



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14799-TDI/1242**

## **ANÁLISE NUMÉRICA DE JATOS COAXIAIS TURBULENTOS**

Luiz Eduardo Melo Lima

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Marcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 5 de março de 2007.

INPE  
São José dos Campos  
2007

Publicado por:

**esta página é responsabilidade do SID**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**Solicita-se intercâmbio  
We ask for exchange**

**Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14799-TDI/1242**

## **ANÁLISE NUMÉRICA DE JATOS COAXIAIS TURBULENTOS**

Luiz Eduardo Melo Lima

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Marcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 5 de março de 2007.

INPE  
São José dos Campos  
2007

541.126

Lima, L. E. M.

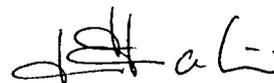
Análise numérica de jatos coaxiais turbulentos / Luiz Eduardo Melo Lima. - São José dos Campos: INPE, 2007. 142 p. ; (INPE-14799-TDI/1242)

1. Jatos coaxiais. 2. Turbulência.  
3. Dinâmica dos fluidos computacional. 4. Método de volumes finitos. 5. Jatos simples. I. Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em

Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Combustão e Propulsão

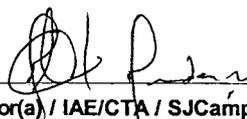
Dr. Fernando Fachini Filho



---

Presidente / INPE / Cachoeira Paulista - SP

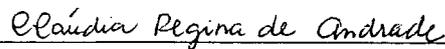
Dr. Marcio Teixeira de Mendonça



---

Orientador(a) / IAE/CTA / SJCampos - SP

Dra. Cláudia Regina de Andrade



---

Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

Aluno (a): Luiz Eduardo Melo Lima

São José dos Campos, 05 de Março de 2007



*“A mente que se abre para uma nova idéia jamais volta ao seu tamanho original”.*

ALBERT EINSTEIN



*A meus pais, a minha irmã e a meus amigos.*



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela vida e pelo livre arbítrio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), agradeço pelo suporte financeiro à realização deste trabalho.

Ao Prof. Márcio Teixeira de Mendonça, agradeço pela orientação e incentivos apresentados durante a realização do trabalho, bem como pela amizade cultivada.

A minha mãe, Maria José, a meu pai, José Carlos, e a minha irmã, Juciana, agradeço pelas inúmeras contribuições, incentivos, carinho e apoio, fundamentais ao meu crescimento pessoal e profissional.

Aos professores e colegas do INPE, especialmente os colegas do LCP, agradeço pelos agradáveis momentos de descontração, conhecimentos compartilhados e amizade dedicada.



## RESUMO

O entendimento do comportamento de jatos é de extrema importância em diversas aplicações práticas em combustão e propulsão, desse modo, torna-se cada vez mais necessário a realização de análises detalhadas dos parâmetros que influenciam as características deste tipo de escoamento. Este trabalho apresenta um estudo numérico das características de jatos coaxiais turbulentos incompressíveis, baseado na análise da influência da variação na razão de velocidades dos jatos interno e externo e da variação na relação entre os diâmetros dos bocais. As características de jatos turbulentos analisadas neste trabalho são o decaimento da velocidade na linha central, a taxa de espalhamento, o comprimento dos núcleos potenciais, os perfis de velocidade média, a distribuição das tensões de Reynolds, a variação da viscosidade turbulenta, da energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. O processo de decomposição de Reynolds, geralmente aplicado a escoamentos incompressíveis, foi utilizado como ferramenta matemática na formulação do escoamento turbulento. Este processo de decomposição fornece as equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds. Para o fechamento das equações médias torna-se necessário a modelagem dos termos desconhecidos (tensões de Reynolds) que surgem das não linearidades das equações instantâneas no escoamento médio. No presente estudo, as tensões de Reynolds foram modeladas utilizando diferentes versões do modelo  $k - \epsilon$ . A solução numérica das equações foi realizada através da utilização de um aplicativo desenvolvido para solucionar problemas específicos em mecânica do contínuo. Este aplicativo, denominado OpenFOAM, é uma biblioteca em C++, de código fonte aberto para Dinâmica dos Fluidos Computacional, que utiliza um método de volumes finitos na discretização das equações. Além da análise dos jatos coaxiais turbulentos foi realizada a análise de um jato simples axissimétrico. Ainda foi realizada a análise de uma configuração de jatos coaxiais com uma razão de áreas entre os bocais similar a de um queimador de chama difusiva tipo *Delft*. Nesta análise da configuração do queimador, foi considerado bocais coaxiais simples sem a borda entre estes bocais e também a influência da borda entre os bocais. Deste modo, tornou-se possível a obtenção de resultados que foram comparados com trabalhos de outros autores em configurações similares, e o estudo de configurações não disponíveis na literatura, observando as principais diferenças entre elas.



# NUMERICAL ANALYSIS OF THE TURBULENT COAXIAL JETS

## ABSTRACT

The understanding of the jets behavior is of extreme importance in several practical applications in combustion and propulsion. Therefore, it becomes more and more important the detailed analysis of the parameters that affect the characteristics of this type of flow. This work presents a numerical study of the incompressible turbulent coaxial jets characteristics, based in the analysis of the variation in the velocities ratio of the internal and external jets, and of the variation in the nozzles internal to external diameter relation. The turbulent jets characteristics analyzed in this work are the decay of the centerline speed, the spreading rate, the length of the potential cores, the mean velocity profiles, the Reynolds stress distribution, the variation of turbulent viscosity, the turbulent kinetic energy and the dissipation rate of turbulent kinetic energy. The Reynolds decomposition process, generally applied to incompressible and compressible flows, were used as mathematical tool in the formulation of the turbulent flow. This decomposition process supply the Reynolds Averaged Navier-Stokes equation. For the closing of the mean equations becomes necessary the modeling of the unknown terms (Reynolds stress) that arise due the non linearity of the instantaneous equations in the mean flow. Therefore, it is necessary to use turbulence models to model the Reynolds stress. The numerical solution of the equations were carried through the use of a developed application to solve specific problems in continuous mechanics. This application, called OpenFOAM, are a C++ library, of open source code for Computational Fluid Dynamics, that uses a finite volume method in the equation discretization. Besides the analysis of turbulent coaxial jets, the numerical analysis of a coaxial jets configuration identical of the axisymmetrical simple jet has also been carried. And also of coaxial jets configuration with a nozzles areas ratio similar of a *Delft* piloted jet diffusion flame burner, considering simple coaxial nozzles without edge between the two jets and also the influence of the edge between the burner nozzles. As results, it was possible to get results that had been compared with others authors in similar configurations and other results not available in the literature, observing the main differences between them.



# SUMÁRIO

Pág.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>1 - INTRODUÇÃO E OBJETIVOS</b> . . . . .	<b>27</b>
1.1 - Introdução . . . . .	27
1.2 - Objetivos . . . . .	28
<b>2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS</b> .	<b>31</b>
2.1 - Escoamentos Cisalhantes Livres . . . . .	31
2.1.1 - Jato Simples . . . . .	31
2.1.2 - Jatos Coaxiais . . . . .	38
2.1.3 - O Queimador <i>Delft</i> . . . . .	44
2.2 - Turbulência . . . . .	47
2.2.1 - Natureza Física da Turbulência . . . . .	50
2.2.2 - Escalas da Turbulência . . . . .	51
2.2.3 - Problema de Fechamento e Modelagem da Turbulência . . . . .	55
<b>3 - MODELO MATEMÁTICO E METODOLOGIA NUMÉRICA</b> . . . .	<b>57</b>
3.1 - Equações Governantes . . . . .	57
3.2 - Equações para o Escoamento Médio . . . . .	58
3.2.1 - Decomposição de Reynolds . . . . .	58
3.2.2 - Decomposição de Favre . . . . .	59
3.2.3 - Equações de Navier-Stokes com Médias de Reynolds . . . . .	59
3.2.4 - Equações de Navier-Stokes com Médias de Favre . . . . .	60
3.3 - Modelos de Turbulência . . . . .	61
3.3.1 - Modelo $k - \epsilon$ Padrão . . . . .	63
3.3.2 - Modelo $k - \epsilon$ RNG . . . . .	65
3.3.3 - Modelos Não Lineares . . . . .	66
3.3.4 - Condições de Contorno para Escoamento Livre . . . . .	68

3.4 - Método Numérico . . . . .	70
3.4.1 - Discretização das Equações . . . . .	73
3.4.2 - Discretização Temporal . . . . .	78
3.4.3 - Condições de Contorno . . . . .	79
<b>4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1 - Descrição dos Problemas Estudados . . . . .	81
4.1.1 - Geometria do Domínio e Malha Computacional . . . . .	84
4.2 - Comparação dos Modelos de Turbulência . . . . .	88
4.3 - Jato Simples Axissimétrico (Caso 1) . . . . .	91
4.4 - Jatos Coaxiais com $r_u > 1$ (Caso 2) . . . . .	97
4.5 - Jatos Coaxiais com $r_u < 1$ (Caso 3) . . . . .	102
4.6 - Jatos Coaxiais com $r_u$ Idêntica a do Queimador (Caso 4) . . . . .	107
4.7 - Queimador sem Parede entre os Bocais (Caso 5) . . . . .	112
4.8 - Queimador com Parede entre os Bocais (Caso 6) . . . . .	117
<b>5 - CONCLUSÕES E TRABALHO FUTUROS . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>A - DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA O ESCOAMENTO MÉDIO</b>	<b>129</b>
A.1 - Equações de Navier-Stokes com Médias de Reynolds . . . . .	129
A.2 - Equações de Navier-Stokes com Médias de Favre . . . . .	132
A.2.1 - Equações Turbulentas Abertas . . . . .	132
A.2.2 - Aproximações e Modelagem . . . . .	133
A.2.3 - Fechamento das Equações Turbulentas . . . . .	135
<b>B - DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA AS QUANTIDADES</b>	
<b>TURBULENTAS . . . . .</b>	<b>137</b>
B.1 - Tensões de Reynolds . . . . .	137
B.2 - Energia Cinética Turbulenta . . . . .	139
B.3 - Taxa de Dissipação de Energia Cinética Turbulenta . . . . .	142

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1	Detalhes do desenvolvimento de um jato simples. . . . . 32
2.2	Esquema ilustrativo do processo de transição de um jato circular. . . . . 35
2.3	Detalhes do desenvolvimento de jatos coaxiais turbulentos. . . . . 39
2.4	Campo de escoamento de uma configuração de jatos coaxiais. . . . . 41
2.5	Vista superior e lateral da cabeça do queimador (esquerda); Fotografia da cabeça do queimador com chamas piloto (direita). . . . . 45
2.6	Exemplos de escoamentos turbulentos. . . . . 47
2.7	Média temporal da velocidade para um regime permanente (esquerda) e médias de conjunto para um regime transiente (direita). . . . . 48
2.8	Esquema ilustrativo da hipótese do equilíbrio. . . . . 53
3.1	Exemplos de malhas tridimensionais: (a) grade cartesiana uniforme; (b) grade regular; (c) grade retilínea; (d) malha estruturada; (e) malha não estruturada de tetraedros. . . . . 70
3.2	Discretização do domínio solução. . . . . 71
3.3	Parâmetros na discretização de volumes finitos. . . . . 72
4.1	Geometria axissimétrica utilizada nas simulações. . . . . 84
4.2	Malha computacional utilizada nos casos analisados (escala em $m$ ). . . . . 85
4.3	Variação de velocidade na linha central $U_0$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ utilizando as malhas A e B para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . . 86
4.4	Perfis de velocidade normalizada utilizando as malhas A e B para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . . 87
4.5	Variação de velocidade na linha central $U_0$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ com os modelos de turbulência analisados para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . . 88
4.6	Perfis de velocidade normalizada com os modelos de turbulência analisados para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . . 90
4.7	Variação de velocidade na linha central $U_0$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ para $U_o/U_i = 0$ e $A_o/A_i = 2,94$ . 91
4.8	Perfis de velocidade normalizada para $U_o/U_i = 0$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . . 92
4.9	Comparação de resultados experimentais (pontos) com solução analítica (li- nha contínua) para os perfis de velocidade similar de um jato turbulento. . . 93
4.10	Perfis das tensões de Reynolds em um jato circular auto-similar. . . . . 94

4.11	Distribuições das tensões de Reynolds para $U_o/U_i = 0$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . .	95
4.12	Distribuições das propriedades turbulentas para $U_o/U_i = 0$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	96
4.13	Variação de velocidade na linha central $U_o$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	97
4.14	Perfis de velocidade normalizada para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	98
4.15	Distribuições das tensões de Reynolds para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	100
4.16	Distribuições das propriedades turbulentas para $U_o/U_i = 5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	101
4.17	Variação de velocidade na linha central $U_o$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ para $U_o/U_i = 0,5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	102
4.18	Perfis de velocidade normalizada para $U_o/U_i = 0,5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	103
4.19	Distribuições das tensões de Reynolds para $U_o/U_i = 0,5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	105
4.20	Distribuições das propriedades turbulentas para $U_o/U_i = 0,5$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	106
4.21	Variação de velocidade na linha central $U_o$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ para $U_o/U_i = 0,2$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	107
4.22	Perfis de velocidade normalizada para $U_o/U_i = 0,2$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	108
4.23	Distribuições das tensões de Reynolds para $U_o/U_i = 0,2$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	110
4.24	Distribuições das propriedades turbulentas para $U_o/U_i = 0,2$ e $A_o/A_i = 2,94$ . . . . .	111
4.25	Variação de velocidade na linha central $U_o$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ . . . . .	112
4.26	Perfis de velocidade normalizada para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ . . . . .	113
4.27	Distribuições das tensões de Reynolds para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ . . . . .	115
4.28	Distribuições das propriedades turbulentas para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ . . . . .	116
4.29	Variação de velocidade na linha central $U_o$ e crescimento da espessura média do jato $y_{1/2}$ em função da coordenada axial $x$ para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ com parede entre os bocais. . . . .	117
4.30	Perfis de velocidade normalizada para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ com parede entre os bocais. . . . .	118
4.31	Distribuições das tensões de Reynolds para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ com parede entre os bocais. . . . .	120
4.32	Distribuições das propriedades turbulentas para $U_o/U_i = 0,202$ e $A_o/A_i = 28,13$ com parede entre os bocais. . . . .	121
A.1	Decomposição de Reynolds para o campo de velocidade $u(\mathbf{x}, t)$ . . . . .	129

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Configuração dos jatos coaxiais analisados. . . . .	82
4.2 Condições de contorno para os parâmetros dos jatos coaxiais analisados. . .	83
4.3 Parâmetros obtidos da variação da velocidade na linha central e do crescimento da espessura do jato. . . . .	89



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- BD – Diferenças Mistas (do inglês, Blended Differencing)
- CD – Diferenças Centradas (do inglês, Central Differencing)
- CFD – Dinâmica dos Fluidos Computacional  
(do inglês, Computational Fluid Dynamics)
- LDA – Anemometria por Laser Doppler  
(do inglês, Laser Doppler Anemometry)
- PDF – Função Densidade Probabilidade  
(do inglês, Probability Density Function)
- RNG – Grupo de Renormalização  
(do inglês, Re-Normalization Group)
- SGE – Simulação de Grandes Escalas
- SND – Simulação Numérica Direta
- UD – Diferenças Progressivas (do inglês, Upwind Differencing)



## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	– área
$\mathcal{A}$	– operador espacial genérico
$a$	– coeficiente relacionado a taxa de espalhamento
$B$	– constante de decaimento da velocidade
$C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}$ e $C_\mu$	– constantes do modelo $k - \epsilon$
$C_{3\epsilon}$	– constante relacionada ao termo de empuxo
$C_p$	– calor específico à pressão constante
$C_v$	– calor específico à volume constante
$Co$	– número de Courant
$c$	– velocidade do som
$D$	– diâmetro
$\mathbf{d}$	– vetor entre os centros de duas células vizinhas
$d\mathbf{S}$	– elemento diferencial do vetor área superficial
$dV$	– elemento diferencial de volume
$\mathbf{E}$	– vetor de fluxos não viscosos
$E$	– escala de energia característica
$e$	– energia interna
$e_0$	– energia total
$\mathbf{F}$	– vetor de fluxos viscosos
$f_i$	– força de volume
$f_\mu$	– coeficiente de amortecimento
$f$ e $g$	– funções de similaridade
$g_i$	– vetor gravitacional
$\mathbf{H}$	– vetor contendo os termos fonte das equações
$h$	– entalpia
$I$	– intensidade turbulenta
$k$	– energia cinética turbulenta
$L$	– escala de comprimento característico
$l$	– escala de comprimento
$\dot{M}$	– fluxo de quantidade de movimento
$M$	– número de Mach
$N$	– centro de uma célula vizinha
$\mathbf{Q}$	– vetor de variáveis conservadas
$q$	– fluxo de calor
$P$	– centro de uma célula
$P_b$	– termo de empuxo
$P_k$	– termo de produção de energia cinética turbulenta
$Pr$	– número de Prandtl
$p$	– pressão
$R$	– constante do gás
$Re$	– número de Reynolds

$r_u$	– razão de velocidades
$r_{uc}$	– razão de velocidades crítica
$\mathbf{S}$	– vetor área superficial
$S$	– taxa de espalhamento
$S$	– superfície
$S_{ij}$	– tensor da taxa de deformação
$s$	– variável independente genérica
$T$	– tempo característico
$T$	– temperatura
$t$	– escala de tempo
$U$	– velocidade característica
$u$	– velocidade
$V$	– volume
$\mathbf{x}$	– vetor posição
$x$	– coordenada axial
$Y$	– correção Yap
$Y_M$	– termo de dissipação devido à flutuação na dilatação
$y$	– coordenada radial
$y_{1/2}$	– espessura média do jato

#### Símbolos Gregos

$\beta$	– coeficiente de expansão térmica
$\Gamma$	– coeficiente de difusão
$\gamma$	– razão dos calores específicos
$\delta$	– variável de adimensionalização (comprimento característico)
$\delta_{ij}$	– delta de Kronecker
$\epsilon$	– taxa de dissipação de energia cinética turbulenta
$\eta$ e $\zeta$	– variáveis de similaridade
$\lambda$	– condutividade térmica
$\mu$	– viscosidade dinâmica
$\nu$	– viscosidade cinemática
$\xi$	– caminho médio molecular livre
$\rho$	– massa específica
$\sigma_k$ e $\sigma_\epsilon$	– constantes do modelo $k - \epsilon$
$\tau_{ij}$	– tensor das tensões viscosas
$\Phi$	– variável dependente genérica adimensionalizada
$\phi$ e $\psi$	– variável dependente genérica
$\Omega$	– vorticidade
$\Omega_{ij}$	– tensor vorticidade
$\omega$	– taxa de dissipação de energia cinética turbulenta específica

## Subscritos

$0$	–	linha central
$b$	–	condição de contorno
$f$	–	face da célula
$h$	–	origem virtual ou hipotética
$J$	–	saída do jato
$i$	–	bocal interno
$K$	–	escala de Kolmogorov
max	–	valor máximo
$o$	–	bocal externo
ref	–	referência
$t$	–	característica da turbulência
$W$	–	parede

## Sobrescritos

$lam$	–	laminar
$tot$	–	total
$turb$	–	turbulenta
'	–	flutuação em torno da média de Reynolds
"	–	flutuação em torno da média de Favre

## Notações

$\hat{\phantom{x}}$	–	invariantes
$\bar{\phantom{x}}$	–	variável em média de Reynolds
$\tilde{\phantom{x}}$	–	variável em média de Favre



# 1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Será apresentada neste capítulo uma breve introdução sobre jatos turbulentos, com relação a sua importância e suas aplicações na pesquisa e na indústria. A motivação para o estudo deste tipo escoamento de relevante importância em muitas aplicações será apresentada na seqüência. E por fim, objetivos e contribuições os quais se desejam alcançar com este tipo de estudo também serão apresentados.

## 1.1 Introdução

Devido a sua importância em aplicações práticas, como por exemplo na combustão e propulsão, escoamentos tipo jato tem sido extensivamente estudados teoricamente, experimentalmente e numericamente ao longo dos anos. Os jatos são escoamentos cisalhantes livres originados pelo espalhamento do fluido da saída de bocais ou de orifícios no ambiente no qual escoam. Um jato é uma fonte de fluxo de quantidade de movimento linear. Um jato proveniente de um bocal movimentando grandes quantidades de fluido e mistura-se com fluido do ambiente. Deste modo, queimadores são freqüentemente projetados de tal forma que combustível é conduzido sob forma de jato para queimar em um ambiente oxidante.

Jatos coaxiais turbulentos podem ser encontrados em diversas aplicações de engenharia. Entre outras na exaustão de turbofans, onde um fluxo de ar frio externo garante a redução de ruído proveniente do jato central de maior velocidade, níveis de turbulência e temperatura. Outra aplicação importante é encontrada em queimadores de chamas difusivas, onde o fluxo de combustível do jato central é circundado por um jato externo de ar que fornece o suprimento de oxidante. Nesta aplicação uma das preocupações é a emissão de óxidos de nitrogênio  $\text{NO}_x$ . As chamas tipo difusivas são mais seguras que chamas pré-misturadas devido ao fato do combustível e do oxidante serem misturados no queimador, assim problemas como retorno da chama na alimentação e autoignição, comuns com chama pré-misturada, podem ser evitados (DESJARDIN; FRANKEL, 1998). Em ambos os casos a estrutura do escoamento turbulento determina, por um lado a fonte de ruído turbulento e por outro a difusão de quantidade de movimento e espécies (oxidante e combustível). Desse modo, um adequado controle do jato pode conduzir a uma redução de ruído ou a uma combustão mais eficiente (VERZICCO; ORLANDI, 1994). Para tanto é necessário conhecer as grandezas estatísticas da turbulência, ou seja, as tensões de Reynolds.

Além dos jatos serem importantes em muitas aplicações industriais de combustão, propulsão, mistura e aeroacústica, eles são também importantes do ponto de vista físico,

pois representam um protótipo de escoamento turbulento livre. Como por exemplo, o jato circular turbulento, por ser um escoamento canônico simples e de importância tecnológica considerável, possui uma ampla faixa de aplicações. O estudo deste tipo de escoamento serve como modelo simplificado, fornecendo análises importantes para utilização em escoamentos complexos, comumente encontrados na prática. Escoamentos tipo jato são caracterizados pela presença das denominadas estruturas coerentes, as quais apresentam um importante grau de organização local, o que promove anisotropia e não homogeneidade do escoamento. A turbulência em jatos tem sido bastante estudada numérica e experimentalmente por pesquisadores, almejando adquirir maiores conhecimentos sobre os fenômenos físicos envolvidos. Qualquer aperfeiçoamento no entendimento de jatos turbulentos pode ser utilizado para o desenvolvimento e projeto de jatos para mistura com ou sem reação. O estudo de jatos é também um assunto de interesse fundamental por si só (MATHEW; BASU, 2001).

## 1.2 Objetivos

No presente trabalho será realizado um estudo numérico das características de jatos turbulentos em configuração coaxial. Este estudo será baseado na observação do comportamento das características dos jatos em função das diferentes razões de velocidades  $r_u$  dos fluxos central e anular e das relações entre o diâmetro interno  $D_i$  e o diâmetro externo  $D_o$  dos bocais. Estes aspectos influenciam as condições que maximizam a difusão de quantidade de movimento e portanto o processo de mistura entre os dois jatos. De forma similar ao que ocorre em jatos simples, será verificado ainda a existência de uma região de jato desenvolvido onde, definidos parâmetros de adimensionalização adequados, tem-se um perfil de velocidades similar, independente da coordenada longitudinal. Soluções similares permitem diversas análises simplificadas sobre as propriedades turbulentas do escoamento.

As principais características de grande interesse no estudo jatos coaxiais turbulentos que serão analisadas neste trabalho são:

- O decaimento da velocidade na linha central.
- A taxa de espalhamento do jato  $S$ .
- O comprimento dos núcleos de escoamento potencial.
- Os perfis de velocidades médias.
- A distribuição das tensões de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ .

- A variação da viscosidade turbulenta  $\mu_t$ .
- A variação da energia cinética turbulenta  $k$ .
- A variação da taxa de dissipação de energia cinética  $\epsilon$ .

Será verificada também, a dependência das soluções obtidas com a variação dos modelos de turbulência disponíveis e as limitações desses modelos. Os modelos de turbulência utilizados neste trabalho são:

- Modelo  $k - \epsilon$  padrão.
- Modelo  $k - \epsilon$  RNG.
- Modelo  $k - \epsilon$  não linear de Shih.

No presente estudo, serão analisadas algumas configurações de jatos coaxiais turbulentos. A primeira configuração corresponde a um jato simples axissimétrico, cujos resultados serão comparados com soluções analíticas da teoria de jato simples. A segunda configuração, jatos coaxiais com  $r_u > 1$ , cujos resultados obtidos serão comparados aos resultados experimentais de [Champagne e Wygnanski \(1971\)](#). A análise destas duas configurações tem por objetivo a validação do pacote numérico. Serão analisadas também duas configurações de jatos coaxiais com  $r_u < 1$ , para verificar a influência da variação na razão de velocidades  $r_u$ . Além das análises do jato simples e dos jatos coaxiais citados, será realizado também a simulação de um escoamento isotérmico em configuração de jatos coaxiais, com uma razão de áreas idêntica ao queimador de chama difusiva do tipo *Delft*. O estudo desta configuração de queimador tem por objetivo a análise das características turbulentas deste tipo de queimador, verificar a influência da razão de áreas dos bocais e observar a influência da presença da borda entre os dois bocais. Todas estas análises tem um papel importante para se ter um melhor entendimento da dinâmica envolvida neste tipo de escoamento.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

No presente capítulo serão apresentadas as considerações teóricas e a revisão bibliográfica referente ao tema estudado. Serão discutidos aspectos como a auto-similaridade dos jatos, que é um importante conceito que simplifica muitas análises. Algumas considerações teóricas descritas neste capítulo se referem a teoria de turbulência e todos os aspectos relacionados a física, as escalas características e a descrição da turbulência. Um destes aspectos importantes da turbulência está relacionado ao problema de fechamento das equações turbulentas que também será discutida na seqüência, bem como, da modelagem destas equações. Além disso serão apresentados alguns dos trabalhos mais relevantes sobre jato simples, jatos coaxiais e também do queimador *Delft*, proporcionando um melhor conhecimento sobre os estudos já realizados nestes tipos de configurações e as conclusões observadas nestes estudos.

### 2.1 escoamentos Cisalhantes Livres

Escoamentos cisalhantes livres são caracterizados pela ausência de paredes e obstáculos no seu interior ou nos seus limites. As instabilidades que se desenvolvem nesta classe de escoamentos são de natureza cisalhante. O critério de inflexionabilidade do campo de velocidades, estabelecido por Rayleigh, é um requisito necessário para geração de instabilidades em escoamentos cisalhantes livres. Apesar do processo de transição ser bastante semelhante em todos os escoamentos cisalhantes livres, eles podem ser divididos em três tipos distintos (SILVEIRA NETO, 2004).

- **Camadas de mistura.** Uma camada de mistura se desenvolve devido à existência de diferenças de velocidade no interior de um escoamento.
- **Esteiras.** Os escoamentos deste tipo aparecem à jusante de um obstáculo gerando um escoamento com um campo inflexional de velocidade.
- **Jatos.** Os jatos são originados pelo espalhamento do fluido proveniente de bocais ou de orifícios no ambiente.

#### 2.1.1 Jato Simples

Uma configuração experimental ideal de um escoamento tipo jato simples pode ser descrita da seguinte maneira: Um fluido Newtoniano escoando continuamente através de um bocal de diâmetro  $D$ , produzindo um perfil de velocidade de saída  $U_J$  aproximadamente plano; O fluido escoando em um ambiente em repouso contendo o mesmo fluido; O escoamento é estatisticamente constante e simétrico em relação ao eixo do jato.

Neste experimento ideal, o escoamento é completamente definido por  $U_J$ ,  $D$  e  $\nu$ , de modo que o único parâmetro adimensional é o número de Reynolds (POPE, 2000). A Figura 2.1 mostra o comportamento temporal médio do escoamento de um jato, apresentando as formas características dos perfis de velocidade.

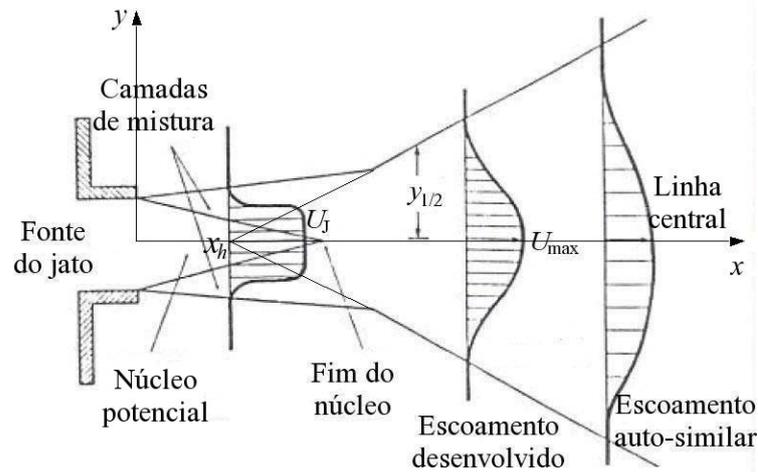


Figura 2.1 - Detalhes do desenvolvimento de um jato simples.

Fonte: Souza (2005).

O núcleo de escoamento potencial desaparece rapidamente, a uma distância de cerca de um diâmetro da saída do bocal, onde o perfil de velocidade perde sua forma plana. Na região da linha central, o escoamento começa a se desenvolver dentro de uma forma gaussiana característica. Finalmente, a cerca de vinte diâmetros da saída do bocal, o perfil de velocidade atinge e mantém a forma auto-similar. A região desenvolvida ou auto-similar crescer a partir de uma origem aparente (virtual)  $x_h$ , como esquematizado na Figura 2.1. Deve ser notado que o perfil de velocidade tem a mesma quantidade de movimento, em diferentes posições longitudinais a jusante do bocal, mas não tem o mesmo fluxo mássico. O fluido é realimentado a partir da região ambiente e a vazão mássico do jato aumenta no sentido do escoamento (POPE, 2000).

A velocidade média é predominante na direção axial, desse modo a velocidade média radial é menor que a velocidade média axial. No eixo de simetria (linha central) do jato, a velocidade axial média  $U_0(x)$  é definida em termos de uma velocidade na linha central expressa por:

$$U_0(x) = \bar{u}(x, 0), \quad (2.1)$$

e a espessura média do jato  $y_{1/2}$  que é definida como a distância radial média tal que a velocidade média é igual a metade da velocidade na linha central:

$$\bar{u}(x, y_{1/2}(x)) = 1/2 U_0(x), \quad (2.2)$$

onde  $x$  é a coordenada longitudinal (POPE, 2000).

Com o aumento na distância longitudinal, o jato decai ( $U_0(x)$  diminui) e se espalha ( $y_{1/2}(x)$  aumenta). Com o decaimento e o espalhamento, os perfis de velocidade média mudam, mas a forma dos perfis não muda na região longe do bocal, com isso conclui-se que os perfis de velocidade média se tornam auto-similares (POPE, 2000). A auto-similaridade é um importante conceito que surge em diferentes contextos no estudo de escoamentos turbulentos. Seja  $\phi(x, y)$  uma variável dependente qualquer, escalas características  $\phi_0(x)$  e  $\delta(x)$  são definidas como função de  $x$ , respectivamente, para variável dependente  $\phi(x)$  e a variável independente  $y$ , normal à direção principal do escoamento. Então variáveis adimensionalizadas podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \frac{y}{\delta(x)}, \\ \Phi(\eta, x) &\equiv \frac{\phi(x, y)}{\phi_0(x)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Se a variável dependente adimensionalizada é independente de  $x$ , existe uma função de similaridade  $\hat{\Phi}(\eta)$  tal que,

$$\Phi(\eta, x) = \hat{\Phi}(\eta). \quad (2.4)$$

As escalas  $\phi_0(x)$  e  $\delta(x)$  devem ser apropriadamente escolhidas. O comportamento auto-similar pode ser observado sobre uma certa faixa de  $x$  (POPE, 2000).

Na região auto-similar de jatos turbulentos de alto número de Reynolds, a velocidade na linha central  $U_0(x)$  e a espessura média  $y_{1/2}(x)$  do jato, variam da seguinte forma:

$$\frac{U_J}{U_0(x)} = \frac{1}{B} \left( \frac{x}{D} - \frac{x_h}{D} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{y_{1/2}(x)}{D} = S \left( \frac{x}{D} - \frac{x_h}{D} \right). \quad (2.6)$$

Onde  $B$  é uma constante empírica que representa o decaimento da velocidade na linha central,  $x_h$  é uma origem virtual, obtida da intersecção da reta com a abscissa, e  $S$  é a taxa de espalhamento do jato. Estas constantes são independentes do número de Reynolds.

A variável de similaridade pode ser tomada como sendo:

$$\eta \equiv \frac{y}{y_{1/2}} \quad (2.7)$$

ou

$$\zeta \equiv \frac{y}{x - x_h}, \quad (2.8)$$

as duas podem ser relacionadas por  $\eta = S\zeta$ .

Os perfis de velocidade média auto-similares são definidos por:

$$f(\eta) = f(\zeta) = \frac{\bar{u}(x, y)}{U_0(x)}. \quad (2.9)$$

As tensões de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  tornam-se também auto-similares, após a região de desenvolvimento, quando os perfis  $\overline{u'_i u'_j}/U_0^2$  são plotados contra  $y/y_{1/2}$  ou  $y/(x - x_h)$  (POPE, 2000). Em termos do perfil de similaridade  $f(\zeta) = \bar{u}/U_0$  com  $\zeta = y/(x - x_h)$  a solução é dada por:

$$f(\zeta) = \frac{1}{(1 + a\zeta^2)^2}, \quad (2.10)$$

onde o coeficiente  $a$  é dado em termos da taxa de espalhamento  $S$  por  $a = (\sqrt{2} - 1)/S^2$ . Dados experimentais indicam que a taxa de espalhamento para jato plano está na faixa de  $0,100 \leq S \leq 0,110$ , e para jato circular está na faixa de  $0,086 \leq S \leq 0,095$  (WILCOX, 1993).

Os jatos podem ser classificados dependendo da geometria que os formam. Quando gerado por um orifício circular, denomina-se um jato circular, quando gerado por uma cavidade retangular, denomina-se jato plano ou retangular. Em qualquer um destes tipos de jatos a transição é caracterizada pela formação de instabilidades primárias e turbilhões de Kelvin-Helmholtz, os quais induzirão a formação de filamentos secundários. Oscilações transversais são necessárias para formação de filamentos longitudinais contrarotativos que interagem com as estruturas turbilhonares primárias, as quais se amplificam e finalizam por degenerar o escoamento em turbulência tridimensional. A [Figura 2.2](#) ilustra esquematicamente este processo com as diferentes fases da transição em um jato circular: (1) bocal convergente; (2) núcleo de escoamento potencial; (3) toróide de alta concentração de vorticidade; (4) geração de vórtices toroidais bidimensionais; (5) emparelhamento de vórtices anulares; (6) oscilações tridimensionais sobre os vórtices toroidais; (7) degeneração em turbulência tridimensional; (8) reorganização da turbulência em grandes escalas compostas de outras múltiplas escalas (SILVEIRA NETO, 2004).

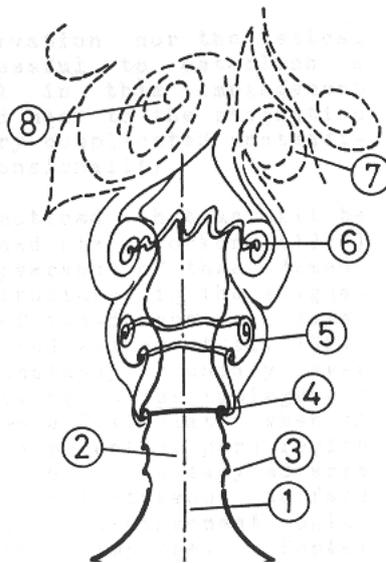


Figura 2.2 - Esquema ilustrativo do processo de transição de um jato circular.

Fonte: [Silveira Neto \(2004\)](#).

[Brancher \*et al.\* \(1994\)](#) realizaram Simulações Numéricas Diretas (SND) para permitir a identificação das respectivas influências das instabilidades secundárias e estudar o mecanismo de indução de vórtices, investigando a evolução temporal de um jato circular homogêneo. [Stanley e Salkar \(1999\)](#) utilizaram SND para caracterizar a influência das condições do bocal na evolução do jato. Eles observaram que os efeitos da intensidade de flutuações e a da espessura da camada cisalhante influenciam o decaimento da taxa de crescimento do jato bem como a diminuição da velocidade média na linha central. [Mathew e Basu \(2001\)](#) utilizaram um método pseudoespectral baseado em expansões de Fourier em coordenadas cartesianas para estudos SND de jatos circulares em transição. A transição de um jato laminar para um jato turbulento acontece, via de regra, próximo ao bocal que lhe dá origem, de forma que ela dependa da geometria do orifício ou do bocal e também das condições do escoamento à jusante. Isto torna a comparação de experimentos bastante difícil. A comparação de resultados numéricos com experimentais também se torna difícil, exceto do ponto de vista estatístico e topológico. Embora os escoamentos turbulentos sejam caracterizados como aleatórios por alguns estudiosos, devido a sua difícil predição determinística, a prática tem demonstrado que as estruturas coerentes podem ser previstas. Assim, a turbulência pode ser considerada coerente para as grandes estruturas e caótica para as menores estruturas. O uso de ferramentas estatísticas permite analisar os escoamentos e definir um comportamento médio, através de campos característicos.

Existem vários estudos numéricos e experimentais, na literatura, sobre os escoamentos cisalhantes do tipo jato, considerando os mais diversos aspectos. [Gharbi \*et al.\* \(1996\)](#) realizaram um estudo numérico para caracterizar jatos turbulentos de massa específica variável através do uso de modelos de turbulência com fechamento de segunda ordem baseados no processo de decomposição de Favre. Escoamentos turbulentos nos quais a massa específica varia são extremamente comuns nos campos industriais e em problemas ambientais. A variação da massa específica pode ser causada por gradientes térmicos ou mistura de fluidos de diferentes massas específicas, e está sempre relacionada à região dominada pela quantidade movimento do jato. Na região do campo distante da saída do jato eles obtiveram bons resultados, quando comparados com resultados experimentais. Por outro lado, melhorias fazem-se necessárias para representar as regiões de altos gradientes de massa específica e também, em geral, o campo turbulento na região inicial.

[Abdel-Rahman \*et al.\* \(1997\)](#) utilizaram Anemometria por Laser Doppler (LDA) para medir o campo de velocidades de um jato de ar circular turbulento, com o objetivo de observar a influência relativa do uso de uma parede no plano de saída do jato. Os resultados deste estudo mostraram que a parede colocada no plano de saída limita a interação do jato com o ambiente vizinho, e conseqüentemente resulta em uma redução na taxa de espalhamento, no fluxo de quantidade de movimento e no fluxo mássico. Além disso, as distribuições do grau de assimetria da distribuição de probabilidade sobre o valor médio e do nível de relevo através do contorno do jato registraram maiores valores na região do jato quando a parede é usada. Isto indica um comportamento mais intermitente do jato, particularmente na região externa ao jato devido a existência da parede. A parede colocada na saída do jato também resulta em uma queda no coeficiente de arraste turbulento de um fluido por outro adjacente (entrainment).

