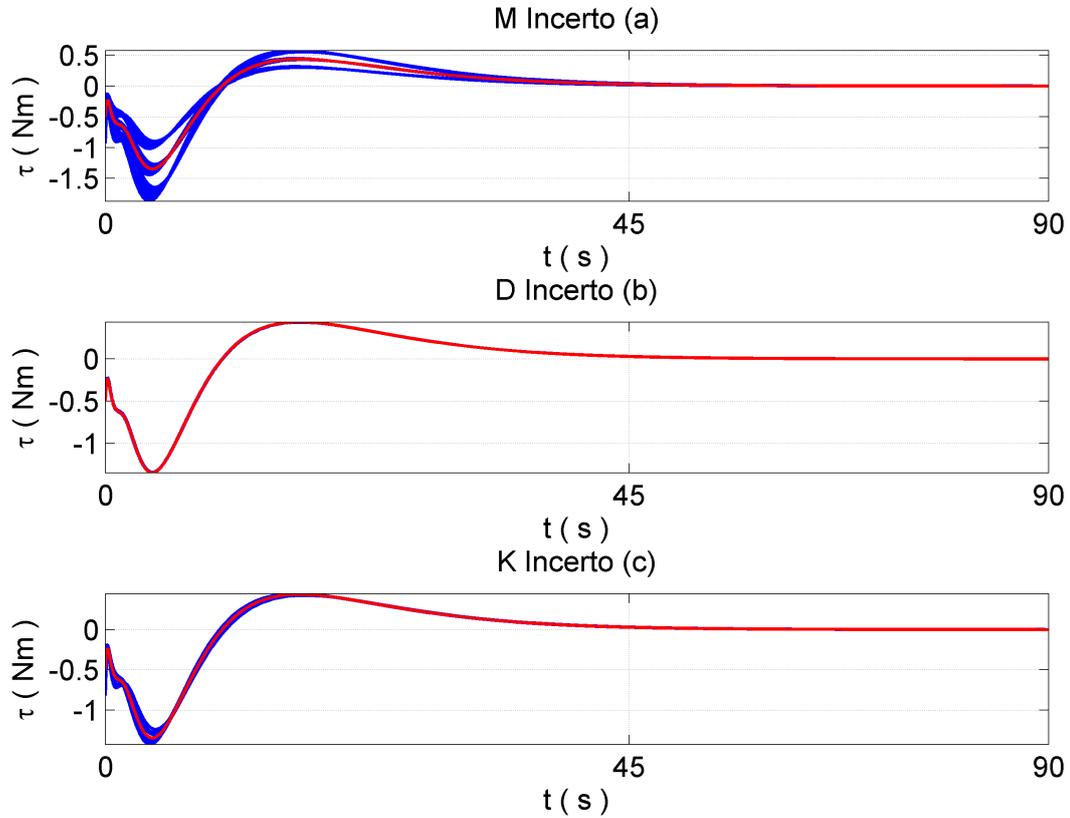
Na Figura 4.120 está representado a resposta temporal da variável $\dot{\omega}(L, t)$ para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 45 s.

Figura 4.121 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso nominal.



Na Figura 4.121 está representado a resposta temporal da variável α para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras se observa que, houve uma pequena variação na resposta quando a incerteza está aplicada em M e K . A incerteza em D praticamente não afetou a simulação. Em todos os casos a resposta para esta variável se estabilizou em torno de 90 s.

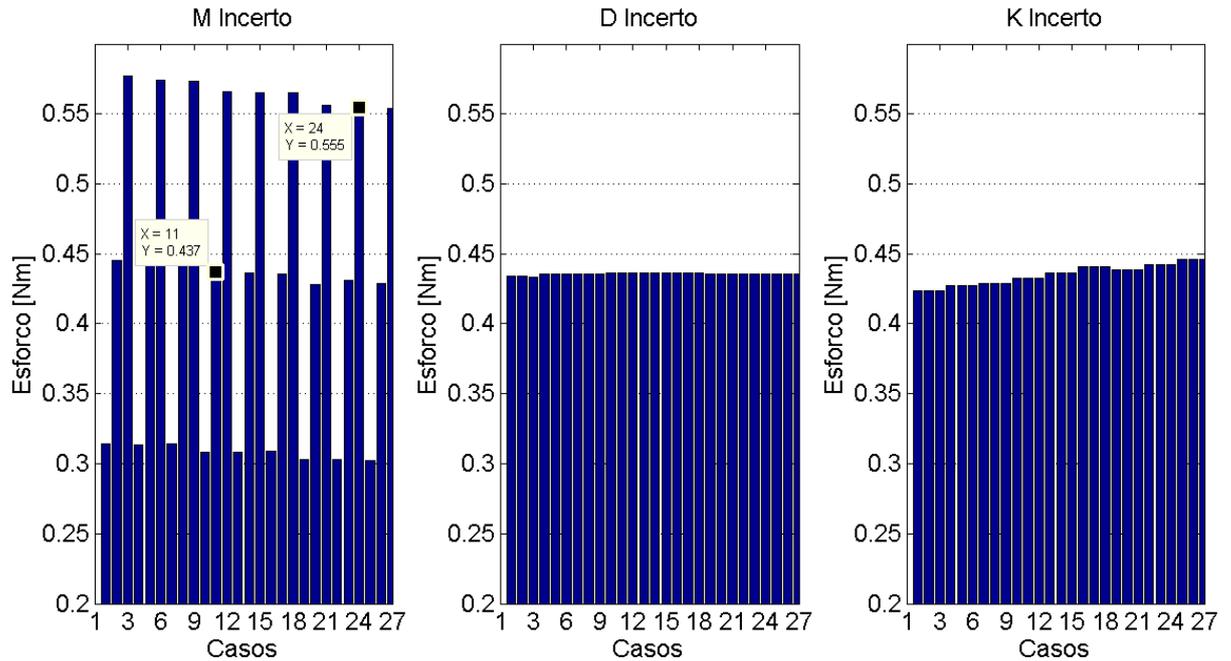
Figura 4.122 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso nominal.



Na Figura 4.122 está representado a resposta temporal para a ação do atuador (τ) para os três casos: (a)– a incerteza aplicada na matriz M , (b)– a incerteza aplicada na matriz D e (c)– a incerteza aplicada na matriz K . Das figuras, se observa que a influencia da incerteza na matriz M foi maior que nas outras, pois foi nela em que se apresentou a maior variação de torque. Nos outros casos praticamente não houveram variações. E para todos os casos a variável se estabilizou em torno de 60 s.

Afim de se estudar em qual matriz a incerteza teve maior influencia, será considerado o diagrama de barras (Figura 4.59) composto pelo maior valor de torque gerado.

Figura 4.123 - Diagrama de barras com os maiores valores dos torques gerados em cada caso de incerteza.



Na Figura 4.123 é mostrado um diagrama de barras do torque máximo gerado (eixo y) e o caso de incerteza associado (eixo x). Se observa que a incerteza sobre a matriz M é aquele que exige um maior valor de torque, assim como o visto no caso em que a incerteza foi 10% (Figura 4.112) logo, a influencia da incerteza sobre está matriz foi maior que nas outras tanto para uma incerteza de 10% como para uma de 30%.

Diferente do que foi concluído nas Figuras 4.59 e 4.48, para este estudo todos os casos simulados foram controlados e conseqüentemente estabilizados dentro dos 180 s.

4.5 Sinopse do capítulo

Neste capítulo foi apresentado a modelagem de um sistema rígido-flexível, que é análogo de um satélite com um painel solar. Para a modelagem deste sistema foi empregado a mecânica Lagrangiana admitindo dissipação de energia em um modelo de Rayleigh. Admitiu-se que a viga flexível é do tipo Euler-Bernoulli e foi aplicado o método dos modos assumidos para modelar os modos flexíveis. Para caracterização do modelo foi estudado os autovalores de forma a obter um modelo simples, mas fiel as características vibracionais do sistema real.

Em seguida foi apresentado o projeto e a aplicação de leis de controle usando do método \mathcal{H}_∞ , com/sem incertezas, e o uso da técnica \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI, com/sem

incerteza em um satélite rígido–flexível.

Para o projeto do método \mathcal{H}_∞ . Foram designadas funções pesos com o intuito de moldar as funções sensibilidade e sensibilidade complementar de forma garantir a robustez do controlador projetado. Ao se inserir a incerteza no projeto notou–se uma fragilidade nas características de robustez deste controlador.

Para o projeto da técnica \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI, foi analisado o comportamento da resposta em função de um conjunto de 4 regiões LMI's (regiões convexas pertencentes ao plano complexo) de modo a selecionar a região de melhor desempenho. Estas regiões tiveram como similaridade a sua composição, pois eram a junção de três regiões (um setor cônico, uma reta horizontal e um disco). Ao se inserir a incerteza notou–se que todas as simulações foram controladas, indicando uma boa robustez deste controlador.

Para verificar o desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ foram inseridos os ganhos obtidos pelo método \mathcal{H}_∞ na planta não linear e, como complemento ao estudo, foram também inseridos os ganhos pelo método \mathcal{H}_∞ na presença de incertezas.

Das simulações apresentadas observou–se os fatos a seguir,

Para o método \mathcal{H}_∞ puro, sem/com incerteza:

Do modelo em que se considera três modos de vibração, foi obtido uma resposta a condição inicial e foi notado que a existência do terceiro modo não se fazia necessária, pois sua ação pouco interfere no sistema. Com o modelo reduzido a dois modos de vibração, a simulação da ação da lei de controle apresentou um resultado capaz de controlar o sistema em torno de 130 s. Com a presença da incerteza foi notado que, para alguns casos, o controlador não se mostrou suficientemente robusto, e por consequência, não foi capaz de controlar as variáveis dentro do limite de tempo. Por meio das Figuras 4.59 e 4.48, observou–se como a influencia das incertezas nas matrizes M , D e K afetam no desempenho do controlador. Também foi possível verificar que a incerteza tem maior influência na matriz M .

Para a técnica \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI, sem/com incerteza.

Foi simulado a resposta do sistema, quanto a alocação de polos é feita nas quatro regiões escolhidas. Das quatro regiões simulados foi escolhida a quarta, pois foi a solução que menos quantidade de torque exigiu para controlar o sistema. Uma vez aplicada a região 4, foi obtida uma resposta melhor (tempo de assentamento, excitação das variáveis e quantidade de torque exigido) do que aquela obtida com o método \mathcal{H}_∞ puro. Ao se inserir a incerteza foi notado que para todos os casos as variáveis foram controladas dentro de um intervalo de tempo de aproximadamente 80 s, indicando uma boa característica de robustez. E quando analisado sobre qual matriz a incerteza exerce a maior influencia, Figuras 4.123

e 4.112, observou-se que a incerteza na matriz M é aquela que mais prejudica (perturba) as respostas.