[DesJardin e Frankel \(1998\)](#) aplicaram diversos modelos de combustão empregando SND e Simulações de Grandes Escalas (SGE) para estudar jato planar reativo compressível. A combustão em jato turbulento, a primeira vista, parece simples. Mas manifesta muitas características de outras combustões turbulentas complexas, as quais envolvem química do combustível, mecânica dos fluidos, convecção e transferência de calor radiativa, reações elementares em fase gasosa e turbulência. [Zhou \*et al.\* \(1999\)](#) aplicaram o modelo de turbulência  $k - \epsilon$  para a simulação de jato com combustão utilizando hipótese de reação química rápida e conceito de viscosidade dissipativa turbulenta, com a finalidade de simular numericamente chamas difusivas e parcialmente pré-misturada. A solução do modelo de combustão foi obtida pela utilização da equação de fração de mistura sem necessidade de considerar taxas de reação química. Supondo reação de

passo único, irreversível e infinitamente rápida foi possível obter uma melhor descrição da temperatura para a chama difusiva. [Mehravaran e Jaber \(2004\)](#) realizaram simulações de chama turbulenta planar para analisar a complexa relação entre turbulência e reação química em jatos, com ou sem efeitos de convecção natural.

Diversos estudos e aplicações de escoamentos do tipo jato tem sido voltados para jatos axissimétricos pela simples razão histórica que é muito mais fácil e econômico de serem produzidos. Eles são tão comuns e fáceis de encontrar por que raramente bocais assimétricos podem ser melhores para uma dada aplicação particular. Jatos assimétricos causam grandes camadas cisalhantes que são, é claro, assimétricas e mudam de acordo com a direção do escoamento. Eles também geram grandes escoamentos turbulentos e assimétricos. Jatos turbulentos assimétricos são bem apropriados para aplicações envolvendo mistura de um fluxo em um ambiente, limpeza de superfícies e combustão. [Akin e Bass \(2001\)](#) realizaram simulações numéricas de jatos assimétricos, com a finalidade de estudar a otimização da geometria do bocal em processos de mistura, utilizando um método de diferenças finitas de malha adaptativa. A utilização de método de diferenças finitas de malha adaptativa permitiu uma convergência mais consistente da solução do modelo para escoamentos com alto número de Reynolds. Outros métodos de volumes finitos e diferenças finitas em sistemas somente com elementos lineares frequentemente falham na convergência para alguns problemas. [Rembold \*et al.\* \(2002\)](#) desenvolveram um método de simulação numérica para escoamentos de jatos não axissimétricos, resolvendo as equações de Navier-Stokes compressíveis tridimensionais, para investigar em detalhes a dinâmica do jato e fornecer dados para validação de SGE.

O controle de jato turbulento tem aplicações em vários campos como combustão, ruído aerodinâmico e propulsão a jato. Este controle em processos de combustão tem por objetivo aumentar a mistura turbulenta das espécies químicas para tornar o processo mais eficiente e reduzir a concentração de poluentes. Emissões acústicas por motores a jato de aeronaves podem ser reduzidos pelo controle do escoamento que produz o ruído. Um objetivo do aumento da mistura em aplicações de propulsão a jato é o decréscimo da temperatura de pluma e a contenção da radiação infravermelha. [Hilgers e Boersma \(2001\)](#) introduziram uma aproximação para o controle da mistura do jato que combina SND de um jato incompressível com procedimentos de otimização estocásticos. Eles observaram que a taxa de mistura de um jato turbulento pode ser significativamente alterada pela aplicação de uma adequada excitação no orifício do jato. Quando a excitação externa interage com os modos naturais do jato de uma maneira não linear, não é possível prever qual tipo de atuação é ótima para aumentar a mistura.

A simulação numérica constitui uma ferramenta importante no estudo de diversos fenômenos. [Bogey e Bailly \(2006\)](#) realizaram simulações utilizando filtragens específicas para reduzir a discretização das grandes escalas mostrando uma independência apreciável das características do jato com o procedimento de filtragem. No campo de engenharia de fluidos, o controle de escoamentos turbulentos permanece como um problema crucial. Por isto métodos numéricos e modelos de turbulência para SGE são extremamente importantes para obtenção de resultados sobre a dinâmica de vórtices de jatos turbulentos e escoamentos reativos. SGE com centenas de milhões de pontos nodais produzem resultados suficientemente precisos para fenômenos turbulentos transientes e são aplicáveis no desenvolvimento da engenharia de fluidos. Além disso, SGE são capazes de prever escoamentos complexos com turbulência, como por exemplo em combustão e escoamentos multifásicos em equipamentos de geração de energia. São também capazes de analisar a geração de ruído em escoamentos e a vibração causada por fluidos em veículos, turbomáquinas e estruturas ([KOBAYASHI, 2006](#)).

Com a finalidade de estudar jato sobre parede bidimensional em um ambiente em repouso e isotérmico ou submetido a diversas condições de contorno de parede, [Kechiche et al. \(2004\)](#) realizaram um estudo numérico utilizando um método de diferenças finitas com malha não uniforme, e aplicando diversos modelos turbulentos do tipo  $k - \epsilon$  para baixo número de Reynolds. O objetivo deste estudo foi a descrição dos processos de transferência de calor e de quantidade de movimento para este tipo de escoamento, de modo a conhecer estes tipo de modelos usados para descrever efetivamente resultados experimentais. Um jato sobre parede turbulento pode ser obtido pela injeção de um fluido à uma alta velocidade tangencial sobre uma placa plana. O escoamento resultante pode ser visualizado como a combinação de uma camada limite da parede interna, onde a velocidade aumenta de zero à parede para um máximo local, e um outro jato livre onde o escoamento decresce de um máximo local até zero. A forte interação entre estas duas camadas causa a complexidade deste tipo de escoamento.

### 2.1.2 Jatos Coaxiais

Jatos coaxiais são uma maneira simples pela qual dois fluidos podem ser misturados e esta configuração é muito usada em câmaras de combustão em motores de foguetes. Como as características gerais de jatos coaxiais não são tão conhecidas quanto a de jatos simples, torna-se cada vez mais necessário um melhor conhecimento sobre o campo de escoamento complicado que surge da interação de dois ou mais jatos turbulentos. [Champagne e Wygnanski \(1971\)](#) investigaram experimentalmente jatos turbulentos provenientes de dois bocais coaxiais circulares, utilizando anemômetros de fio quente.

Estes estudos experimentais foram conduzidos variando a razão de áreas e a razão de velocidades entre os jatos interno e externo de modo a obter as distribuições de velocidades médias, intensidades turbulentas e tensões de cisalhamento.

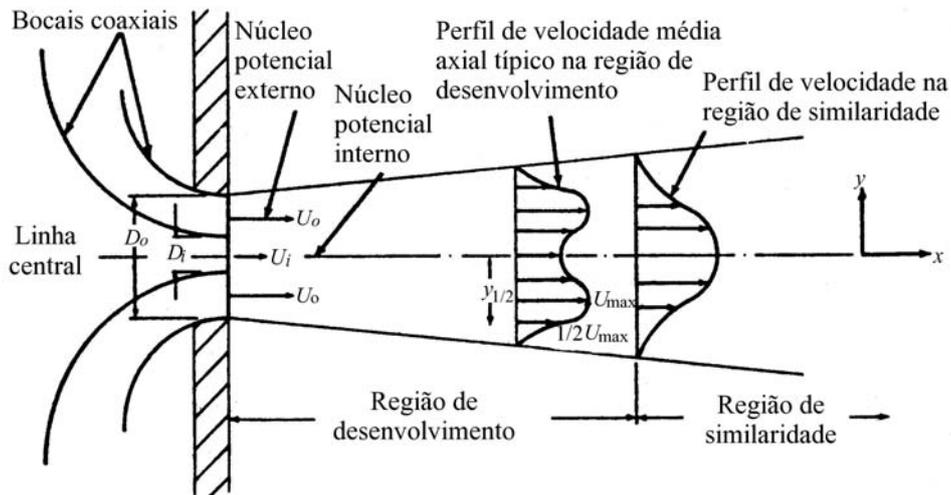


Figura 2.3 - Detalhes do desenvolvimento de jatos coaxiais turbulentos.

Fonte: Champagne e Wygnanski (1971).

O escoamento foi considerado como sendo constituído por duas regiões conforme mostrado na Figura 2.3: uma região de desenvolvimento do escoamento formada pelos núcleos potenciais interno e externo, e as camadas de mistura entre os dois jatos e entre o jato externo e o ambiente; e uma região de similaridade (ou região desenvolvida) onde o escoamento é completamente desenvolvido e auto-similar onde o jato se torna idêntico ao jato axissimétrico simples. Foi observado que a espessura de cada núcleo potencial decresce aproximadamente de forma linear com a distância longitudinal do escoamento e os núcleos terminam quando as regiões anulares de mistura juntam-se. Em seguida, na região de similaridade, as distribuições de velocidade média  $\bar{u}$  e intensidade turbulenta  $\overline{u'^2}$  podem ser expressas em termos de funções de uma variável simples,  $\eta = y/l_h$ , desse modo, tem-se:

$$\bar{u} = U_{\max} f(\eta), \quad (2.11)$$

$$\overline{u'^2} = U_{\max}^2 g(\eta). \quad (2.12)$$

Sendo  $U_{\max} \propto (x - x_h)$ ,  $l_h \propto (x - x_h)$ , onde  $x_h$  é a distância da origem virtual ou hipotética ao plano de saída do bocal. As escalas de velocidade e comprimento são

$U_{\text{ref}} D_o (x - x_h)^{-1}$  e  $(x - x_h)$ , onde  $U_{\text{ref}}$  é determinado pelo fluxo de quantidade de movimento total do jato. Na definição de  $U_{\text{ref}}$ , deve-se ter em mente que para razões de velocidades  $U_o/U_i > 1$ , a pressão estática no núcleo potencial interno pode ser um pouco mais baixa que a pressão ambiente, criando desse modo um gradiente de pressão estática. Este efeito pode ser mantido pequeno ou até ser desprezado limitando a razão de velocidades a um valor máximo que pode ser  $U_o/U_i = 10$ . O gradiente de pressão estático foi desprezado na determinação do fluxo de quantidade de movimento total do jato.  $U_{\text{ref}}$  é definido por:

$$U_{\text{ref}} = \left( \frac{\dot{M}_J}{\rho A_J} \right)^{1/2} = \left( \frac{U_o^2 A_o + U_i^2 A_i}{A_o + A_i} \right)^{1/2}, \quad (2.13)$$

onde  $\dot{M}_J$  é o fluxo de quantidade de movimento total do jato,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $A_o$  e  $A_i$  são, respectivamente, as áreas dos bocais externo e interno. Desse modo, a [Equação 2.11](#) e a [Equação 2.12](#) podem ser reescritas como:

$$\frac{\bar{u}}{U_{\text{ref}}} = \frac{D_o}{x - x_h} f \left( \frac{y}{x - x_h} \right), \quad (2.14)$$

$$\frac{\overline{u'^2}}{U_{\text{ref}}^2} = \frac{D_o}{x - x_h} g \left( \frac{y}{x - x_h} \right). \quad (2.15)$$

Para os casos em que  $U_i = U_o$  e  $U_o = 0$ , as equações [2.14](#) e [2.15](#) reduzem-se diretamente aos resultados para jato simples fornecendo uma comparação direta com experimentos clássicos.

Uma descrição do comportamento de jatos coaxiais turbulentos foi também realizada experimentalmente por [Buresti \*et al.\* \(1998\)](#), para duas razões de velocidades,  $U_i/U_o = 0,30$  e  $0,67$ , mantida constante a razão de diâmetros,  $D_i/D_o = 0,5$ . Como esperado, observou-se a diminuição do comprimento do núcleo potencial interno com a diminuição da razão de velocidades, e para  $U_i/U_o = 0,30$ , o comprimento tornou-se comparável ao do núcleo potencial externo. Esta condição fornece o surgimento de flutuações maiores e um maior nível de mistura entre os dois fluxos. A evolução do escoamento e a mistura entre os jatos interno e externo são controlados pelo sentido, força, posição mútua e dinâmicas conseqüentes das estruturas vorticiais que são apresentadas no desenvolvimento das camadas cisalhantes entre os dois jatos e entre o jato externo e o ambiente fluido. Todas essas características dependem primariamente da razão de velocidades e da razão de diâmetros,  $U_i/U_o$  e  $D_i/D_o$ , e secundariamente da espessura das paredes internas e das condições de contorno à saída dos bocais.

Rehab *et al.* (1997) realizaram estudos experimentais sobre os diferentes regimes de escoamento na região próxima de jatos coaxiais de grande razão de velocidades  $1 < r_u \leq \infty$ . Dois regimes de escoamentos podem ser identificados se a razão de velocidades ( $r_u \equiv U_o/U_i$ ) é maior ou menor que o valor da razão de velocidades crítica  $r_{uc}$ . O valor de  $r_{uc}$  situa-se entre 5 e 8, dependendo do perfil de velocidade nos bocais. Quando  $r_u < r_{uc}$ , o jato anular rápido comprime periodicamente o jato central mais lento próximo do núcleo potencial interno. A frequência de compressão corresponde à frequência de oscilação do jato externo. Quando  $r_u > r_{uc}$ , o núcleo potencial interno é truncado e é seguido por uma bolha de recirculação não estacionária com baixa frequência de oscilação. A transição de um regime para outro pode ser explicada por um modelo simples cujos ingredientes são a taxa de arraste turbulento de fluido (entrainment), que é governada pela camada de mistura do jato externo, e a conservação de massa.

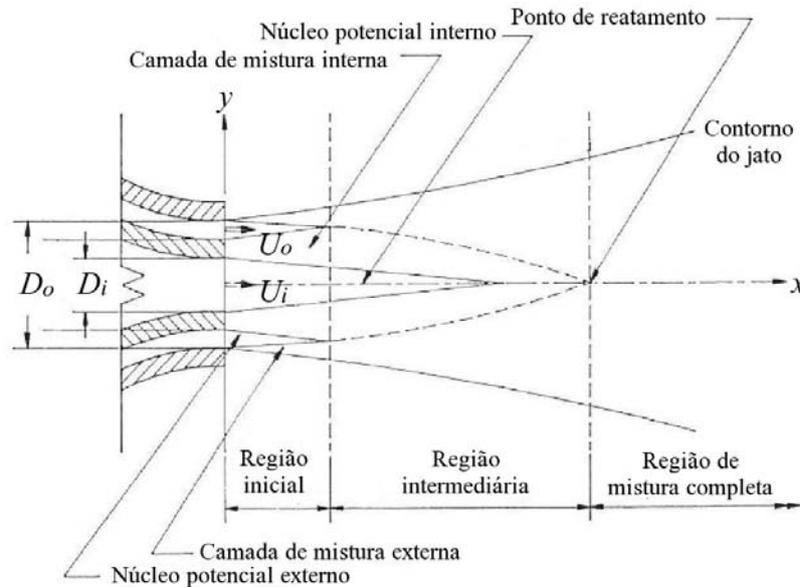


Figura 2.4 - Campo de escoamento de uma configuração de jatos coaxiais.

Fonte: Warda *et al.* (1999).

Warda *et al.* (1999) investigaram experimentalmente a influência da variação na razão de velocidades no escoamento de jatos coaxiais. Estas investigações experimentais de jatos coaxiais mostraram que a distribuição radial da velocidade média axial e a intensidade de turbulência dos jatos central e anular podem ser divididos em três regiões selecionadas, como mostrado na Figura 2.4, que constituem o campo de escoamento do jato. A região inicial é localizada entre o bocal e o final do núcleo potencial externo.

Imediatamente após, está a região intermediária a qual termina no ponto de reatamento, e finalmente é estabelecida a região de mistura completa. O núcleo potencial interno é extremamente dependente da razão de velocidades e o núcleo potencial externo é pouco dependente da razão de velocidades para  $U_i/U_o > 1$ . Observou-se que o aumento na velocidade na saída do jato resulta em uma redução da taxa de crescimento do jato. Ainda foi observado que após o ponto de reatamento os jatos coaxiais expandem-se da mesma maneira do jato simples. Além disso, a similaridade dos perfis radiais de velocidade média axial foi obtida na região de mistura completa. [Warda et al. \(2001\)](#) também estudaram o efeito da magnitude das velocidades médias axiais iniciais dos jatos coaxiais fixando a razão de velocidades. Com relação a este efeito, os resultados obtidos por eles mostraram que a redução no valor absoluto das velocidades dos escoamentos interno e externo, mantida a razão de velocidades constante, faz o jato decair rapidamente ao longo da linha central.

[Reynier e Ha Minh \(1998\)](#) conduziram simulações numéricas de jatos coaxiais turbulentos compressíveis com grandes razões de velocidades utilizando método de volumes finitos e modelo de turbulência de duas equações do tipo  $k - \epsilon$ . Para os cálculos somente a parte explícita do método numérico foi usada. Isto permitiu a simulação das estruturas coerentes envolvidas no escoamento. O escoamento é caracterizado pela presença de duas camadas de mistura: a camada de mistura externa, adjacente ao ar inicialmente em repouso e a camada de mistura interna, confinada entre os jatos central e anular. Os resultados mostraram uma forte instabilidade do escoamento próximo do bocal. Na camada de mistura externa as estruturas coerentes desenvolvem-se como em um jato simples. Próximo do bocal, na camada de mistura interna, uma região de recirculação é encontrada no eixo do jato. A presença deste fenômeno em jatos coaxiais homogêneos é consequência da grande razão de velocidades entre os dois fluxos e explica a ausência do núcleo potencial interno.

Com o objetivo de investigar os efeitos causados pela adição de turbilhões moderados nas estruturas turbulentas no campo próximo de um escoamento proveniente de bocais coaxiais, [McIlwain \(2000\)](#) realizou estudos numéricos usando SGE e diversas técnicas de visualização para identificação da evolução das interações entre as estruturas turbulentas. A presença de turbilhões na corrente do fluxo externo do jato coaxial reforça a esteira atrás dos anéis, porém poucas estruturas turbulentas organizadas são formadas como resultado. Portanto, um nível moderado de turbilhões na corrente do fluxo externo do jato coaxial tem como resultado um pequeno efeito no escoamento. [Wicker e Eaton \(2001\)](#) observaram experimentalmente que o campo próximo de jatos coaxiais é dominado por anéis de vórtices cujas interações governam o crescimento, a taxa de

arraste turbulento de fluido (entrainment) e a mistura no jato. Perturbações controladas podem causar maiores mudanças no comportamento do jato pela organização dos anéis de vórtices no campo próximo a saída do jato. A interação de partículas com essas estruturas é importante em combustão de spray e partículas.

Balarac e Si-Ameur (2005) realizaram SND para estudar o processo de mistura em jatos coaxiais. O estudo do processo de mistura foi conduzido através da adição de um traçador passivo do jato externo para o jato interno. Foi demonstrado que vórtices coerentes tem um papel importante no mecanismo de mistura. A mistura turbulenta exibe uma caráter intermitente como consequência da ejeção de fluido causada pelas correntes contra-rotatórias. O jato externo é dominante no processo e o fluido proveniente do jato central permanece confinado. A análise do efeito das estruturas turbulentas sobre o processo de mistura no jato coaxial livre, o qual se forma quando os fluxos escoam em dutos central e anular encontrando-se e misturando-se na abertura do equipamento, está focalizada no interesse específico da mistura em qualquer configuração de escoamento.

Favre-Marinet e Schettini (2001) realizaram uma análise dos efeitos na mistura devido grandes diferenças de massa específica em jatos coaxiais, utilizando anemometria térmica. A descrição do campo de massas específicas de jatos é muito importante em processo de mistura. A mistura é diretamente dependente da dinâmica dos escoamento na região próxima de jatos coaxiais. Os efeitos da variação de massa específica na mistura não podem ser separados da razão dos fluxos de quantidade de movimento entre o jato externo e o jato interno e nem da razão de velocidades entre os dois fluxos. Para um dado valor da razão dos fluxos de quantidade de movimento, entretanto, um ligeiro aumento da mistura é encontrado para razões de massas específicas muito menores que um. Os efeitos da razão de massas específicas e da dinâmica do escoamento são levados em conta no processo de mistura considerando a razão dos fluxos de quantidade de movimento do jato externo para o interno e não os efeitos da razão de massas específicas e da razão de velocidades separadamente.

Jahnke *et al.* (2005) utilizaram SGE para investigar a mistura global em misturadores do tipo jato coaxial. O processo de mistura é um problema físico o qual não pode ser separado da turbulência para jatos turbulentos. Diferentes parâmetros como número de Reynolds, número de Schmidt, número de Prandtl, razões de massas específicas e taxa de escoamento podem influenciar o processo de mistura global. O mecanismo físico principal que conduz o processo de mistura é a convecção turbulenta acentuada por grandes turbilhões gerados devido a instabilidade de camadas cisalhantes entre os jatos

central e anular. Combinado com o segundo mecanismo físico, a difusão molecular, este processo global é muito complicado devido a existência de um espectro contínuo de diferentes escalas de tempo e de comprimento.

Gokarn *et al.* (2006) realizaram simulações para verificar a evolução de uma camada de mistura em um canal com duas placas divisórias na entrada observando o efeito da variação na razão de velocidades nesta configuração utilizando um método de diferenças finitas com precisão de segunda ordem. O processo de mistura em escoamentos reativos é de significativa importância quando o alvo é o aumento das taxas de reação pelo aumento do contato molecular. Em indústrias de processos químicos, uma mistura apropriada é necessária para controlar a formação dos produtos da reação e por isso um reator bem projetado desempenha um papel fundamental. A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) tem um grande potencial para ser utilizada como uma ferramenta para projeto de reatores e o exame sistemático da mistura de reagentes.

Kriaa *et al.* (2003) realizaram análises numéricas para verificar a influência da razão de diâmetros dos bocais, bem como das razões de velocidades e temperatura, para possibilitar uma dedução de correlações práticas que podem ser usadas em processos de engenharia. Eles distinguiram três regiões na estrutura de um escoamento tipo jato com massa específica variável ou não isotérmico que dependem dos números de Froude e Reynolds. A primeira região, chamada região de jato puro, se localiza na vizinhança do bocal, e é dominada por forças inerciais. Na segunda região, denominada região de transição, as forças inerciais e o empuxo tem a mesma ordem de magnitude. A terceira região, chamada região de pluma, se localiza longe da fonte de ejeção, e é dominada pelo empuxo. Eles observaram que um aumento na razão de diâmetros dos bocais gera uma aceleração do jato mais significativa, da mesma forma que observado para um aumento na razão de velocidades.

### 2.1.3 O Queimador *Delft*

Chamas turbulentas sem pré-mistura são freqüentemente utilizadas em equipamentos de grande escala para combustão. Para realização de medidas precisas são necessárias chamas em menor escala, as quais podem ser investigadas sobre condições de laboratório. O queimador de chama não pré-misturada com chama piloto tipo *Delft* foi projetado para produzir um número de chamas turbulentas, não pré-misturadas, axisimétricas e bem definidas em escala de laboratório. Ele foi desenvolvido na seção de transferência de calor da Universidade Técnica de *Delft*. O termo não pré-misturada significa que os fluxos de combustível e de oxidante entram separadamente na chama para queimar. Isto conduz a uma maior vantagem com relação a segurança do que em

sistemas pré-misturados, onde uma mistura de combustível e de oxidante é formada antes de entrar em combustão. A segurança maior de chamas não pré-misturadas é uma das razões para o uso destas chamas em aplicações em escala industrial (STÖLLINGER, 2005).

O queimador *Delft* consiste de dois tubos concêntricos, o central para combustível, e o anular para o ar primário. A Figura 2.5 mostra a cabeça do queimador. O bocal do jato de combustível tem 6 mm de diâmetro. É separado do fluxo de ar primário por uma borda 15 mm de diâmetro externo. Nesta borda são encontrados 12 furos de 0,5 mm de diâmetro. Os centros dos furos encontram-se em um círculo de 3,5 mm de diâmetro. Destes furos, uma mistura de acetileno/hidrogênio/ar emerge alimentando as chamas piloto. O diâmetro externo do anel de ar primário é de 45 mm.

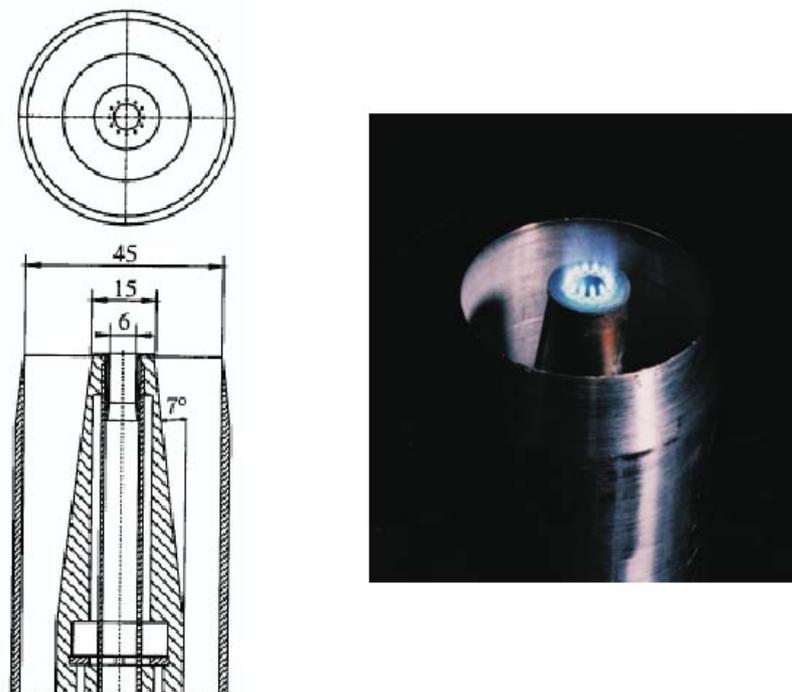


Figura 2.5 - Vista superior e lateral da cabeça do queimador (esquerda); Fotografia da cabeça do queimador com chamas piloto (direita).

Fonte: Stöllinger (2005).

As chamas piloto são necessárias para estabilizar a chama turbulenta não pré-misturada na borda do queimador. A composição da mistura que alimenta as chamas piloto é:

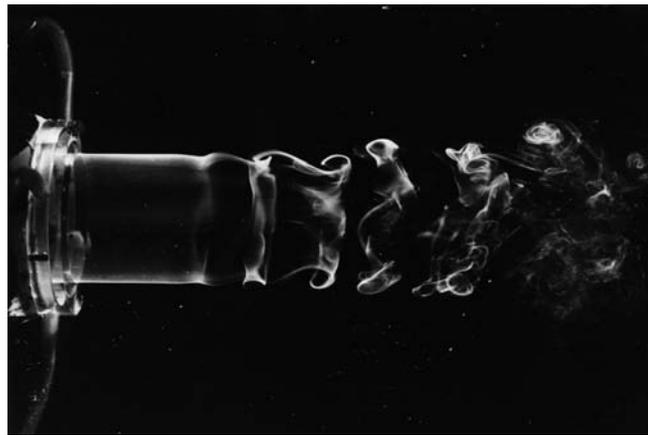
$Y_{H_2} = 0,01631$ ,  $Y_{C_2H_2} = 0,07392$ ,  $Y_{N_2} = 0,6983$ ,  $Y_{O_2} = 0,211496$  e  $T = 295\text{ K}$ . A velocidade de saída dos “jatos piloto” é de  $13,3\text{ ms}^{-1}$  e a liberação de calor nas chamas piloto é aproximadamente 1% do poder térmico total da chama do queimador *Delft* (STÖLLINGER, 2005).

Com o objetivo de encontrar e aplicar um modelo apropriado para a melhoria da simulação de combustão turbulenta utilizado o pacote comercial de CFD “FLUENT”, Stöllinger (2005) realizou um estudo numérico em uma configuração de queimador *Delft* do tipo III, enfatizando especialmente o modelo químico e o modelo de mistura descrevendo a mistura molecular das espécies e a inclusão dos efeitos tridimensionais. Foi considerado também a presença das chamas piloto. Ele observou que a inclusão da combustão das chamas piloto em simulações tridimensionais do queimador *Delft* do tipo III é muito difícil mas necessária para estabilizar a chama principal. Estas dificuldades resultam principalmente do fato das chamas piloto serem do tipo pré-misturadas. Outro fator importante é que os dois processos de combustão envolvidos são causados por diferentes processos e tem diferentes escalas de comprimento e de tempo. Devido ao uso de um único modelo de turbulência para descrever os dois processos, a energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta foram super-estimadas. Os resultados da simulação da chama piloto podem ser usadas como condições de entrada em uma segunda simulação, onde a chama principal é modelada com o modelo de turbulência  $k-\epsilon$  e modelo de Função Densidade Probabilidade (PDF).

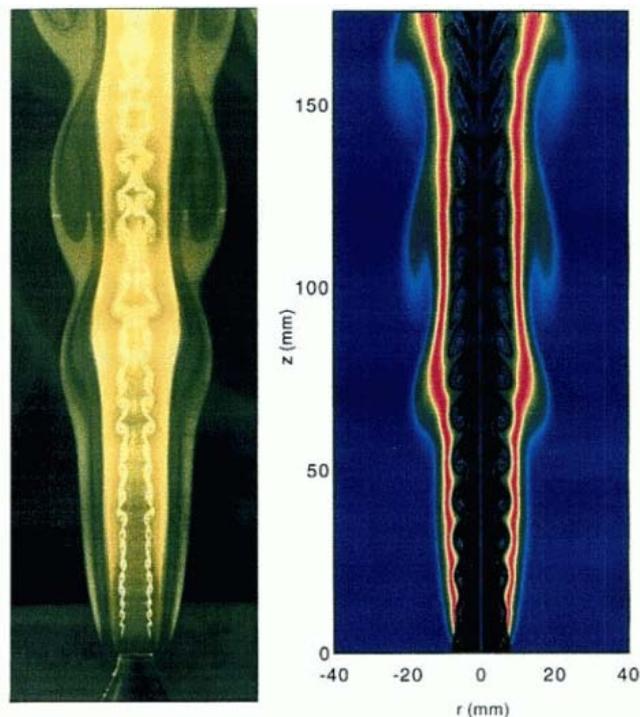
Com a necessidade de obter mais informações sobre escoamentos reativos turbulentos, Martins *et al.* (2005) realizaram a construção de um queimador tipo *Delft*, com condições iniciais e de contorno bem definidas, para avaliar a interação entre reação química e turbulência em chamas turbulentas não pré-misturadas. Eles utilizaram anemômetros de fio quente, para realizar medidas de velocidade, termopares, para realizar medidas de temperatura, e técnicas de quimiluminescência para medição dos radicais  $CH$  e  $C_2$ . Também utilizaram análise de reconstrução tomográfica para comparar as emissões de radicais e distribuições espaciais de temperatura. Foi verificado que os perfis radiais de velocidade média axial medidos mostram uma boa concordância com os testes padrões de escoamento realizados nas instalações da Universidade Técnica de *Delft*. Foi observado uma forte dependência entre temperatura e emissões de  $CH$  e  $C_2$ . A configuração do queimador é idêntica a descrita por Stöllinger (2005), sendo que o diâmetro do bocal do jato de combustível é de  $8\text{ mm}$ , e o queimador opera com ar primário e secundário. O queimador é posicionado em um fluxo de ar de  $0,4\text{ ms}^{-1}$  não confinado, produzido por um túnel de vento com uma seção de saída quadrada com  $0,54\text{ m}$  de comprimento lateral.

## 2.2 Turbulência

Turbulência é o estado do movimento de fluido caracterizado por aleatoriedade aparente e vorticidade tridimensional caótica. Quando turbulência está presente, ela usualmente domina todos outros fenômenos de escoamento, resultando em aumento da dissipação de energia, mistura, transferência de calor e arraste. Muitos escoamentos ocorrendo na natureza e em diversas aplicações industriais são turbulentos (Figura 2.6).



(a) Jato turbulento axissimétrico



(b) Chama difusiva

Figura 2.6 - Exemplos de escoamentos turbulentos.

Entre outras propriedades, escoamentos tipicamente turbulentos são transientes e contém flutuações na velocidade aparentemente aleatórias com uma ampla faixa de escalas de comprimento e de tempo (Figura 2.7). Pode se considerar que a turbulência surge através de instabilidades de escoamentos laminares. O termo laminar é freqüentemente usado para descrever um escoamento não turbulento. A mudança de um escoamento de laminar para turbulento devido à instabilidades do estado laminar é denominada transição. Um dos parâmetro que, juntamente com a amplitude e o tipo de perturbações, determina o início da transição à turbulência em escoamentos é o número de Reynolds,  $UL/\nu$ , onde  $U$  é a velocidade característica do escoamento,  $L$  é a escala de comprimento característico e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido. A viscosidade fornece um mecanismo dissipativo que tenta reduzir as perturbações, mas seus efeitos diminuem quando o número de Reynolds aumenta. Em consequência há uma tendência para o crescimento de instabilidades com o aumento do número de Reynolds (MATHIEU; SCOTT, 2000). A viscosidade é também fonte de vorticidade em escoamentos parietais, podendo ser causadora de instabilidade.

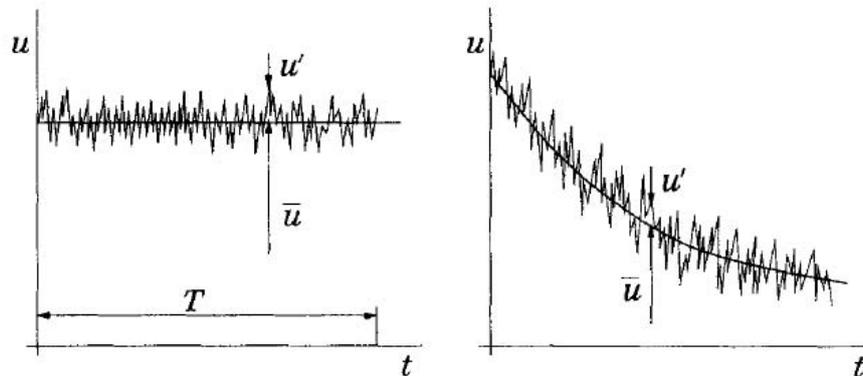


Figura 2.7 - Média temporal da velocidade para um regime permanente (esquerda) e médias de conjunto para um regime transiente (direita).

Fonte: Ferziger e Peric (1999).

Muitas técnicas tem sido usadas para investigar diferentes questões a respeito de turbulência e escoamentos turbulentos. O primeiro passo para providenciar uma caracterização destes estudos é distinguir entre pequena escala de turbulência e grande escala de movimentos em escoamentos turbulentos. Os movimentos de grande escala são fortemente influenciados pela geometria do escoamento, e controlam o transporte e a mistura. O comportamento dos movimentos de pequena escala, por outro lado, é de-

terminado quase que completamente pela taxa na qual recebem energia das grandes escalas, e pela viscosidade. Assim estes movimentos de pequena escala tem uma característica universal, independente da geometria do escoamento. Pela visualização da cascata de energia é que a turbulência pode ser considerada sendo composta de turbilhões de diferentes tamanhos. Os grandes turbilhões são instáveis e se dissolvem transferindo sua energia para turbilhões menores. Estes turbilhões menores passam por um processo de dissolução similar, e continuam a transferir a energia para turbilhões ainda menores. Esta “cascata de energia”, na qual energia é transferida para turbilhões cada vez menores sucessivamente, continua até que o número de Reynolds  $Re(l) \equiv u(l)l/\nu$  é suficientemente pequeno para que a viscosidade molecular seja efetiva na dissipação de energia cinética turbulenta. A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$  é determinada, portanto, pelo primeiro processo na seqüência, o qual é a transferência de energia para os turbilhões maiores (POPE, 2000).

Escoamentos turbulentos parecem aleatórios no tempo e no espaço, não são experimentalmente reprodutíveis em detalhes e um escoamento diferente ocorre a cada vez que o mesmo experimento é realizado (MATHIEU; SCOTT, 2000). Pode se pensar que uma análise matemática meticulosa de qualquer escoamento seja irrelevante ou impossível. Mas as equações dinâmicas básicas que governam escoamentos laminares são também aplicáveis a escoamentos turbulentos. Desse modo, associado com algumas aproximações para simplificar as equações que descrevem o escoamento, a velocidade e a pressão podem ser descritas pelas equações de Navier-Stokes complementadas por condições iniciais e de contorno. Para condições iniciais e de contorno determinadas, essas equações fornecem uma solução específica.

Na análise teórica da turbulência normalmente imagina-se um experimento realizado muitas vezes sobre as mesmas condições indicadas conduzindo a um conjunto de experimentos diferentes. Médias de conjunto e distribuições de probabilidade podem ser definidas considerando um grande número de experimentos, desse modo, é introduzindo uma descrição estatística da turbulência. Valores médios são de importância particular na teoria de turbulência. Pode se definir média pela tomada de média sobre um grande número de realizações de um escoamento sobre as mesmas condições nominais. O valor médio também pode ser calculado de maneira usual do conhecimento de probabilidades de uma dada quantidade como um somatório sobre todos os possíveis valores ponderados por suas probabilidades. A característica aleatória aparente de escoamentos turbulentos sugerem que métodos estatísticos podem ser bem proveitosos (MATHIEU; SCOTT, 2000).

### 2.2.1 Natureza Física da Turbulência

As características físicas da turbulência são de extrema importância em qualquer situação para que se tenha uma compreensão dos fenômenos envolvidos. A turbulência não é uma propriedade exclusiva dos fluidos. De fato pode-se encontrar o comportamento turbulento em qualquer sistema dinâmico desde que o mesmo possa ser caracterizado por um alto número de graus de liberdade. A existência de turbulência resulta em uma mais rápida dispersão de calor, quantidade de movimento e material comparado com escoamentos laminares, conduzindo a propriedades substancialmente diferentes para escoamentos turbulentos. Algumas das principais características de escoamentos turbulentos são descritas a seguir (MATHIEU; SCOTT, 2000).

- **Turbulência é um processo aleatório.** Escoamentos turbulentos possuem um grande número de graus de liberdade espacial, deste modo, quando são realizadas medidas das propriedades do escoamento tem-se como resultado sinais flutuantes aleatórios em função do tempo.
- **Turbulência contém uma ampla faixa de diferentes escalas.** A escala de correlação de comprimentos característicos fornece uma importante medida da distância sobre a qual as flutuações da velocidade diferem significativamente, e portanto, do tamanho das escalas de turbulência. O tamanho das menores escalas dependem da viscosidade, diminuindo relativamente às grandes escalas com o aumento do número de Reynolds. O tamanho das grandes escalas é tipicamente fixado pela geometria global do escoamento.
- **Turbulência tem vorticidade e aleatoriedade nas pequenas escalas.** Escoamento turbulento é rotacional, isto é, contém vorticidade. Escoamento laminar pode, é claro, possuir vorticidade, mas uma característica de turbulência de alto número de Reynolds é que a vorticidade é intensa nas pequenas escalas e aleatória no espaço e tempo.
- **Turbulência surge à números de Reynolds altos.** Com o aumento do número de Reynolds, o termo convectivo não linear nas equações de Navier-Stokes se torna mais importantes comparado como o termo viscoso e a tendência à instabilidade, a qual é diminuída pela viscosidade, aumenta. Assim, um alto número de Reynolds é o pré-requisito para a produção de turbulência.
- **Turbulência dissipa energia.** Uma cascata de energia de alto número de Reynolds conserva energia mecânica, desde que seja essencialmente não viscosa. Assim, as grandes escalas transferem energia para escalas cada vez me-

nores num processo consecutivo até que a menor escala dissipa a energia por meio da viscosidade.