Das simulações da ação das incertezas nos dois projetos propostos, conclui-se que a matriz M é a mais influenciada pela ação da incerteza. Isto se deve ao fato da matriz M conter a dinâmica inercial do sistema, e a ação da incerteza sobre esses parâmetros causa maior perturbação no sistema.

5 Investigação do desempenho do ganho linear aplicado na planta não linear.

O desempenho e robustez do controlador projetado no Capítulo 4.2 serão investigados através da simulação do sistema não linear em malha fechada com este controlador. As simulações que serão apresentadas foram feitas a partir de modelos feitos no Simulink[®] usando a planta não linear do modelo do sat elite flexível 4.4.

Serão apresentados os comportamentos dos estados: o ângulo θ e a velocidade angular $\dot{\theta}$ que mostram o comportamento angular do corpo r gado, as coordenadas generalizadas que representam o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração η_1 e η_2 e as suas respectivas taxas de variação, o deslocamento flexível $w(L, t)$ (Equa o 4.38) que mostra a deformação da ponta da viga, τ a a o do controlador, ou seja, o quanto de energia foi fornecido ao sistema e por fim a posição angular da ponta do braço em rela o   referência $\alpha(t)$.

5.1 Modelo não linear

O modelo não linear   dado pela Equa o 5.1, escrita na forma matricial

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_t + q^T C_{rr} q & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\dot{\theta} q^T C_{rr} \dot{q} \\ -\dot{\theta}^2 C_{rr} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

os termos I_t , C_{rr} , M_{ff} , M_{rf} , B_{ff} e K_{ff} são dados pela rela o apresentada no Capítulo 4.1.1.

Escrevendo a Equa o matricial 5.1 em uma forma simplificada, tem-se

$$M(x)\ddot{x} + D\dot{x} + Kx + f_n(x) = \tau \quad (5.2)$$

na Equa o 5.2 se tem que $x = [\theta \ q]$, e $q = [\eta_1 \ \eta_2]$. Por sua vez, θ   o comportamento do corpo r gado e q são as coordenadas generalizadas que mostram o comportamento dos modos de vibração η_1 e η_2 . A matriz Massa, Amortecimento e Rigidez são respectivamente M , D e K .

A não linearidade, assim modelada,   representada por:

$$M(x) = \begin{bmatrix} I_t + q^T C_{rr} q & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

que influência na matriz Massa M , e

$$f_n(x) = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta} q^T C_{rr} \dot{q} \\ -\dot{\theta}^2 C_{rr} q \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

que estão escritos separados do resto das equações, influenciando o sistema como um todo. Na Equação 5.5, f_n depende das variáveis $\dot{\theta}$, \dot{q} e q .

Matematicamente se pode escrever f_n deixando em evidência os termos das derivadas primeiras ($\dot{\theta}$ e \dot{q}),

$$f_n(x)\dot{x} = \begin{bmatrix} q^T C_{rr} \dot{q} & \dot{\theta} q^T C_{rr} \\ -\dot{\theta} C_{rr} q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Assim reescrevendo Equação 5.2 inserindo a Equação 5.5 na matriz Amortecimento D , ou seja, na matriz que está relacionada aos estados $\dot{\theta}$ e \dot{q} .

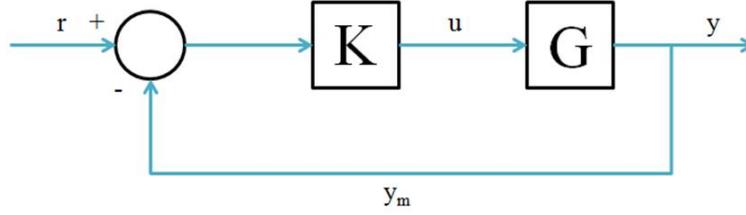
$$M(x)\ddot{x} + (D + f_n(x))\dot{x} + Kx = \tau \quad (5.6)$$

Escrevendo a Equação 5.6 na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_t + q^T C_{rr} q & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m + q^T C_{rr} \dot{q} & \dot{\theta} q^T C_{rr} \\ -\dot{\theta} C_{rr} q & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para as simulações se separou o ganho K_∞ , oriundo do método \mathcal{H}_∞ , e inseriu na forma de espaço de estados na planta não linear. Como mostra a Figura 5.1:

Figura 5.1 - Diagrama de blocos que representa o sistema simulado.



Na Figura 5.1, K é o controlador, G a planta, y o sinal de saída, u o sinal de controle, r o sinal de referência e y_m o sinal de realimentação. Para as simulações o K será o ganho obtido no Capítulo 4.2 através do método \mathcal{H}_∞ , para a planta linear, e G será a planta não linear.

Para as simulações será usado o sistema escrito na forma de espaço de estados Equação 5.8

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.8)$$

Da Equação 5.6 se isola os termos de segundo grau, como mostrado abaixo,

$$\ddot{p} = M(x)^{-1}\tau u - M(x)^{-1}D(x)\dot{p} - M(x)^{-1}Kp \quad (5.9)$$

Fazendo a substituição de variáveis com $X_1 = \theta$ e $X_2 = q = [\eta_1 \ \eta_2]$,

$$\begin{aligned} p &= X_1 \\ \dot{p} &= X_2 = \dot{X}_1 \\ \ddot{p} &= \dot{X}_2 \end{aligned}$$

Por fim, as equações onde θ , η e u representam os movimentos rígido, flexível e o torque de controle respectivamente do satélite, que na forma matricial é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M(x)^{-1}K & -M(x)^{-1}D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(x)^{-1}\tau \end{bmatrix} u \quad (5.10)$$

Como resultado, X é a matriz dos estados e u a variável de controle.

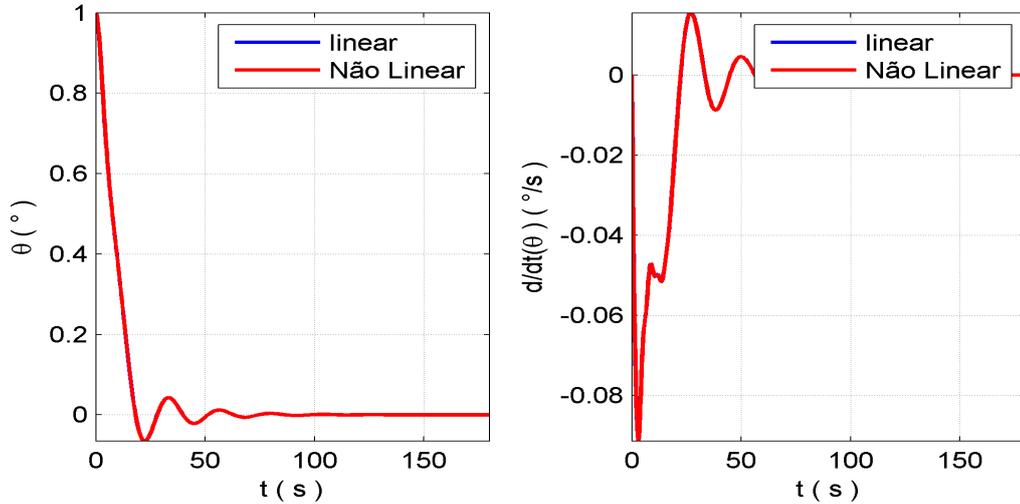
5.2 Simulação do caso em que se admite a não linearidade apenas na matriz Massa.

Admitindo que a não linearidade atue somente na matriz massa, como mostra a Equação 5.11,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_t + q^T C_{rr} q & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

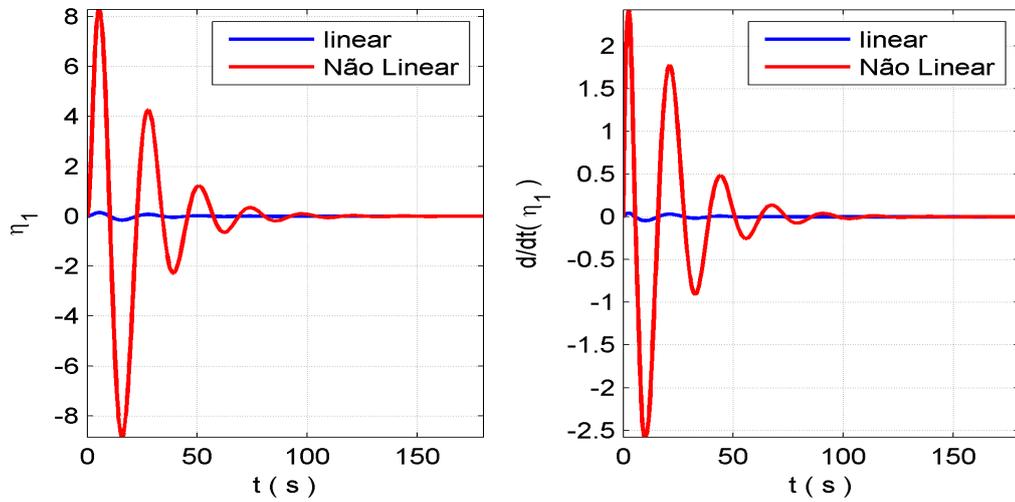
Aplica-se uma condição inicial de $\theta = 1^\circ$ para os modelos linear e não linear parcial. Nas simulações a cor vermelha representa à resposta do sistema não linear e em azul a resposta do sistema linear.

Figura 5.2 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



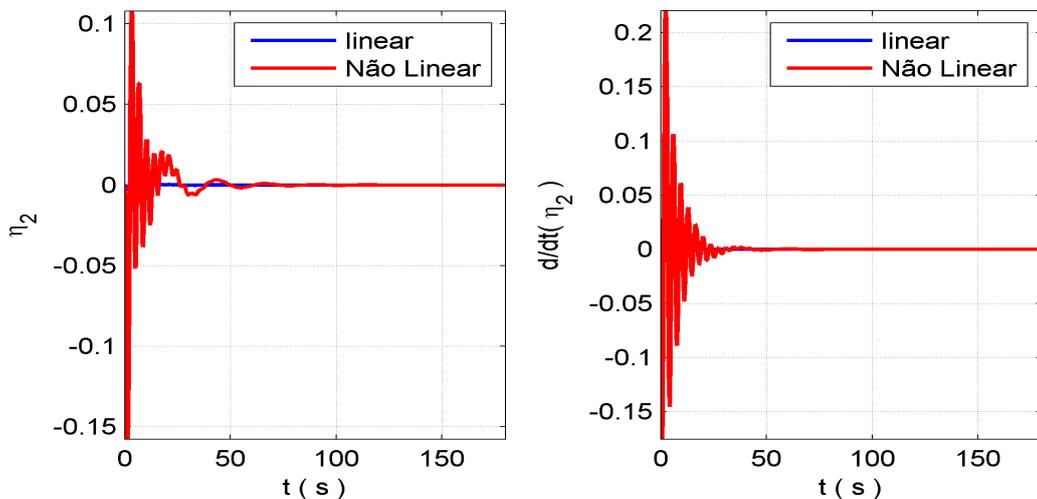
Na Figura 5.2 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ as respostas para os dois sistemas foram iguais.