- **Turbulência é um fenômeno contínuo.** As menores escalas associadas com turbulência são aquelas determinadas pela viscosidade. Estas escalas são tipicamente muitas ordens de magnitude maiores que o caminho livre molecular. Assim, a hipótese de contínuo é válida e portanto as equações de Navier-Stokes são aplicáveis.
- **Turbulência é intrinsecamente tridimensional.** O estiramento de vórtice não age no escoamento bidimensional e, na ausência de difusão viscosa, os vórtices são convectados, sem mudança no escoamento. Desta forma, para que ocorra o estiramento de vórtice é necessário a degeneração de vorticidade bidimensional em turbulência tridimensional.
- **As grandes escalas de turbulência não são fisicamente sensíveis à viscosidade quando o número de Reynolds é suficientemente alto.** Se o número de Reynolds turbulento é alto o suficiente, a dinâmica das grandes escalas são essencialmente não viscosas, e portanto, tornam-se insensíveis à viscosidade.

## 2.2.2 Escalas da Turbulência

Para modelagem de turbulência são necessárias tanto escalas temporais quanto escalas espaciais. Com as quantidades adequadas, as escalas necessárias podem ser construídas.

### 2.2.2.1 Escalas Dissipativas de Kolmogorov

Para lançar o conceito de escala de dissipação viscosa de Kolmogorov, toma-se um turbilhão de tamanho característico  $l$  com uma velocidade característica  $u_l$  originário de um escoamento de um fluido de viscosidade  $\nu$ . Define-se então um número de Reynolds local:

$$\text{Re}_l = \frac{u_l l}{\nu}. \quad (2.16)$$

Este parâmetro representa a importância relativa das forças de inércia e das forças viscosas. Admita-se que a escala  $l$  esteja numa zona do espectro onde, pela teoria de Kolmogorov,  $u_l = (\epsilon l)^{1/3}$ , onde  $\epsilon$  é a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Substituindo  $u_l$  na [Equação 2.16](#) tem-se  $\text{Re}_l = (\epsilon l^4)^{1/3}/\nu$ . Considerando que, para esta escala  $l$ , os efeitos viscosos são pequenos pode-se afirmar que  $\text{Re}_l$  é maior que 1. Se  $l$

diminui  $Re_l$  diminui também e se  $l < l_K$ , onde  $l_K$  é definido por:

$$l_K = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}. \quad (2.17)$$

então  $Re_l$  torna-se menor que 1 e os efeitos viscosos passam a dominar os efeitos de inércia. Esta escala  $l_K$  é a escala dissipativa de Kolmogorov. Logo, as instabilidades turbilhonares de tamanhos menores que  $l_K$  são dissipadas por efeitos viscosos e não podem se desenvolver. Esta análise permite entender porque o espectro de energia cinética cai tão rapidamente quando se aproxima do número de onda dissipativo de Kolmogorov,  $2\pi/l_K$ . Fazendo-se uma análise dimensional e expressando-se o tempo característico em função de  $\nu$  e  $\epsilon$ , chega-se à seguinte expressão para este parâmetro, relativo às estruturas dissipativas de Kolmogorov:

$$t_K = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

De forma semelhante deduz-se as escalas de velocidade, de vorticidade (da ordem do inverso da escala de tempo de Kolmogorov) e de energia cinética turbulenta de Kolmogorov (da ordem do quadrado da escala de velocidade) (SILVEIRA NETO, 2004):

$$u_K = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad (2.19)$$

$$\Omega_K = \left( \frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2}, \quad (2.20)$$

$$E_K = (\nu\epsilon)^{1/2}. \quad (2.21)$$

### 2.2.2.2 Grandes Escalas

As maiores estruturas de um escoamento são determinadas pela geometria que lhes dão origem. Seja  $L$  a escala de comprimento típica de um escoamento: por exemplo o diâmetro de um cilindro longo à jusante do qual se forma uma esteira turbilhonar. Seja  $U$  a escala de velocidade, ou seja, a velocidade de transporte das grandes estruturas de um escoamento. Com estas duas grandezas características define-se as demais, na seguinte ordem: tempo, vorticidade e energia, as quais são dadas pelas seguintes equações (SILVEIRA NETO, 2004):

$$t = \frac{L}{U}, \quad (2.22)$$

$$\Omega = \frac{U}{L}, \quad (2.23)$$

$$E = U^2. \quad (2.24)$$

### 2.2.2.3 Taxa de Dissipação

Para os escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos pode-se fazer a hipótese do equilíbrio para os quais a dissipação viscosa  $\epsilon$  é igual à taxa de injeção de energia cinética nas grandes escalas  $U^2/t$ . É interessante perceber que a dissipação viscosa pode então ser expressa em função de grandezas independentes da viscosidade, como ilustrado esquematicamente na [Figura 2.8](#). Desta forma pode-se expressar a taxa de dissipação como:

$$\epsilon \approx \frac{U^2}{t} = \frac{U^3}{L}. \quad (2.25)$$

Com esta equação diz-se que a taxa de dissipação pode ser estimada a partir de parâmetros relativos às grandes escalas, sem a participação da viscosidade ([SILVEIRA NETO, 2004](#)).

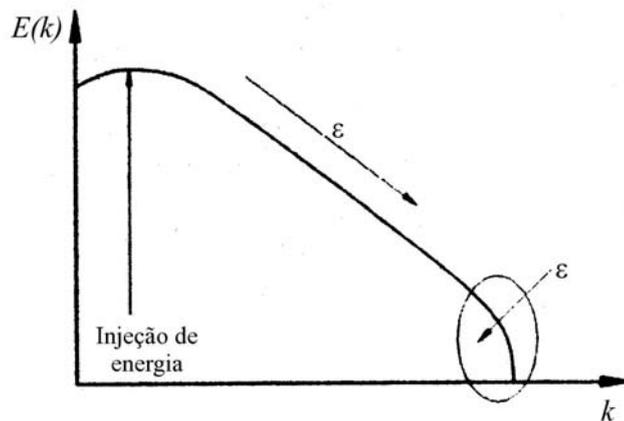


Figura 2.8 - Esquema ilustrativo da hipótese do equilíbrio.

Fonte: [Silveira Neto \(2004\)](#).

### 2.2.2.4 Relações Entre as Escalas da Turbulência

Pode-se, agora, deduzir relações interessantes envolvendo as escalas estabelecidas acima. Por exemplo, substituindo-se a [Equação 2.25](#) na [Equação 2.17](#) obtém-se:

$$l_K = \left( \frac{\nu^3 L}{U^3} \right)^{1/4}, \quad (2.26)$$

sendo

$$\frac{L}{l_K} = \text{Re}_L^{3/4}. \quad (2.27)$$

Analogamente,

$$\frac{t}{t_K} = \text{Re}_L^{1/2}, \quad (2.28)$$

$$\frac{U}{u_K} = \text{Re}_L^{1/4}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_K} = \text{Re}_L^{-1/2}, \quad (2.30)$$

$$\frac{E}{E_K} = \text{Re}_L^{1/2}. \quad (2.31)$$

Observa-se alguns fatos interessantes ao analisar estas expressões. Todas elas mostram que as escalas dissipativas são muito menores que as escalas das estruturas coerentes, exceto a da vorticidade. As leis de variação com o número de Reynolds são diferentes. Vê-se que as escalas de comprimento variam mais rapidamente que as escalas de tempo e de velocidade. Pela [Equação 2.30](#) vê-se que as pequenas escalas têm mais vorticidade que as grandes escalas, e, de forma contrária, pela [Equação 2.31](#), as grandes escalas são portadoras de uma maior quantidade de energia ([SILVEIRA NETO, 2004](#)).

### 2.2.2.5 Escalas Moleculares versus Escalas Turbulentas

As escalas dissipativas de Kolmogorov são as menores que podem ocorrer em um escoamento turbulento. É importante verificar quando estas escalas podem sofrer influências das escalas moleculares. Seja  $\xi$  o caminho médio molecular livre. Para os gases a escala molecular de velocidade pode ser associada à velocidade do som  $c$ . Da teoria cinética dos gases mostra-se que a viscosidade cinemática pode ser expressa em função destas duas grandezas características ( $\xi, c$ ) pela relação  $\nu \approx c\xi$ , sendo

$$\xi \approx \frac{\nu}{c}. \quad (2.32)$$

Mas da [Equação 2.27](#), tem-se:

$$l_K = \left(\frac{U}{\nu}\right)^{-3/4} L^{1/4}. \quad (2.33)$$

Dividindo a [Equação 2.32](#) pela [Equação 2.33](#) tem-se:

$$\frac{\xi}{l_K} = \frac{M}{\text{Re}_L^{1/4}}, \quad (2.34)$$

onde  $M = U/c$  é o número de Mach. Numa primeira análise desta equação poder-se-ia dizer que a escala característica molecular,  $\xi$ , é sempre muito menor que a escala dissipativa  $l_K$  uma vez que mesmo para altíssimos números de Mach o número de Reynolds deve ser ainda muito superior a ele de forma que esta relação seria sempre muito menor que a unidade. No entanto um cuidado especial deve ser tomado pois à medida que o número de Reynolds aumenta a escala dissipativa  $l_K$  tende às escalas moleculares. Segundo Lesieur (1994), para Mach acima de 15 estas duas escalas começam a se confundir. Esta informação é extremamente importante pois isto implicaria em dizer que as equações de Navier-Stokes não são mais representativas dos escoamentos turbulentos com  $M > 15$ . Ter-se-ia, neste caso, que utilizar equações alternativas do tipo Boltzmann. Felizmente, para a maioria dos problemas práticos da atualidade Mach não supera esta marca, mesmo para os escoamentos com fortes efeitos de aquecimento (SILVEIRA NETO, 2004).

### 2.2.3 Problema de Fechamento e Modelagem da Turbulência

Do ponto de vista do movimento médio, o problema com a não linearidade das equações instantâneas é que elas introduzem novas variáveis desconhecidas nas equações médias, as tensões de Reynolds. Há seis componentes de tensões individuais que devem ser consideradas:  $\overline{u_1'^2}$ ,  $\overline{u_2'^2}$ ,  $\overline{u_3'^2}$ ,  $\overline{u_1'u_2'}$ ,  $\overline{u_1'u_3'}$  e  $\overline{u_2'u_3'}$ . Elas tem sido relacionadas ao próprio movimento médio antes das equações serem resolvidas, de maneira que o número de variáveis desconhecidas e o número de equações sejam iguais. A ausência de equações adicionais é freqüentemente conhecido como o problema de fechamento da turbulência (WILCOX, 1993; POPE, 2000).

Um problema similar surgiu quando as equações instantâneas foram escritas, de modo que relações tinham sido introduzidas para relacionar as tensões (em particular, as tensões viscosas) ao próprio movimento. Estas relações (ou equações constitutivas) dependem somente das propriedades do fluido, e não do próprio escoamento. Devido a este fato, é possível realizar experimentos independentes, chamados experimentos viscosimétricos, nos quais as propriedades do fluido podem ser determinadas. Por exemplo, a viscosidade,  $\nu$ , depende somente da escolha do material à uma dada temperatura. É tentador uma escolha de uma aproximação para as tensões de Reynolds turbulentas. Um fechamento do tipo Newtoniano para as tensões de Reynolds, freqüentemente conhecido como modelo de viscosidade turbulenta ou turbilhonar, pode ser utilizado no fechamento das tensões de Reynolds.



### 3 MODELO MATEMÁTICO E METODOLOGIA NUMÉRICA

No presente capítulo serão apresentados o modelo matemático e a metodologia numérica utilizadas. O presente estudo numérico de jatos coaxiais turbulentos foi realizado através da utilização de uma biblioteca em  $C++$ , de código fonte aberto para dinâmica dos fluidos computacional, denominada  $\text{Open}\nabla\text{FOAM}$ . Este código fonte pode ser utilizado para criar aplicativos especialmente desenvolvidos para solucionar um problema específico em mecânica do contínuo e criar utilitários para manipulação de dados necessários ao processamento e a resolução destes problemas. O modelo numérico utilizado será apresentado a seguir. Este modelo se baseia na solução das equações médias de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando um método numérico de volumes finitos em malhas estruturadas não uniformes. Para o fechamento dos termos de tensões turbulentas foi utilizado um modelo de duas equações de transporte do tipo  $k - \epsilon$ , que será também apresentado na seqüência.

#### 3.1 Equações Governantes

As equações governantes para o problema estudado são as equações de Navier-Stokes para um escoamento compressível em regime transiente. O regime de escoamento e os gradientes de temperatura elevados não permitem o desacoplamento da equação de conservação de energia das equações de conservação de massa e de quantidade de movimento. As equações instantâneas de conservação de massa, quantidade de movimento e energia podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}] = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j e_0 + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}] = 0, \quad (3.3)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $t$  é o tempo,  $u$  é a velocidade,  $x$  é a coordenada espacial,  $p$  é a pressão e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Para um fluido Newtoniano, as tensões viscosas  $\tau_{ij}$  são dadas por:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (3.4)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica.

O fluxo de calor  $q_j$ , é dado pela lei de Fourier:

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} = -C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (3.5)$$

onde  $\lambda$  é a condutividade térmica,  $T$  é a temperatura,  $C_p$  é o calor específico a pressão constante e o número de Prandtl laminar  $\text{Pr}$  é definido por:

$$\text{Pr} = \frac{C_p \mu}{\lambda}. \quad (3.6)$$

Para o fechamento do sistema é necessário especificar uma equação de estado, que para um gás caloricamente perfeito pode ser escrita como:

$$p = \rho RT, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad e = C_v T, \quad C_p - C_v = R. \quad (3.7)$$

onde  $R$  é a constante do gás,  $\gamma$  é a razão dos calores específicos,  $C_v$  é o calor específico a volume constante e  $e$  é a energia interna.  $\gamma$ ,  $C_p$ ,  $C_v$  e  $R$  são admitidas constantes.

A energia total  $e_0$  é definida como:

$$e_0 = e + \frac{1}{2} u_k u_k. \quad (3.8)$$

## 3.2 Equações para o Escoamento Médio

Não é possível resolver as equações instantâneas de Navier-Stokes diretamente para a maioria das aplicações de engenharia. Para números de Reynolds tipicamente presentes em casos reais, o tamanho das escalas turbulentas menores exigiria uma malha computacional excessivamente fina, inviabilizando o cálculo. Muitos modelos turbulentos são baseados em valores médios das equações instantâneas.

### 3.2.1 Decomposição de Reynolds

Média de Reynolds refere-se ao processo de cálculo da média de uma variável ou uma equação no tempo, também conhecida como média temporal clássica. Seja  $\phi$  uma variável dependente que varia no tempo. Esta variável instantânea pode ser decomposta em uma componente média,  $\bar{\phi}$ , e uma flutuação,  $\phi'$ , da seguinte maneira:

$$\phi \equiv \bar{\phi} + \phi', \quad (3.9)$$

$$\bar{\phi} \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(t) dt. \quad (3.10)$$

Onde  $T$  é um tempo bastante longo para calcular a média sobre as flutuações em  $\phi$ . Média de Reynolds é freqüentemente usada em dinâmica dos fluidos para separar flutuações turbulentas do escoamento médio.

### 3.2.2 Decomposição de Favre

Seja  $\phi$  uma variável dependente. Esta variável pode ser decomposta em uma parte média,  $\tilde{\phi}$ , e uma flutuação,  $\phi''$ , usando uma média ponderada com a massa específica da seguinte maneira:

$$\phi \equiv \tilde{\phi} + \phi'', \quad (3.11)$$

$$\tilde{\phi} \equiv \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(t) \phi(t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(t) dt} \equiv \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}, \quad (3.12)$$

onde a barra superior (e.g.  $\overline{\rho\phi}$ ) representa a média temporal da decomposição de Reynolds. Algumas relações auxiliares incluem:  $\overline{\rho\phi''} = 0$ ;  $\overline{\rho\tilde{\phi}} = \bar{\rho}\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi}$ .

A média de Favre é usada em escoamento compressível para separar flutuações turbulentas do escoamento médio. Nos casos incompressíveis não é necessário usar média de Favre, visto que, as flutuações turbulentas não conduzem à alguma flutuação na massa específica. Neste caso uma simples média de Reynolds pode ser usada. Somente em escoamentos compressíveis é necessário utilizar uma média mais complexa como a média de Favre. Média de Favre pode ser usada para derivar as equações de Navier-Stokes com Médias de Favre.

### 3.2.3 Equações de Navier-Stokes com Médias de Reynolds

As equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds são equações de médias temporais de movimento para um escoamento de fluido. Elas são primariamente usadas enquanto se trabalha com escoamentos turbulentos. Estas equações podem ser usadas com aproximações baseadas em conhecimentos de propriedades de escoamentos turbulentos para dar soluções médias aproximadas para as equações de Navier-Stokes. Para um escoamento incompressível de fluido Newtoniano, estas equações podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = \bar{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\frac{\bar{p}}{\rho} \delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]. \quad (3.14)$$

O lado esquerdo da [Equação 3.14](#) representa a variação na quantidade de movimento média de um elemento de fluido devido ao regime transiente e a convecção no escoamento médio. Esta variação é balanceada pela força de volume média, a tensão

isotrópica devido ao campo de pressão médio, as tensões viscosas e a tensões aparentes  $(-\overline{u'_i u'_j})$  devido à flutuações no campo de velocidades, geralmente conhecidas como as tensões de Reynolds. A derivação das equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds pode ser realizada conforme descrito no [Apêndice A](#).

### 3.2.4 Equações de Navier-Stokes com Médias de Favre

Tomando-se a média temporal das equações de conservação e introduzindo a decomposição  $\phi = \tilde{\phi} + \phi''$  para as variáveis  $u$ ,  $\tau$ ,  $e_0$  e  $q$ , e a decomposição como média temporal clássica (Média de Reynolds) para  $p$  e  $\rho$ , obtemos as equações para o escoamento médio:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j] = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}^{tot}] = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{e}_0 + \tilde{u}_j \bar{p} + \tilde{q}_j^{tot} - \tilde{u}_i \tilde{\tau}_{ij}^{tot}] = 0. \quad (3.17)$$

Sendo

$$\tilde{\tau}_{ij}^{tot} = \tilde{\tau}_{ij}^{lam} + \tilde{\tau}_{ij}^{turb}, \quad (3.18)$$

$$\tilde{\tau}_{ij}^{lam} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (3.19)$$

$$\tilde{\tau}_{ij}^{turb} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}. \quad (3.20)$$

Onde  $k$  é a energia cinética turbulenta, definida por:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad (3.21)$$

e  $\mu_t$  é uma viscosidade turbulenta, que será estimada pelo modelo de turbulência, tendo sido assumida a hipótese de viscosidade turbilhonar (hipótese de Boussinesq) para as tensões turbulentas  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ .

$$\tilde{q}_j^{lam} = -C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (3.22)$$

$$\tilde{q}_j^{turb} = C_p \overline{\rho u'_j T} = -C_p \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (3.23)$$

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \left( \tilde{e}_0 - \frac{1}{2} \tilde{u}_k \tilde{u}_k - k \right). \quad (3.24)$$

A derivação das equações de Navier-Stokes com médias de Favre pode ser realizada conforme descrito no [Apêndice A](#).

### 3.3 Modelos de Turbulência

Os modelos de fechamento podem ser normalmente classificados como ([WILCOX, 1993](#)):

- **Modelos algébricos.** Esses modelos são baseados na hipótese de Boussinesq, que estabelece o conceito de viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ . Nesses modelos, uma equação algébrica, baseada em escalas turbulentas características é empregada para a determinação do valor da viscosidade turbulenta.
- **Modelos a uma equação.** Nesses modelos, uma equação diferencial de transporte é resolvida para uma determinada propriedade turbulenta. Em geral, a energia cinética turbulenta  $k$  é adotada como a propriedade turbulenta de referência. Uma segunda propriedade, normalmente uma escala de comprimento, é então fornecido por meio de uma expressão algébrica. Os modelos a uma equação empregam, igualmente, a hipótese de viscosidade turbulenta.
- **Modelos a duas equações.** Os modelos a duas equações utilizam duas equações diferenciais de transporte de propriedades turbulentas, configurando-se, assim como modelos de fechamento completos. Esses modelos adotam, tipicamente, uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta,  $k$ , juntamente com uma equação de transporte para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa,  $\epsilon$ , ou mesmo, em alguns casos, uma taxa de dissipação de energia cinética turbulenta específica,  $\omega$ .
- **Modelos para as tensões de Reynolds.** Também chamados de *modelos de fechamento de segunda ordem*, esses modelos utilizam equações de transporte explícitas para os componentes do tensor de Reynolds. Entretanto, mesmos nesses modelos, ainda se faz necessária a adoção de uma equação de transporte complementar para  $\epsilon$  ou  $\omega$  de modo a se obter o fechamento completo do problema.

A correta simulação de escoamentos complexos ou com transferência de calor é limitada pela necessidade de se utilizar um adequado modelo de turbulência no fechamento dos termos de tensões de Reynolds ([BRADSHAW, 1996](#)). Os modelos mais populares em uso hoje são os modelos de viscosidade turbilhonar de duas equações, sendo os modelos  $k - \epsilon$  e  $k - \omega$  os mais representativos, bem como as diversas variações do modelo  $k - \epsilon$ .

Nestes modelos derivam-se duas equações de transporte adicionais, uma para a energia cinética turbulenta  $k$  e outra para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$ , ou para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta específica  $\omega$ , no caso do modelo  $k - \omega$ . É importante lembrar que modelos turbulentos devem ser verificados comparando os resultados com medidas experimentais. Cuidados devem ser levados na interpretação de resultados de modelos fora da faixa de condições sobre as quais eles tem sido verificados por comparações com dados experimentais. Todos os modelos de turbulência tem suas limitações. Vários modelos podem ser testados a fim de avaliar qual é mais adequado para o problema que se deseja estudar (TANNEHILL *et al.*, 1997).

Boussinesq (1877) sugeriu, a mais de 100 anos atrás, que a tensão cisalhante turbulenta aparente pode ser relacionada à taxa de deformação média por meio de uma turbulência escalar aparente ou viscosidade turbilhonar. Para o tensor de tensões de Reynolds geral, a hipótese de Boussinesq, fornece:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu_t \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} + \rho k \right), \quad (3.25)$$

onde  $k$  é a energia cinética turbulenta,  $k = \overline{u'_i u'_i}/2$ , e a componente média do tensor da taxa de deformação  $\overline{S_{ij}}$  é dado por:

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right). \quad (3.26)$$

Por analogia com a teoria cinética dos gases, pela qual a viscosidade molecular para gases pode ser medida com considerável precisão, podemos esperar que a viscosidade turbulenta possa ser modelada como:

$$\mu_t = \rho u_l l, \quad (3.27)$$

onde  $u_l$  e  $l$  são velocidade e comprimento característicos da turbulência respectivamente. O problema, naturalmente, é encontrar meios adequados para medição de  $u_l$  e  $l$  (TANNEHILL *et al.*, 1997).

Com referência à utilização da hipótese de Boussinesq, os modelos turbulentos para fechar as equações de Reynolds podem ser também classificados em duas categorias. Modelos utilizando a hipótese de Boussinesq serão referidos como a Categoria I, ou modelos de viscosidade turbulenta. Estes são também conhecidos como modelos de primeira ordem. Muitos modelos freqüentemente empregados em cálculos de engenharia são deste tipo. Evidências experimentais indicam que a hipótese de viscosidade

turbulenta é válida em muitas circunstâncias de escoamento, entretanto existem exceções, e não há uma condição física obrigatória que mantenha esta hipótese. Modelos que permitem o fechamento das equações de Reynolds sem esta hipótese serão referidas como modelos da Categoria II e incluem aquelas conhecidas como modelos de tensões de Reynolds. Os modelos de tensões de Reynolds são também referidos como fechamento de segunda ordem ou de segundo momento. Modelos de uma terceira categoria serão referidos como aqueles que não são baseados completamente nas equações de Reynolds. Simulações de grandes escalas caem dentro desta categoria, visto que é um conjunto filtrado de equações de conservação que é resolvido ao invés das equações de Reynolds (TANNEHILL *et al.*, 1997).

Sabendo-se das limitações dos modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta na simulação de jatos, será realizado um estudo comparativo de alguns modelos de turbulência disponíveis no código numérico para verificar dentre eles qual é mais apropriado para o estudo pretendido. Os modelos de turbulência disponíveis no pacote numérico utilizados e aplicáveis no presente estudo foram os modelos  $k - \epsilon$  padrão,  $k - \epsilon$  RNG e  $k - \epsilon$  não linear de Shih.

### 3.3.1 Modelo $k - \epsilon$ Padrão

No modelo  $k - \epsilon$  padrão, as tensões de Reynolds nas equações de Navier-Stokes são modeladas pelo produto de uma viscosidade turbilhonar isotrópica e a taxa local de deformação. A viscosidade turbilhonar é obtida do produto de escalas de comprimento turbulento local e velocidade. A escala de velocidade turbulenta é representada por  $k^{1/2}$ , onde  $k$  é a energia cinética turbulenta por unidade de volume, e a escala de comprimento turbulento é determinada de  $\epsilon$ , a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de volume.  $k$  e  $\epsilon$  são derivadas das equações de transporte (Apêndice B), as quais são fechadas pelo uso de um número de procedimentos semi-empíricos no qual constantes padrões são empregadas. As equações de transporte para modelo  $k - \epsilon$  padrão são descritas a seguir (LAUNDER; SPALDING, 1974).

Para energia cinética turbulenta  $k$  tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k \bar{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + P_b - \rho \epsilon - Y_M. \quad (3.28)$$

Para dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$  tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon \bar{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_k + C_{3\epsilon} P_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k}. \quad (3.29)$$

A viscosidade turbulenta  $\mu_t$  é modelada por:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (3.30)$$

O termo de produção de energia cinética  $P_k$  é dado por:

$$P_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}. \quad (3.31)$$

Para avaliar  $P_k$  de uma maneira consistente com a hipótese de Boussinesq, tem-se:

$$P_k = 2\mu_t \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}. \quad (3.32)$$

O termo de empuxo  $P_b$  é dado por:

$$P_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}, \quad (3.33)$$

onde  $\text{Pr}_t$  é o número de Prandtl turbulento e  $g_i$  é a componente do vetor gravitacional na  $i$ -ésima direção. Para os modelos padrão e realizável, o valor padrão para  $\text{Pr}_t$  é 0,85. O termo realizável, é definido como sendo um requisito de que as tensões normais turbulentas não sejam negativas, e que a desigualdade de Schwarz ( $|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$ ) entre quaisquer quantidades flutuantes seja respeitada. Este é um princípio físico e matemático básico cuja solução de qualquer equação para um modelo de turbulência deve obedecer. Representa também a exigência mínima para impedir que um modelo de turbulência produza resultados não físicos (SCHUMANN, 1977).

O coeficiente de expansão térmica,  $\beta$ , é definido como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (3.34)$$

Para gases ideais, a [Equação 3.33](#) se reduz a:

$$P_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \quad (3.35)$$

O termo de dissipação devido à flutuação na dilatação,  $Y_M$ , é dado por:

$$Y_M = 2\rho \epsilon M_t^2, \quad (3.36)$$

onde  $M_t$  é o número de Mach turbulento, definido como:

$$M_t = \sqrt{\frac{k}{c^2}}, \quad (3.37)$$

sendo  $c$  a velocidade do som.

As constantes do modelo são:

$$C_{1\epsilon} = 1,44; \quad C_{2\epsilon} = 1,92; \quad C_\mu = 0,09; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\epsilon = 1,3. \quad (3.38)$$

### 3.3.2 Modelo $k - \epsilon$ RNG

O método RNG (grupo de renormalização) é usado para eliminar o efeito de turbilhões de escala pequena sobre as equações de Navier-Stokes, por meio da remoção sucessiva de escalas mais freqüentes a partir da escala de dissipação viscosa. Após cada iteração na qual uma banda restrita de escalas é removida, os valores remanescentes constituem um sistema modificado de equações de Navier-Stokes, na qual há uma viscosidade efetiva modificada que torna-se sucessivamente maior que a viscosidade molecular original. Através deste procedimento de eliminação de escalas, a teoria RNG conduz a uma equação diferencial para viscosidade efetiva, que interpola-se entre a viscosidade molecular,  $\mu$ , nas pequenas escalas de comprimento, e a viscosidade turbilhonar,  $\mu_t$ , nas escalas de comprimento dos turbilhões, correspondendo aos números de Reynolds altos de escoamentos completamente turbulentos.

As equações de transporte para  $k$  e  $\epsilon$  são (YAKHOT *et al.*, 1992):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k \bar{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_k \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_k + P_b - \rho \epsilon, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon \bar{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_k + C_{3\epsilon} P_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} - R_\epsilon, \quad (3.40)$$

onde  $\alpha_k$  e  $\alpha_\epsilon$  são os inversos do número de Prandtl efetivo para  $k$  e  $\epsilon$ , respectivamente. A viscosidade turbulenta é modelada como:

$$d \left( \frac{\rho^2 k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right) = 1,72 \frac{\hat{\nu}}{\sqrt{\hat{\nu}^3 - 1 + C_\nu}} d\hat{\nu}, \quad (3.41)$$

sendo  $\hat{\nu} = \mu_{\text{eff}}/\mu$  e  $C_\nu \approx 100$ .

O termo  $R_\epsilon$  é modelado como:

$$R_\epsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \epsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}, \quad (3.42)$$

sendo  $\eta \equiv (k/\epsilon) \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}}$ ,  $\eta_0 = 4,38$  e  $\beta = 0,012$ .

A equação de transporte para  $\epsilon$  pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_k + C_{3\epsilon} P_b) - C_{2\epsilon}^* \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (3.43)$$

sendo

$$C_{2\epsilon}^* \equiv C_{2\epsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3}. \quad (3.44)$$

E as constantes do modelo são:  $C_{1\epsilon} = 1,42$ ;  $C_{2\epsilon} = 1,68$ .

### 3.3.3 Modelos Não Lineares

Um dos pontos importantes ao se desenvolver um modelo de viscosidade turbulenta é fornecer à formulação da viscosidade turbulenta uma equação apropriada para a taxa de dissipação. O modelo  $k - \epsilon$  padrão, que é usado extensamente na dinâmica dos fluidos computacional, funciona bem para escoamentos tipo camada limite mas não para escoamentos com uma taxa de cisalhamento média elevada ou com regiões de separação grandes em relação à dimensão característica do problema. Nestes casos a viscosidade turbulenta está superestimada pela formulação padrão. Além disso, a equação modelo padrão da taxa de dissipação não dá sempre a escala apropriada de comprimento para a turbulência. A fim de melhorar a habilidade do modelo de viscosidade turbulenta para prever fluxos turbulentos complexos, estas limitações existentes no modelo devem ser removidas ou reduzidas. Deste modo, a proposição de novas formulações para a equação modelo da taxa de dissipação e a viscosidade turbulenta, podem melhorar significativamente o desempenho do modelo. Um nova equação modelo para a taxa de dissipação pode ser baseada na equação dinâmica para o vorticidade flutuante e considerando também o efeito da rotação média das tensões turbulentas (SHIH *et al.*, 1995).

Os modelos lineares de viscosidade turbilhonar são conhecidos por serem fisicamente inadequados e com diversas falhas importantes, dentre elas, pouca habilidade de capturar anisotropia das tensões de Reynolds, sensibilidade insuficiente às tensões secundárias e geração excessiva de turbulência em regiões do choque. As formulações não

lineares, por outro lado, são projetadas para dar uma melhoria no desempenho através da inclusão de componentes quadráticos de tensões e de vorticidade para captura de anisotropia, e produtos cúbicos para retornar uma sensibilidade apropriada às curvaturas. A fundamentação de todos os modelos cúbicos não lineares é uma equação constitutiva geral que relaciona o tensor das tensões de Reynolds a todas as combinações quadráticas e cúbicas do tensor de tensões e da vorticidade, e satisfaz todas as propriedades, requisitos de simetria e de contração. Usando a energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação para representar, respectivamente, a velocidade e as escalas turbulentas de comprimento, esta equação pode ser escrita da seguinte forma (CHEN *et al.*, 1998):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} - 2 \frac{\nu_t}{k} \overline{S_{ij}} + c_1 \frac{\nu_t}{\hat{\epsilon}} \left( \overline{S_{ik}} \overline{S_{kj}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{S_{kl}} \overline{S_{kl}} \right) \\ &+ c_2 \frac{\nu_t}{\hat{\epsilon}} \left( \overline{\Omega_{ik}} \overline{S_{kj}} + \overline{\Omega_{jk}} \overline{S_{ki}} \right) + c_3 \frac{\nu_t}{\hat{\epsilon}} \left( \overline{\Omega_{ik}} \overline{\Omega_{jk}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{\Omega_{kl}} \overline{\Omega_{kl}} \right) \\ &+ c_4 \frac{\nu_t k}{\hat{\epsilon}^2} \left( \overline{S_{ki}} \overline{\Omega_{lj}} + \overline{S_{kj}} \overline{\Omega_{li}} \right) \overline{S_{kl}} + c_5 \frac{\nu_t k}{\hat{\epsilon}^2} \left( \overline{S_{kl}} \overline{S_{kl}} - \overline{\Omega_{kl}} \overline{\Omega_{kl}} \right) \overline{S_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Onde  $\overline{S_{ij}}$  é a componente média do tensor da taxa de deformação dado por:

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right), \quad (3.46)$$

e  $\overline{\Omega_{ij}}$  é a componente média do tensor vorticidade dado por:

$$\overline{\Omega_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right). \quad (3.47)$$

As diferentes variações do modelo surgem das diferentes aproximações na determinação dos coeficientes  $c_1$  a  $c_5$  e das diferenças nas determinações das escalas nas equações de transporte.

A viscosidade turbulenta, a energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação homogênea,

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right)^2, \quad (3.48)$$

são obtidas, respectivamente, por:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\hat{\epsilon}}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i \hat{\epsilon}}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{1,3} \right) \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial x_j} \right] + \frac{\hat{\epsilon}}{k} (C_{1\epsilon} P_k - C_{2\epsilon} \hat{\epsilon}) + E_{\hat{\epsilon}} + Y. \quad (3.51)$$

Nas quais,  $C_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $E_{\hat{\epsilon}}$  e  $Y$  tomam as seguintes formas funcionais,

$$C_\mu = \frac{0,3 \left\{ 1 - \exp \left[ -0,36 / \exp \left( -0,75 \max(\hat{S}, \hat{\Omega}) \right) \right] \right\}}{1 + 0,35 [\max(\hat{S}, \hat{\Omega})]^{1,5}}, \quad (3.52)$$

$$f_\mu = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\text{Re}_t}{90} \right)^{0,5} - \left( \frac{\text{Re}_t}{400} \right)^2 \right], \quad (3.53)$$

$$E_{\hat{\epsilon}} = 0,0022 \frac{\hat{S} \nu_t k^2}{\hat{\epsilon}} \left( \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2, \quad (3.54)$$

$$Y = \max \left[ 0,83 \left( \frac{k^{1,5}}{2,5 \hat{\epsilon} y} - 1 \right) \left( \frac{k^{1,5}}{2,5 \hat{\epsilon} y} \right)^2 \frac{\hat{\epsilon}^2}{k}, 0 \right]. \quad (3.55)$$

E as constantes são dadas por:  $C_{1\epsilon} = 1,44$ ;  $C_{2\epsilon} = 1,92[1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2)]$ .

Onde  $\text{Re}_t = k^2 / \nu \hat{\epsilon}$  é o número de Reynolds da turbulência local,  $\hat{S} = (k/\hat{\epsilon}) \sqrt{2S_{ij} S_{ij}}$  e  $\hat{\Omega} = (k/\hat{\epsilon}) \sqrt{2\Omega_{ij} \Omega_{ij}}$  são invariantes das componentes médias do tensor da taxa de deformação e do tensor vorticidade. Os termos  $f_\mu$  e  $Y$  são, respectivamente, o coeficiente de amortecimento em modelos turbulentos de baixo número de Reynolds e a *correção Yap* que foi desenvolvida para neutralizar o crescimento excessivo da escala turbulenta de comprimento nas camadas limite sujeitas ao gradiente adverso da pressão.

### 3.3.4 Condições de Contorno para Escoamento Livre

Na maioria das simulações de CFD é necessário especificar valores iniciais das variáveis da turbulência nas entradas. Por exemplo, para se usar o modelo do  $k - \epsilon$  é necessário especificar valores para  $k$  e  $\epsilon$  nas entradas. Isto é freqüentemente difícil e também uma fonte de incertezas desde que a turbulência na entrada é raramente conhecida. Sendo assim, torna-se necessário fazer freqüentemente uma suposição baseada em uma certa experiência sobre a turbulência na entrada. Estimar diretamente as variáveis para o modelo de turbulência, como a energia cinética turbulenta  $k$ , a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$  ou as tensões de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ , é freqüentemente difícil. Ao invés, é mais fácil pensar em termos de variáveis como a intensidade de turbulência  $I$  e a escala de comprimento turbulento  $L$ , ou a razão de viscosidades do turbilhão  $\mu_t/\mu$ . Estas propriedades são mais intuitivas de compreender e podem ser

relacionadas mais facilmente às características físicas do problema. Uma vez que uma intensidade apropriada de turbulência e uma escala turbulenta de comprimento ou uma relação da viscosidade do turbilhão sejam estimadas as variáveis primitivas do modelo do turbulência podem ser calculadas.

A energia cinética turbulenta,  $k$ , pode ser calculada como:

$$k = \frac{3}{2}(\bar{u}I)^2, \quad (3.56)$$

onde  $\bar{u}$  é a velocidade do escoamento médio e  $I$  é a intensidade de turbulência.

A intensidade de turbulência é definida como:

$$I \equiv \frac{u'}{\bar{u}}, \quad (3.57)$$

onde  $u'$  é a raiz do quadrado das flutuações da velocidade.

Ao ajustar condições de contorno para uma simulação de CFD é freqüentemente necessário estimar a intensidade turbulenta nas entradas. Para fazer isto é bom ter algum conhecimento das medidas ou do experiência anterior para basear a estimativa. Alguns exemplos de estimativas mais comuns da intensidade turbulenta são: (1) Turbulência alta: Geometrias complexas no interior de escoamentos de alta velocidade como trocadores de calor e escoamentos em máquinas rotatórias (turbinas e compressores). A intensidade turbulenta está tipicamente entre 5% e 20%; (2) Turbulência média: Escoamentos em dispositivos não muito complexos como as grandes tubulações, ventilações ou escoamentos de baixa velocidade (número de Reynolds baixo). A intensidade turbulenta está tipicamente entre 1% e 5%; (3) Turbulência baixa: Escoamentos que originam de fluidos que escoam através de carros, submarinos e aviões. A intensidade turbulenta é tipicamente muito baixa, bem abaixo de 1%.

A taxa de dissipação  $\epsilon$ , pode ser calculada usando as seguintes fórmulas:

$$\epsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}, \quad (3.58)$$

$$\epsilon = C_\mu \frac{\rho k^2}{\mu} \left( \frac{\mu_t}{\mu} \right)^{-1}. \quad (3.59)$$

onde  $C_\mu$  é uma constante do modelo turbulento o qual tem normalmente um valor de 0,09,  $L$  é a escala de comprimento turbulenta e  $\mu_t/\mu$  é a razão de viscosidades do turbilhão.

A escala de comprimento turbulento,  $L$ , é uma quantidade física que descreve o tamanho dos turbilhões que contém os maiores níveis de energia em um escoamento turbulento. A escala turbulenta de comprimento não deve ser maior do que a dimensão do problema, do contrário significaria que os turbilhões são maiores do que a dimensão geométrica do problema. É comum ajustar a escala turbulenta de comprimento a uma determinada porcentagem de uma dimensão típica do problema. Por exemplo, na entrada de um estágio de uma turbina uma escala turbulenta típica de comprimento pode ser da ordem de 5% da altura da canaleta.