Figura 5.3 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



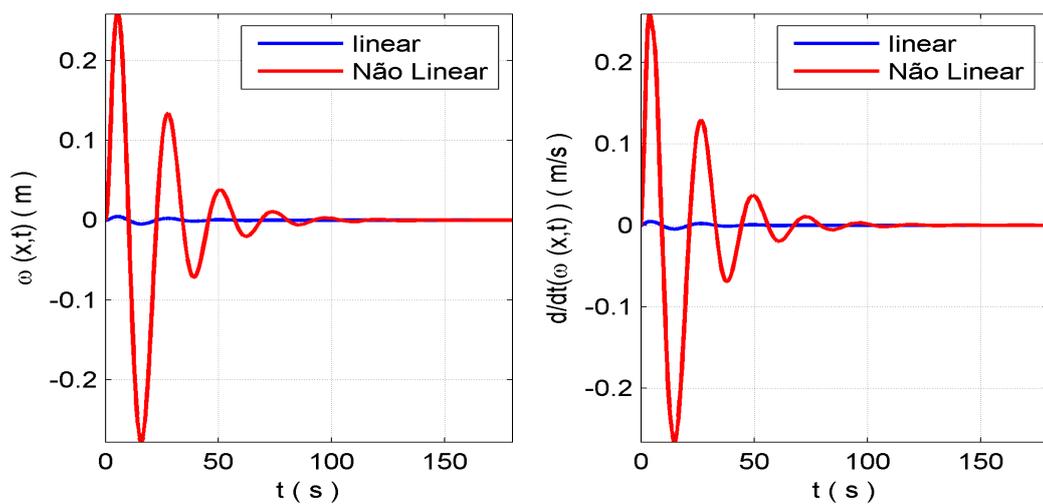
Na Figura 5.3 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Para a variável η_1 ela se estabiliza em 80 s para o caso linear e para o caso não linear em 120 s, e para a derivada $\dot{\eta}_1$ ela se estabiliza em 120 s para o caso linear e para o caso não linear em 80 s

Figura 5.4 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



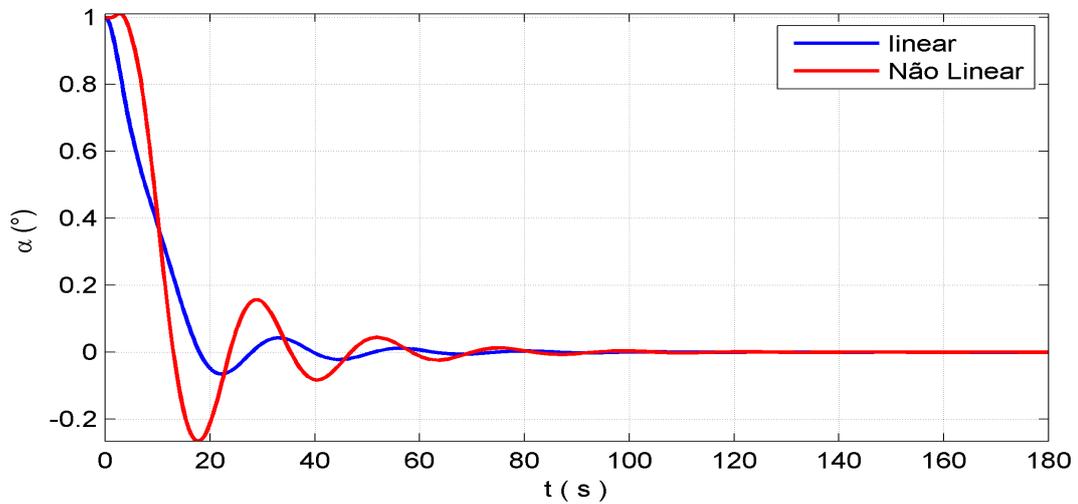
Na Figura 5.4 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao segundo modo de vibração, assim como sua derivada). Para a variável η_2 ela se estabiliza em 60 s para o caso linear e para o caso não linear em 100 s, e para a variável $\dot{\eta}_2$ ela se estabiliza em 40 s para o caso linear e para o caso não linear em 60 s

Figura 5.5 - Resultado da simulação para a variável $w(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{w}(L, t)$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



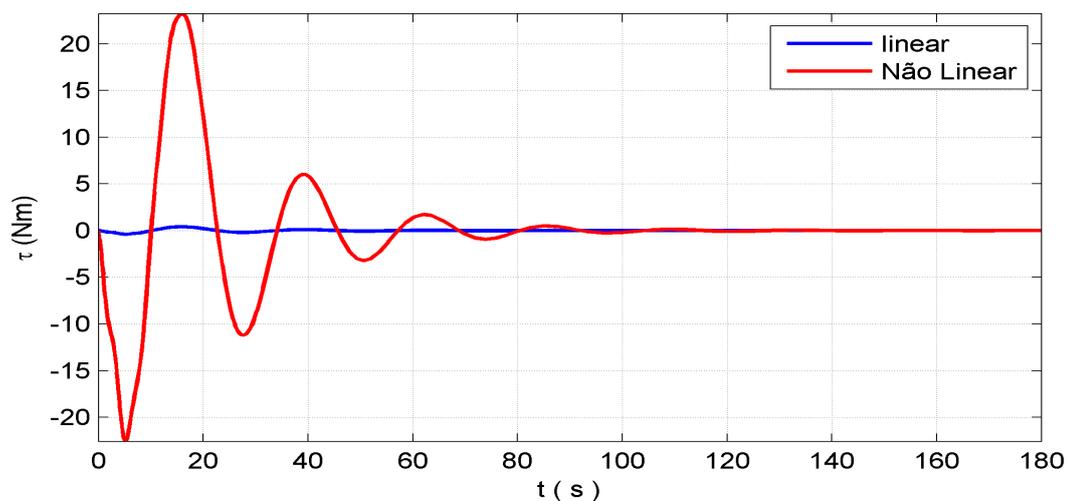
Na Figura 5.5 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis $w(L, t)$ e $\dot{w}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga, e sua derivada). Pelo comportamento da variável $w(L, t)$ para a planta linear (linha em linha azul) mostrou que a ponta da viga sofreu uma deflexão de $5 \times 10^{-3} m$, e para a planta não linear (linha em vermelho) mostrou que a ponta da viga sofreu uma deflexão de 0,25 m.

Figura 5.6 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.6 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Para o caso linear a viga se estabilizou em 80 s tendo um valor mínimo de 0,07°, enquanto que para o caso não linear ela se estabilizou em 100 s tendo um valor mínimo de 0,27°.

Figura 5.7 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.7 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear

(em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para a ação do atuador (esforço de controle). Para o controle da planta linear foi necessário um torque de $0,4 Nm$ já para a planta não linear foi necessário um torque de $23 Nm$.

Deste conjunto de simulações, observou-se comparativamente o comportamento da lei de controle na planta linear e na planta não linear, esta planta por sua vez possui não linearidades apenas na matriz massa (M). Da análise dos resultados notou-se que o controlador foi capaz de estabilizar todas as variáveis, mas não foi capaz de manter o $w(L, t)$ dentro de uma margem de 10% do tamanho da viga.

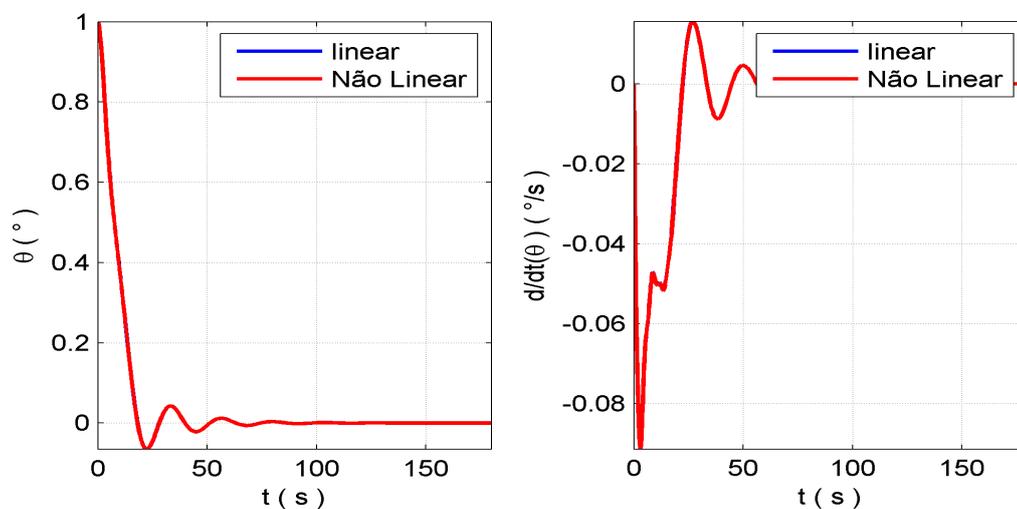
5.3 Simulação do caso em que se admite a não linearidade apenas na matriz Amortecimento.