### 3.4 Método Numérico

O método numérico utilizado na solução do sistema de equações formado utiliza um esquema de Euler implícito, de primeira ordem para integração no tempo. As derivadas espaciais são discretizadas com um esquema de volumes finitos em malha estruturada não uniforme. Exemplos de diferentes tipos de malhas tridimensionais podem ser vistos na [Figura 4.2](#). Malhas estruturadas podem ser consideradas como um caso particular de malhas não estruturadas. Nas malhas não estruturadas suas células podem ser poliedros arbitrários, que por sua vez podem ser decompostos em tetraedros. Desta forma, um modelo arbitrário pode sempre ser representado por uma malha não estruturada de tetraedros. Códigos com malha não estruturada oferecem grande liberdade na geração da malha e manipulação em particular quando a geometria do domínio é complexa ou muda no decorrer do tempo.

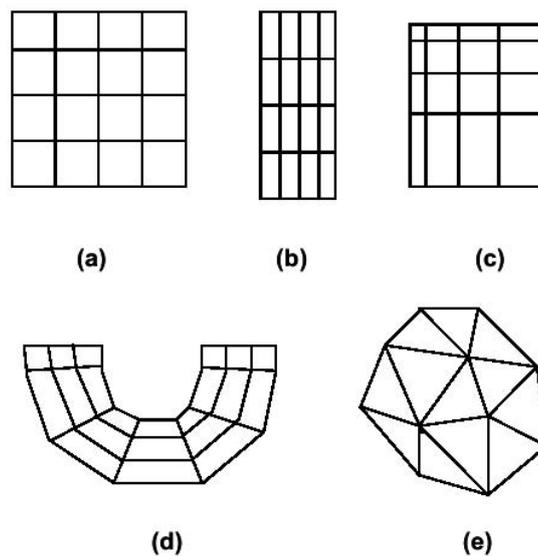


Figura 3.1 - Exemplos de malhas tridimensionais: (a) grade cartesiana uniforme; (b) grade regular; (c) grade retilínea; (d) malha estruturada; (e) malha não estruturada de tetraedros.

O método de volumes finitos é uma aproximação alternativa para resolver as equações governantes na forma integral e tem uma vantagem óbvia sobre o método de diferenças finitas se o domínio físico é altamente irregular e complicado. Igualmente, visto que as equações integrais são resolvidas diretamente no domínio físico, nenhuma transformação de coordenadas é requerida. Outra vantagem no método de volumes finitos é que massa, quantidade de movimento e energia são automaticamente conservadas, desde que a forma integral das equações governantes sejam resolvidas (TANNEHILL *et al.*, 1997).

A discretização do domínio é mostrado na Figura 3.2. As equações são discretizadas espacialmente neste domínio utilizando uma malha computacional. A discretização temporal, quando necessária, é realizada através da subdivisão em uma série de passos de tempo  $\Delta t$  que pode variar durante uma simulação numérica, a depender de algumas condições calculadas durante a simulação.

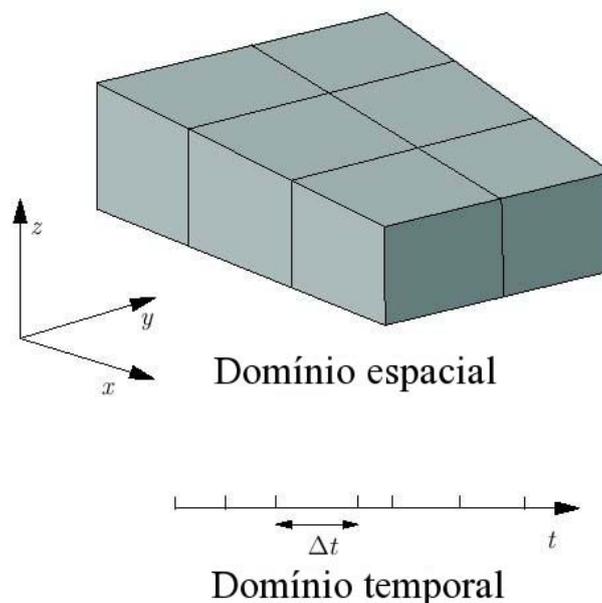


Figura 3.2 - Discretização do domínio solução.

Fonte: [OpenCFD \(2006\)](#).

A discretização espacial requer, mais detalhadamente, uma subdivisão do domínio em um determinado número de células, ou volumes de controle. As células são adjacentes, não se sobrepõem umas sobre as outras e preenchem completamente o domínio.

Uma célula típica é mostrada na [Figura 3.3](#). Variáveis dependentes e outras propriedades são principalmente armazenadas no centro de massa da célula  $P$  embora elas possam ser armazenadas nas faces ou nos vértices. As células são unidas por um conjunto de faces finas, que recebem o rótulo genérico  $f$  ([OPENCFD, 2006](#)).

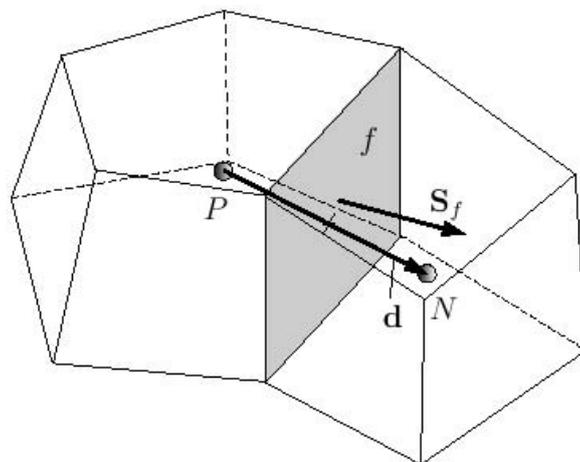


Figura 3.3 - Parâmetros na discretização de volumes finitos.

Fonte: [OpenCFD \(2006\)](#).

As equações médias de Navier-Stokes na forma conservativa e as equações do modelo de turbulência podem ser escritas na seguinte forma compacta:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{F}) = \mathbf{H}. \quad (3.60)$$

Onde  $\mathbf{Q}$  é o vetor de variáveis conservadas,  $\mathbf{E}$  é o vetor de fluxos não viscosos,  $\mathbf{F}$  é o vetor de fluxos viscosos e  $\mathbf{H}$  é o vetor contendo os termos fonte das equações.

A solução pelo método de volumes finitos é obtida integrando-se a [Equação 3.60](#) em um volume finito elementar:

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{F}) dV = \int_V \mathbf{H} dV. \quad (3.61)$$

O teorema da divergência de Gauss é aplicado no segundo termo da [Equação 3.61](#):

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dV + \int_S (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{H} dV. \quad (3.62)$$

Na forma final discretizada para um volume elementar, as equações resultam:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \sum_f (\mathbf{E} - \mathbf{F})_f \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{H}. \quad (3.63)$$

Onde  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{H}$  passam a ser valores médios para o volume avaliados da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{Q} dV; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{H} dV. \quad (3.64)$$

Os fluxos podem ser considerados como um somatório da contribuição de cada face do volume de controle:

$$\int_S (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_f \int_{S_f} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_f (\mathbf{E} - \mathbf{F})_f \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.65)$$

### 3.4.1 Discretização das Equações

O termo discretização significa a aproximação de um problema em quantidades discretas. O método de volumes finitos e outros, como o método de elementos finitos e o método de diferenças finitas, discretizam o problema da seguinte forma:

- Discretização espacial. Definindo o domínio solução por um conjunto de pontos que preencham e delimitam uma região do espaço quando conectados;
- Discretização temporal (Para problemas transientes). Dividindo o domínio temporal em um número finito de intervalos ou passos de tempo;
- Discretização das equações. Gerando um sistema de equações algébricas em termos de quantidades discretas das equações diferenciais parciais que caracterizam o problema, definidas em pontos específicos no domínio.

A discretização das equações converte as equações diferenciais parciais em uma série de equações algébricas que são comumente expressas em uma forma matricial:

$$[A][x] = [b], \quad (3.66)$$

onde  $[A]$  é uma matriz quadrada,  $[x]$  é um vetor coluna de variáveis dependentes e  $[b]$  é o vetor fonte. Discretização por Volumes Finitos de cada termo das equações diferenciais parciais é formulado pela integração do termo sobre uma célula de volume  $V$ . Os termos das derivadas espaciais são então convertidos a integrais de superfície de

células  $S$  contornando o volume através do teorema de Gauss.

$$\int_V \nabla \star \phi \, dV = \int_S d\mathbf{S} \star \phi, \quad (3.67)$$

onde  $\mathbf{S}$  é o vetor área superficial,  $\phi$  representa qualquer campo tensorial e a notação estrela  $\star$  é usada para representar qualquer produto tensorial. Integrais de volume e de superfície são linearizadas usando esquemas apropriados para cada termo das equações diferenciais parciais (OPENCFD, 2006).

### 3.4.1.1 Termo Laplaciano

O termo Laplaciano é integrado sobre um volume de controle e linearizado da seguinte forma:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) \, dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\Gamma \nabla \phi) = \sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f. \quad (3.68)$$

A discretização do gradiente da face é implícita quando o comprimento do vetor  $\mathbf{d}$  entre o centro da célula de interesse  $P$  e o centro da célula vizinha  $N$  é ortogonal à face do plano (Figura 3.3).

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{S}_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}. \quad (3.69)$$

No caso de malhas não ortogonais, um termo explícito adicional é introduzido e calculado por diferenças centradas nos valores do centro da célula.

### 3.4.1.2 Termo Convectivo

O termo convectivo é integrado sobre um volume de controle e linearizado da seguinte forma:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) \, dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{u})_f \phi_f = \sum_f F \phi_f. \quad (3.70)$$

O campo face  $\phi_f$  pode ser calculado usando uma variedade de esquemas:

- Diferenças centradas (CD). É de precisão de segunda ordem mas com limitações.

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N, \quad (3.71)$$

onde  $f_x \equiv \overline{fN} / \overline{PN}$ ,  $\overline{fN}$  é a distância entre  $f$  e o centro da célula  $N$  e  $\overline{PN}$  é a distância entre os centros das células  $P$  e  $N$ .

- Diferenças progressivas (UD). Determina  $\phi_f$  da direção do escoamento e é

limitada ao custo da precisão.

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{para } F \geq 0 \\ \phi_N & \text{para } F < 0 \end{cases} . \quad (3.72)$$

- Diferenças mistas (BD). Esquemas combinando UD e CD num esforço para conservar limitações com uma precisão razoável.

$$\phi_f = (1 - \gamma^*)(\phi_f)_{UD} + \gamma^*(\phi_f)_{CD}, \quad (3.73)$$

onde  $\gamma^*$  é um coeficiente de mistura.

### 3.4.1.3 Derivada Temporal de Primeira Ordem

A derivada temporal  $\partial/\partial t$  é integrada sobre um volume de controle da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho\phi) dV. \quad (3.74)$$

O termo é discretizado por simples diferenças no tempo usando:

- Novo valor  $\phi^{n+1} \equiv \phi(t + \Delta t)$ .
- Valor atual  $\phi^n \equiv \phi(t)$ .
- Valor anterior  $\phi^{n-1} \equiv \phi(t - \Delta t)$ .

São usados dois esquemas de discretização:

- Esquema de Euler implícito de precisão de primeira ordem.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\phi dV = \frac{(\rho_P\phi_P V)^{n+1} - (\rho_P\phi_P V)^n}{\Delta t}. \quad (3.75)$$

- Esquema de diferenças regressivas de precisão de segunda ordem.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\phi dV = \frac{3(\rho_P\phi_P V)^{n+1} - 4(\rho_P\phi_P V)^n + (\rho_P\phi_P V)^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.76)$$

#### 3.4.1.4 Derivada Temporal de Segunda Ordem

A derivada temporal de segunda ordem é integrada sobre um volume de controle e linearizada da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \frac{(\rho_P \phi_P V)^{n+1} - 2(\rho_P \phi_P V)^n + (\rho_P \phi_P V)^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (3.77)$$

Esta discretização é de precisão de primeira ordem.

#### 3.4.1.5 Termo Divergente

O termo divergente é estritamente um termo explícito. A sua diferença do termo convectivo reside no fato do divergente não ser um produto da variável dependente pela velocidade. O termo é integrado sobre um volume de controle e linearizado da seguinte forma:

$$\int_V \nabla \cdot \phi dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot \phi = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \phi_f. \quad (3.78)$$

O termo  $\phi_f$  é especificado diretamente e interpolado usando diferenças centradas.

#### 3.4.1.6 Termo Gradiente

No presente modelo, o gradiente é um termo explícito que pode ser calculado de várias maneiras:

- Integração de Gauss. A discretização é realizada usando o método padrão de aplicação do teorema de Gauss ao volume integral:

$$\int_V \nabla \phi dV = \int_S d\mathbf{S} \phi = \sum_f \mathbf{S}_f \phi_f. \quad (3.79)$$

- Método dos mínimos quadrados. Está baseado na seguinte idéia:
  - a) um valor no ponto  $P$  pode ser extrapolado ao ponto  $N$  vizinho usando o gradiente em  $P$ ;
  - b) o valor extrapolado pode ser comparado ao atual valor em  $N$ , a diferença é o erro;
  - c) se agora minimizamos o somatório do quadrado do erros ponderados em todas as vizinhanças de  $P$  com respeito ao gradiente, então o gradiente deve ser uma boa aproximação.

A discretização é realizada calculando um tensor  $\mathbf{G}$  à cada ponto  $P$  pelo somatório sobre o ponto  $N$  vizinho:

$$\mathbf{G} = \sum_N w_N^2 \mathbf{d}\mathbf{d}, \quad (3.80)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor do ponto  $P$  ao ponto  $N$  e a função peso  $w_N = 1/|\mathbf{d}|$ . O gradiente é então calculado como:

$$(\nabla\phi)_P = \sum_N w_N^2 \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{d}(\phi_N - \phi_P). \quad (3.81)$$

- Gradiente normal à uma superfície. Pode ser calculado nas faces das células usando o esquema

$$(\nabla\phi)_f = \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}. \quad (3.82)$$

#### 3.4.1.7 Termo Quadrado do Gradiente do Gradiente

No presente modelo, o termo quadrado do gradiente do gradiente é calculado tomando-se o gradiente do campo, em seguida toma-se o gradiente do campo cujo gradiente foi anteriormente calculado e então calcula-se a magnitude do quadrado do resultado. A expressão matemática para o quadrado do gradiente do gradiente de  $\phi$  é  $|\nabla(\nabla\phi)|^2$ .

#### 3.4.1.8 Termo Rotacional

O termo rotacional é calculado do termo gradiente. Primeiro, o gradiente é discretizado e então o rotacional é calculado usando a seguinte relação:

$$\nabla \times \phi = 2 (\text{skew } \nabla\phi), \quad (3.83)$$

onde  $\text{skew } \nabla\phi$  é a parte anti-simétrica de  $\nabla\phi$ .

#### 3.4.1.9 Termos Fonte

Os termos fonte podem ser especificados em 3 formas:

- Explícito. Um termo fonte explícito pode ser incorporado dentro de uma simples equação como a de valor de campo.
- Implícito. Um termo fonte implícito é integrado sobre um volume de controle

e linearizado por:

$$\int_V \rho \phi \, dV = \rho_P V_P \phi_P. \quad (3.84)$$

- Implícito/Explícito. O termo fonte implícito muda o coeficiente da diagonal da matriz. Dependendo do sinal dos termos coeficiente e matriz, isto irá aumentar ou diminuir o domínio diagonal da matriz. Diminuindo o domínio diagonal da matriz poderia causar instabilidade durante solução iterativa da equação matriz. Portanto, uma mistura de procedimento de discretização dos termos fonte, que é implícito quando os coeficiente que são maiores que zero, e explícito para coeficiente menores que zero, pode ser utilizada. Em termos matemáticos o coeficiente da matriz para o ponto  $P$  é  $V_P \max(\rho_P, 0)$  e o termo fonte é  $V_P \phi_P \min(\rho_P, 0)$ .

### 3.4.2 Discretização Temporal

É necessário considerar o tratamento das derivadas espaciais no problema transiente. Se denotarmos todas os termos espaciais como  $\mathcal{A}\phi$ , onde  $\mathcal{A}$  é qualquer operador espacial, então podemos expressar uma equação diferencial parcial transiente da seguinte forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi \, dV + \int_V \mathcal{A} \phi \, dV \right) dt = 0. \quad (3.85)$$

Usando o esquema de Euler implícito (Equação 3.75), o primeiro termo pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi \, dV \right) dt &= \int_t^{t+\Delta t} \frac{(\rho_P \phi_P V)^{n+1} - (\rho_P \phi_P V)^n}{\Delta t} dt \\ &= \frac{(\rho_P \phi_P V)^{n+1} - (\rho_P \phi_P V)^n}{\Delta t} \Delta t. \end{aligned} \quad (3.86)$$

O segundo termo pode ser expresso como:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \int_V \mathcal{A} \phi \, dV \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{A}^* \phi \, dt, \quad (3.87)$$

onde  $\mathcal{A}^*$  representa a discretização espacial de  $\mathcal{A}$ .

No presente modelo a integral no tempo é discretizada de três maneiras:

- Euler implícito

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathcal{A}^* \phi \, dt = \mathcal{A}^* \phi^{n+1} \Delta t. \quad (3.88)$$

É de precisão de primeira ordem no tempo, garante limitações e é incondicionalmente estável.

- Euler explícito

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathcal{A}^* \phi dt = \mathcal{A}^* \phi^n \Delta t. \quad (3.89)$$

É de precisão de primeira ordem, e é estável se o número de Courant  $Co$  é maior que 1. O número de Courant é definido como:

$$Co = \frac{U_f \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2 \Delta t}. \quad (3.90)$$

- Crank-Nicholson

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathcal{A}^* \phi dt = \mathcal{A}^* \left( \frac{\phi^{n+1} + \phi^n}{2} \right) \Delta t. \quad (3.91)$$

É de precisão de segunda ordem no tempo, é incondicionalmente estável mas não garante limitações.

### 3.4.3 Condições de Contorno

Condições de contorno são requeridas para completar o problema que se deseja resolver. Portanto precisamos especificar condições de contorno em todas as faces do contorno. Condições de contorno podem ser divididas em dois tipos:

- Dirichlet. Descreve o valor da variável dependente no contorno.
- Neumann. Descreve o gradiente da variável normal ao contorno.

Quando realizamos discretização de termos que incluem o somatório sobre faces, precisamos considerar o que acontece quando uma das faces é uma face do contorno.

- Valor estabelecido. Podemos especificar um valor estabelecido no contorno  $\phi_b$ .
  - Podemos simplesmente substituir  $\phi_b$  em casos onde a discretização requer o valor em uma face do contorno  $\phi_f$ .
  - Em termos onde o gradiente da face  $(\nabla \phi)_f$  é requerida.

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{S}_f| \frac{\phi_b - \phi_P}{\mathbf{d}}. \quad (3.92)$$

- Gradiente estabelecido. A condição de contorno gradiente estabelecido  $g_b$  é uma especificação no produto interno do gradiente e normal unidade ao contorno, ou

$$g_b = \left( \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \cdot \nabla \phi \right)_f . \quad (3.93)$$

- Quando discretização requer o valor em uma face do contorno  $\phi_f$  devemos interpolar o valor do centro da célula ao contorno por

$$\begin{aligned} \phi_f &= \phi_P + \mathbf{d} \cdot (\nabla \phi)_f \\ &= \phi_P + |\mathbf{d}| g_b. \end{aligned} \quad (3.94)$$

- $\phi_b$  pode ser substituído diretamente em casos onde a discretização requer o gradiente da face para ser calculado,

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{S}_f| g_b. \quad (3.95)$$

### 3.4.3.1 Condições de Contorno Físicas

A especificação de condições de contorno é usualmente uma interpretação do engenheiro do comportamento verdadeiro. Condições de contorno reais são geralmente definidas por alguns atributos físicos. Em escoamentos de fluidos incompressíveis existem os seguintes contornos físicos:

- Entrada. O campo de velocidade à entrada é fornecido e, por consistência, a condição de contorno na pressão é de gradiente nulo.
- Saída. O campo de pressão à saída é fornecido e uma condição de contorno de gradiente nulo na velocidade é especificado.
- Parede impermeável não escorregadia. A velocidade do fluido é igual aquela da própria parede (condição de valor estabelecido). A pressão é especificada como gradiente nulo desde que o fluxo através da parede seja nulo.

Em um problema cujo domínio solução e condições de contorno são simétricos sobre um plano, somente precisamos modelar metade do domínio para um lado do plano de simetria. As condições de contorno no plano devem ser se especificadas de acordo com a condição:

- Plano simétrico. A componente do gradiente normal ao plano deve ser nula.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos numericamente para seis configurações de jatos coaxiais turbulentos utilizando a metodologia numérica apresentada no capítulo anterior. Nos casos analisados não foi considerada a presença de parede no plano de saída dos bocais. Como observado por [Abdel-Rahman \*et al.\* \(1997\)](#), a presença desta parede acarreta uma menor interação com o ambiente vizinho, uma maior intermitência dos jatos e uma diminuição na taxa de arraste turbulento.

Uma análise simplificada da eficiência da malha computacional, utilizada neste trabalho, também será apresentada. Serão apresentados ainda resultados para três modelos de turbulência, com a finalidade de verificar qual deles apresenta uma melhor descrição para problema estudado, de modo a ser utilizado nos casos analisados neste trabalho. Uma descrição dos modelos de turbulência pode ser encontrada na [Seção 3.3](#). As seis configurações de jatos coaxiais turbulentos, as diferenças entre elas e os objetivos a cerca de cada estudo, serão descritos na seqüência.

### 4.1 Descrição dos Problemas Estudados

Os seis casos analisados são descritos a seguir. O caso 1 corresponde a um jato simples turbulento axissimétrico, e foi estudado para servir de validação do pacote numérico, através da comparação dos resultados com soluções analíticas da teoria de jato simples. O caso 2 corresponde a jatos coaxiais com  $r_u > 1$ . Os resultados obtidos para este caso foram comparados com resultados experimentais, com objetivo de validação do pacote numérico. O caso 3 corresponde a jatos coaxiais com  $r_u < 1$ . Os resultados obtidos neste caso foram comparados com os do caso 2 para verificar como a diminuição da razão de velocidades para um valor inferior a 1 influencia as características dos jatos. O caso 4 corresponde também a jatos com  $r_u < 1$ , mas o valor de  $r_u$  é inferior ao do caso 3. Os resultados obtidos neste caso foram comparados com os do caso 3 para verificar a tendência das características dos jatos quando a razão de velocidades atinge valores mais baixos. O caso 5 corresponde a jatos coaxiais com a configuração de um queimador do tipo *Delft*, mas sem considerar a presença da parede grossa entre os bocais. Este caso possui uma razão de velocidades idêntica a do caso 4, deste modo, os resultados obtidos foram comparados aos do caso 4 para verificar a influência do aumento na razão de áreas nas características dos jatos. O caso 6 corresponde a jatos coaxiais com a configuração de um queimador do tipo *Delft*, considerando a presença da parede grossa entre os bocais. Este caso foi estudado para se fazer comparações com o caso 5, verificando a influência da parede entre os bocais nas características dos jatos.

A parede entre os bocais no queimador *Delft* consiste de uma borda que separa o fluxo de combustível, jato interno, do fluxo do oxidante, jato externo. Esta borda possui uma espessura considerável e tem como principal objetivo a sustentação de “chamas piloto”, que servem para estabilizar a chama formada no queimador. Uma melhor descrição do queimador *Delft* pode ser vista na [Subseção 2.1.3](#).

A configuração detalhada dos casos de jatos coaxiais analisados neste trabalho estão descritos na [Tabela 4.1](#). No presente trabalho, as características dos casos 1, 2 e 3 correspondem ao estudado experimentalmente apresentado no trabalho de [Champagne e Wygnanski \(1971\)](#).

Tabela 4.1 - Configuração dos jatos coaxiais analisados.

Caso	$U_o/U_i$	$U_i$ ( $ms^{-1}$ )	$U_o$ ( $ms^{-1}$ )	$A_o/A_i$	$D_i \times 10^3$ ( $m$ )	$D_o \times 10^3$ ( $m$ )	$D_W \times 10^3$ ( $m$ )
1	0	60	0	2,94	25,4	50,41756	–
2	5	12	60	2,94	25,4	50,41756	–
3	0,5	60	30	2,94	25,4	50,41756	–
4	0,2	60	12	2,94	25,4	50,41756	–
5	0,202	21,8	4,4	28,13	8	42,43	–
6	0,202	21,8	4,4	28,13	8	45	15

Obs.:  $D_W$  é o diâmetro da parede entre os bocais.

O estudo realizado por [Champagne e Wygnanski \(1971\)](#) consiste de uma investigação experimental de jatos turbulentos em configuração coaxial. O diâmetro do bocal interno utilizado por eles foi de 2,54 *cm* (1 pol.) para todos os experimentos. O escoamento emergiu normal ao plano de saída dos bocais no centro de uma parede vertical plana, que estende-se aproximadamente por 1,2192 *m* (4 pés) na direção radial. O jato resultante escoou livremente na sala com exceção do piso no fundo. As sondas de detecção foram montadas sobre um carrinho, o qual movia-se alinhado paralelamente com o eixo do jato. Os fios dos anemômetros foram calibrados em um núcleo potencial interno cuja intensidade de turbulência foi da ordem de 0,1%.

Todas as medidas realizadas por eles estavam em velocidades subsônicas com a maior das velocidades iniciais começando aproximadamente a 60  $ms^{-1}$ . Eles mudaram a razão de áreas pela redução do diâmetro do bocal externo. Realizaram medidas para duas razões de áreas  $A_o/A_i = 2,94$  e 1,28. Com relação a razão de velocidades realizaram medidas para as razões  $U_o/U_i = 10; 5; 0,5$  e 0. O número de Reynolds nos bocais em todos os experimentos variou de 0 a  $10^5$ .

Eles apresentaram os perfis radiais de velocidades médias axiais para as quatro razões de velocidade iniciais analisadas, considerando as duas razões de áreas para cada razão de velocidade. Também apresentaram as distribuições de intensidade turbulenta axial e radial, e das tensões de cisalhamento turbulentas para a razão de velocidades  $U_o/U_i = 5$  considerando as duas razões de áreas. Além disso, apresentaram resultados para o decaimento da velocidade na linha central, crescimento da espessura média do jato e perfis de velocidades na região de similaridade. Com base nestes resultados eles observaram que o comprimento do núcleo potencial externo é de aproximadamente  $x/D_o = 8$  para o caso com  $A_o/A_i = 2,94$  e  $U_o/U_i = 5$ . Foi observado que o comprimento do núcleo externo aparentemente não depende da razão de velocidades, e que o comprimento do núcleo potencial interno aumenta com o aumento da razão de áreas, e diminui com o aumento da razão de velocidades para  $U_o/U_i > 1$ .

As condições iniciais e de contorno nas faces e no interior da geometria do domínio computacional devem ser especificadas para cada caso. As faces e o interior da geometria são preenchidos pelos campos da energia cinética turbulenta, da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta, das velocidades, das pressões e etc., além disso deve ser especificado a viscosidade cinemática do fluido de trabalho. Os campos da energia cinética turbulenta  $k$  e da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$  podem ser estimadas pela intensidade turbulenta  $I$  nos bocais e pela escala de comprimento turbulento  $L$ , conforme descrito na [Subseção 3.3.4](#). O campo de velocidades corresponde as condições iniciais dos fluxos escoando dos bocais coaxiais. A viscosidade cinemática  $\nu$  foi calculada pelo número de Reynolds do jato interno, utilizando a velocidade  $U_i$  e do diâmetro  $D_i$ . Devido a presença da borda entre os bocais no caso 6, foram especificadas funções de parede na descrição das condições de contorno das faces correspondentes a borda. Desse modo, uma descrição com relação às condições de contorno destes parâmetros ([Tabela 4.2](#)) faz-se necessária para cada caso descrito na [Tabela 4.1](#).

Tabela 4.2 - Condições de contorno para os parâmetros dos jatos coaxiais analisados.

Caso	$Re_{D_i} \times 10^{-5}$	$Re_{D_o} \times 10^{-5}$	$I(\%)$	$L/D_o$	$k(m^2s^{-2})$	$\epsilon(m^2s^{-3})$
1	1	0	5	0,05	13,5	6417,7
2	0,2	0,96	5	0,05	13,5	3233,2
3	1	0,48	5	0,05	3,375	404,148
4	1	0,4	5	0,05	0,54	25,87
5	0,087	0,093	5	0,05	0,0726	1,5151
6	0,087	0,099	5	0,05	0,0726	1,4286

O computador utilizado para as simulações dos casos descritos na [Tabela 4.1](#), consiste de 2 processadores AMD Athlon MP 2200+ (1800 MHz) e 1536 MB de memória DDR. A simulação dos casos de 1 a 4 duraram em média 3 dias para serem concluídas, enquanto que a simulação para os casos 5 e 6 duraram aproximadamente 5 dias, utilizando-se a configuração de computador descrita. Todas as simulações foram realizadas para regime permanente.

#### 4.1.1 Geometria do Domínio e Malha Computacional

A geometria do domínio computacional para os casos estudados consiste de uma fatia cilíndrica axissimétrica bidimensional, conforme mostrado na [Figura 4.1](#).

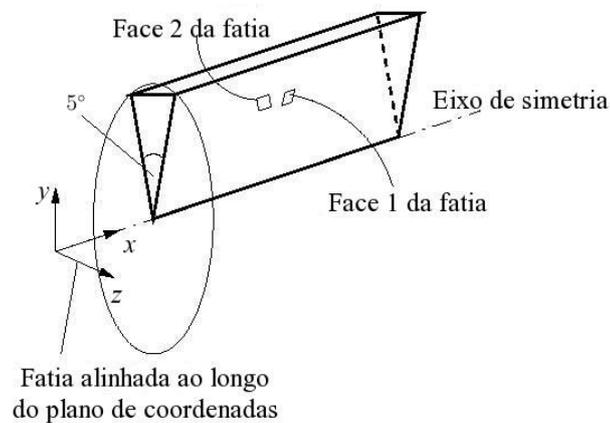
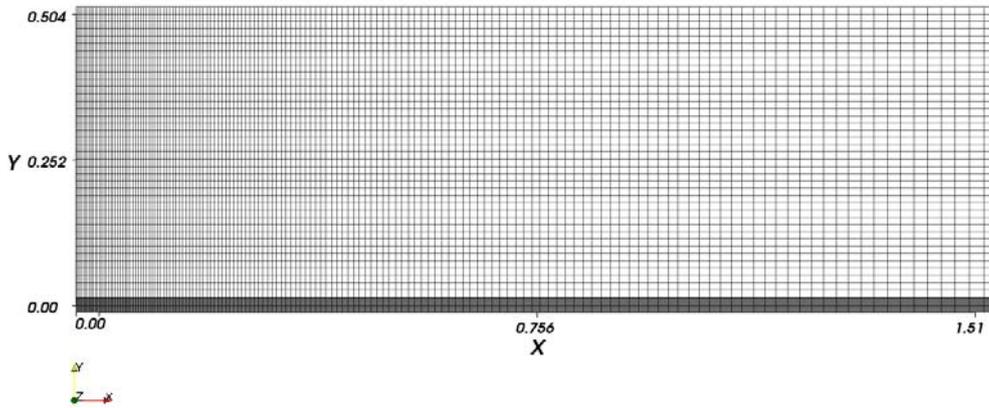


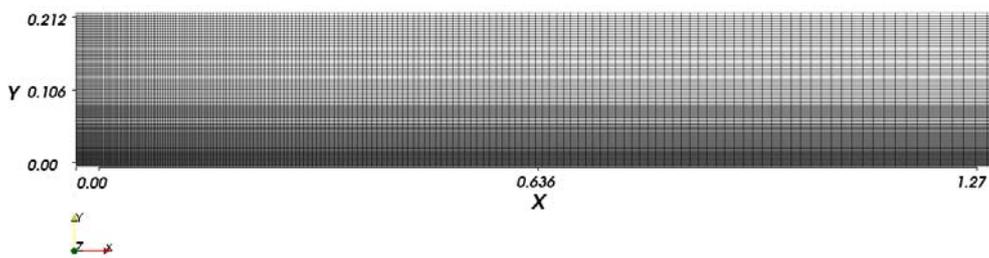
Figura 4.1 - Geometria axissimétrica utilizada nas simulações.

Fonte: [OpenCFD \(2006\)](#).

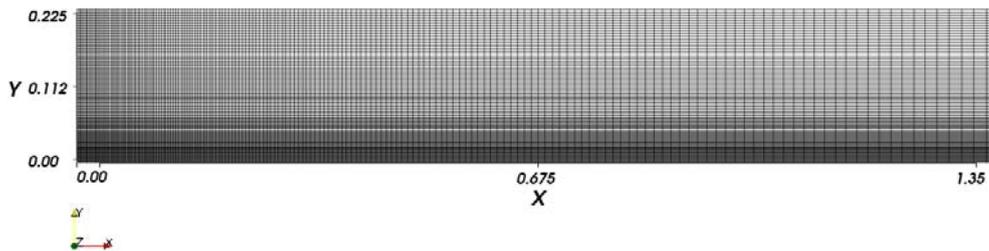
Nos casos de 1 a 4, esta fatia cilíndrica foi dividida em 3 blocos na direção radial. O primeiro bloco de tamanho  $D_i$ , o segundo bloco de tamanho  $D_o$ , cada um destes blocos contendo 10 células na mesma direção, e o último bloco de tamanho  $10 D_o$ , contendo 40 células. Na direção axial, o comprimento dos blocos é  $30 D_o$ , contendo 150 células com razão entre a primeira e a última célula igual a 8. Essa malha, com um total de 9000 células, foi denominada malha B ([Figura 4.2\(a\)](#)). Inicialmente foi proposto uma malha computacional com a metade do número de células em cada direção (malha A), totalizando 2250 células. Esta malha se mostrou pouco eficiente, demonstrando que as soluções são fortemente dependentes do refino da malha computacional. As malhas A e B foram analisadas utilizando o modelo  $k-\epsilon$  não linear de Shih. Um estudo comparativo dos modelos de turbulência utilizados é descrito na seqüência.



(a) Casos de 1 a 4



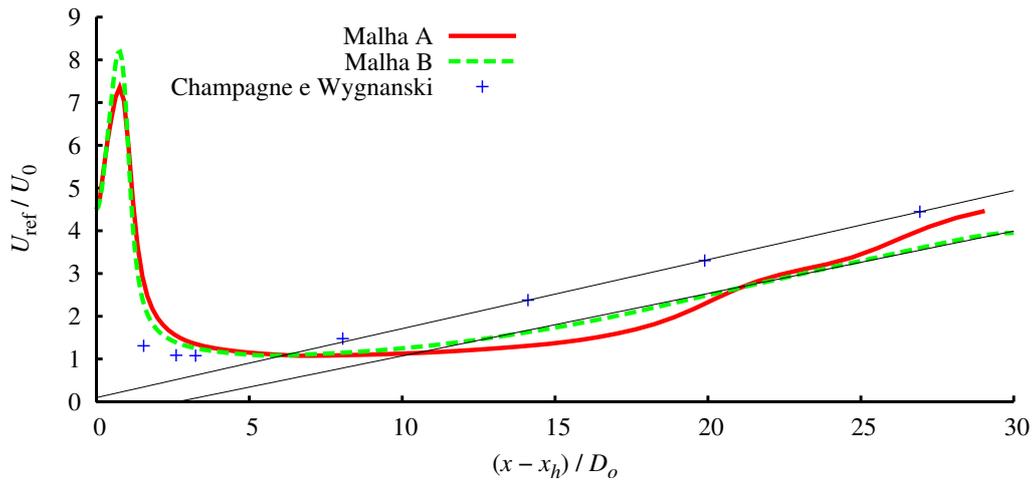
(b) Caso 5



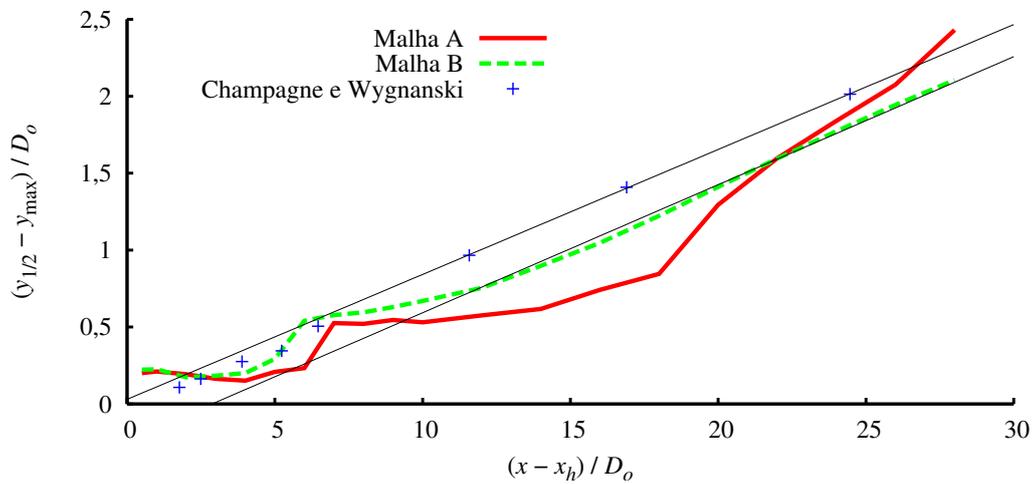
(c) Caso 6

Figura 4.2 - Malha computacional utilizada nos casos analisados (escala em  $m$ ).

No caso 5, para manter uma certa proporcionalidade em função da grande razão de áreas, o bloco de tamanho  $D_i$  contém 5 células, o bloco de tamanho  $D_o$  contém 22 células, e o último bloco, de tamanho  $5 D_o$ , contém 93 células com razão entre a primeira e a última célula igual a 4, na direção radial. Na direção axial, o comprimento dos blocos é  $30 D_o$ , contendo 180 células com razão entre a primeira e a última célula igual a 8 (Figura 4.2(b)). No caso 6, foram criados 4 blocos na direção radial, o primeiro de tamanho  $D_i$  contendo 5 células, o segundo de tamanho  $D_w$  (diâmetro da parede entre os bocais) contendo 4 células, o terceiro de tamanho  $D_o$  contendo 19 células, e o quarto bloco de tamanho  $5 D_o$  contendo 92 células com razão entre a primeira e a última célula igual a 4. Na direção axial, o comprimento dos blocos é  $30 D_o$ , contendo 180 células com razão entre a primeira e a última célula igual a 9 (Figura 4.2(c)).