Admitindo que a não linearidade atue somente na matriz amortecimento, como mostra a Equação 5.12,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m + q^T C_{rr} \dot{q} & \dot{\theta} q^T C_{rr} \\ -\dot{\theta} C_{rr} q & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

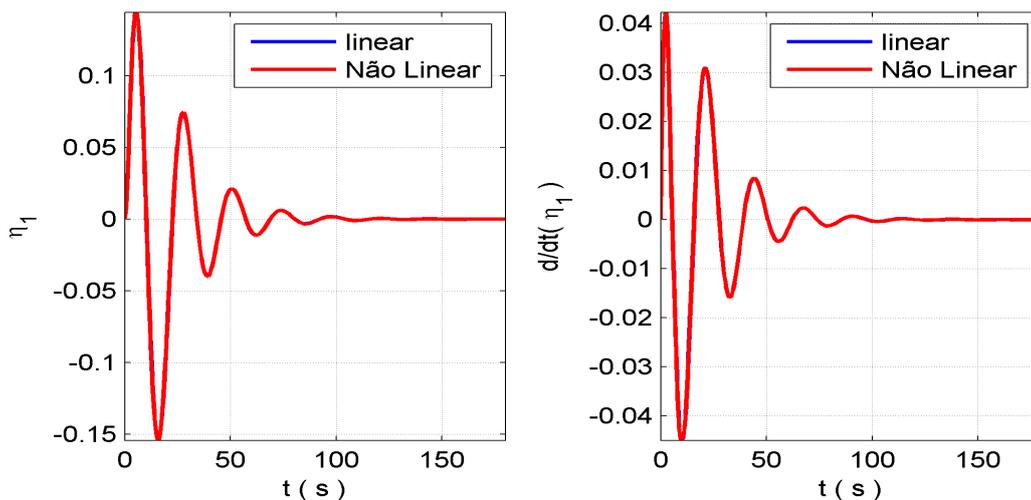
Aplica-se uma condição inicial de $\theta = 1^\circ$ para os modelos: linear e não linear parcial. Nas simulações a cor vermelha representa a resposta do sistema não linear e em azul a resposta do sistema linear.

Figura 5.8 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.8 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ as respostas para os dois sistemas foram iguais.

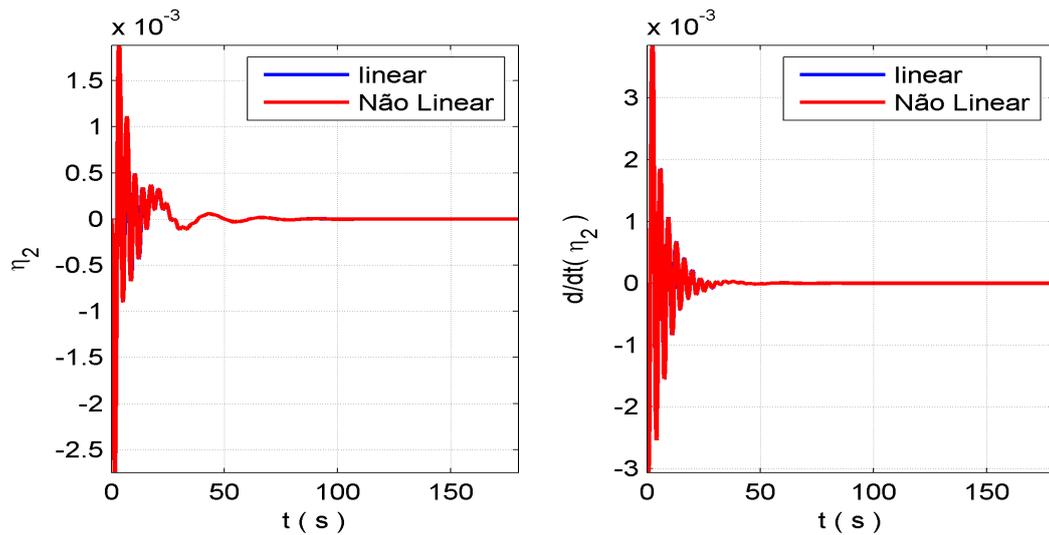
Figura 5.9 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.9 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as

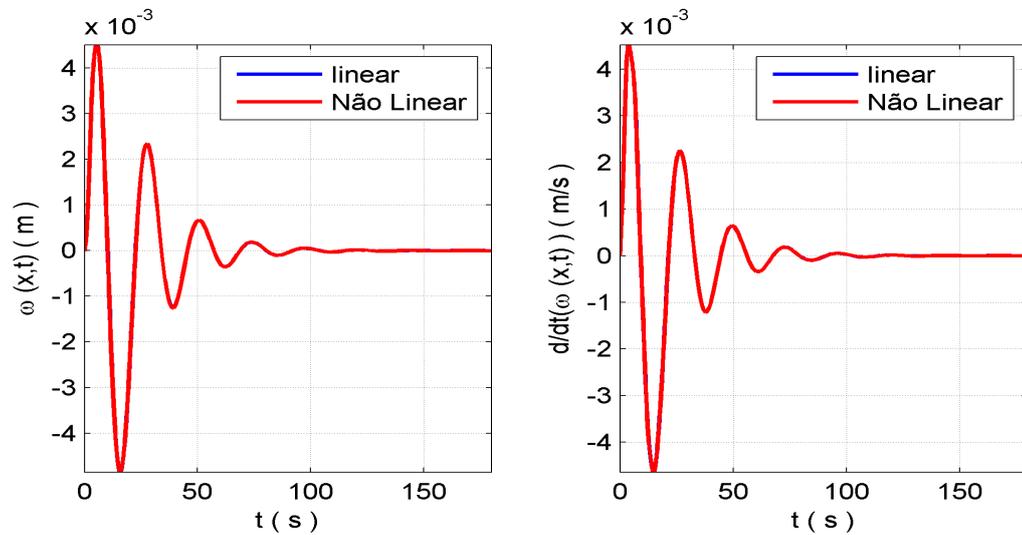
variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$ as respostas para os dois sistemas foram iguais.

Figura 5.10 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



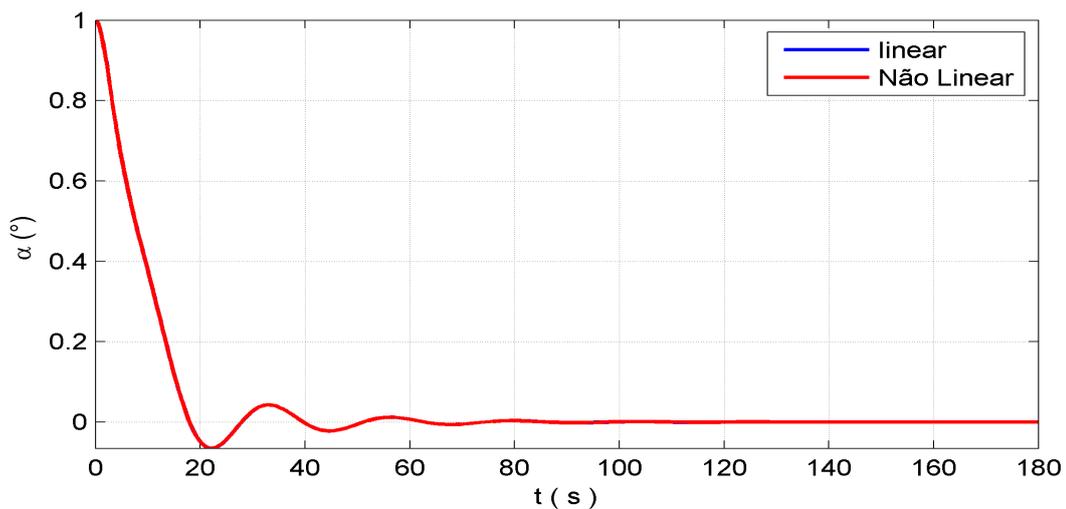
Na Figura 5.4 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao segundo modo de vibração, assim como sua derivada). Para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ as respostas para os dois sistemas foram iguais.

Figura 5.11 - Resultado da simulação para a variável $w(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{w}(L, t)$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.11 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis $w(L, t)$ e $\dot{w}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga, e sua derivada). Para as variáveis $w(L, t)$ e $\dot{w}(L, t)$ as respostas para os dois sistemas foram iguais.

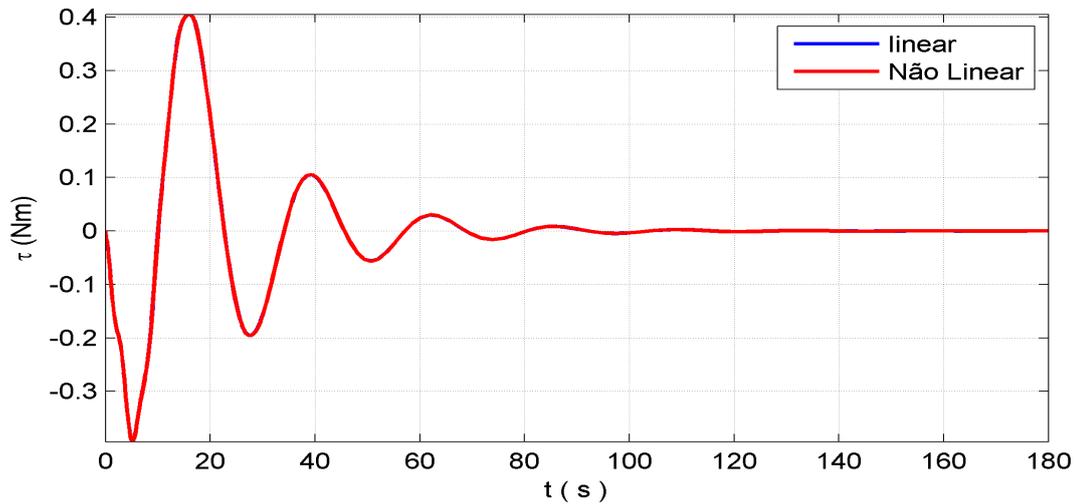
Figura 5.12 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.12 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para a

variável α (comportamento angular da ponta da viga). Para o sistema linear e não linear as respostas para os dois sistemas foram iguais.

Figura 5.13 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.13 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para a ação do atuador (esforço de controle). Para o sistema linear e não linear as respostas para os dois sistemas foram iguais.

Deste conjunto de simulações, observou-se comparativamente o comportamento da lei de controle na planta linear e na planta não linear, esta planta por sua vez possui não linearidades apenas na matriz amortecimento (D). Da análise dos resultados notou-se que este sistema não linear sujeito a esse controlador se comportou como a planta linear, ou seja, as não linearidades não influenciaram no controle.

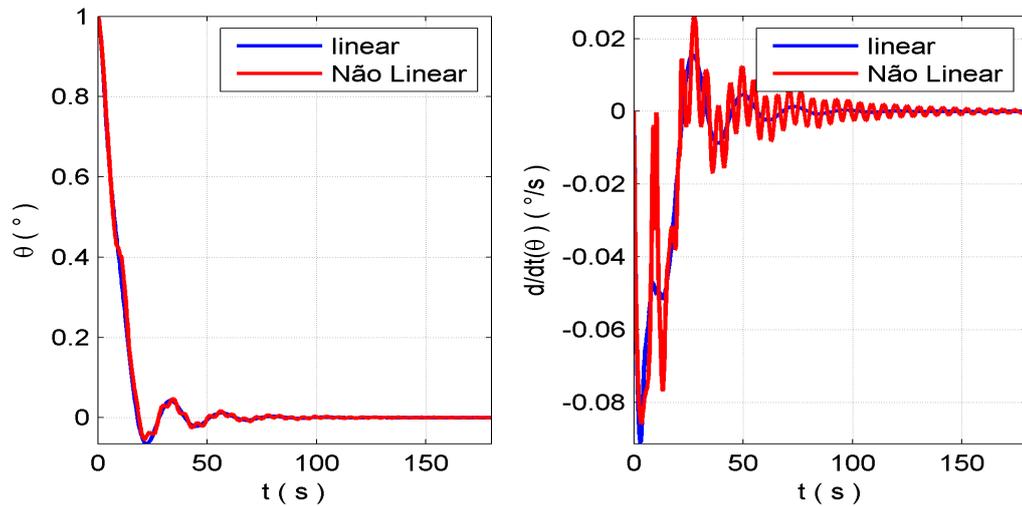
5.4 Simulação do caso em que se admite a não linearidade em todo modelo.

Admitindo a não linearidade em todo modelo, como mostra a Equação 5.13,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_t + q^T C_{rr} q & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_m + q^T C_{rr} \dot{q} & \dot{\theta} q^T C_{rr} \\ -\dot{\theta} C_{rr} q & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

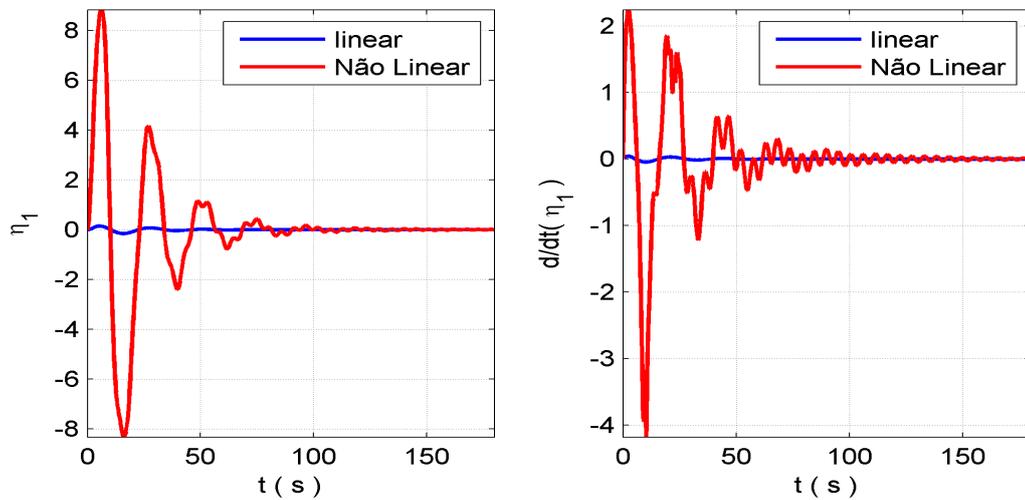
Aplica-se uma condição inicial de $\theta = 1^\circ$ para os modelos linear e não linear parcial. Nas simulações a cor vermelha representa a resposta do sistema não linear e em azul a resposta do sistema linear.

Figura 5.14 - Resultado da simulação para a variável θ (esquerda) e sua derivada $\dot{\theta}$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



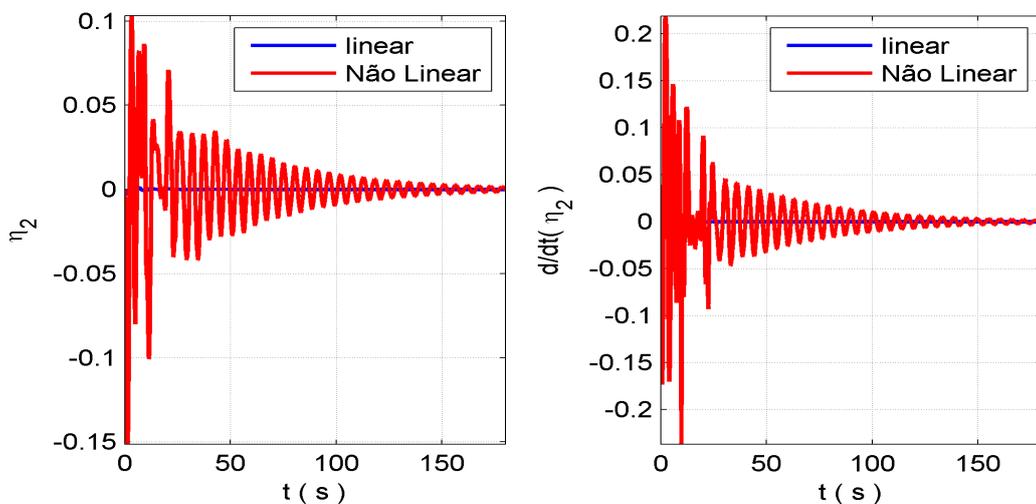
Na Figura 5.14 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ (comportamento do ângulo do corpo rígido, assim como sua derivada). Para as variável θ ela se estabiliza dentro de 100 s para o caso linear e para o caso não linear ela ainda continua com uma oscilação e para $\dot{\theta}$ ela se estabiliza em 100 s para o caso linear e não se estabiliza para o caso não linear dentro do intervalo de tempo considerado.

Figura 5.15 - Resultado da simulação para a variável η_1 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_1$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



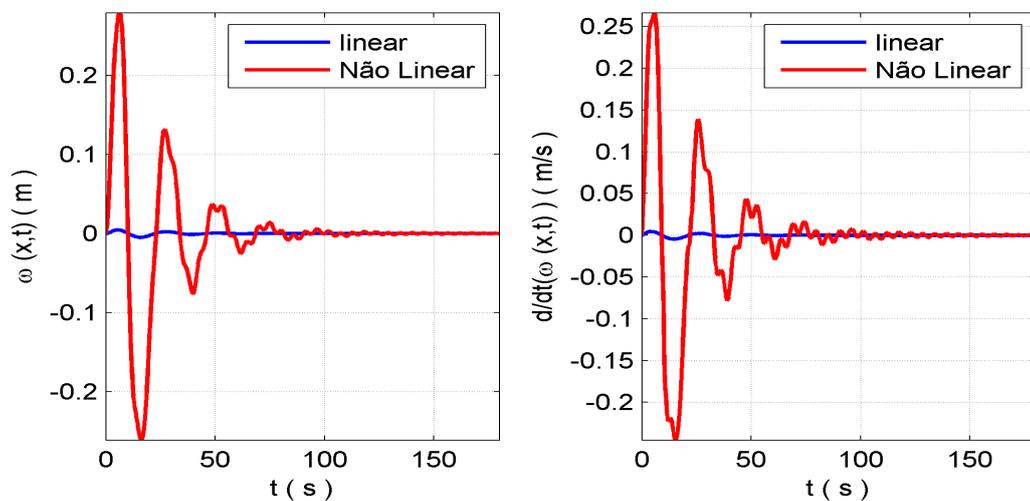
Na Figura 5.15 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis η_1 e $\dot{\eta}_1$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Para a variável η_1 ela se estabiliza em 80 s para o caso linear e para o caso não linear em 140 s, e para a variável $\dot{\eta}_1$ ela se estabiliza em 160 s para o caso linear e para o caso não linear em 80 s

Figura 5.16 - Resultado da simulação para a variável η_2 (esquerda) e sua derivada $\dot{\eta}_2$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



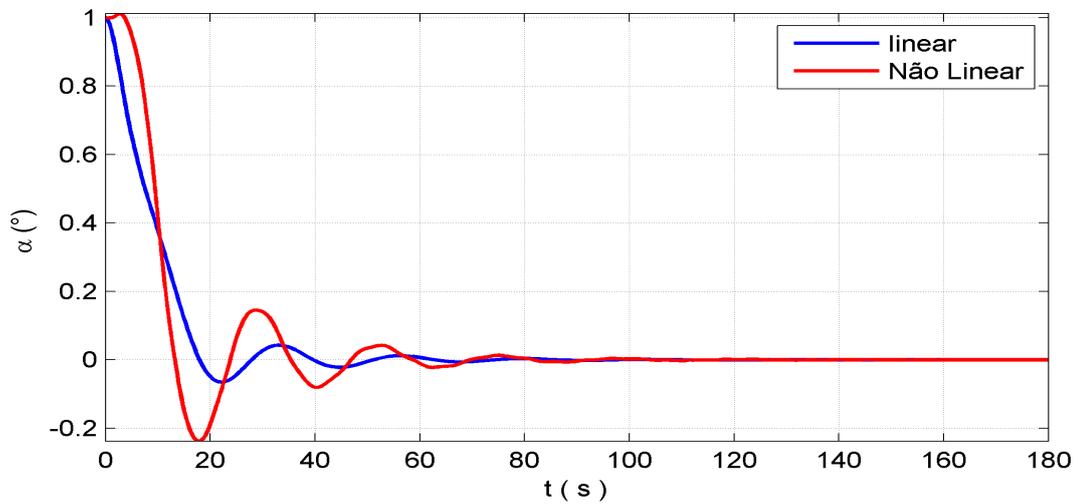
Na Figura 5.16 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis η_2 e $\dot{\eta}_2$ (comportamento da coordenada generalizada associada ao primeiro modo de vibração, assim como sua derivada). Para a variável η_2 ela se estabiliza em 80 s para o caso linear e para o caso não linear não se estabiliza dentro do intervalo dos 180 s considerados, e para a variável $\dot{\eta}_2$ ela se estabiliza em 120 s para o caso linear e para o caso não linear não se estabiliza dentro do intervalo dos 180 s considerados.