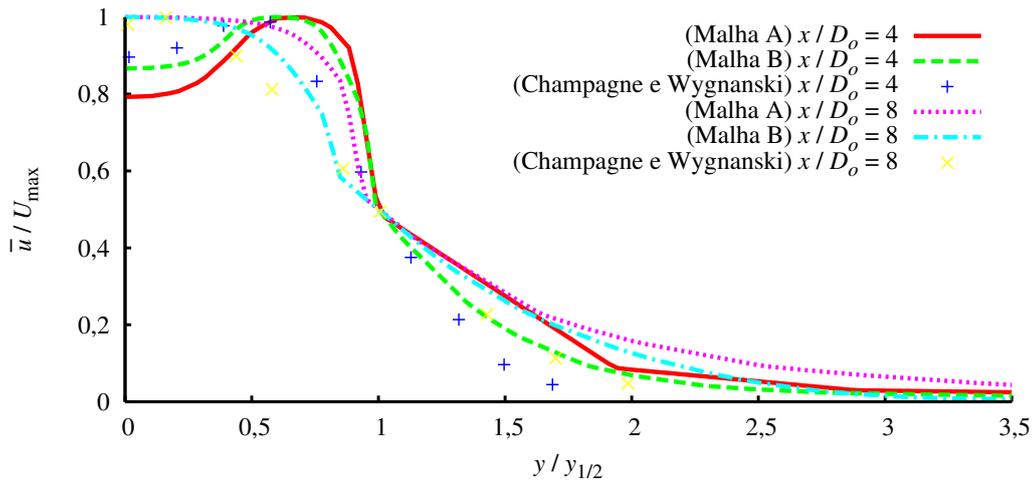
(a) Velocidade na linha central



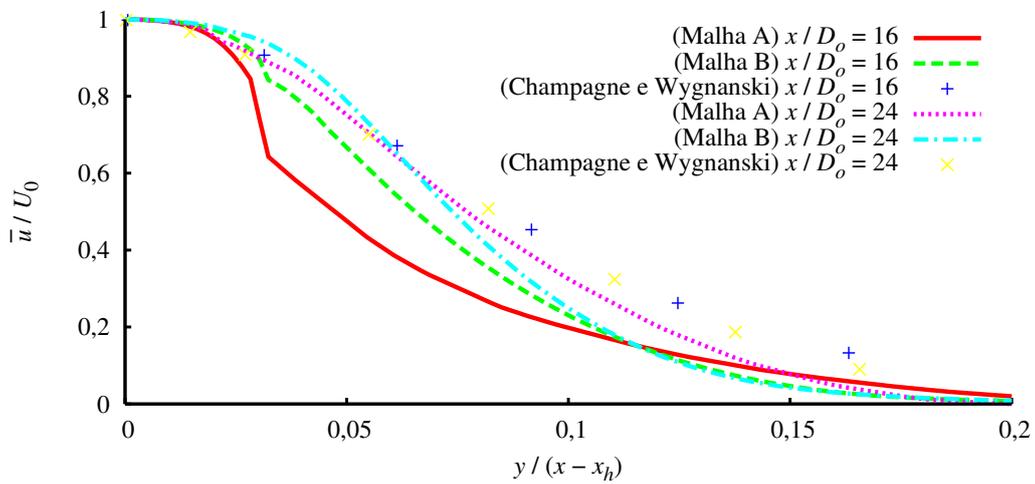
(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.3 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  utilizando as malhas A e B para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

As Figuras 4.3 e 4.4 apresentam resultados de simulação numérica para o caso 2 descrito na Tabela 4.1. Esses resultados são comparados com os resultados experimentais de Champagne e Wygnanski (1971), afim de verificar a variação destes com a qualidade da malha computacional. Na Figura 4.3 é possível ver que a malha A não apresenta uma variação linear para a velocidade na linha central e para o crescimento da espessura média do jato. A malha B, apresentou uma variação linear a uma distância  $x/D_o > 10$ , para a velocidade na linha central (Figura 4.3(a)), em comparação com os resultados experimentais que apresenta esta variação linear a uma distância  $x/D_o > 8$ . Observa-se também que a taxa de espalhamento para essa malha ( $S = 0,083$ ) ficou muito próxima do valor obtido experimentalmente ( $S = 0,081$ ), ao contrário da malha A ( $S = 0,111$ ).



(a) Região próxima aos bocais



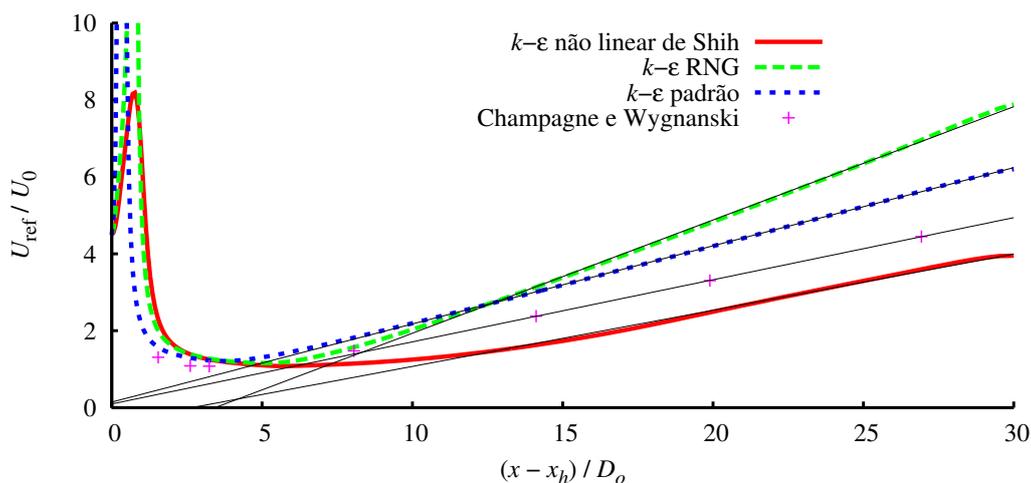
(b) Região de escoamento desenvolvido

Figura 4.4 - Perfis de velocidade normalizada utilizando as malhas A e B para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

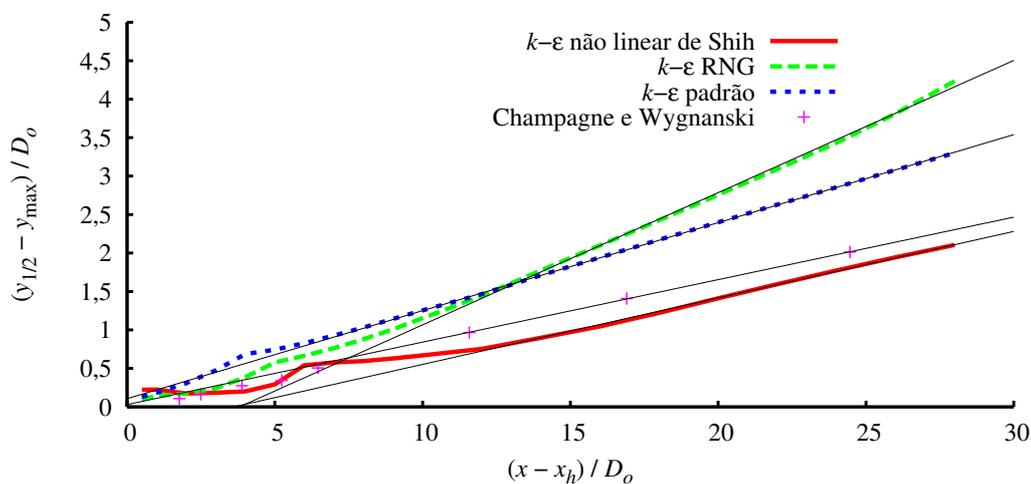
Quanto aos perfis de velocidades (Figura 4.4), observa-se que na região próxima aos bocais (Figura 4.4(a)), a malha B apresentou resultados mais próximos dos resultados experimentais do que a malha A. Na região de escoamento desenvolvido (Figura 4.4(b)), a malha B também apresentou resultados mais próximos do perfil de velocidade similar experimental a uma distância longitudinal  $x/D_o = 24$ . Como esperado, a malha B (mais refinada) apresentou melhores resultados do que a malha A (menos refinada). Deste modo, a malha B foi utilizada para o estudo dos demais casos. Um maior refinamento na malha computacional resultaria em resultados com uma melhor concordância, em comparação com resultados experimentais, mas acarretaria um maior custo computacional.

## 4.2 Comparação dos Modelos de Turbulência

Os modelos de turbulência do pacote numérico utilizados para a simulação dos casos de jatos coaxiais neste trabalho foram: o modelo  $k-\epsilon$  padrão; o modelo  $k-\epsilon$  RNG; o modelo  $k-\epsilon$  não linear de Shih. Os modelos foram comparados através dos resultados obtidos para o caso 2, em relação aos resultados experimentais de Champagne e Wygnanski (1971).



(a) Velocidade na linha central



(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.5 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  com os modelos de turbulência analisados para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

Pode ser observado na Figura 4.5, que os modelos  $k-\epsilon$  padrão e RNG apresentam uma variação linear, começando em  $x/D_o > 5$ , para a velocidade na linha central e

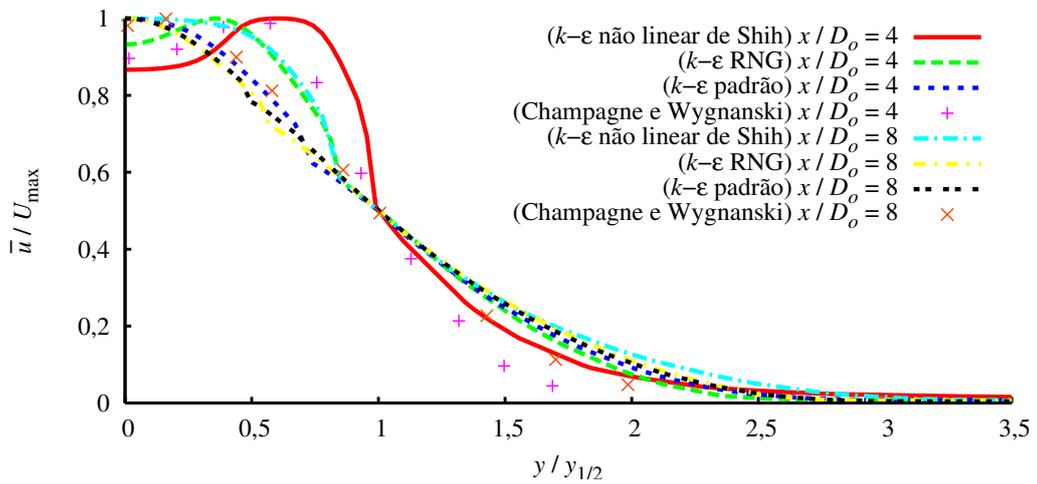
para o crescimento da espessura média do jato. O modelo  $k - \epsilon$  não linear de Shih apresenta uma taxa de espalhamento mais próxima do valor obtido experimentalmente por Champagne e Wygnanski (1971), conforme apresentado na Tabela 4.3. Além da taxa de espalhamento  $S$ , valores para constante de decaimento  $B$  e para origem virtual  $x_h$  podem ser obtidos a partir das linhas de tendência nas Figuras 4.5(a) e 4.5(b), conforme apresentado na Tabela 4.3. Na Figura 4.6, pode ser observado que o modelo  $k - \epsilon$  não linear de Shih apresenta melhores resultados do que os demais modelos para os perfis de velocidades, e que tende a uma melhor aproximação do perfil de velocidade similar encontrado experimentalmente.

Tabela 4.3 - Parâmetros obtidos da variação da velocidade na linha central e do crescimento da espessura do jato.

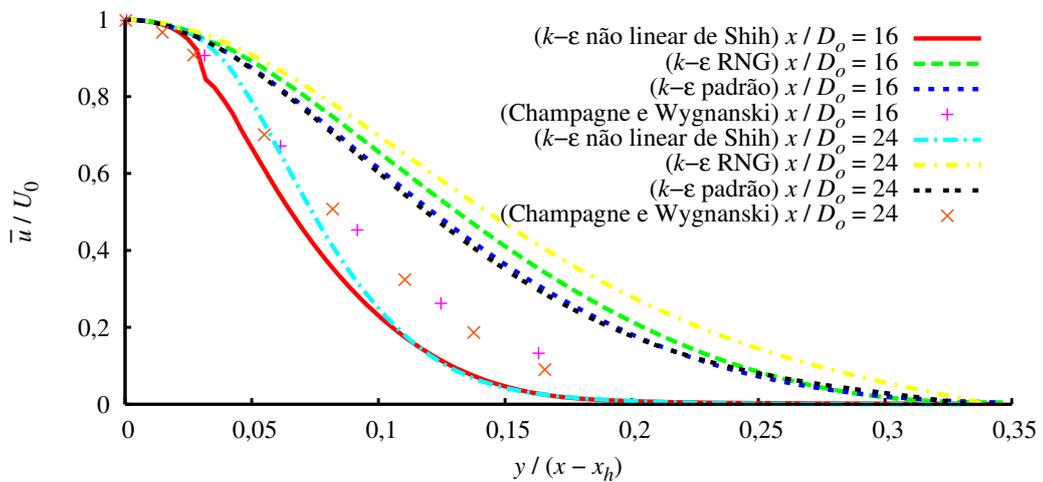
Modelo	$B$	$S$	$x_h/D_o$
$k - \epsilon$ não linear de Shih	6,847	0,086	3,609
$k - \epsilon$ RNG	3,395	0,171	3,799
$k - \epsilon$ padrão	4,922	0,114	-0,932
Champagne e Wygnanski	6,193	0,081	-0,365

Com relação aos modelos de turbulência analisados neste trabalho faz-se necessário alguns comentários com relação a estimativa da intensidade turbulenta. A intensidade turbulenta  $I$  estimada para o cálculo das condições de contorno para a energia cinética turbulenta  $k$  e para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$  foi de 5%, conforme descrito na Subseção 3.3.4. Foi observado que para valores baixos de intensidade turbulenta (por exemplo, 0,1% utilizada por Champagne e Wygnanski (1971)), os modelos  $k - \epsilon$  padrão e RNG não convergiram para uma solução e o modelo  $k - \epsilon$  não linear de Shih produziu resultados um pouco inconsistentes. Este problema de convergência nos resultados tem relação com as limitações dos modelos de turbulência e com o nível de refinamento da malha computacional.

Como os resultados obtidos para o modelo  $k - \epsilon$  não linear de Shih, de modo geral, se apresentaram melhores que para os demais modelos analisados, este foi utilizado no estudo dos demais casos de jatos coaxiais turbulentos.



(a) Região próxima aos bocais

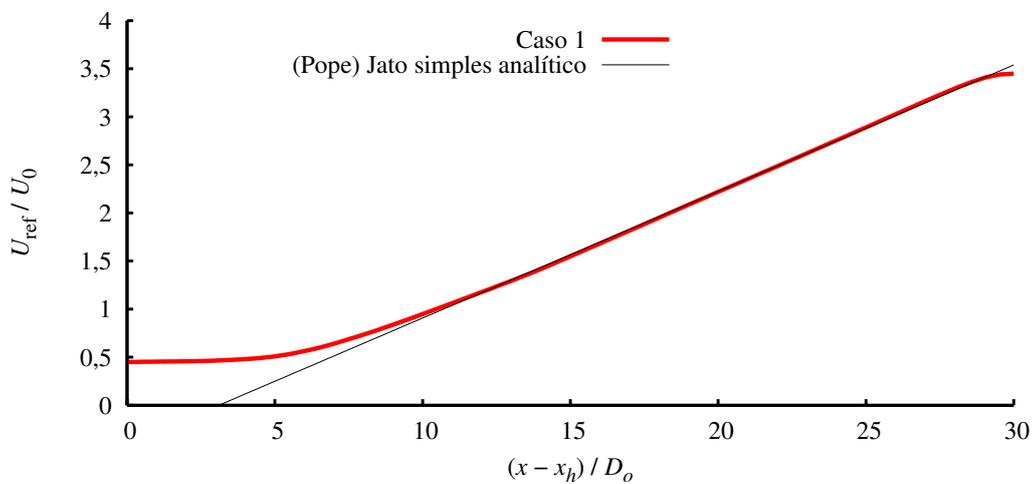


(b) Região de escoamento desenvolvido

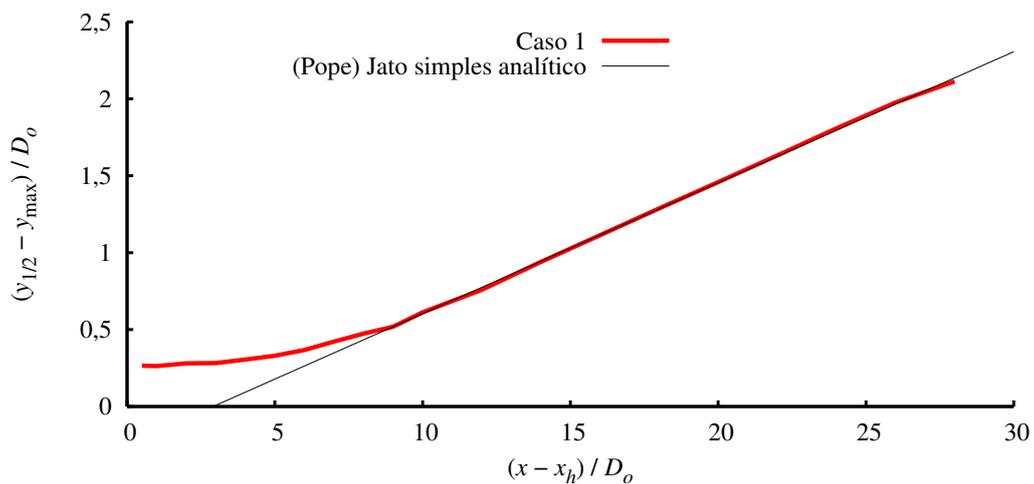
Figura 4.6 - Perfis de velocidade normalizada com os modelos de turbulência analisados para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

### 4.3 Jato Simples Axissimétrico (Caso 1)

O primeiro caso analisado consiste de um jato coaxial com uma razão de velocidades  $U_o/U_i = 0$ , ou seja, a velocidade do escoamento no bocal externo é igual a zero. Esta configuração de jatos coaxiais é equivalente a um jato simples turbulento axissimétrico. Este é um caso que serve para a validação do modelo, por meio da comparação dos resultados com soluções analíticas bem conhecidas da teoria de jato simples. O jato simples turbulento fornece análises importantes para utilização em escoamentos complexos, comumente encontrados na prática.



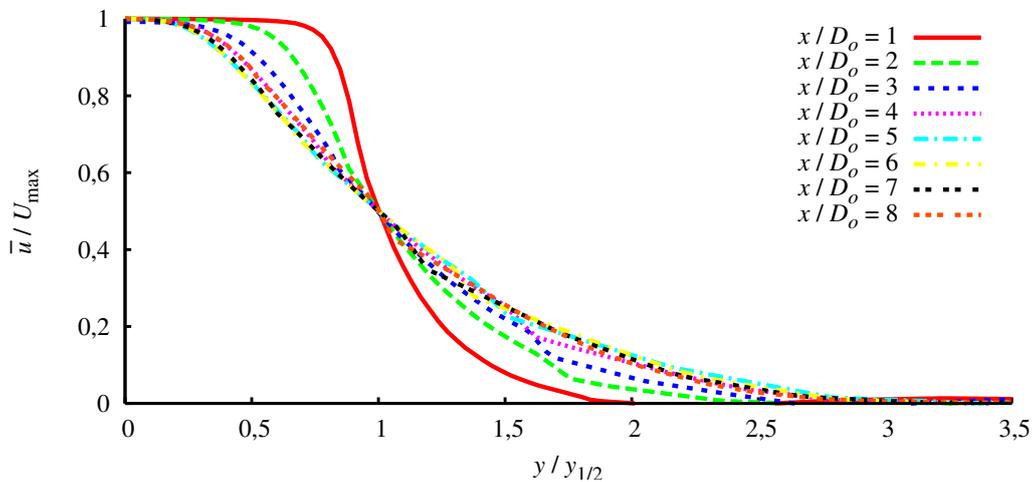
(a) Velocidade na linha central



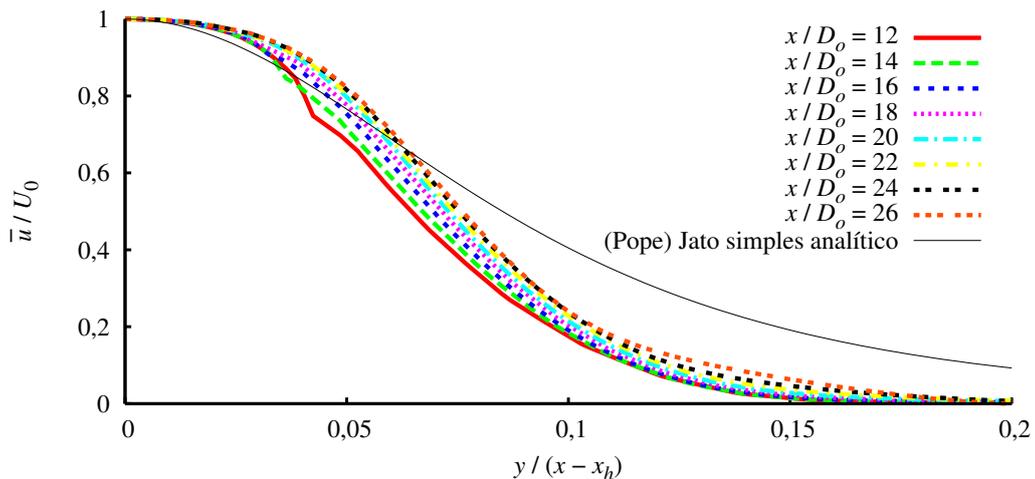
(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.7 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  para  $U_o/U_i = 0$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

Na [Figura 4.7](#), pode ser observado que a velocidade na linha central e a espessura média do jato variam linearmente a partir de  $x/D_o > 11$  e  $x/D_o > 8$ , respectivamente. A taxa de espalhamento do jato ( $S = 0,085$ ), está um pouco abaixo da faixa normalmente encontrada para jato simples ( $0,086 \leq S \leq 0,095$  ([WILCOX, 1993](#))), mas esta diferença é aceitável. É possível obter também valores para a constante de decaimento da velocidade na linha central  $B = 7,598$  e para a origem virtual  $x_h/D_o = 2,907$ . A definição destes parâmetros está descrita na [Subseção 2.1.1](#). Os perfis similares, a constante de decaimento da velocidade na linha central e a taxa de espalhamento não são dependentes do número de Reynolds. Deste modo, pequenas diferenças entre os valores medidos são resultado de incertezas experimentais ([POPE, 2000](#)).



(a) Região próxima aos bocais



(b) Região de escoamento desenvolvido

Figura 4.8 - Perfis de velocidade normalizada para  $U_o/U_i = 0$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

Na [Figura 4.8](#), é possível ver que os perfis de velocidades tendem a uma forma auto-similar a partir de  $x/D_o > 4$ , apesar de que até a distância  $x/D_o = 26$  (ou seja,  $x/D_i > 52$ ), os perfis não coincidem com o perfil analítico. A região de similaridade em jatos simples normalmente é encontrada em  $x/D_i > 30$  ([POPE, 2000](#)).

Em comparação com a solução analítica para os perfis de velocidade similar, os desvios nos resultados numéricos, obtidos neste trabalho, apresentam uma variação mais significativa do que os desvios dos resultados experimentais, observados por [Mathieu e Scott \(2000\)](#) na [Figura 4.9](#).

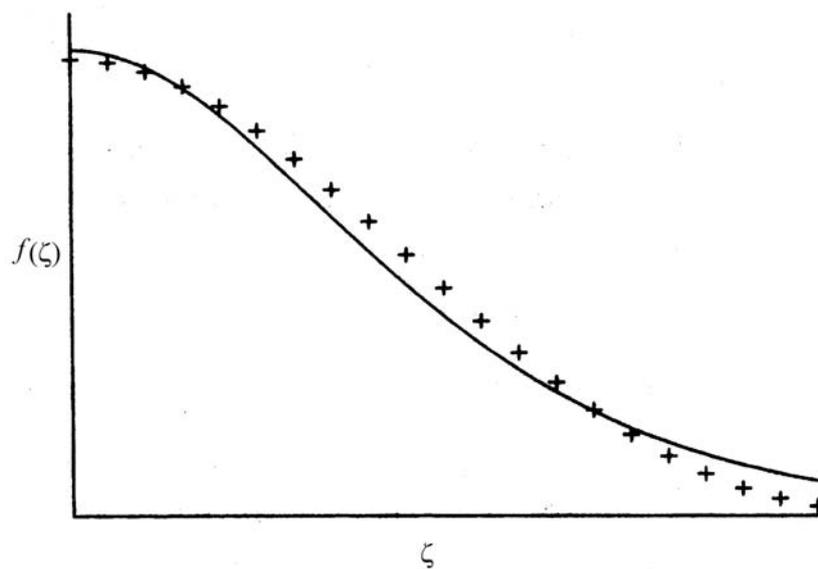


Figura 4.9 - Comparação de resultados experimentais (pontos) com solução analítica (linha contínua) para os perfis de velocidade similar de um jato turbulento.

Fonte: [Mathieu e Scott \(2000\)](#).

Este desvio entre os perfis auto-similares e a solução analítica para o jato simples está relacionada as limitações do modelo de turbulência e a qualidade da malha computacional. Em  $x/D_o > 8$  se caracteriza o fim do núcleo potencial do jato e o início da região de escoamento desenvolvido, onde os perfis de velocidades e de tensões de Reynolds tendem a um comportamento auto-similar.

De maneira semelhante, é possível observar que as tensões de Reynolds tendem a uma forma auto-similar característica, conforme pode ser observado na [Figura 4.11](#), estas formas se assemelham as formas apresentadas por [Pope \(2000\)](#) ([Figura 4.10](#)).

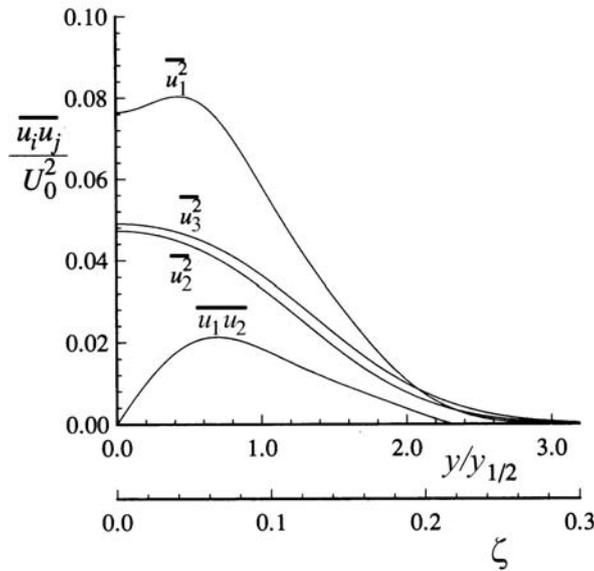
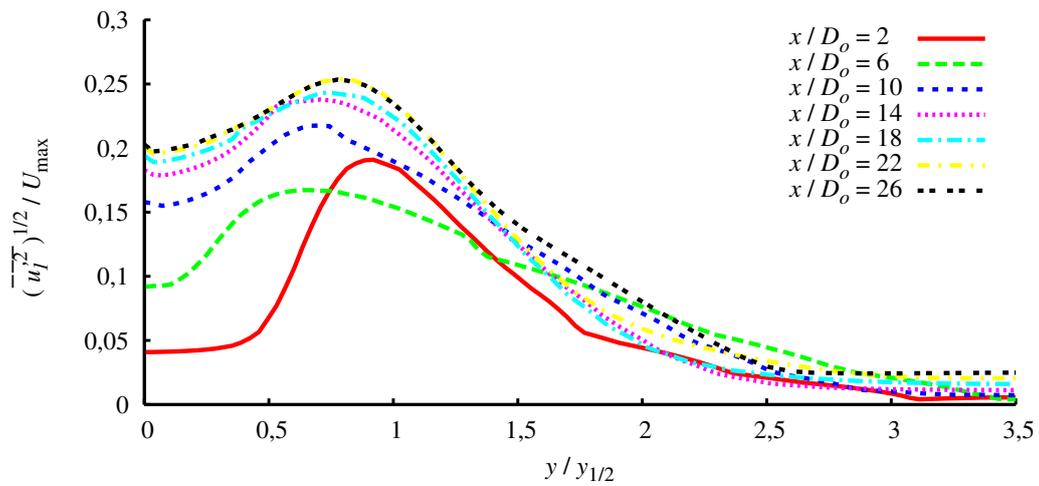


Figura 4.10 - Perfis das tensões de Reynolds em um jato circular auto-similar.

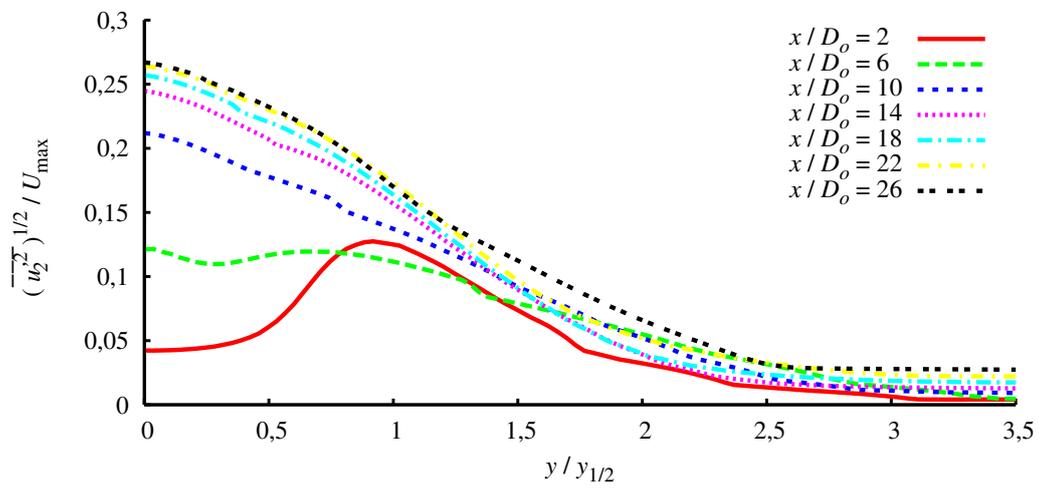
Fonte: Pope (2000).

Na Figura 4.11, é possível observar um pico característico em torno do ponto  $y/y_{1/2} = 1$ , na região próxima aos bocais até uma distância  $x/D_o = 2$ . Este ponto coincide com a interface entre jato e o ambiente, ou seja, próximo aos bocais, até a distância citada acima, a intensidade turbulenta é máxima próximo à borda do jato. Na região de escoamento desenvolvido ( $x/D_o > 8$ ), para a tensão  $\overline{u_1^2}$  o máximo fica num ponto localizado próximo a  $y/y_{1/2} = 1$ , para a tensão  $\overline{u_2^2}$  o máximo fica no centro, e para a tensão  $\overline{u_1 u_2}$  o máximo se localiza próximo do ponto  $y/y_{1/2} = 0,5$ . Estas observações, também são verificadas na literatura.

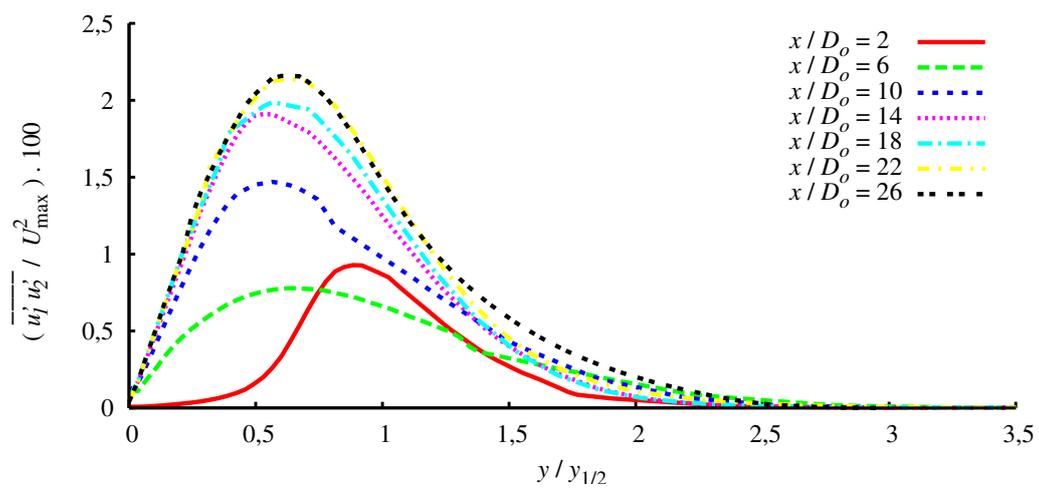
Na Figura 4.12, é possível observar a presença de um pico nos perfis das propriedades turbulentas ( $\nu_t, k$  e  $\epsilon$ ) na região próxima aos bocais. Este pico corresponde a camada de mistura do jato. Na região de escoamento desenvolvido é possível observar o desaparecimento deste pico. A viscosidade turbulenta cresce ao se afastar do bocal, a energia cinética turbulenta tem pico na região cisalhante inicialmente e tende a uma distribuição mais uniforme no centro com um rápido decaimento nas bordas. Nota-se que o pico de dissipação de energia cinética turbulenta  $\epsilon$  também está na mesma posição que o pico da energia cinética turbulenta  $k$  a  $x/D_o \leq 3$ . A forma dos perfis destas propriedades turbulentas são semelhantes as encontradas por Reynier e Ha Minh (1998), eles encontraram dois picos, na região próxima aos bocais, que estão relacionados a camada de mistura entre os dois jatos e a camada de mistura entre o jato externo e o ambiente.



(a) Intensidade turbulenta axial

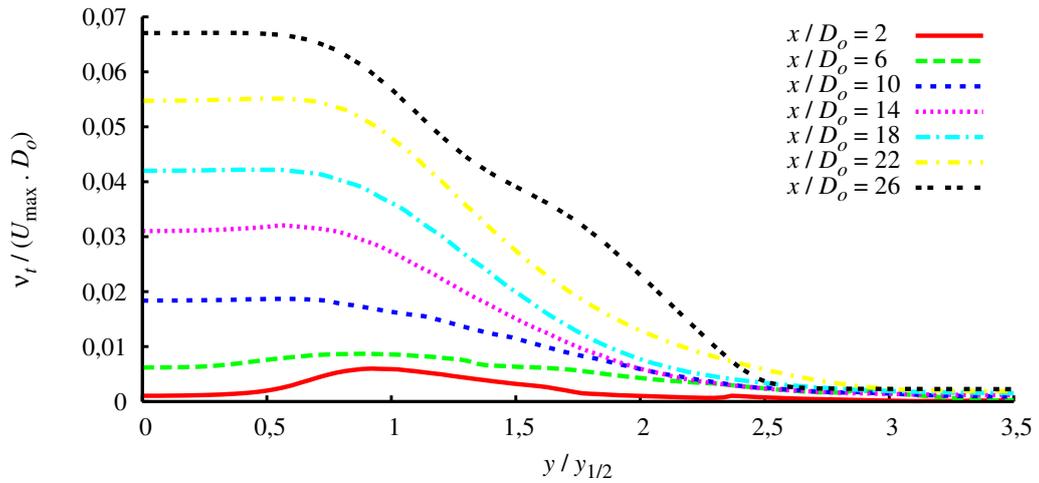


(b) Intensidade turbulenta radial

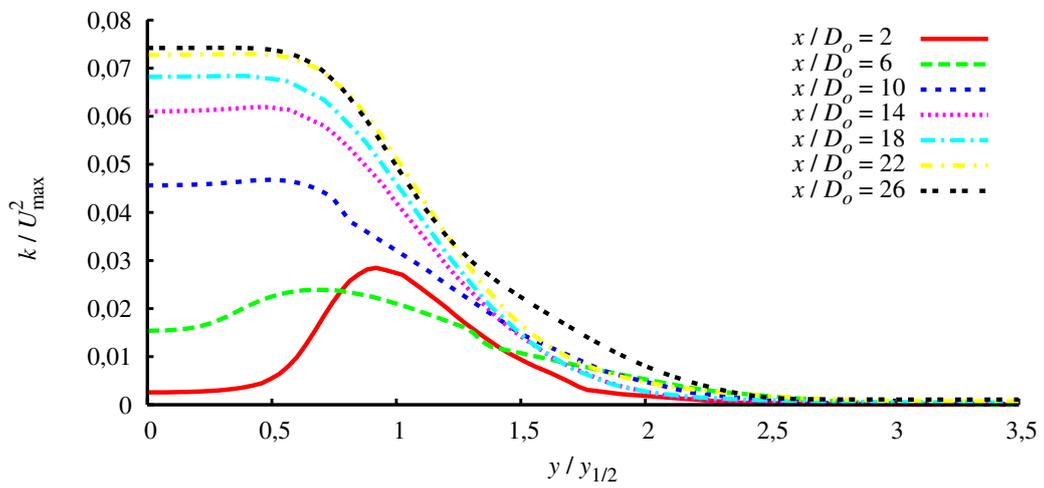


(c) Tensões de cisalhamento turbulentas

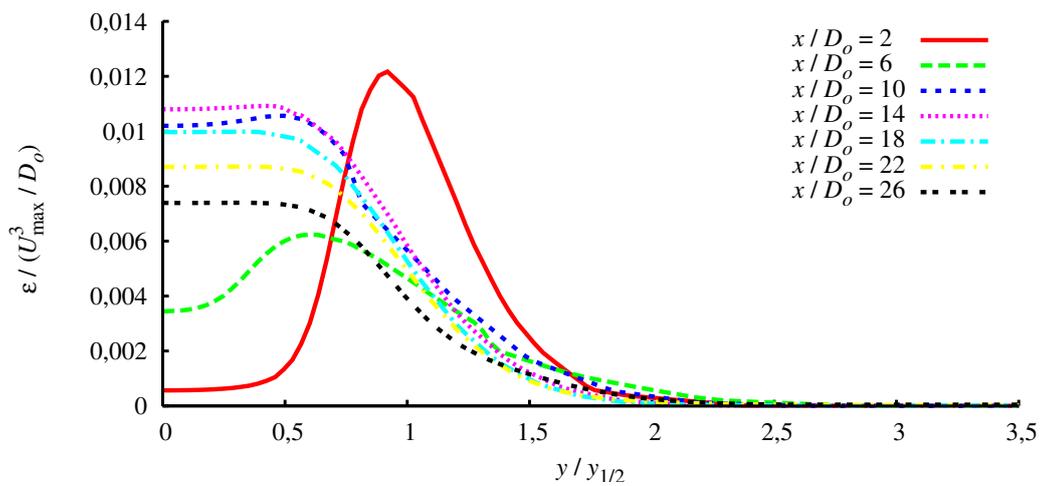
Figura 4.11 - Distribuições das tensões de Reynolds para  $U_o/U_i = 0$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .



(a) Viscosidade turbulenta



(b) Energia cinética turbulenta

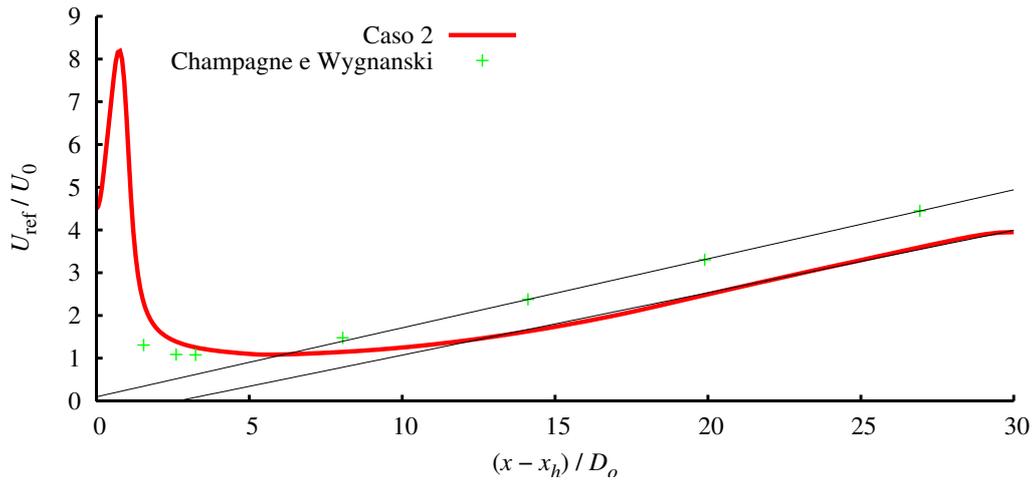


(c) Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

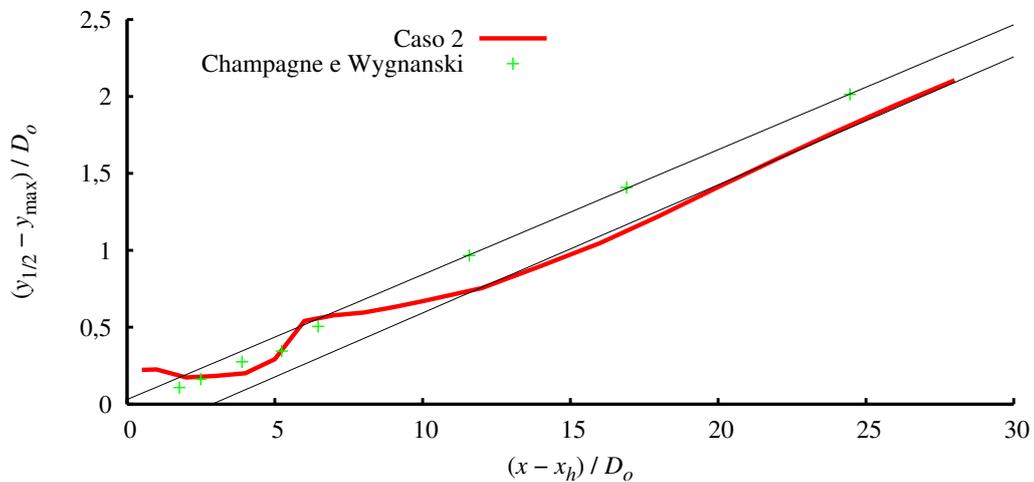
Figura 4.12 - Distribuições das propriedades turbulentas para  $U_o/U_i = 0$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

#### 4.4 Jatos Coaxiais com $r_u > 1$ (Caso 2)

O segundo caso analisado consiste de um jato coaxial com razão de áreas  $A_o/A_i = 2,94$  e razão de velocidades  $U_o/U_i = 5$ . Este caso também serve para validação do pacote numérico através da comparação de resultados com o trabalho experimental de Champagne e Wygnanski (1971).



(a) Velocidade na linha central



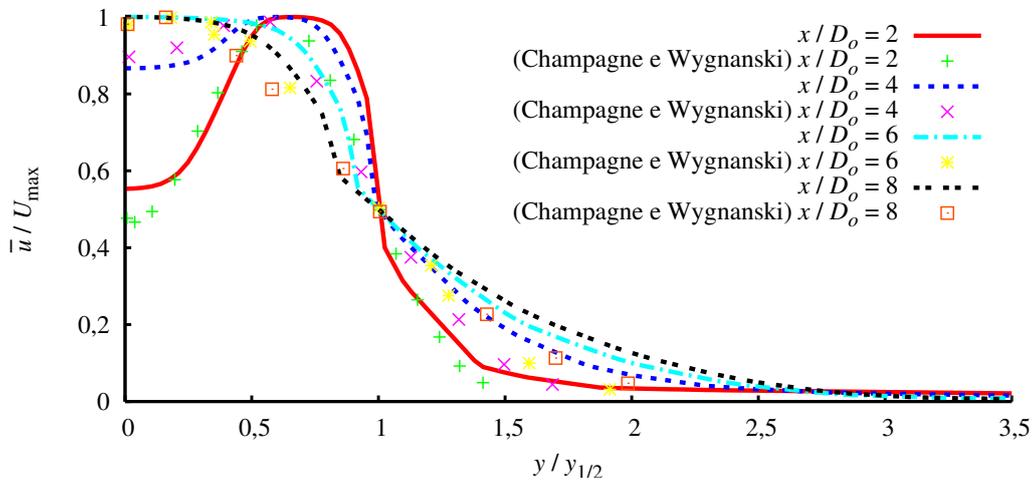
(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.13 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

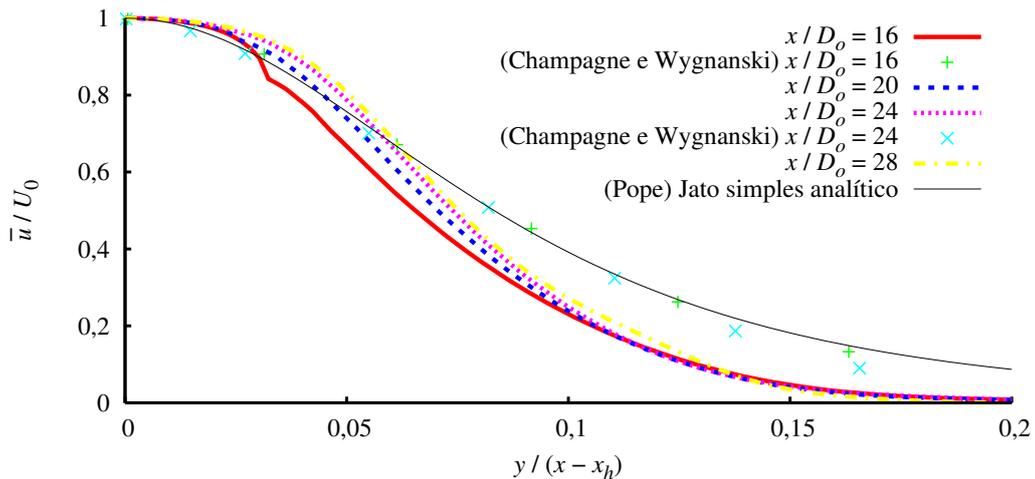
Na Figura 4.13, observa-se que a velocidade na linha central e a espessura média do jato variam linearmente a partir de  $x/D_o > 14$  e  $x/D_o > 10$ , respectivamente, correspondendo à região de jato desenvolvido similar.

Dos resultados obtidos por Champagne e Wygnanski (1971), a velocidade na linha central e a espessura média do jato variam linearmente a partir de  $x/D_o > 11$  e  $x/D_o > 8$ , respectivamente. A taxa de espalhamento obtida numericamente ( $S = 0,083$ ) se encontra muito próxima do valor experimental ( $S = 0,081$ ).

As diferenças encontradas estão relacionadas com as limitações do modelo de turbulência, com a qualidade da malha computacional, ou ainda, com a não utilização da parede no plano de saída do bocal, no presente trabalho. É importante observar que apesar destas diferenças, os parâmetros analisados apresentam um comportamento bastante semelhante.



(a) Região próxima aos bocais



(b) Região de escoamento desenvolvido

Figura 4.14 - Perfis de velocidade normalizada para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

Os perfis de velocidades médias podem ser observados na [Figura 4.14](#). Na região próxima aos bocais ([Figura 4.14\(a\)](#)), os perfis de velocidades médias apresentam boa concordância quantitativa com os resultados experimentais, e as curvas tem a mesma forma característica dos resultados experimentais de [Champagne e Wygnanski \(1971\)](#). Na região de escoamento desenvolvido ([Figura 4.14\(b\)](#)), os perfis auto-similares também apresentam boa concordância com resultados experimentais e com o perfil analítico para jatos simples.

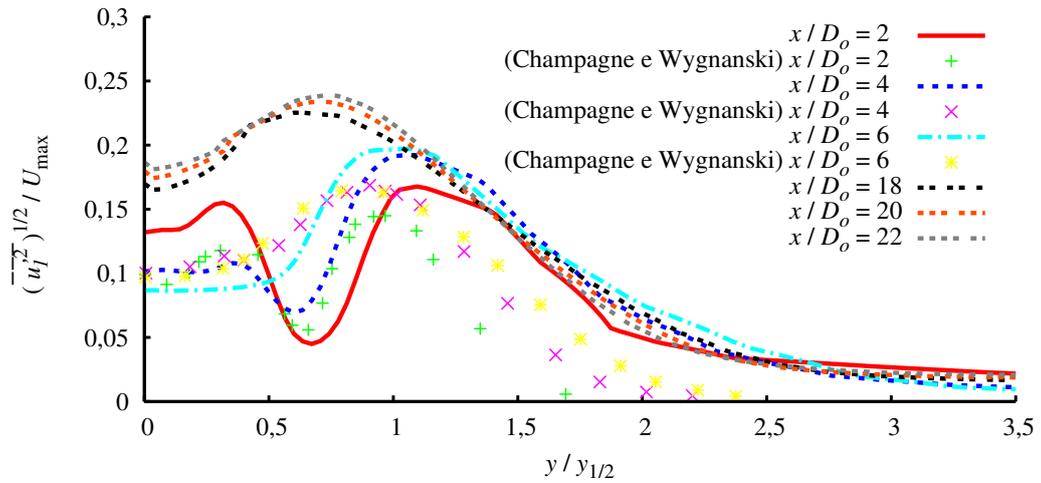
Na [Figura 4.15](#), é possível observar a distribuição das tensões de Reynolds para o caso analisado em comparação com resultados experimentais. Até uma distância longitudinal  $x/D_o < 6$  é possível observar a presença de dois picos caracterizando a presença das camadas de mistura interna e externa. A partir deste ponto há somente a presença do núcleo potencial interno, e conseqüentemente, uma camada de mistura entre o jato e o ambiente vizinho.

Assim como o jato simples (caso 1), as tensões de Reynolds para o caso 2, também tendem a um comportamento auto-similar característico, sendo que para este caso a região de similaridade foi encontrada a partir de  $x/D_o > 18$ . Nesta região os perfis de cada componente das tensões de Reynolds tem a mesma forma característica e os valores estão muito próximos, quase coincidindo em uma mesma curva.

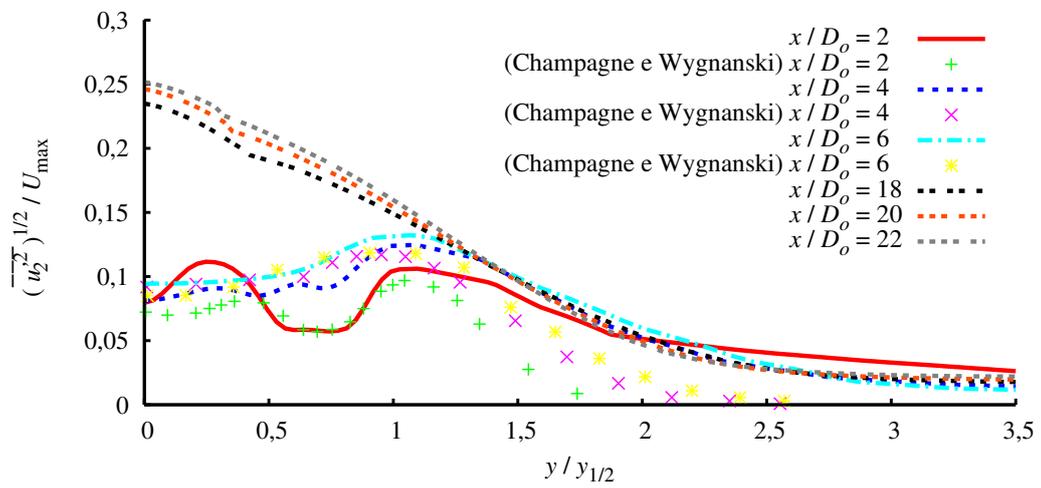
Os perfis das propriedades turbulentas podem ser vistos na [Figura 4.16](#). Até a distância  $x/D_o < 6$ , é também possível observar a presença de dois picos nos perfis das propriedades turbulentas, esse picos correspondem a presença das camadas de mistura interna e externa. Acima deste ponto, só é possível observar a presença de um único pico, ou seja, referente a camada de mistura externa. A partir de  $x/D_o > 18$ , o segundo pico desaparece caracterizando o completo desaparecimento da camada de mistura externa.

A presença destes picos, que caracterizam a presença dos núcleos potenciais e as camadas de mistura, também pode ser observada para as tensões de Reynolds ([Figura 4.15](#)). Sendo que para as tensões de cisalhamento turbulentas ([Figura 4.15\(c\)](#)) estes picos são caracterizados por um ponto de mínimo (núcleo potencial interno) e um ponto de máximo (núcleo potencial externo) como observado experimentalmente.

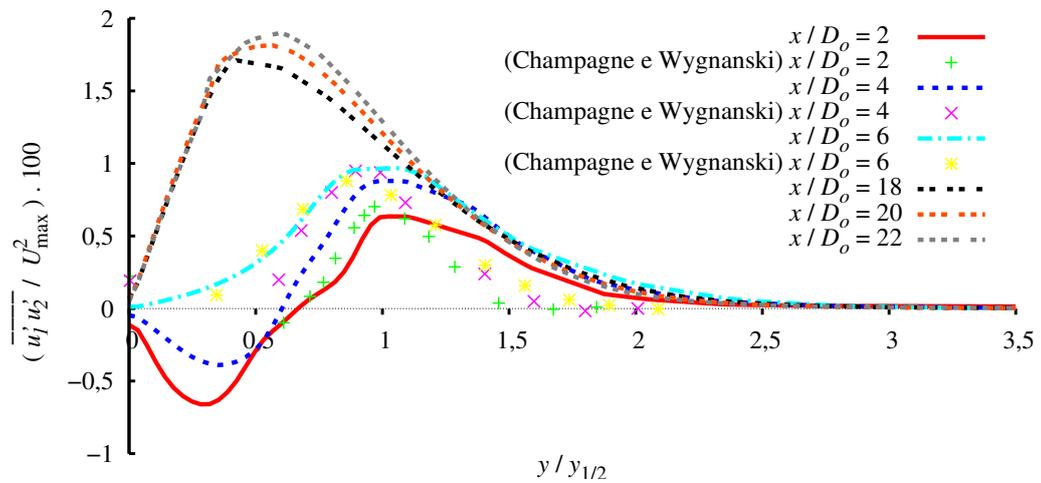
Apesar das diferenças observadas, o modelo numérico mostrou-se ser capaz de capturar o comportamento físico do escoamento de jatos coaxiais.



(a) Intensidade turbulenta axial

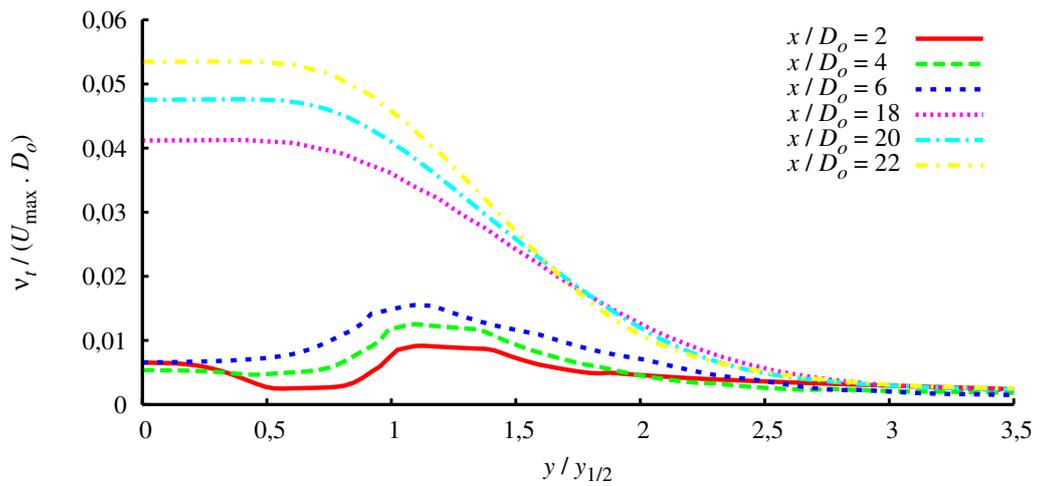


(b) Intensidade turbulenta radial

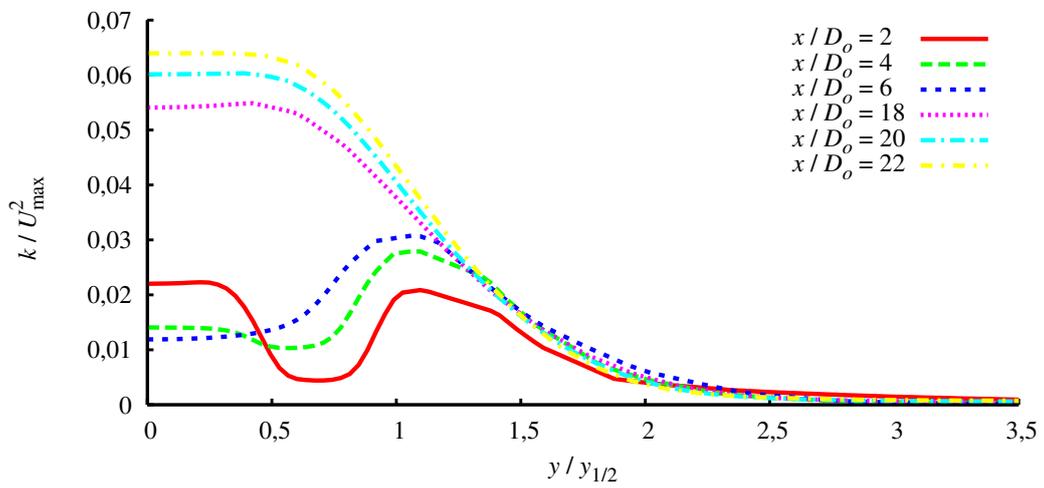


(c) Tensões de cisalhamento turbulentas

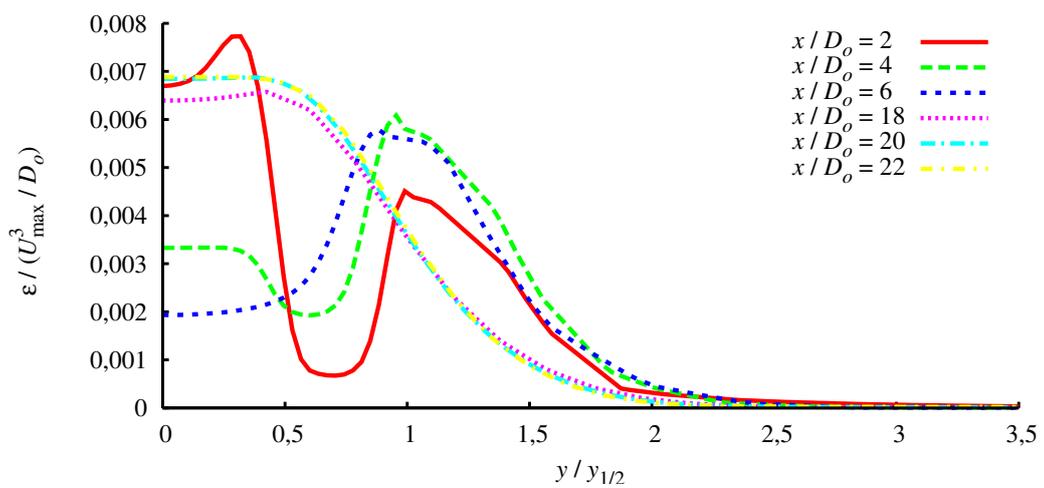
Figura 4.15 - Distribuições das tensões de Reynolds para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .



(a) Viscosidade turbulenta



(b) Energia cinética turbulenta

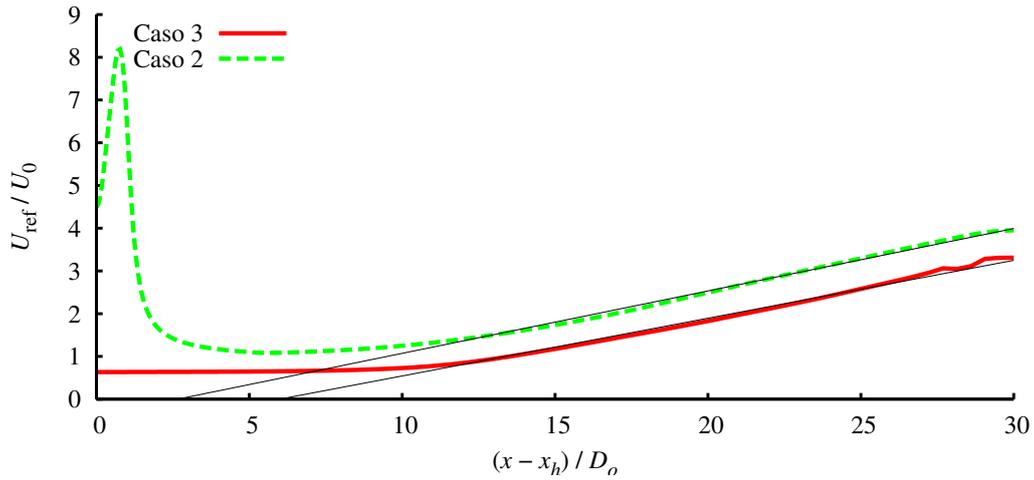


(c) Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

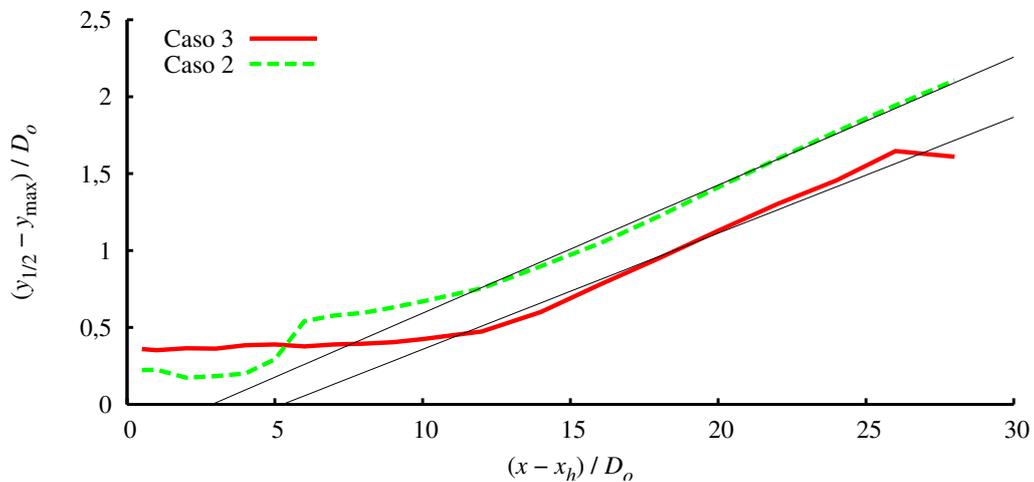
Figura 4.16 - Distribuições das propriedades turbulentas para  $U_o/U_i = 5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

#### 4.5 Jatos Coaxiais com $r_u < 1$ (Caso 3)

O terceiro caso consiste de um jato coaxial com a mesma razão de áreas do caso 2, mas com uma razão de velocidades  $U_o/U_i = 0,5$ . Este caso serve para analisar como razões de velocidades menores que 1, influenciam as características dos jatos, através da comparação com os resultados obtidos para o caso 2.



(a) Velocidade na linha central

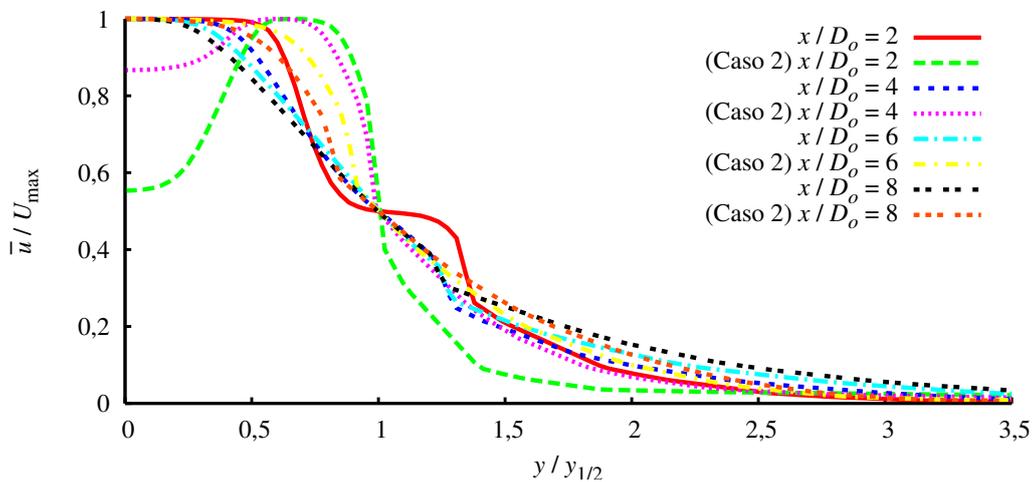


(b) Taxa de espalhamento

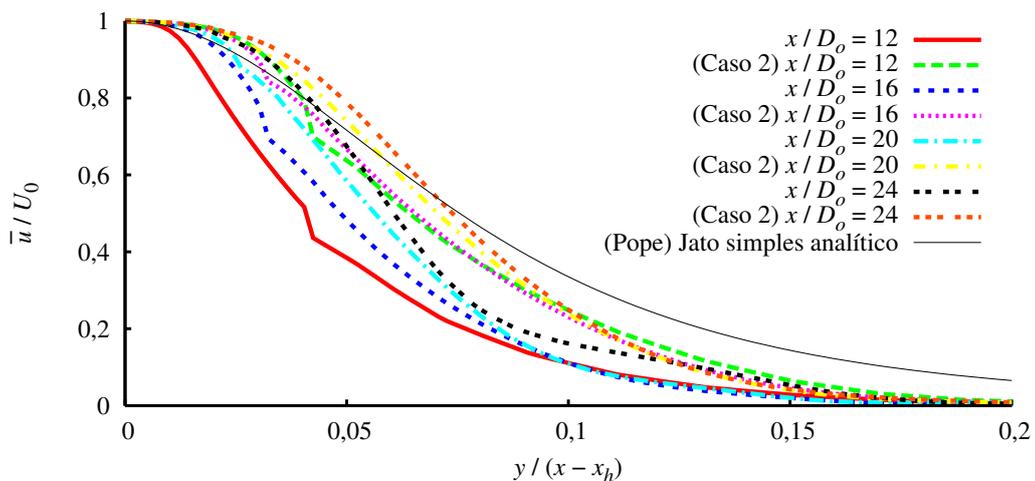
Figura 4.17 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  para  $U_o/U_i = 0,5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

A partir da Figura 4.17(b), é possível obter a taxa de espalhamento para os casos 2 e 3. Jatos coaxiais com  $r_u < 1$  apresentam uma menor taxa de espalhamento ( $S = 0,075$ ) do que jatos coaxiais com  $r_u > 1$  ( $S = 0,083$ ).

Isto se deve ao fato que o jato interno mais rápido arrasta fluido do jato externo. Outra consequência disto é que a velocidade do jato na linha central tende a decair mais lentamente ( $B = 6,847$ ) em comparação com o caso 2 ( $B = 7,387$ ).



(a) Região próxima aos bocais



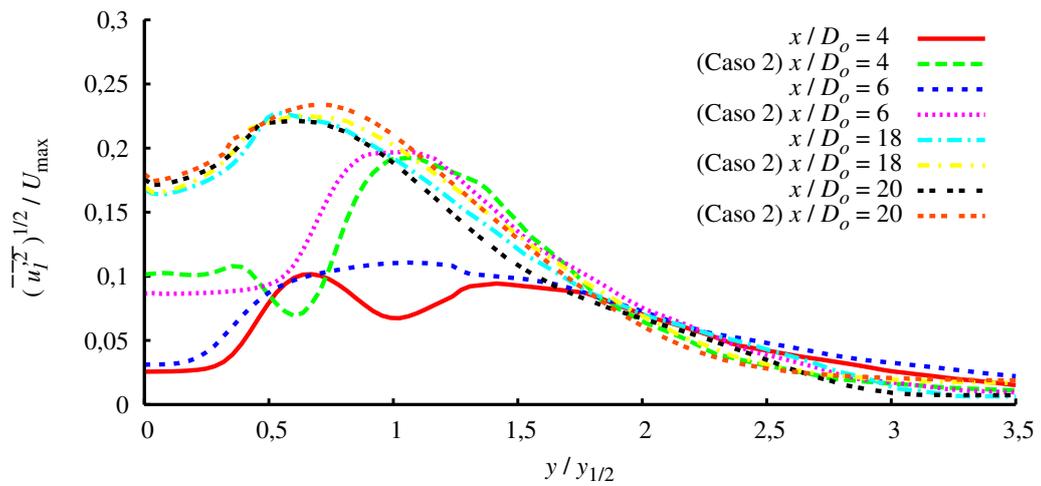
(b) Região de escoamento desenvolvido

Figura 4.18 - Perfis de velocidade normalizada para  $U_o/U_i = 0,5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

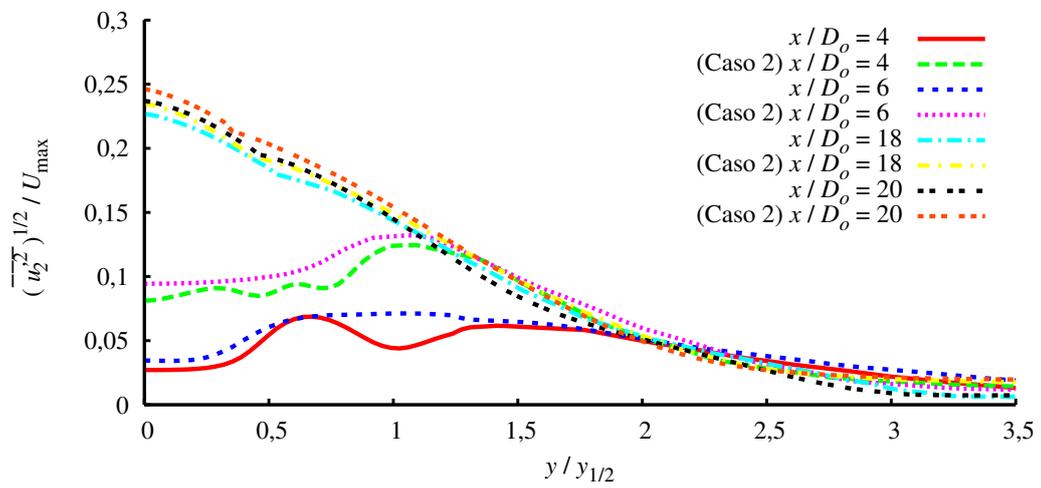
Os perfis de velocidades podem ser vistos na [Figura 4.18](#). Na região próxima aos bocais os perfis de velocidade apresentam um forma característica diferente das apresentadas para o caso 2. Esta forma característica está relacionada a inflexionabilidade do campo de velocidades devido a camada de mistura entre os jatos interno e externo e a razão de velocidades entre os dois jatos. Na região de escoamento desenvolvido, é possível observar que os perfis de velocidades, a partir de  $x/D_o = 20$  estão tendendo a similaridade, mas estes perfis apresentam desvios entre si e também com o perfil analítico.

Na [Figura 4.19](#), é possível observar o comportamento das tensões de Reynolds para o presente caso. As intensidades turbulentas axial ([Figura 4.19\(a\)](#)) e radial ([Figura 4.19\(b\)](#)) apresentam menores valores do que os obtidos para o caso 2. Com relação as tensões de cisalhamento turbulentas ([Figura 4.19\(c\)](#)), os dois picos caracterizando a presença dos núcleos potenciais (até  $x/D_o < 6$ , onde desaparece o núcleo potencial externo) são dois pontos de máximo devido a velocidade decrescer da linha central para direção radial. Após esta distância, somente a presença do núcleo potencial interno pode ser observada. O núcleo potencial interno desaparece a partir de  $x/D_o > 18$  onde os perfis de tensões de Reynolds se tornam auto-similares.

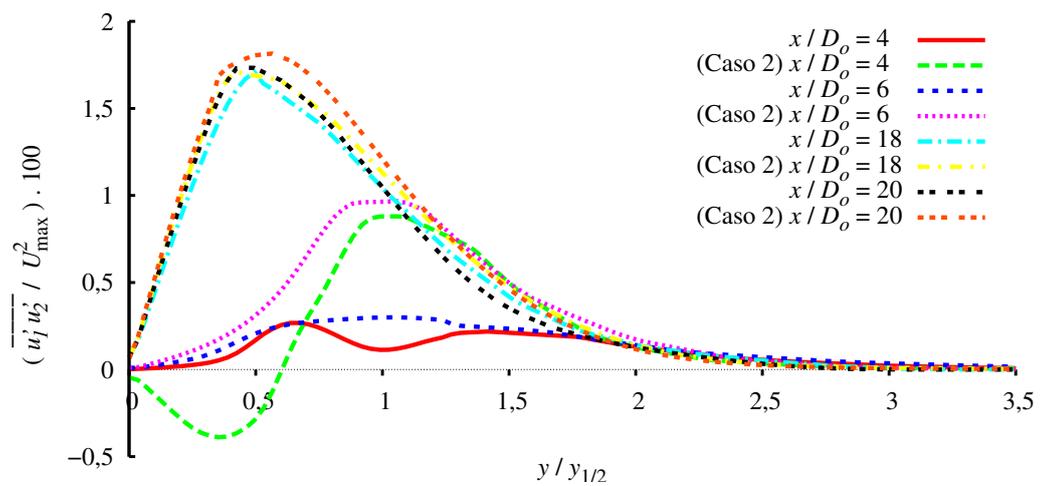
É possível observar que os perfis das propriedades turbulentas, exibidas na [Figura 4.20](#), apresentam menores valores do que os obtidos para o caso 2, e que os picos se apresentam em distâncias radiais diferentes, na região próxima aos bocais. No presente caso, os picos destas propriedades se localizam no centro e próximo a borda do jato até o ponto  $x/D_o < 6$ , a partir daí, somente o pico que representa a presença núcleo potencial interno é observado. O núcleo potencial interno desaparece a  $x/D_o > 18$ , quando não é mais possível observar o pico característico. Comportamento semelhante foi observado para as tensões de Reynolds.



(a) Intensidade turbulenta axial

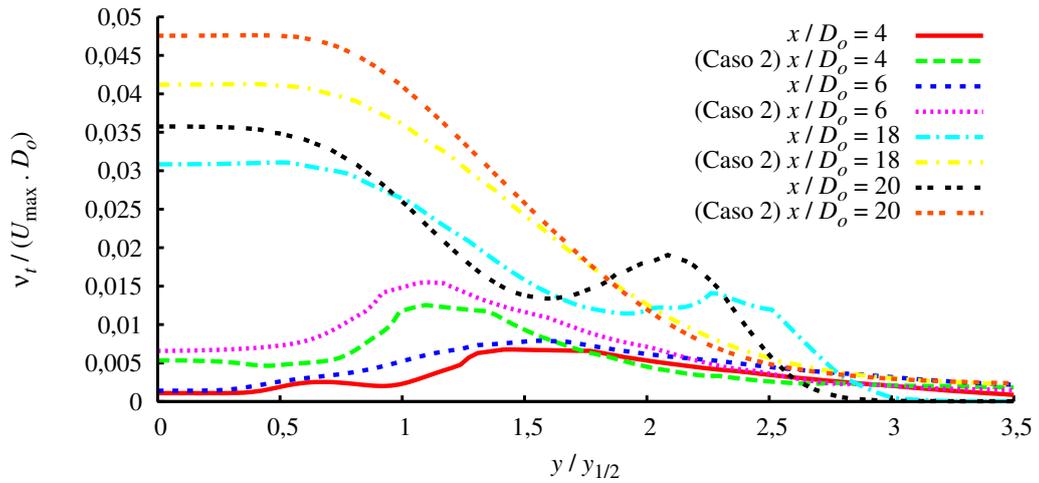


(b) Intensidade turbulenta radial

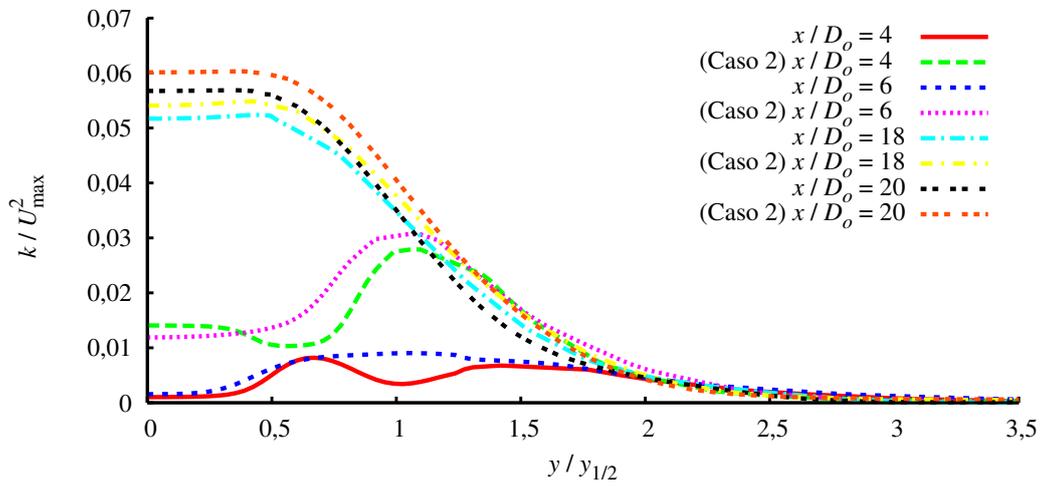


(c) Tensões de cisalhamento turbulentas

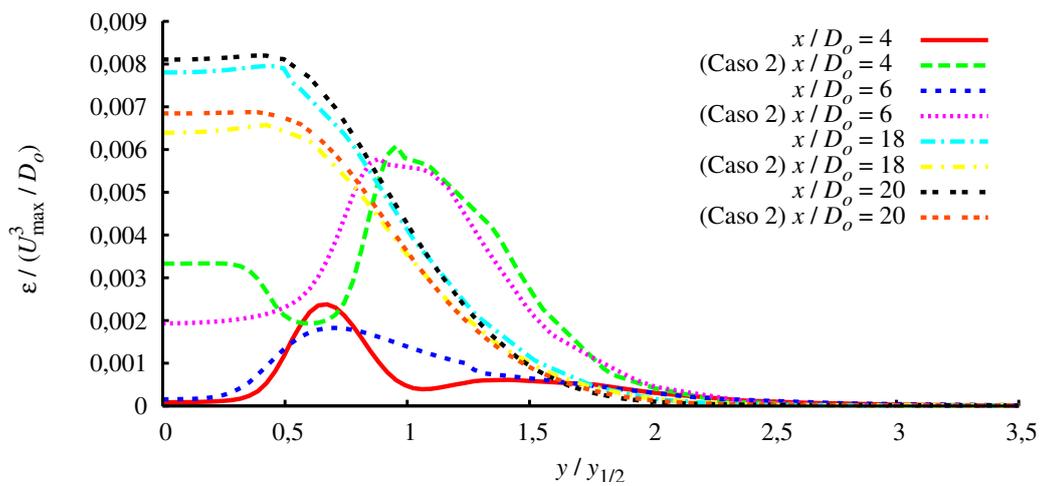
Figura 4.19 - Distribuições das tensões de Reynolds para  $U_o/U_i = 0,5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .



(a) Viscosidade turbulenta



(b) Energia cinética turbulenta

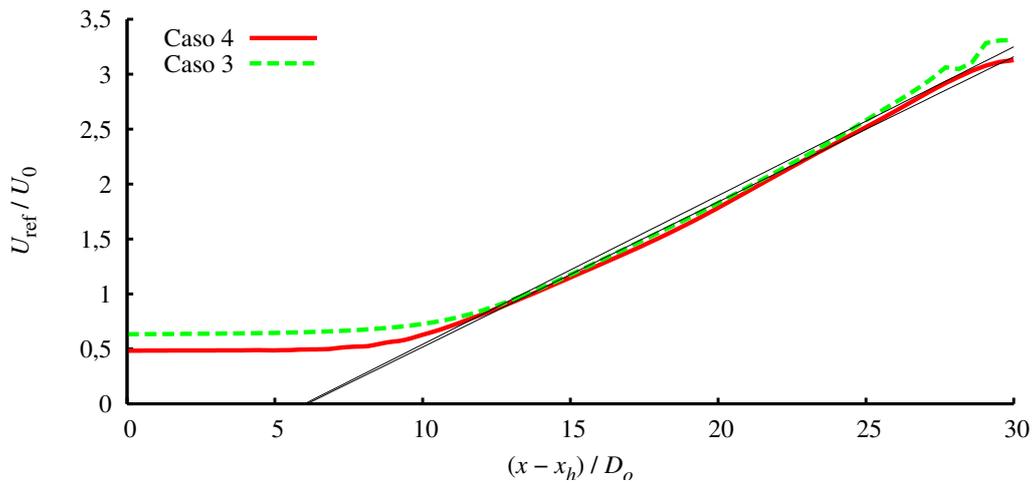


(c) Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

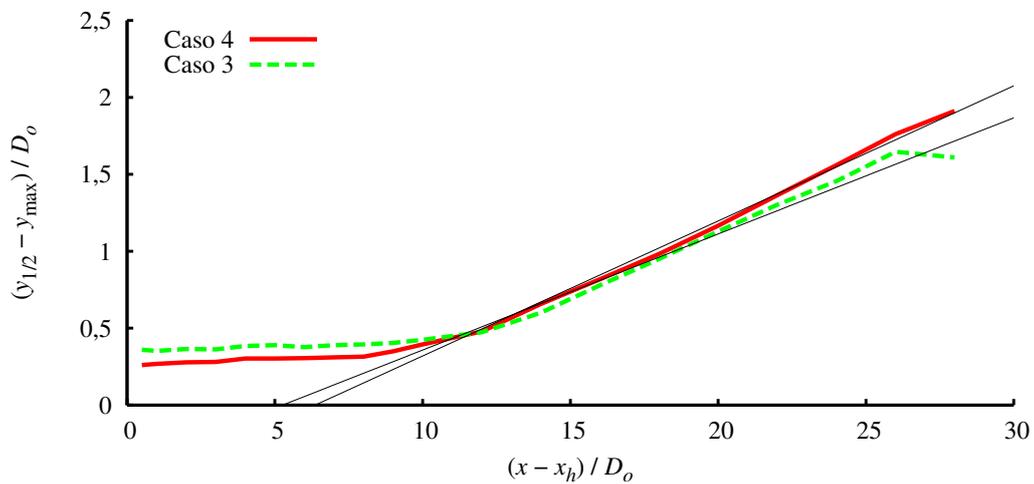
Figura 4.20 - Distribuições das propriedades turbulentas para  $U_o/U_i = 0,5$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

#### 4.6 Jatos Coaxiais com $r_u$ Idêntica a do Queimador (Caso 4)

O quarto caso consiste de mais um jato coaxial com a mesma razão de áreas do caso 3, mas com uma razão de velocidades  $U_o/U_i = 0,2$ . Esta razão de velocidades é idêntica a do caso 5, mas com razões de áreas diferentes. Este caso foi comparado ao caso 3, para observar como a diminuição na razão de velocidades, para jatos coaxiais com  $r_u < 1$ , influencia as características do jatos.



(a) Velocidade na linha central



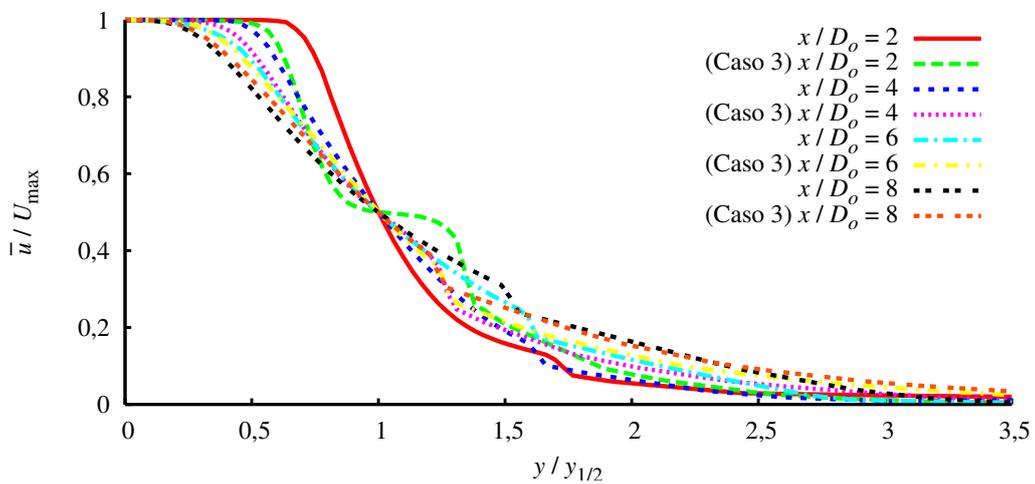
(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.21 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  para  $U_o/U_i = 0,2$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

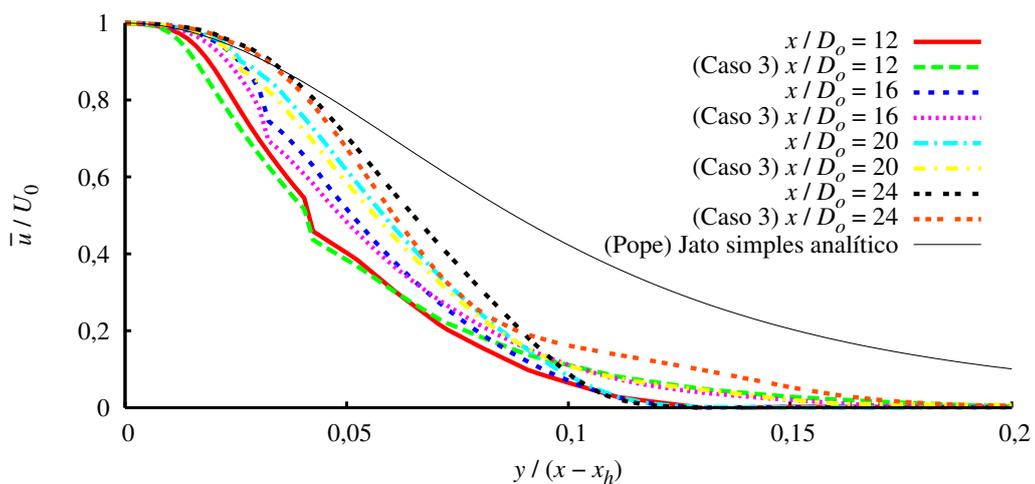
Na Figura 4.21, é possível observar o decaimento da velocidade na linha central e o crescimento da espessura média do jato.

O presente caso apresenta um valor para a taxa de espalhamento ( $S = 0,087$ ) maior do que o valor obtido para o caso 3 ( $S = 0,075$ ), e muito próximo do valor obtido para o jato simples ( $S = 0,085$ ). E para o decaimento da velocidade na linha central, o caso 4 ( $B = 7,570$ ) apresenta um valor muito próximo do valor obtido para o caso 3 ( $B = 7,386$ ).

Quanto mais baixo o valor da razão de velocidades, os jatos coaxiais tendem a um decaimento da velocidade na linha central e uma taxa de espalhamento mais próximo dos valores obtidos para um jato simples. Uma situação semelhante deve ocorrer quando  $r_u$  se aproxima do valor 1, ou seja, uma configuração de jato simples formado por dois jatos coaxiais com valores para a velocidade muito próximos.



(a) Região próxima aos bocais



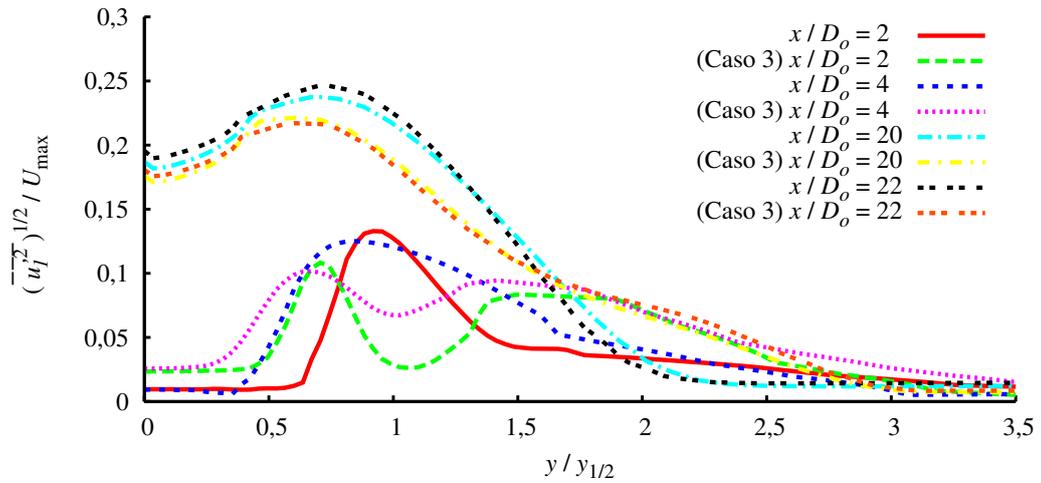
(b) Região de escoamento desenvolvido

Figura 4.22 - Perfis de velocidade normalizada para  $U_o / U_i = 0,2$  e  $A_o / A_i = 2,94$ .

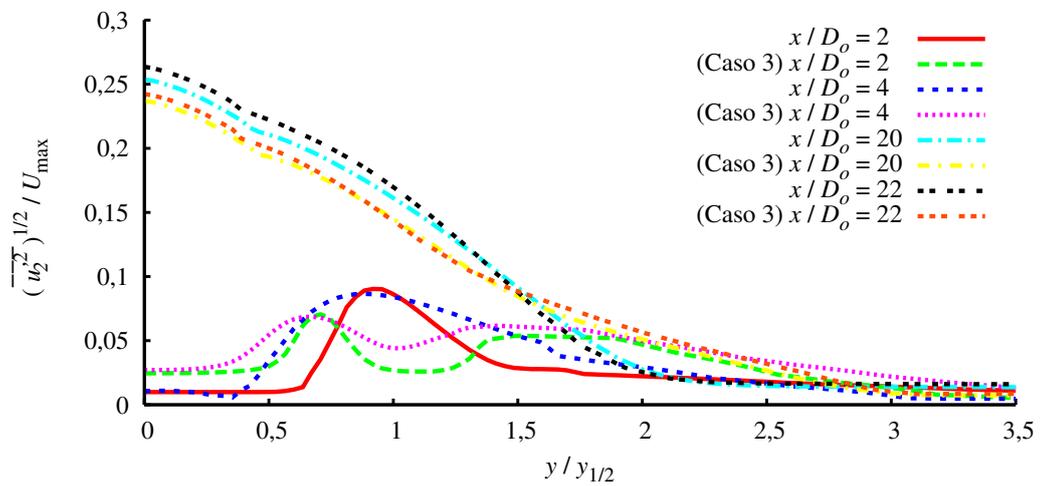
Na [Figura 4.22](#), é possível observar que na região próxima aos bocais ([Figura 4.22\(a\)](#)), os perfis de velocidades para o presente caso, tendem a uma forma de perfil mais parecida com a forma normalmente encontrada em jato simples, a partir de  $x/D_o \geq 2$ . Na região de escoamento desenvolvido ([Figura 4.22\(b\)](#)), é possível observar que, apesar de apresentar as mesmas diferenças em relação à solução similar para jato simples (analítica), os perfis de velocidades obtidos para o presente caso apresentam valores mais próximos do valor analítico do que o caso 3.

As tensões de Reynolds apresentam maiores valores para o presente caso do que para o caso 3 na região de escoamento similar, conforme pode ser observado na [Figura 4.23](#). Na região próxima aos bocais, somente um pico nas tensões de Reynolds é observado no presente caso, ou seja, o núcleo potencial externo desaparece abaixo da distância  $x/D_o < 2$ , diferentemente do caso 3, onde dois picos são observados até  $x/D_o < 6$ . Da mesma forma que para os perfis de velocidade, os perfis de tensões de Reynolds tendem a uma forma mais parecida com a forma encontrada em jato simples, a partir de  $x/D_o \geq 2$ .

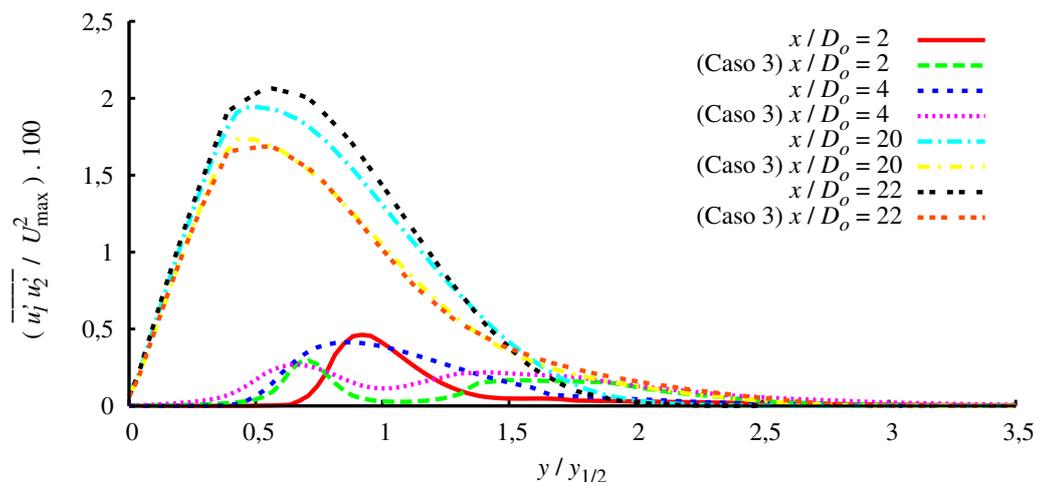
Comportamento semelhante ao observado para as tensões de Reynolds, pode também ser observado para as propriedades turbulentas exibidas na [Figura 4.24](#). O núcleo potencial externo desaparece na mesma posição observada para as tensões de Reynolds ( $x/D_o < 2$ ). O núcleo potencial interno desaparece a distância  $x/D_o > 20$ , a partir daí observa-se o desaparecimento do pico característico e as propriedades tornam-se constantes na região do jato ( $y/y_{1/2} < 1$ ).



(a) Intensidade turbulenta axial

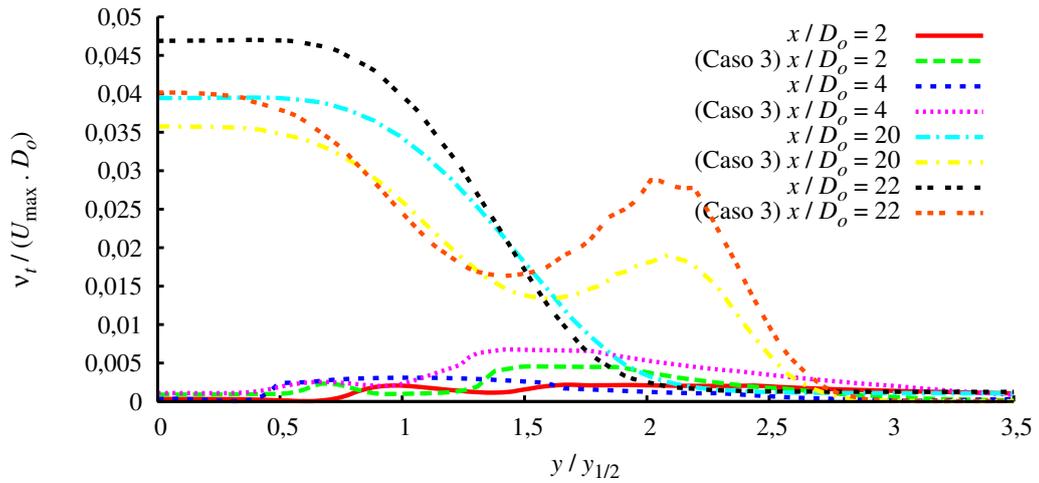


(b) Intensidade turbulenta radial

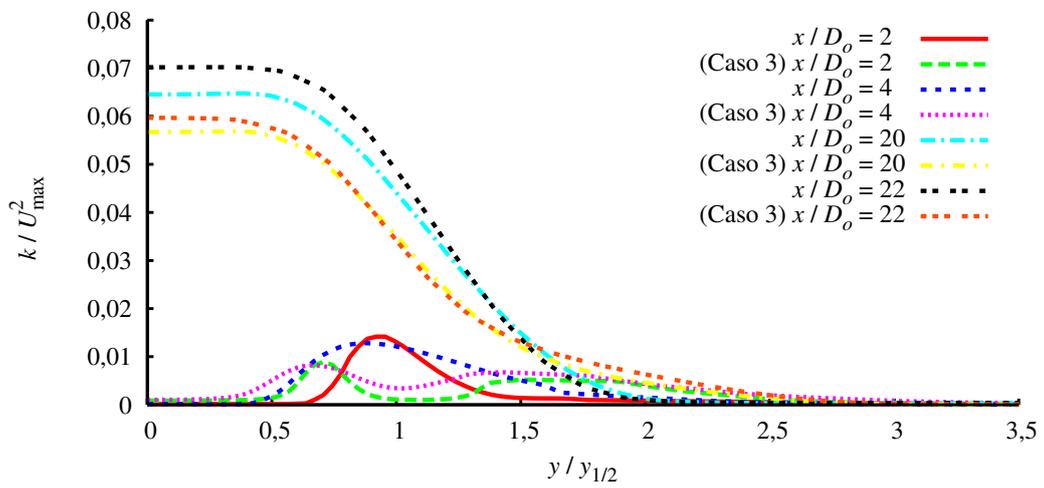


(c) Tensões de cisalhamento turbulentas

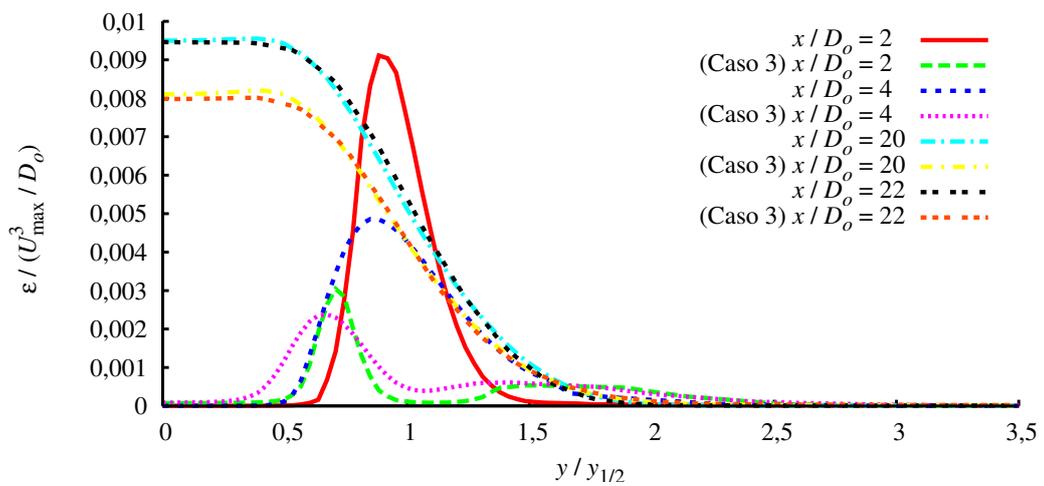
Figura 4.23 - Distribuições das tensões de Reynolds para  $U_o/U_i = 0,2$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .



(a) Viscosidade turbulenta



(b) Energia cinética turbulenta

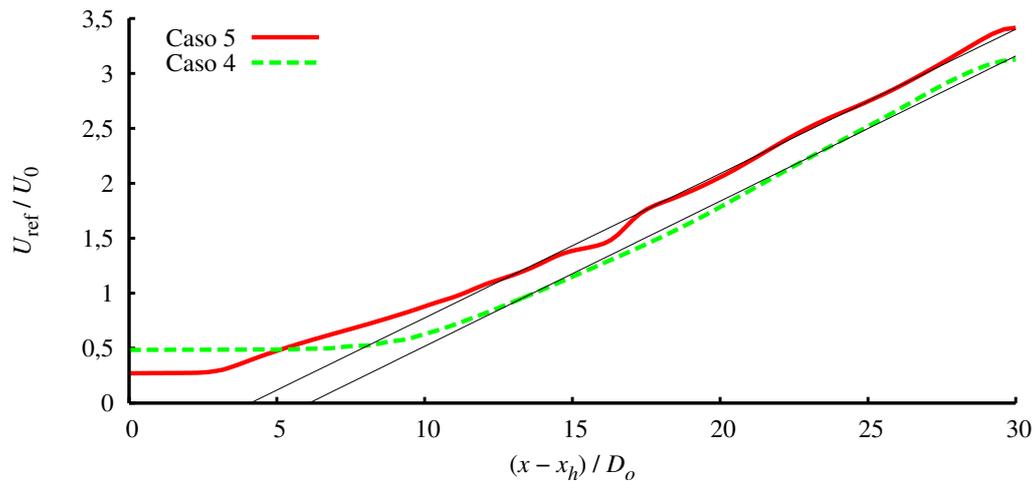


(c) Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

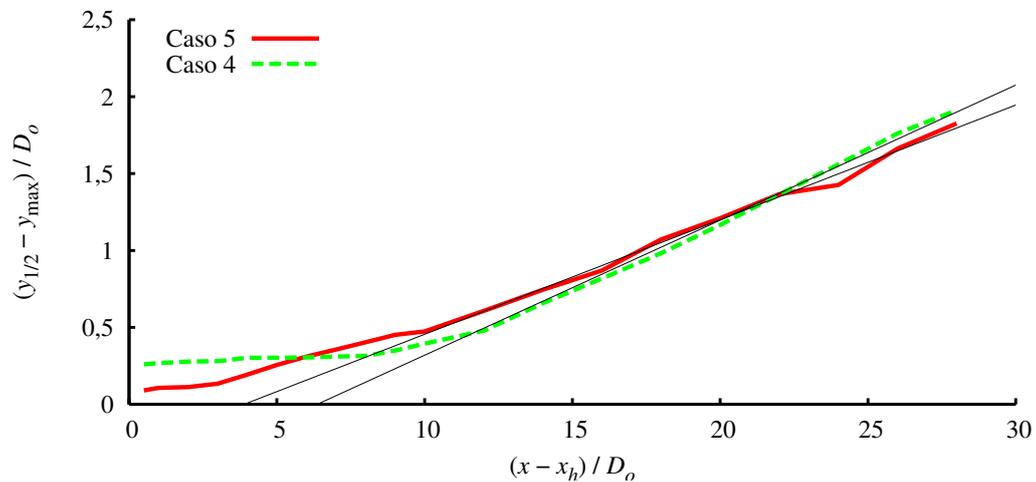
Figura 4.24 - Distribuições das propriedades turbulentas para  $U_o/U_i = 0,2$  e  $A_o/A_i = 2,94$ .

#### 4.7 Queimador sem Parede entre os Bocais (Caso 5)

O quinto caso consiste de um jato coaxial com uma configuração de queimador de chama difusiva tipo *Delft*, desprezando a presença da parede entre os bocais. Este queimador tem a mesma razão de velocidade do caso 4, mas com uma razão de áreas quase dez vezes maior. Este caso foi comparado ao caso 4, para observar a influência da variação da razão de áreas.



(a) Velocidade na linha central



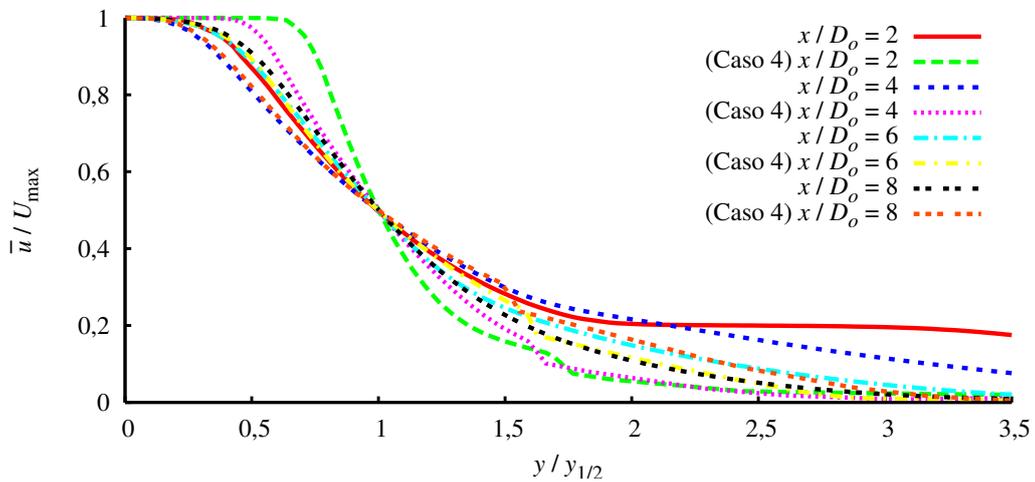
(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.25 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$ .

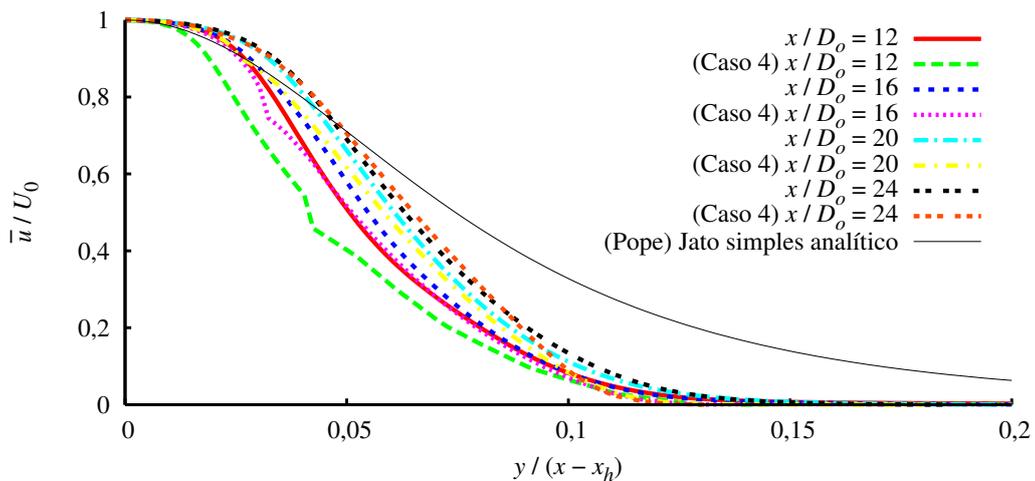
É possível observar que o aumento na razão de áreas provocou oscilações na variação linear da velocidade na linha central, conforme pode ser visto na [Figura 4.25](#).

Estas oscilações observadas na velocidade da linha central podem estar relacionadas a zonas de recirculação no escoamento, devido a grande razão de áreas entre os dois dutos. A taxa de espalhamento para o presente caso ( $S = 0,075$ ) apresenta um valor menor em comparação com o caso 4 ( $S = 0,087$ ), e o decaimento da velocidade na linha central ( $B = 7,612$ ) apresenta um valor muito próximo do valor obtido no caso 4 ( $B = 7,570$ ).

O aumento na razão de áreas proporciona uma diminuição na taxa de arraste turbulento de fluido (entrainment) na direção do escoamento. Ou seja, uma quantidade menor de fluido ambiente é acelerado pelo jato, diminuindo o crescimento da espessura média e, portanto, uma menor taxa de espalhamento é obtida.



(a) Região próxima aos bocais



(b) Região de escoamento desenvolvido

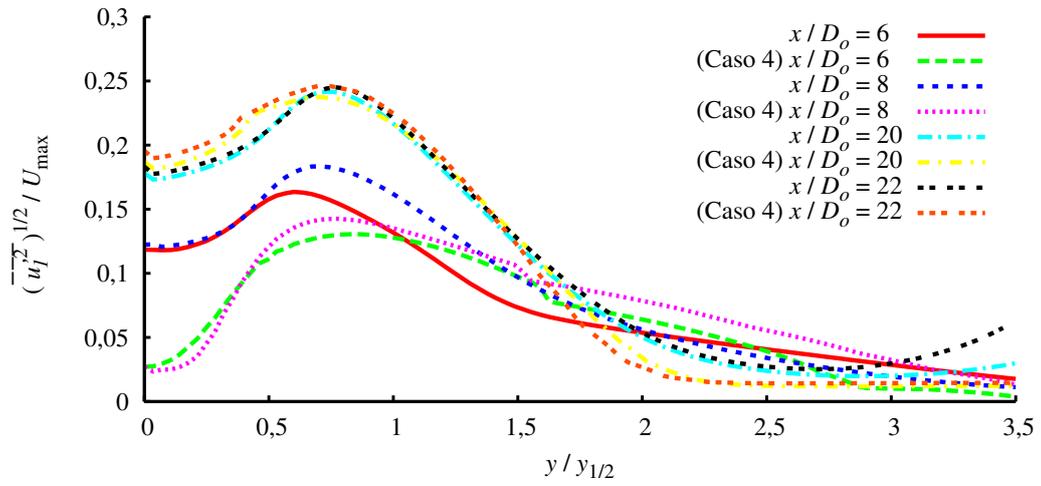
Figura 4.26 - Perfis de velocidade normalizada para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$ .

O arraste turbulento de fluido se deve ao fato de que o jato, perde quantidade de movimento para acelerar o fluido do ambiente vizinho em repouso. Devido este arraste turbulento de fluido ambiente vizinho, os gradientes de velocidade diminuem na direção do escoamento. Isto causa uma diminuição da velocidade média do jato na linha central. No presente caso, uma menor quantidade de fluido ambiente desacelera o fluido do jato, desse modo, tem-se uma menor taxa de fluxo mássico na direção do escoamento. Portanto, é razoável relacionar essa diminuição da taxa de fluxo mássico ao aumento da razão de áreas entre os bocais.

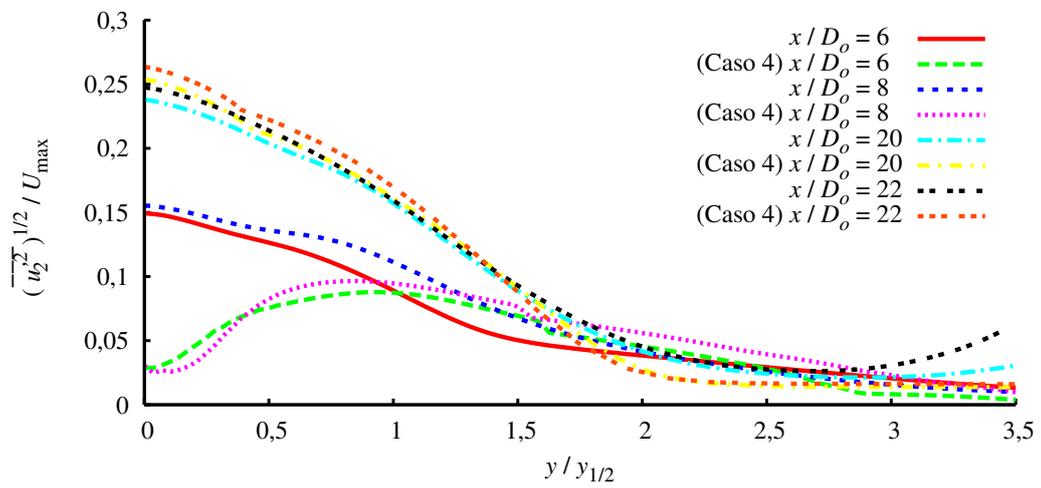
Na [Figura 4.26](#), são apresentados os perfis de velocidades médias na região próxima aos bocais ([Figura 4.26\(a\)](#)) e na região de escoamento desenvolvido ([Figura 4.26\(b\)](#)). É possível observar que os perfis de velocidade para o caso 5 tendem a uma forma similar característica a partir da distância  $x/D_o = 20$ .

É possível observar, que o aumento na razão de áreas proporciona um aumento nas tensões de Reynolds na região próxima aos bocais ( $x/D_o \leq 8$ ), conforme visto na [Figura 4.27](#). Na região de escoamento desenvolvido esta situação se inverte, é possível ver que em  $x/D_o = 20$ , as tensões de Reynolds apresentam maiores valores para o caso 4. Próximo aos bocais, o pico das tensões é deslocada para dentro. No presente caso, a intensidade turbulenta radial tem máximo no centro na região próxima aos bocais, enquanto que no caso 4 o máximo se localiza em  $y/y_{1/2} = 1$  pelo menos até  $x/D_o = 8$ . A região de similaridade começa em  $x/D_o > 20$ , a partir deste ponto, os perfis das tensões de Reynolds apresentam a mesma forma característica e valores muito próximos.

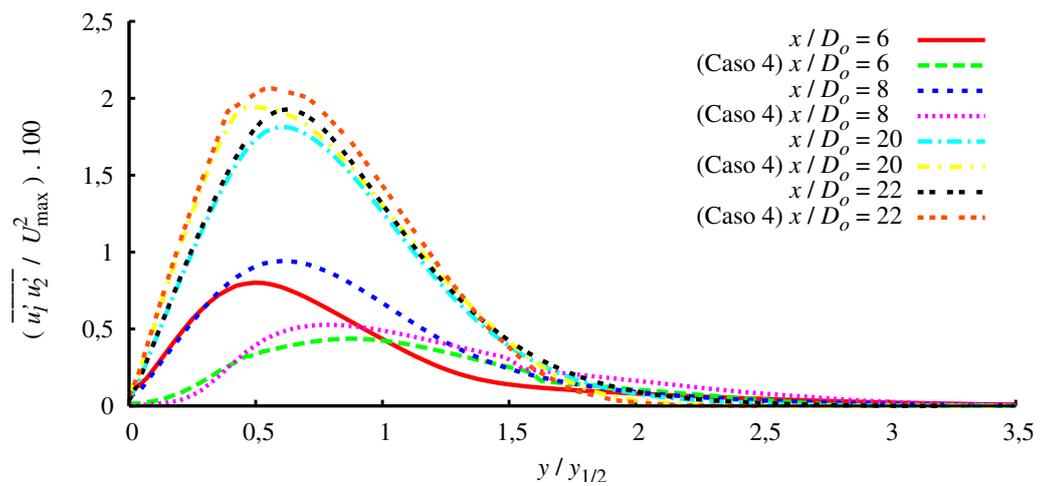
Na região próxima aos bocais, os perfis das propriedades turbulentas tendem a um comportamento semelhante ao observado para as tensões de Reynolds. Este comportamento pode ser observado na [Figura 4.28](#). Na região próxima aos bocais, é possível observar que nas propriedades turbulentas para presente caso, o máximo ocorre entre de  $0,5 < y/y_{1/2} < 1$ , enquanto que no caso 4 o máximo se localiza em  $y/y_{1/2} = 1$  pelo menos até  $x/D_o = 8$ . O desaparecimento do núcleo potencial interno ocorre a partir de  $x/D_o > 20$ , a partir deste ponto o máximo valor destas propriedades permanece constante na região do jato, e não há a presença de um ponto de máximo característico.



(a) Intensidade turbulenta axial

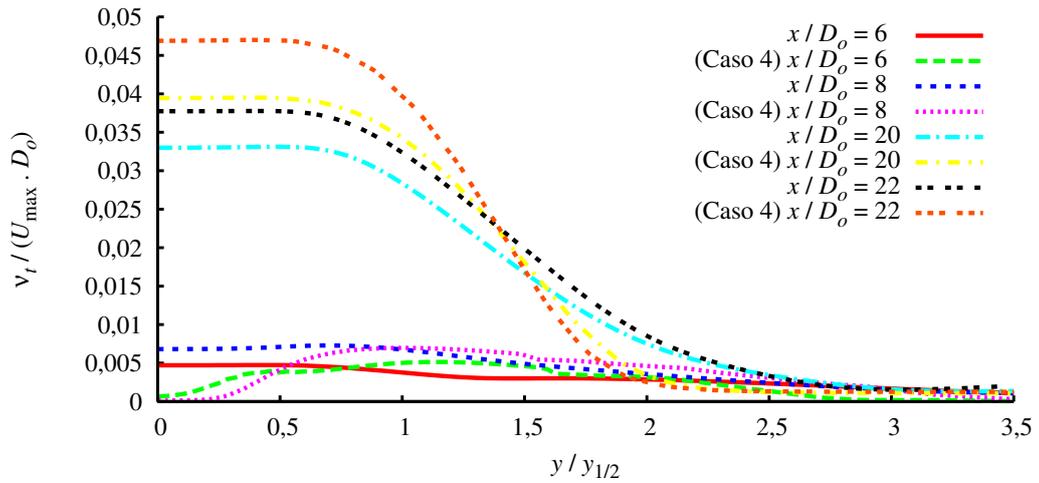


(b) Intensidade turbulenta radial

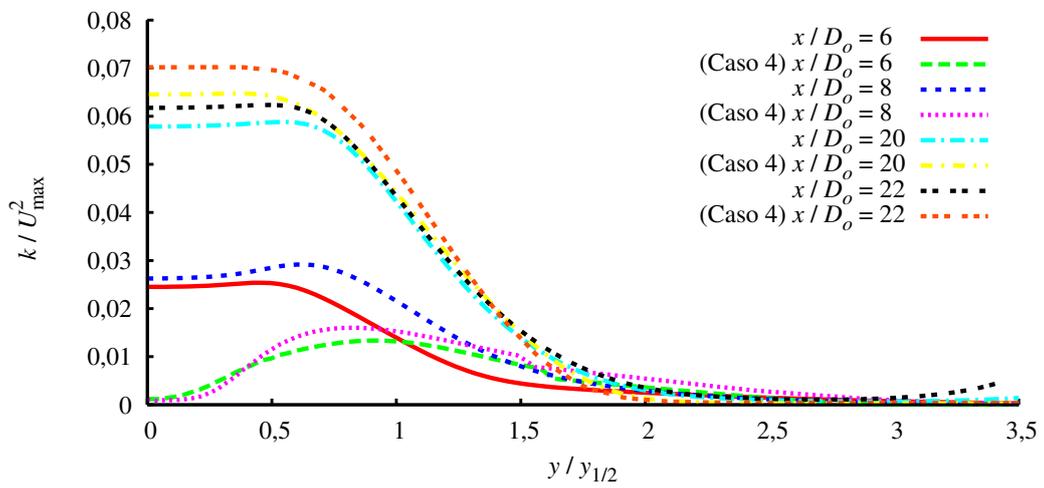


(c) Tensões de cisalhamento turbulentas

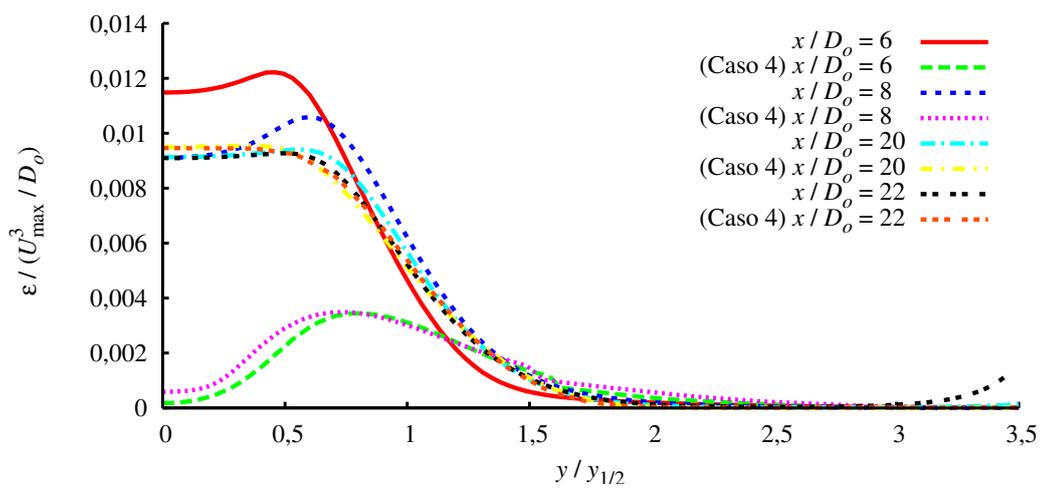
Figura 4.27 - Distribuições das tensões de Reynolds para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$ .