Figura 5.17 - Resultado da simulação para a variável $w(L, t)$ (esquerda) e sua derivada $\dot{w}(L, t)$ (direita). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



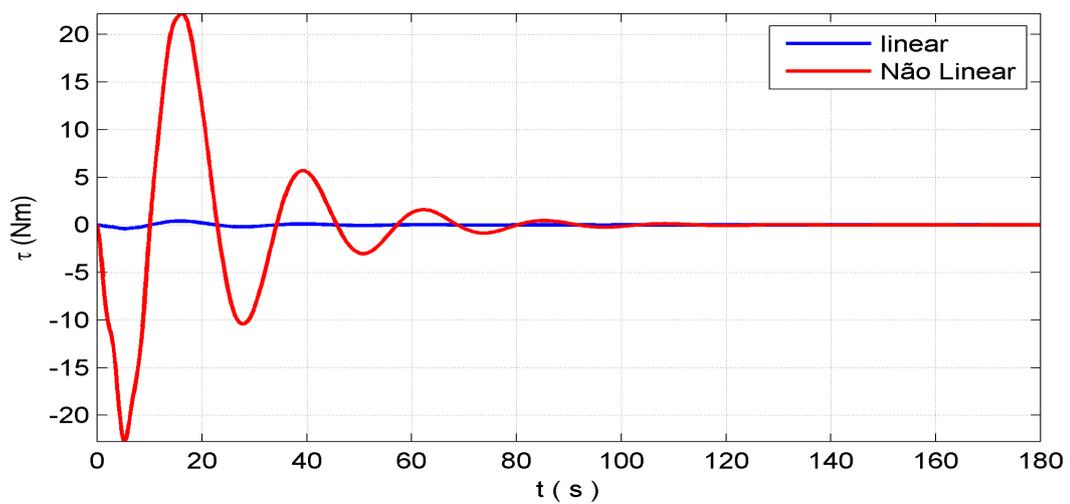
Na Figura 5.17 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para as variáveis $w(L, t)$ e $\dot{w}(L, t)$ (deslocamento da ponta da viga, e sua derivada). Pelo comportamento da variável $w(L, t)$ para a planta linear (linha em linha azul) mostrou que a ponta da viga sofreu uma deflexão de $5 \times 10^{-3} m$, e para a planta não linear (linha em vermelho) mostrou que a ponta da viga sofreu uma deflexão de 0,27 m.

Figura 5.18 - Resultado da simulação para a variável α . Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.18 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear (em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para a variável α (comportamento angular da ponta da viga). Para o caso linear a viga se estabilizou em 80 s tendo um valor mínimo de $0,07^\circ$, enquanto que para o caso não linear ela se estabilizou em 100 s tendo um valor mínimo de $0,27^\circ$.

Figura 5.19 - Resultado da simulação para a ação do atuador (Torque). Em vermelho o caso não linear e azul o caso linear



Na Figura 5.19 é mostrada a comparação entre o desempenho do controle da planta linear

(em azul) com o desempenho do controle da planta não linear (em vermelho) para a ação do atuador (esforço de controle). Para o controle da planta linear foi necessário um torque de $0,4 Nm$ já para a planta não linear foi necessário um torque de $22 Nm$.

Deste conjunto de simulações, observou-se comparativamente o comportamento da lei de controle na planta linear e na planta não linear. Da análise dos resultados notou-se que este sistema não linear é estabilizado pela lei de controle, mas assim como o caso apresentado no item 5.2 não foi capaz de manter o $w(L, t)$ dentro de uma margem de 10% do tamanho da viga, além de ter das respostas para θ e $\dot{\theta}$ mais perturbadas do que as mesma simulação para o caso linear.

5.5 Sinopse do capítulo

Neste capítulo foi apresentado o emprego da lei de controle projetada, pelo método \mathcal{H}_∞ , para a planta linearizada aplicada na planta não linear.

O equacionamento da planta foi ajustado de forma tornar as não linearidades dependentes dos estados, com isso a planta não linear, Equação 5.1, foi equacionada de três formas: 1) Admitindo as não linearidades apenas na matriz massa (dependente dos termos de segunda ordem) Equação 5.11, 2) Admitindo as não linearidades apenas na matriz amortecimento (dependentes do sistema de primeira ordem) Equação 5.12 e 3) Admitindo todas as não linearidades, Equação 5.13.

Em seguida a lei de controle projetada no Capítulo 4.2 foi inserida na malha de forma a atuar sobre a planta não linear, como mostra a Figura 5.1. Para as configurações adotadas neste trabalho, a lei de controle projetada foi capaz de controlar a planta não linear, entretanto ao analisar o deslocamento elástico ($w(L, t)$), observa-se que ele se manteve dentro de uma margem de deflexão de 10% do tamanho da viga apenas quando se considera a não linearidade dependente dos termos de primeira ordem (na matriz amortecimento).

Ao se comparar a influência das não linearidades quando aplicadas apenas na matriz massa e na matriz amortecimento, observou-se que a não linearidade na matriz massa é aquela que mais afeta a resposta. Das Figuras 5.2 à 5.7 que representam o caso em que a não linearidade é considerada apenas na matriz amortecimento, não houve diferença entre as respostas do caso não linear em relação ao linear, por outro lado quando se considerou a não linearidade na matriz massa (Figuras 5.8 à 5.13), observou-se que houve uma diferença entre as repostas.

A partir do equacionamento da Equação 5.10, tem que $u = -Kx$ e substituindo na Equação 5.8 se tem a relação $\dot{x} = (A - BK)x$, logo o motivo é que a matriz massa (M) atua diretamente na matriz de estados (A) e na matriz de entrada (B) o que causa, matematicamente, certa sensibilidade no sistema devido sua variação. Isto é o que justifica

o fato da não linearidade nesta matriz causar mais influência no controle da planta não linear.

6 CONCLUSÕES

Nesta tese foi proposto fazer um estudo do uso de métodos de controle robusto em sistemas espaciais rígido–flexíveis, a partir da revisão da literatura. Observou–se que existem algumas lacunas no desenvolvimento teórico e na aplicação prática da técnica de controle robusto conhecida como método \mathcal{H}_∞ quando as incertezas do modelo são consideradas no projeto do controlador. Com isto foram selecionados cinco itens:

- 1) Modelar um satélite rígido–flexível e em seguida modelar o satélite rígido–flexível considerando o movimento de líquido em seu interior (*sloshing*).
- 2) Estudar a aplicação da técnica de controle \mathcal{H}_∞ no projeto do controlador do satélite rígido–flexível e do satélite com um tanque semi–preenchido com líquido, a fim de obter um sistema de controle com maior robustez.
- 3) Estudar e aplicar a técnica de controle \mathcal{H}_∞ com e sem alocação de polos via LMI no projeto do controlador do satélite rígido–flexível com incertezas paramétricas, visando obter um sistema de controle mais robustez. Verificar o comportamento dos polos. Comparar o desempenho, robustez e posição dos polos entre os controladores \mathcal{H}_∞ com e sem alocação de polos via LMI.
- 4) Estudar e explorar as potencialidades robusta do método \mathcal{H}_∞ no controle de sistemas espaciais rígido–flexíveis levando em consideração as incertezas do modelo no projeto do controlador.
- 5) Investigar a influencia das não linearidades do modelo rígido–flexíveis no desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ .

Para o desenvolvimento do estudo destes cinco itens, foram usados métodos de modelagem e simulação, que foram descritos ao longo dos capítulos. Pelas sinopses apresentadas no final de cada capítulo, se obtêm as conclusões mostradas a seguir:

6.1 Projeto do controlador H-infinito para um satélite rígido–flexível com *slosh*.

Neste capítulo foi feito:

- Modelagem de um sistema rígido–flexível com *slosh*.

As equações de movimento do modelo foram obtidas usando os conceitos de mecânica Lagrangiana. O projeto da lei de controle usando o método \mathcal{H}_∞ , ressaltando os principais desafios existentes no controle de um sistema em que se

considera o *sloshing* e a flexibilidade.

- Projeto de uma lei de controle método \mathcal{H}_∞ .

Dados os resultados obtidos se conclui que a lei de controle foi capaz de atingir seu objetivo de estabilizar o ângulo de atitude (θ), minimizando os efeitos do *sloshing* e da flexibilidade.

6.2 Projeto do controlador H-infinito com alocação de polos via LMI para um satélite rígido-flexível com incertezas.

Neste capítulo foi feito:

- Modelagem de um sistema rígido-flexível

Para a modelagem deste sistema foi empregado a mecânica Lagrangiana admitido dissipação de energia em um modelo de Rayleigh. Admitiu-se que a viga flexível é do tipo Euler-Bernoulli e foi aplicado o método dos modos assumidos para modelar os modos flexíveis. Para caracterização do modelo foi estudado os autovalores de forma a obter um modelo simples, mas fiel as características vibracionais do sistema real.

- Projeto de uma lei de controle método \mathcal{H}_∞ .

A simulação da ação da lei de controle apresentou um resultado capaz de controlar o sistema em torno de 130 s, mas com a presença da incerteza foi notado, que para alguns casos, o controlador não se mostrou suficientemente robusto e, por consequência não foi capaz de controlar as variáveis dentro do limite de tempo (180 s). Por meio das Figuras 4.59 e 4.48, observou-se como a influencia da incerteza nas matrizes M , D e K afetam no desempenho do controlador. Também foi possível verificar que a incerteza tem maior influência na matriz M .

- Projeto de uma lei de controle pelo método \mathcal{H}_∞ com alocação de pólos via LMI.

As respostas obtidas pela técnica da junção do LMI com o método \mathcal{H}_∞ , apresentou melhor desempenho quando analisado, tempo de assentamento,

excitação das variáveis e quantidade de torque exigido, do que aquela obtida com o método \mathcal{H}_∞ . Ao se inserir a incerteza foi notado que, para todos os casos, as variáveis foram controladas dentro de um intervalo de tempo de aproximadamente 80 s, indicando uma boa característica de robustez. E, quando analisado sobre qual matriz a incerteza exerce a maior influencia, Figuras 4.123 e 4.112, observou-se que a incerteza na matriz M é aquela que mais prejudica (perturba) as respostas.

6.3 Investigação do desempenho do ganho linear aplicado na planta não linear.

Neste capítulo foi feito:

- Modelo não linear.

O equacionamento da planta foi ajustado de forma tornar as não linearidades dependentes dos estados, com isso a planta não linear, foi equacionada de três formas: 1) Admitindo as não linearidades apenas na matriz massa (dependente dos termos de segunda ordem), 2) Admitindo as não linearidades apenas na matriz amortecimento (dependentes do sistema de primeira ordem) e 3) Admitindo todas as não linearidades. A partir destes três modelos foi apresentado um estudo da ação das não linearidades no desempenho do controlador projetado para o modelo linearizado usando o método do \mathcal{H}_∞ .

- Simulação do caso em que se admite a não linearidade apenas na matriz Massa.

As simulações mostraram que o comportamento da lei de controle, quando submetida a este conjunto de não linearidades, teve um desempenho com maior gasto de energia em comparação ao caso linearizado.

- Simulação do caso em que se admite a não linearidade apenas na matriz Amortecimento.

As simulações mostraram que o comportamento da lei de controle, quando submetida a este conjunto de não linearidades, manteve seu desempenho de quando inserido no caso linearizado.

- Simulação do caso em que se admite a não linearidade em todo modelo.

As simulações mostraram que a lei de controle, quando submetida a este modelo, foi capaz de controlar o modelo estabilizando suas variáveis dentro do intervalo de tempo de 180 s, entretanto não foi capaz de manter a deflexão da viga menor que 10% do comprimento dela.

6.4 Principais contribuições deste trabalho.

As principais contribuições deste trabalho de acordo com os objetivos propostos foram:

- Para os objetivos 1 e 2:

Verificou-se, para as condições propostas neste trabalho, que a lei de controle projetada com o método \mathcal{H}_∞ foi robusta o suficiente para controlar o modelo rígido-flexível com *slosh* atuando apenas no ângulo de atitude, controlando de forma indireta as componentes da flexibilidade e *slosh*.

- Para o Objetivo 3:

Verificou-se, para as condições propostas neste trabalho, que o método \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI apresentou excelentes características de robustez sendo capaz de controlar todos os casos de incerteza e consumindo um quantidade menor de torque do a usada no método \mathcal{H}_∞ .

Que a influência das incertezas aplicadas as matrizes massa (M) amortecimento (D) e rigidez (K), mostrou que a incerteza quando aplicada na matriz massa foi aquela que mais perturbou o sistema. Na análise apresentada com o uso do diagrama de barras, para verificar em qual caso mais se necessitou torque para controlar o sistema, ficou claro, para todos os casos estudados, que quando a incerteza é colocada sobre a matriz massa mais energia é consumida para o controle.

- Para o Objetivo 4:

Verificou-se, para as condições propostas neste trabalho, que o método \mathcal{H}_∞ não é um método tão robusto quanto o esperado, pois ele não foi capaz de controlar a planta linear para alguns casos de incerteza mostrando uma fragilidade em sua robustez e apresentou um desempenho ineficaz para o controle da planta não linear, quanto levando em conta o modelo nominal.

Como resultado, observa-se também que o desempenho do controlador \mathcal{H}_∞ projetado utilizando a técnica de Alocação de Polos via LMI apresentou melhor

desempenho em relação ao do controlador \mathcal{H}_∞ no controle da dinâmica de atitude (movimento rígido e deslocamento flexível) do satélite considerando este sem e com a influencia das perturbações devido às incertezas. Este resultado sugere, portanto, que o controlador \mathcal{H}_∞ /LMI possui melhores propriedades de robustez que o controlador \mathcal{H}_∞ . Sendo, então, a técnica de controle mais indicada para se projetar controladores para sistemas espaciais com grandes incertezas, como é o caso de satélite, foguetes ou mesmos manipuladores robóticos com dinâmica rígido–flexíveis.

- Para o Objetivo 5:

Verificou-se, para as condições propostas neste trabalho, que o desempenho da lei de controle projetada com o método \mathcal{H}_∞ para o modelo linearizado aplicado na planta não linear apresentou um bom desempenho no sentido de ter sido capaz de estabilizar todas as variáveis dentro de um intervalo e tempo de 180 s. A não linearidade expressa somente na matriz massa (M), foi a que apresentou maior influencia na resposta quando comparada a ação das linearidades escritas na matriz amortecimento (D). A explicação matemática para este comportamento é devido a dependência da matriz massa no sistema descrito no espaço de estados.

Por fim ressalta-se que não é do conhecimento do autor, até a presente data, que as contribuições acima mencionadas, resultado dos estudos, análises e investigações obtidas no desenvolvimento deste trabalho, tenham já sido explorados por outrem.

6.5 Sugestões para trabalhos futuros.

Dos resultados obtidos nesta tese, assim como as revisões bibliográficas sugere-se para trabalhos futuros os temas:

- O estudo da influência, na malha de controle, na inserção de mais modos de vibração do apêndice flexível do modelo com *slosh*.
- Projetar uma lei de controle usando método \mathcal{H}_∞ com alocação de pólos via LMI para o modelo do satélite rígido flexível com *slosh*.
- Desenvolver um aparato experimental para estudar e verificar o sistema de controle do modelo com *slosh*.
- Aplicar a lei de controle obtida usando método \mathcal{H}_∞ , para o modelo rígido flexível, e verificar seu desempenho em um aparato experimental.

- Aplicar a lei de controle obtida usando método \mathcal{H}_∞ com alocação de pólos via LMI, para o modelo rígido flexível, e verificar seu desempenho em um aparato experimental.
- Estudar a aplicação do ganho obtido pelo método \mathcal{H}_∞ com alocação de polos via LMI no modelo rígido flexível não linear.
- Estudar métodos de controle não lineares baseados em \mathcal{H}_∞ e aplica-los ao modelo do satélite rígido flexível não linear.

6.6 Trabalhos publicados

6.6.1 Artigos completos publicados em periódico

DE SOUZA, A G; DE SOUZA, L C G . H infinity controller design to a rigid-flexible satellite with two vibration modes. Journal of Physics. Conference Series (Online), v. 641, p. 012030, 2015.

DE SOUZA, LUIZ CARLOS GADELHA ; DE SOUZA, ALAIN G. . Satellite Attitude Control System Design considering the Fuel Slosh Dynamics. Shock and Vibration, v. 2014, p. 1 – 8, 2014. Citações:2

DE SOUZA, ALAIN G.; DE SOUZA, LUIZ C.G. . Design of Satellite Attitude Control System Considering the Interaction between Fuel Slosh and Flexible Dynamics during the System Parameters Estimation. Applied Mechanics and Materials, v. 706, p. 14 – 24, 2014. Citações:1

DE SOUZA, ALAIN G.; DE SOUZA, LUIZ C. G. . Satellite Attitude Control System Design Taking into Account the Fuel Slosh and Flexible Dynamics. Mathematical Problems in Engineering (Online), v. 2014, p. 1 – 8, 2014.

6.6.2 Trabalhos completos publicados em anais de congressos

DE SOUZA, A G; DE SOUZA, L. C. G. . H INFINITY ATTITUDE CONTROLLER DESIGN FOR A RIGID-FLEXIBLE SATELLITE CONSIDERING THE PARAMETRIC UNCERTAINTY. In: Congresso SAE Brasil, 2016, São Paulo. 25th SAE Brasil International Congress and Display, 2016.

DE SOUZA, LUIZ C. G. ; DE SOUZA, A. G. . Comparation of LQR, LQG and H-infinity

Methods to Design Controllers for a Satellite Considering Fluid-Structure Interaction.. In: 6th International Conference on Computational Methods, 2015, Auckland. Proceedings of the 6th International Conference on Computational Methods. Auckland: ScienTech Publisher, 2015. v. 1.

SOUZA, A. G.; SOUZA, L. C. G. . Breve Estudo da Modelagem e Controle Ótimo de uma Viga Flexível. In: 5º Workshop em Engenharia e Tecnologias Espaciais, 2014, São José dos Campos. 5º Workshop em Engenharia e Tecnologias Espaciais, 2014.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMSON, H. N. **The dynamic behavior of liquids in moving containers**: With applications to space vehicle technology. Southwest Research Inst.; San Antonio, TX, United States: Cambridge University Press, 1966. 31, 32, 33, 36

AXELSSON, P.; PIPELEERS, G.; HELMERSSON, A.; NORRLÖF, M. h_∞ synthesis method for control of non-linear flexible joint models. **{IFAC} Proceedings volumes**, v. 47, n. 3, p. 8372 – 8377, 2014. ISSN 1474-6670. 19th {IFAC} World congress. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016429344>>. 7

BIGOT, P.; SOUZA, L. C. G. d. Design of non-linear controller for a flexible rotatory beam using state-dependent riccati equation (sdre) control. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS IN CONTROL, AUTOMATION AND ROBOTICS, 10. (ICINCO)., 29 - 31 July 2013, Reykjavik. **Proceedings...** [S.l.]: Nikos E. Mastorakis, 2013. v. 2, p. 148–155. ISBN 978-1-61804-2. Setores de Atividade: Outras atividades profissionais, científicas e técnicas. Acesso em: 24 jan. 2017. 7, 58

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia, PA: Society for industrial and applied mathematics, 1994. 24

BRYSON, A. E. **Control of spacecraft and aircraft**. Princeton, NJ: Princeton University, 1994. 3, 41

CASTRO, J. C. V. d. **Estudo experimental da dinâmica e do sistema de controle de um satélite rígido-flexível**. 121 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto nacional de pesquisas espaciais, São José dos Campos, 2009-04-15 2009. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/04.02.22.07>>. Acesso em: 23 nov. 2015. 52

CHARBONNEL, C. h_∞ and lmi attitude control design: Towards performances and robustness enhancement. **Acta astronautica**, n. 54, p. 307–314, 2004. 3, 5

CHILALI, M.; GAHINET, P. h_∞ desing with pole placement constraints: An lmi approach. **IEEE Transactions on automatic control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996. 3, 5, 25, 27, 110, 111

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in lmi regions. **IEEE Transactions on automatic control**, v. 44, n. 12, p. 2257 – 2270, 1999. 25, 27, 111

CHILALI, P. G. . A. N. . A. J. L. . M. The lmi control toolbox. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33rd., 1994. **Proceedings...** [S.l.]: IEEE, 1994. p. 2038–2041. 3, 5

DODGE, L. R. G. F. T. **Equivalent mechanical model of propellant sloshing in the workshop configuration of the saturn S-Ivb.** Marshall space flight center, Alabama, 1969. 4

D.WU, G.; P.H., P.; M.M., K. **Robust control design: with matlab.** London, UK: Springer, 2005. 20, 21, 23, 53, 58, 60, 64, 73, 74, 75, 76

ESA. **ATV Information kit.** ESA HQ Mario-Nikis, Paris, 2008. Disponível em: <http://esamultimedia.esa.int/docs/ATV/infokit/english/01_ATVOverview.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2012. 35

FENILI, A.; SOUZA, L. C. G. d. Control of a nonlinear slewing flexible beam. In: INTERNATIONAL CONGRES OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, 21ST., Aug. 15-21, Warsaw - Poland. **Proceedings...** [S.l.]: Organized by International Union of Theoretical and Applied Mechanics. IUTAM, 2004. p. 2. ISBN 83-89697-01-1. 7

GAHINET ARKADI NEMIROVSKI, A. J. L. P.; CHILALI, M. **LMI Control toolbox users guide.** Natick, MA, 1995. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/releases/R13sp2/pdf_doc/lmi/lmi.pdf>. Acesso em: 04 nov. 2015. 28

GONZALES, R. G. **Utilização dos métodos SDRE e filtro de Kalman para o controle de atitude de simuladores de satélites.** 120 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto nacional de pesquisas espaciais, São José dos Campos, 2009-02-06 2009. 8

INMAN, D. J. **Vibration: with control, measurement and stability.** Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989. 54, 64, 73

JPL, N. **PRESS KIT, Juno launch.** Jet propulsion laboratory, Pasadena, California, 2011. 211p. Relatório técnico. Disponível em: <http://www.jpl.nasa.gov/news/press_kits/JunoLaunch.pdf>. Acesso em: 27 set. 2016. 1

JUNKINS, J. L.; KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures.** Washington, DC: American institute of aeronautics and astronautics (AIAA), 1993. 51, 56, 57, 58, 73

LOPES, J. C. **Controle H_2/H_∞ de estruturas flexíveis através de desigualdades matriciais lineares com alocação de pólos.** Dissertação (Mestrado) — Universidade estadual de Campinas. Faculdade de engenharia mecânica, Campinas, 2005-02-02 2005.

Disponível em: <<http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000349170>>.

Acesso em: 06 mar. 2013. 110

MACIEJOWSKI, J. M. **Multivariable feedback design**. Wokingham, UK:

Addison-Wesley, 1989. 23

MAGAROTTOT, E.; FRAPARD, B.; FAYARD, R.; ZASADZINSKIT, M.; MIGNOT, J. h_2/h_∞ , control design: Lmi techniques for space applications. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 1998. **Proceedings...** [S.l.]: IEEE, 1998. p. 995–1000. 5

MEIROVITCH; POSTLETHWAITE. **Analytical methods in vibrations**. NewYork, NY: Macmillan, 1967. 23

NASA. **Small spacecraft technology state of the art**. Ames research center, Moffett Field, California, 2014. Disponível em: <http://www.nasa.gov/sites/default/files/files/Small_Spacecraft_Technology_State_of_the_Art_2014.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2015. 2

PAZELLI, T. d. F. P. A. T. **Montagem e controle H infinito de manipuladores espaciais com base flutuante**. Tese (Doutorado) — Escola de engenharia de São Carlos, universidade de São Paulo, São Carlos, 2011. Disponível em:

<<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18153/tde-14022012-101404/publico/Tatiana2.pdf>>. Acesso em: 2015.4.1. 8

PINHEIRO, E. R. **Aplicação do controlador misto H_2/H_∞ no controle da atitude de um microssatélite na presença de incertezas paramétricas**.

(sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.15.17.00-TDI). Dissertação (Mestrado em engenharia e tecnologia espaciais/mecânica espacial e controle) — Instituto nacional de pesquisas espaciais (INPE), São José dos Campos, 2013. Disponível em:

<<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3DG55TB>>>. 4, 9, 24, 25

PITTET, C.; MIGNOT, J.; FALLET, C. Lmi based multi objective h_∞ control of flexible microsatellite. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 39th., 2000.

Proceedings... [S.l.]: IEEE, 2000. p. 4000–4005. 5

REYHANOGLU, M. Modelling and control of space vehicles with fuel slosh dynamics. In: **Advances in spacecraft technologies, Dr Jason Hall (Ed.), InTech**. [s.n.], 2011. p. 549 – 562. Disponível em:

<<http://www.intechopen.com/books/advances-in-spacecraft-technologies/modelling-and-control-of-space-vehicles-with-fuel-slosh-dynamics>>. Acesso em: 03 jun. 2015. 4

SAAD, M.; AKHRIF, O.; SAYDY, L. Analytical model of one flexible link system with nonlinear kinematics. **Journal of vibration and control**, v. 19, p. 1795–1806, 2012. 8, 58, 64

SALES, T.; RADE, D.; SOUZA, L. de. Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers. **Aerospace science and technology**, v. 29, n. 1, p. 403 – 412, 2013. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S127096381300093X>>. 6

SCHERER., C. **The riccati inequality and state-space H infinity optimal control**. 267 p. Ph.D. dissertation — Universitat Wurzburg, Wurzburg, Germany, 1990. Disponível em: <<http://web.dcsc.tudelft.nl/~cscherer/books/thesis.pdf>>. 28

SCHWEPPE, F. C. **Uncertain dynamics system**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1973. 22

SIDI, M. J. **Spacecraft dynamics and control: A practical engineering approach**. New York, NY: Cambridge University Press, 1997. 2, 32, 33, 34, 37, 51

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. Chichester, UK: John Wiley and Sons, 2001. 3, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 42, 62

SOUZA, A. G. **Estudo dos efeitos do movimento de liquido e da flexibilidade no desempenho e na robustez do sistema de controle de atitude de um satellite artificial**. (sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.04.16.36-TDI). Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) — Instituto nacional de pesquisas espaciais (INPE), São José dos Campos, 2013. Disponível em: <<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3DG55TB>>>. 4, 9, 31, 32, 36, 44

SOUZA, A. G.; SOUZA, L. C. G. Satellite attitude control system design taking into account the fuel slosh and flexible dynamics. **Mathematical problems in engineering**, v. 2014, p. Article ID 820586, 8 pages, 2014. 35, 36, 37, 40

_____. H infinity attitude controller design for a rigid-flexible satellite considering the parametric uncertainty. In: **SAE Technical Paper**. SAE International, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4271/2016-36-0377>>. 56

SOUZA, L. C. G. d. **Dynamics and robust control for uncertain flexible space systems**. Tese (Doutorado) — Cranfield institute of technology. College of aeronautics, Sept. 1992 1992. 6, 53, 56

TAFAZOLI, S.; KHORASANI, K. Nonlinear control and stability analysis of spacecraft attitude recovery. **IEEE Transactions on aerospace and electronic systems**, v. 42, n. 3, p. 825–845, July 2006. ISSN 0018-9251. 7

UREK, H. **Control of a satellite with flexible smart beam during slew maneuver**. 73 p. Master of science — Middle east technical university, Ankara, Turquia, 2011. Disponível em: <<https://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12613597/index.pdf>>. Acesso em: 30 jun. 2013. 51

VALDIVIA, R. H. V. **Influência da flexibilidade no desempenho do sistema de controle de atitude de um satélite rígido/flexível**. 105 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto nacional de pesquisas espaciais, São José dos Campos, 2005-02-15 2007. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1913/2005/04.11.14.12>>. Acesso em: 13 abr. 2012. 6

WU, B.; CAO, X.; LI, Z. Multi-objective output-feedback control for micro satellite attitude control: An lmi approach. **Acta astronautica**, v. 64, p. 1021–1031, 2009. 3, 28

ZHANG, G. Q.; WANG, Y.; LI, W.; ZHANG, Y. Nonlinear control of flexible spacecraft based on lmi constrained convex optimization. **2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics**, p. 1 – 5, 2008. 8

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998. 3, 20, 23, 42, 62

ANEXO A - MECÂNICA ANALÍTICA

A.1 Quasi-coordenadas

Coordenadas generalizadas são o conjunto de coordenadas que definem a quantidade de graus de liberdade que um corpo pode ter. No caso de um corpo rígido se tem 6 graus de liberdade, três oriundos da translação de um ponto qualquer do corpo, definido pelas coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) e os outros três devido a rotação definidos por um conjunto de ângulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Sendo q um vetor das coordenadas generalizadas do corpo, se tem

$$q = \left[x_1 \ x_2 \ x_3 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \right] \quad (\text{A.1})$$

Desta forma também pode se definir o conjunto de velocidades generalizadas como sendo as derivadas em função do tempo das coordenadas generalizadas, assim:

$$\dot{q} = \left[\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \right] \quad (\text{A.2})$$

Entretanto, as velocidades generalizadas podem também ser definidas como combinações lineares das derivadas de tempo das coordenadas generalizadas. Por exemplo, componentes de velocidade angular de um corpo são combinações lineares das derivadas dos ângulos de orientação, mas não são as derivadas de tempo de quaisquer coordenadas. As coordenadas generalizadas que correspondem às componentes de velocidade angular são chamadas *quasi-coordenadas* (porque elas não existem). Usando esta ideia, podemos definir u um conjunto de velocidades generalizadas para um corpo rígido a ser

$$u = \left[\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \right] \quad (\text{A.3})$$

A.2 Equações de Lagrange

As equações de Lagrange permitem representar a dinâmica de um sistema baseando-se somente na relação entre energia cinética (T) e energia potencial (V) ???. Definindo a função de Lagrange ou, simplesmente, Lagrangiana como sendo:

$$L = T - V \quad (\text{A.4})$$

Baseado no princípio de D'Alembert a equação de movimento de Lagrange em coordenadas generalizadas é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad (\text{A.5})$$

em que q_k são as coordenadas generalizadas e Q_k as forças externas associadas as coordenadas generalizadas.

O conceito da equação de movimento de Lagrange se estende para sistemas descritos em quasi-coordenadas ?? e a Expressão(A.5) assume a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) + v^\times \frac{\partial L}{\partial v} = \tau_k \quad (\text{A.6})$$

em que τ_k é o vetor torque externo, v representa um vetor e v^\times é a matriz anti-simétrica de v .

$$v^\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.3 Função de dissipação de Rayleigh

Assumindo que uma força generalizada possa ser descrita como:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q'_k \quad (\text{A.8})$$

em que Q_k é uma força que não provem de nenhum potencial generalizado, U energia potencial generalizada, ou potencial dependente de velocidades ??.

A equação de movimento é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \quad (\text{A.9})$$

em que Q'_k são forças devido o atrito viscoso ??, escrevendo em uma forma cartesiana:

$$\begin{aligned}
F'_{ix} &= -k_{ix}v_{ix} \\
F'_{iy} &= -k_{iy}v_{iy} \\
F'_{iz} &= -k_{iz}v_{iz}
\end{aligned}
\tag{A.10}$$

As F'_i são as forças dissipativas sobre a i -ésima partícula e os k_i são constantes positivas ???.
Desta forma Rayleigh introduziu a função de dissipação como sendo ??:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2)
\tag{A.11}$$

A parte dissipativa das forças generalizadas:

$$Q'_k = \sum_i^N F'_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}
\tag{A.12}$$

reescreve-se a equação de movimento para a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0
\tag{A.13}$$

A Equação(A.13) é a equação de movimento considerando a função de dissipação de Rayleigh ??.

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o International Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.