(a) Viscosidade turbulenta



(b) Energia cinética turbulenta

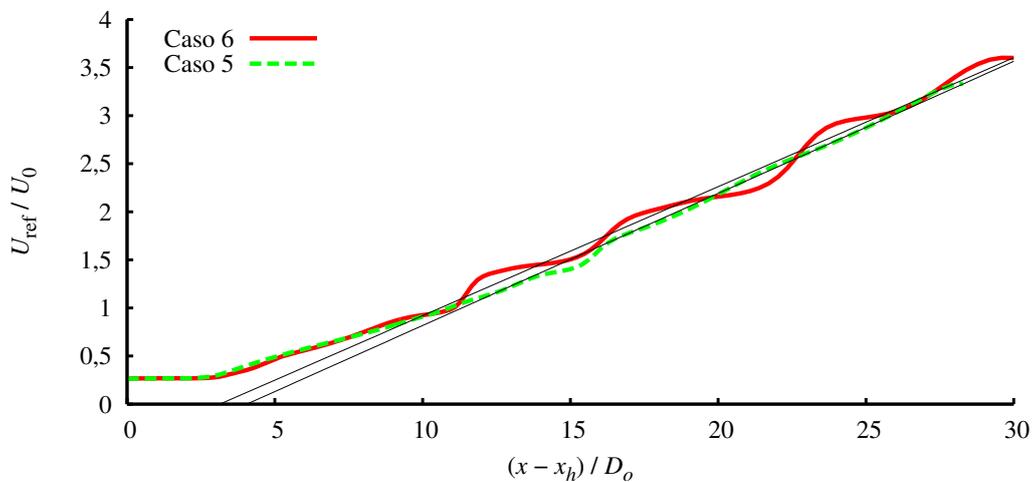


(c) Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

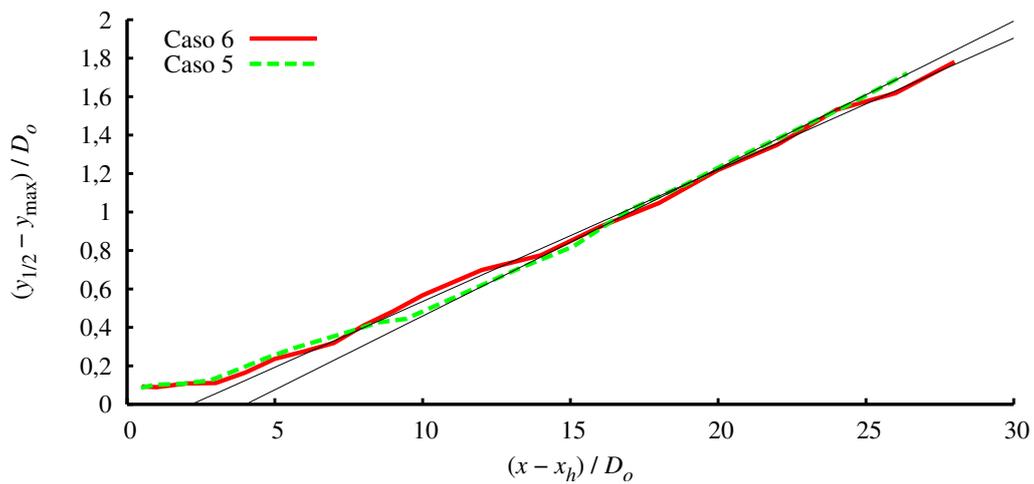
Figura 4.28 - Distribuições das propriedades turbulentas para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$ .

#### 4.8 Queimador com Parede entre os Bocais (Caso 6)

O último caso consiste de um jato coaxial com uma configuração de queimador de chama difusiva tipo *Delft*, considerando a parede entre os bocais. Este caso foi comparado ao caso 5, observando assim, a influência desta parede no escoamento dos jatos. Além disto, por considerar a presença da borda entre os bocais, esta configuração representa mais adequadamente o queimador de chama difusiva tipo *Delft*. Ainda deve ser levado em conta que não foi considerada a presença das chamas piloto que são sustentadas nesta borda.



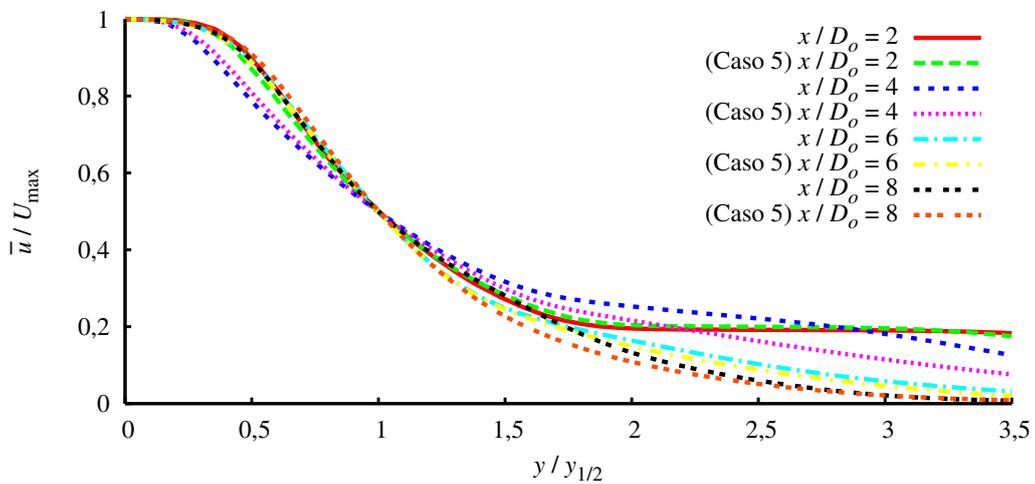
(a) Velocidade na linha central



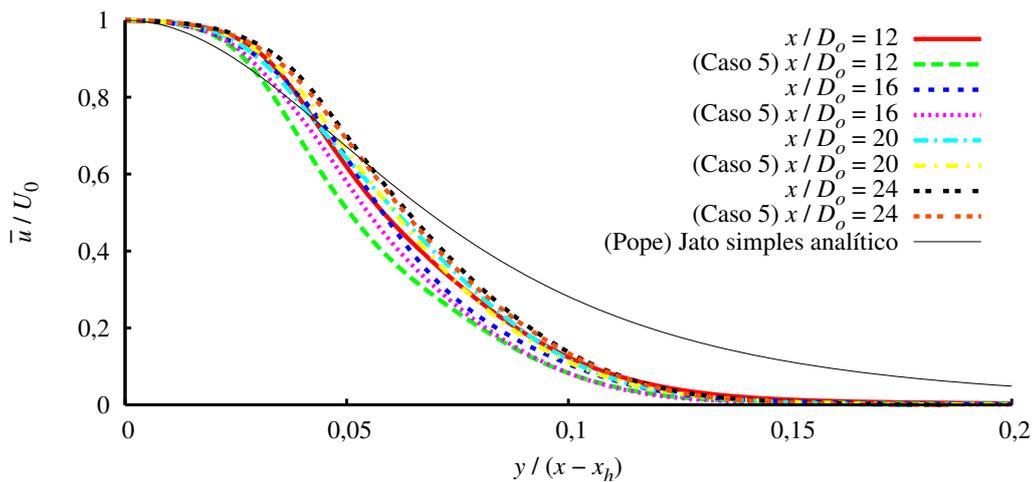
(b) Taxa de espalhamento

Figura 4.29 - Variação de velocidade na linha central  $U_0$  e crescimento da espessura média do jato  $y_{1/2}$  em função da coordenada axial  $x$  para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$  com parede entre os bocais.

Na [Figura 4.29](#), é possível observar que a presença da parede entre os bocais dos jatos coaxiais aumenta consideravelmente o nível de oscilações na variação da velocidade na linha central. A taxa de espalhamento para este caso ( $S = 0,068$ ) apresenta um menor valor do que o obtido para o caso 5 ( $S = 0,075$ ). Isto significa que a taxa de arraste turbulento de fluido (entrainment) é menor para o presente caso. Como discutido no caso 5, a redução no arraste turbulento de fluido, resulta em uma menor taxa de fluxo mássico na direção do escoamento. A presença de parede no plano de saída dos bocais aumenta consideravelmente a intermitência do escoamento, conforme analisado por [Abdel-Rahman \*et al.\* \(1997\)](#). Este fenômeno pode estar associado à presença de zonas de recirculação próximo à parede.



(a) Região próxima aos bocais



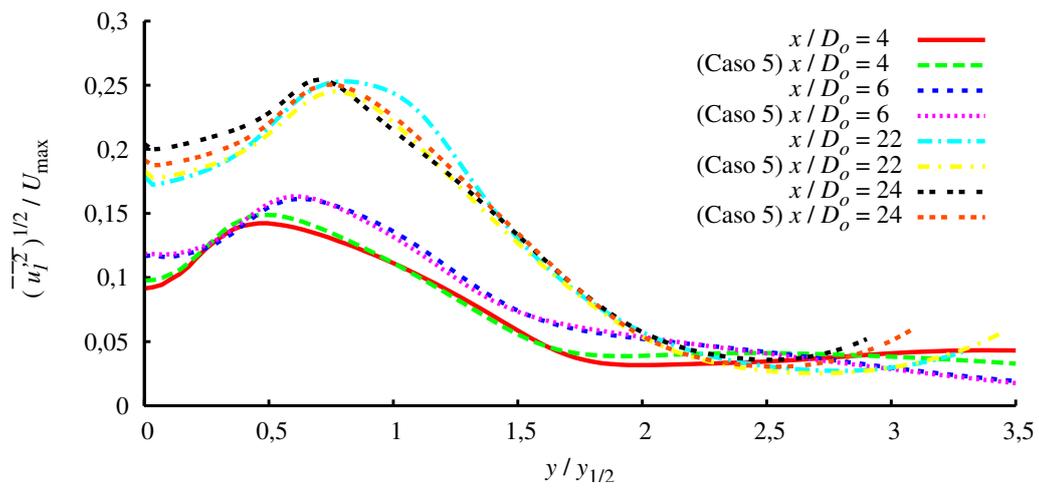
(b) Região de escoamento desenvolvido

Figura 4.30 - Perfis de velocidade normalizada para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$  com parede entre os bocais.

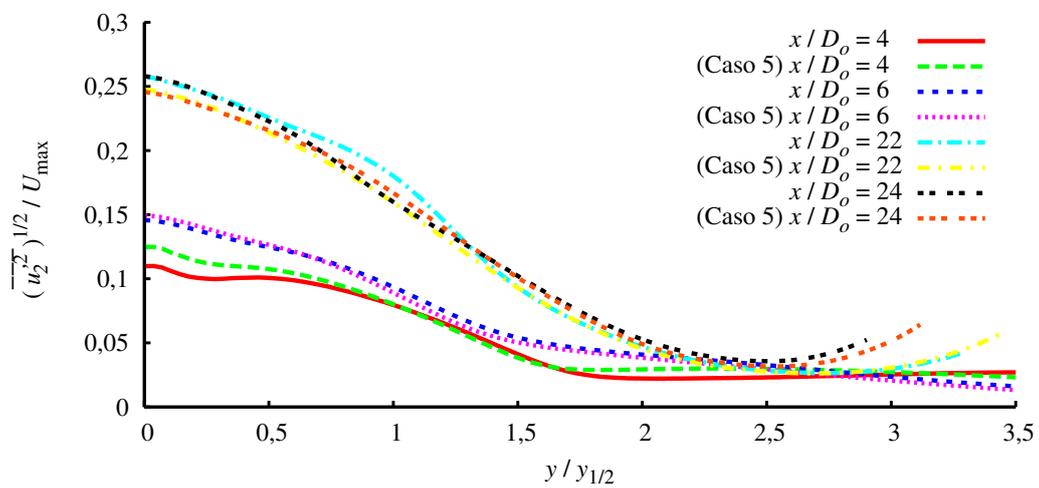
Na [Figura 4.30](#), é possível visualizar os perfis de velocidades. Os perfis de velocidades têm uma melhor convergência para um perfil auto-similar do que para o caso 5, na região de escoamento desenvolvido ([Figura 4.30\(b\)](#)).

A distribuição das tensões de Reynolds pode ser observado na [Figura 4.31](#). No presente caso, o comportamento destas tensões é muito semelhante ao obtido no caso 5. A partir da distância  $x/D_o > 6$ , as tensões apresentam valores máximos um pouco maiores do que os obtidos para o caso 5. A partir da distância  $x/D_o > 22$ , as tensões de Reynolds apresentam um perfil auto-similar. O comportamento destas tensões não tem uma tendência regular, pois os valores obtidos são muito próximos dos obtidos para o caso 5. Desse modo, se torna difícil uma comparação mais significativa dos resultados.

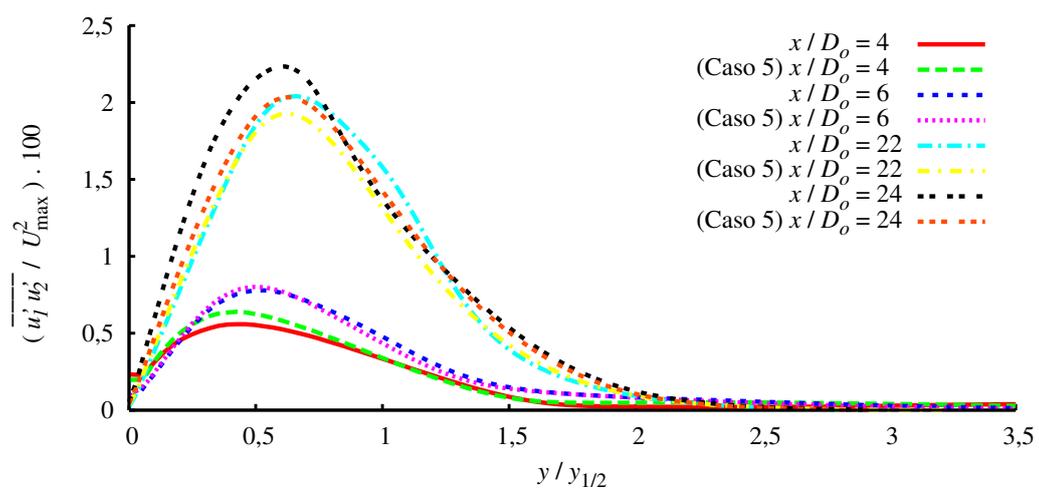
Na [Figura 4.32](#) podem ser observados os perfis da viscosidade turbulenta, energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta para o presente caso em comparação com o caso 5. O comportamento observado para as tensões de Reynolds também pode ser observado para as propriedades turbulentas. É possível observar que o núcleo potencial interno desaparece somente em  $x/D_o > 22$ , onde o máximo valor das propriedades turbulentas é constante na região do jato. No caso 5, o núcleo potencial interno desaparece a partir de  $x/D_o > 20$ . Com relação aos picos característicos nestas propriedades, que representam a influência do núcleos potenciais e as camadas de mistura, há uma grande semelhança com as observações feitas para o caso 5.



(a) Intensidade turbulenta axial

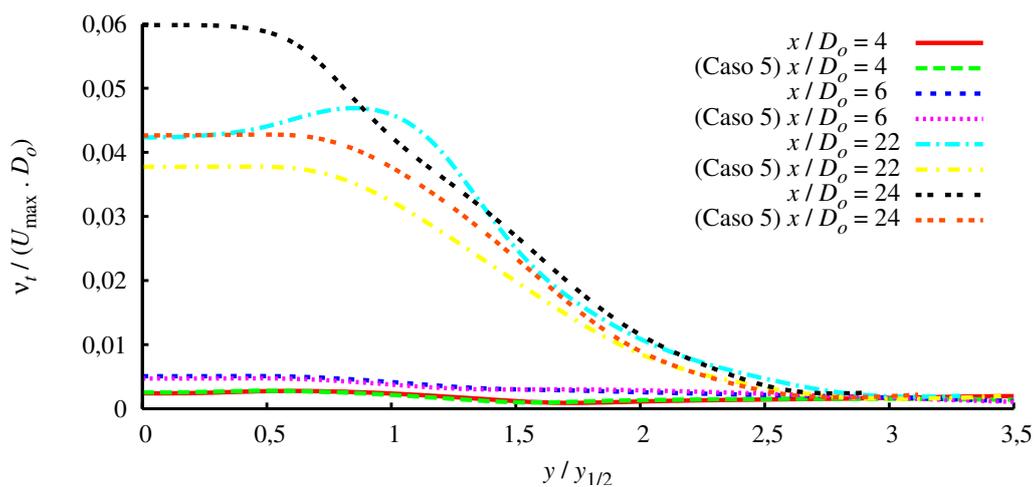


(b) Intensidade turbulenta radial

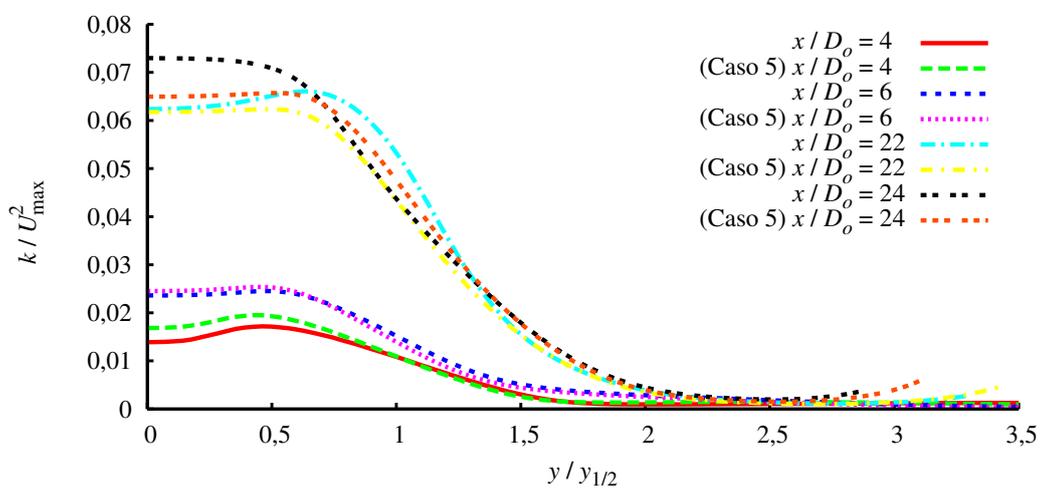


(c) Tensões de cisalhamento turbulentas

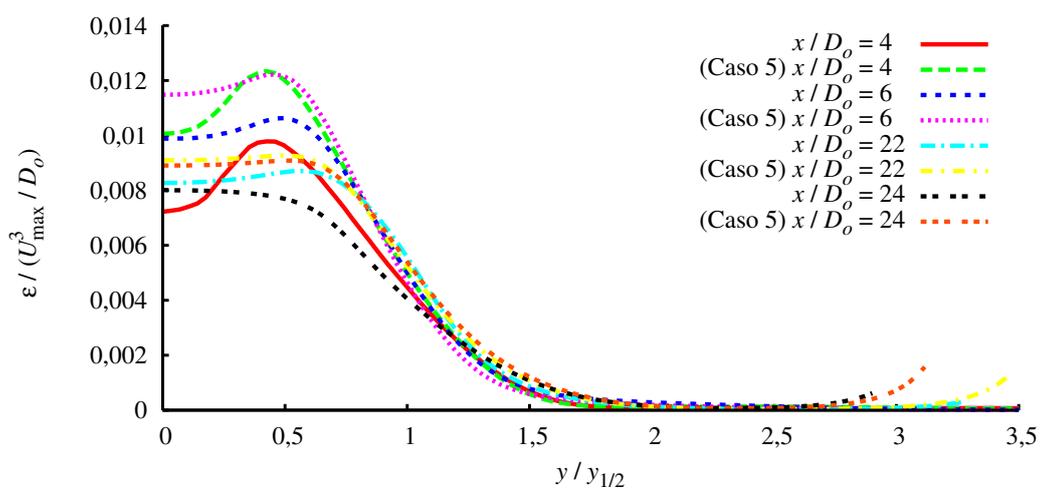
Figura 4.31 - Distribuições das tensões de Reynolds para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$  com parede entre os bocais.



(a) Viscosidade turbulenta



(b) Energia cinética turbulenta



(c) Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

Figura 4.32 - Distribuições das propriedades turbulentas para  $U_o/U_i = 0,202$  e  $A_o/A_i = 28,13$  com parede entre os bocais.



## 5 CONCLUSÕES E TRABALHO FUTUROS

Este trabalho apresentou uma análise numérica de jatos coaxiais turbulentos, considerando dois parâmetros importantes que influenciam o escoamento deste tipo de configuração. Estes parâmetros são a razão de velocidades iniciais e a razão de áreas entre os dutos externo e interno, que tem um papel fundamental com relação ao término dos núcleos de escoamento potencial e a conseqüente formação do escoamento desenvolvido. Além disso, eles influenciam o aumento do fluxo mássico na direção do escoamento, proporcionando uma melhor mistura entre os fluxos. Foram calculados valores para diversos parâmetros relacionadas com o campo de escoamento de jatos turbulentos, de modo a tornar possível a visualização do comportamento destes parâmetros e sua dependência com a razão de velocidades e com a razão de áreas. Os parâmetros estudados no presente trabalho foram: decaimento da velocidade na linha central, taxa de espalhamento e crescimento do jato, perfis de velocidades médias, tensões de Reynolds, viscosidade turbulenta, energia cinética turbulenta e taxa de dissipação de energia cinética turbulenta.

Para formulação das equações governantes de jatos coaxiais turbulentos incompressíveis isotérmicos, foram utilizadas as equações de Navier-Stokes com média de Reynolds, obtidas pelo processo de decomposição de Reynolds. Na modelagem das escalas menores foram utilizados modelos de turbulência de duas equações do tipo  $k - \epsilon$ . Foi realizada uma análise com os modelos  $k - \epsilon$  padrão,  $k - \epsilon$  RNG e  $k - \epsilon$  não linear de Shih. Destes modelos analisados o que apresentou os melhores resultados para o estudo pretendido foi o modelo  $k - \epsilon$  não linear de Shih. Os modelos não lineares apresentam resultados bem melhores que os obtidos pelos modelos lineares na modelagem de escoamentos complexos, pois possuem uma melhor habilidade para capturar a anisotropia das tensões de Reynolds e uma boa sensibilidade. Os modelos lineares utilizados no trabalho apresentaram uma certa deficiência para reprodução de algumas propriedades turbulentas.

Através do uso do pacote numérico OpenFOAM, foi possível a solução das equações governantes e obtenção dos resultados utilizados nas análises dos casos de jatos coaxiais turbulentos. O método numérico utilizado na discretização das equações governantes foi o método de volumes finitos com uma malha estruturada não uniforme. Foi realizado um estudo comparativo simplificado para verificar a qualidade da malha computacional utilizada e sua influência na estabilidade numérica da solução. Qualquer estudo de CFD exige o refinamento necessário para obter solução independente da malha. No refinamento de uma malha computacional, não se pode esquecer do custo computacio-

nal associado ao nível de refino, pois as vezes torna-se impraticável a utilização de um alto nível de refino devido ao tempo de cálculo. A malha computacional utilizada neste trabalho, de modo geral, apresentou bons resultados em comparação com soluções analíticas ou resultados experimentais nos casos de validação, mas poderia ser melhorada através de um estudo mais detalhado de refinamento e estabilidade de malha.

As configurações de jatos coaxiais turbulentos analisados neste trabalho foram um jato simples, um jato coaxial com razão de velocidades  $r_u = 5$ , dois jatos coaxiais com  $r_u < 1$ , dois jatos coaxiais com uma razão de área idêntica a do queimador tipo *Delft*. Os dois primeiros casos, utilizados na validação do pacote numérico, apresentaram um bom nível de concordância com os resultados analíticos e experimentais. O caso 3, mostrou que jatos com  $r_u < 1$  tem um espalhamento menor do que jatos com  $r_u > 1$ . O caso 4, mostrou que quanto mais próximo de zero o valor de  $r_u$ , o jato se espalha mais rapidamente e as soluções se tornam semelhantes as normalmente encontradas para jato simples. Os casos 5 e 6 apresentaram maiores valores nas tensões de Reynolds, na região próxima aos bocais, quando comparados ao caso 4. Apesar da borda entre os bocais, no caso 6, resultar em uma diminuição da taxa de espalhamento, ela tem um papel importante no processo de estabilização da chama do queimador através da utilização de “chamas piloto”. Por estas vantagens, esta configuração de jatos coaxiais tem sido amplamente usada em queimadores de chama difusiva.

Com a realização deste estudo foi possível obter um melhor entendimento do comportamento de jatos coaxiais turbulentos e observar como as razões de áreas entre os bocais, e a razão de velocidades iniciais dos jatos interno e externo influenciam as características dos jatos. Para uma continuidade do presente trabalho podem ser citadas algumas perspectivas: o estudo de jatos coaxiais turbulentos compressíveis, a aplicação de outros modelos de turbulência não lineares, a utilização de Simulações de Grandes Escalas para o estudo de jatos coaxiais turbulentos e a inserção de modelos de combustão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDEL-RAHMAN, A. A.; CHAKROUN, W.; AL-FAHED, S. F. LDA measurements in the turbulent round jet. **Mechanics Research Communications**, 24, n. 3, p. 277–288, 1997. [36](#), [81](#), [118](#)
- AKIN, J. E.; BASS, J. Asymmetric turbulent jet flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 191, n. 6–7, p. 515–524, 2001. [37](#)
- BALARAC, G.; SI-AMEUR, M. Mixing and coherent vortices in turbulent coaxial jets. **Comptes Rendus Mecanique**, 333, n. 8, p. 622–627, 2005. [43](#)
- BOGEY, C.; BAILLY, C. Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering. **Computers & Fluids**, v. 35, n. 10, p. 1344–1358, 2006. [38](#)
- BRADSHAW, P. Turbulence modeling with application to turbomachinery. **Progress in Aerospace Sciences**, 32, n. 6, p. 575–624, 1996. [61](#)
- BRANCHER, P.; CHOMAZ, J. M.; HUERRE, P. Direct numerical simulations of round jets: Vortex induction and side jets. **Physics of Fluids**, 6, n. 5, p. 1768–1774, 1994. [35](#)
- BURESTI, G.; PETAGNA, P.; TALAMELLI, A. Experimental investigation on the turbulent near-field of coaxial jets. **Experimental Thermal and Fluid Science**, 17, n. 1–2, p. 18–26, 1998. [40](#)
- CHAMPAGNE, F. H.; WYGNANSKI, I. J. An experimental investigation of coaxial turbulent jets. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 14, n. 9, p. 1445–1464, 1971. [29](#), [38](#), [39](#), [82](#), [86](#), [88](#), [89](#), [97](#), [98](#), [99](#)
- CHEN, W. L.; LIEN, F. S.; LESCHZINER, M. A. Non-linear eddy-viscosity modelling of transitional boundary layers pertinent to turbomachine aerodynamics. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, 19, n. 4, p. 297–306, 1998. [67](#)
- DESJARDIN, P. E.; FRANKEL, S. H. Large eddy simulation of a nonpremixed reacting jet: Application and assessment of subgrid-scale combustion models. **Physics of Fluids**, 10, n. 9, p. 2298–2314, 1998. [27](#), [36](#)
- FAVRE-MARINET, M.; SCHETTINI, E. B. C. The density field of coaxial jets with large velocity ratio and large density differences. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 44, n. 10, p. 1913–1924, 2001. [43](#)

- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 2. ed. New York, NY: Springer, 1999. 48
- GHARBI, A.; RUFFIN, E.; ANSELMET, F.; SCHIESTEL, R. Numerical modelling of variable density turbulent jets. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 39, n. 9, p. 1865–1882, 1996. 36
- GOKARN, A.; BATTAGLIA, F.; FOX, R. O.; HILL, J. C. Simulations of mixing for a confined co-flowing planar jet. **Computers & Fluids**, v. 35, n. 10, p. 1228–1238, 2006. 44
- HILGERS, A.; BOERSMA, B. J. Optimization of turbulent jet mixing. **Fluid Dynamics Research**, 29, n. 6, p. 345–368, 2001. 37
- JAHNKE, S.; KORNEV, N.; TKATCHENKO, I.; HASSEL, E.; LEDER, A. Numerical study of influence of different parameters on mixing in a coaxial jet mixer using LES. **Heat Mass Transfer**, 41, n. 5, p. 471–481, 2005. 43
- KECHICHE, J.; MHIRI, H.; Le Palec, G.; BOURNOT, P. Application of low Reynolds number  $k - \epsilon$  turbulence models to the study of turbulent wall jets. **International Journal of Thermal Sciences**, 43, n. 2, p. 201–211, 2004. 38
- KOBAYASHI, T. Large eddy simulation for engineering applications. **Fluid Dynamics Research**, 38, n. 2–3, p. 84–107, 2006. 38
- KRIAA, W.; MHIRI, H.; Le Palec, G.; BOURNOT, P. Numerical study of the interaction between two laminar and coaxial plane jets with variable density in an ambient fluid. **Energy Conversion and Management**, 44, n. 12, p. 2037–2057, 2003. 44
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. The numerical computation of turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 3, n. 2, p. 269–289, 1974. 63
- MARTINS, C. A.; PIMENTA, A. P.; CARVALHO, J. A.; FERREIRA, M. A.; CALDEIRA-PIRES, A. A.  $CH$  and  $C_2$  radical characterization in natural gas turbulent diffusion flames. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, 27, n. 2, p. 110–118, 2005. 46
- MATHEW, J.; BASU, A. J. An economical method for direct numerical simulation studies of transitional round jets. **Computers & Fluids**, 30, n. 5, p. 543–554, 2001. 28, 35

MATHIEU, J.; SCOTT, J. **An introduction to turbulent flow**. 1. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000. 48, 49, 50, 93

MCILWAIN, S. **Large eddy simulation of the near field of round and coaxial jets with mild swirl**. Tese (Doutorado) — Queen's University, 2000. 42

MEHRAVARAN, K.; JABERI, F. A. Direct numerical simulation of transitional buoyant planar jet flames. **Physics of Fluids**, 16, n. 12, p. 4443–4461, 2004. 37

OPENCFD. **OpenFOAM - the open source CFD toolbox**. [S.l.], 2006.

Programmer's Guide. Disponível em:

<<http://foam.sourceforge.net/doc/Guides-a4/ProgrammersGuide.pdf>>.

Acesso em: 28 Mar. 2006. 71, 72, 74, 84

POPE, S. B. **Turbulent flows**. 1. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000. 32, 33, 34, 49, 55, 92, 93, 94

REHAB, H.; VILLERMAUX, E.; HOPFINGER, E. J. Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets. **Journal of Fluid Mechanics**, 345, p. 357–381, 1997. 41

REMBOLD, B.; ADAMS, N. A.; KLEISER, L. Direct numerical simulation of a transitional rectangular jet. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, 23, n. 5, p. 547–553, 2002. 37

REYNIER, P.; Ha Minh, H. Numerical prediction of unsteady compressible turbulent coaxial jets. **Computers & Fluids**, 27, n. 2, p. 239–254, 1998. 42, 94

SCHUMANN, U. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. **Physics of Fluids**, 20, n. 5, p. 721–725, 1977. 64

SHIH, T. H.; LIOU, W. W.; SHABIR, A.; YANG, Z.; ZHU, J. A new  $k - \epsilon$  eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows. **Computers & Fluids**, 24, n. 3, p. 227–238, 1995. 66

SILVEIRA NETO, A. **Turbulência nos fluidos aplicada**. Uberlândia - MG, 2004. Apostila. Disponível em: <<http://www.ltcm.ufu.br>>. Acesso em: Out. 2006. 31, 34, 35, 52, 53, 54, 55

SOUZA, A. M. **Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005. 32

STANLEY, S. A.; SALKAR, S. Direct numerical simulation of developing region of turbulent planar jets. In: **AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT**, 37., 1999, Reno, NV. **Proceedings...** Reston, VA: AIAA, 1999. p. 1–11. AIAA Paper 99-0288. [35](#)

STÖLLINGER, M. **Three-dimensional PDF simulation of a piloted turbulent non-premixed jet flame**. Tese (Doutorado) — Technical University of Munich, 2005. [45](#), [46](#)

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. 2. ed. Washington, DC: Taylor & Francis, 1997. [62](#), [63](#), [71](#)

VERZICCO, R.; ORLANDI, P. Direct simulations of the transitional regime of a circular jet. **Physics of Fluids**, 6, n. 2, p. 751–759, 1994. [27](#)

WARDA, H. A.; KASSAB, S. Z.; ELSHORBAGY, K. A.; ELSAADAWY, E. A. An experimental investigation of the near-field region of a free turbulent coaxial jet using LDA. **Flow Measurement and Instrumentation**, 10, n. 1, p. 15–26, 1999. [41](#)

\_\_\_\_\_. Influence of the magnitude of the two initial velocities on the flow field of a coaxial turbulent jet. **Flow Measurement and Instrumentation**, 12, n. 1, p. 29–35, 2001. [42](#)

WICKER, R. B.; EATON, J. K. Structure of a swirling, recirculating coaxial free jet and its effect on particle motion. **International Journal of Multiphase Flow**, 27, n. 6, p. 949–970, 2001. [42](#)

WILCOX, D. C. **Turbulence modeling for CFD**. 1. ed. La Canada, CA: DCW Industries, Inc., 1993. [34](#), [55](#), [61](#), [92](#)

YAKHOT, V.; ORSZAG, S. A.; THANGAM, S.; GATSKI, T. B.; SPEZIALE, C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. **Physics of Fluids A - Fluid Dynamics**, 4, n. 7, p. 1510–1520, 1992. [65](#)

ZHOU, X.; SUN, Z.; DURST, F.; BRENNER, G. Numerical simulation of turbulent jet flow and combustion. **Computers & Mathematics with Applications**, 38, n. 9–10, p. 179–191, 1999. [36](#)

## A DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA O ESCOAMENTO MÉDIO

### A.1 Equações de Navier-Stokes com Médias de Reynolds

A ferramenta básica requerida para a derivação das equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds a partir das equações instantâneas de Navier-Stokes é a decomposição de Reynolds. A decomposição de Reynolds refere-se à separação da variável do escoamento (por exemplo, velocidade  $u$ ) em uma componente média  $\bar{u}$  e uma componente de flutuação  $u'$ , como mostrado na [Figura A.1](#).

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}) + u'(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.1})$$

onde,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  é o vetor posição. A razão para tal decomposição é abrir a possibilidade de tratar as propriedades dos escoamentos turbulentos em termos de soluções bem comportadas  $\bar{u}$ , e de contribuições flutuantes de caráter complexo  $u'$ , as quais são tratadas separadamente. Nota-se que, na decomposição de Reynolds, é a parte flutuante que essencialmente carrega toda a dinâmica do escoamento via sua dependência temporal, ou seja, esta componente é responsável pela modelagem das flutuações características dos escoamentos turbulentos. Vale observar que as porções de fluido que realizam tais flutuações nas propriedades do escoamento não constituem moléculas individuais, tal como assumido na teoria cinética dos gases, mas sim, quantidades macroscópicas de fluido de escala reduzida.

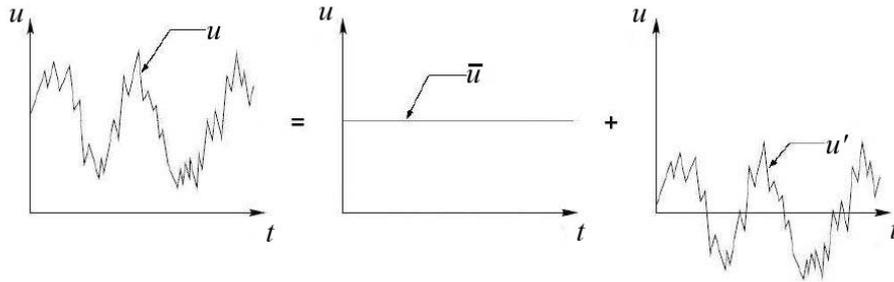


Figura A.1 - Decomposição de Reynolds para o campo de velocidade  $u(\mathbf{x}, t)$ .

A decomposição de Reynolds é usualmente baseada em médias temporais definidas por:

$$\bar{u}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(\mathbf{x}, t) dt, \quad (\text{A.2})$$

onde  $T$  é um intervalo de tempo suficiente longo para que a média represente de fato o comportamento estacionário do escoamento. Como consequência desta definição, tomando a média temporal da decomposição (Equação A.2), segue que a média das flutuações  $u'(\mathbf{x}, t)$  é zero:

$$\overline{u'(\mathbf{x}, t)} = 0, \quad (\text{A.3})$$

uma vez que a média da média de  $u(\mathbf{x})$  é a própria média:  $\overline{\overline{u}(\mathbf{x})} = \overline{u}(\mathbf{x})$ . Isto está ilustrado qualitativamente na Figura A.1. Assim como a velocidade instantânea, outras propriedades como pressão, temperatura e massa específica instantâneas também podem ser descritas em termos da decomposição (Equação A.1):

$$p(\mathbf{x}, t) = \overline{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t); \quad T(\mathbf{x}, t) = \overline{T}(\mathbf{x}) + T'(\mathbf{x}, t); \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \overline{\rho}(\mathbf{x}) + \rho'(\mathbf{x}, t),$$

sendo a média temporal de suas flutuações também zero:

$$\overline{p'(\mathbf{x}, t)} = 0; \quad \overline{T'(\mathbf{x}, t)} = 0; \quad \overline{\rho'(\mathbf{x}, t)} = 0.$$

A decomposição de Reynolds representa uma maneira de introduzir uma formulação estatística para a descrição da dinâmica dos escoamentos turbulentos, possibilitando assim, sua modelagem numérica. As seguintes regras também serão utilizadas enquanto deriva-se as equações de Navier-Stokes com média de Reynolds. Se  $\phi$  e  $\psi$  são duas variáveis do escoamento (como massa específica  $\rho$ , velocidade  $u$ , pressão  $p$ , etc.) e  $s$  é uma das variáveis independentes ( $x, y, z$  ou  $t$ ), então:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\phi}} &= \overline{\phi}; \\ \overline{\phi + \psi} &= \overline{\phi} + \overline{\psi}; \\ \overline{\phi\psi} &= \overline{\phi} \overline{\psi}; \\ \overline{\phi\psi} &\neq \overline{\phi} \overline{\psi}; \\ \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

As equações de Navier-Stokes para um fluido Newtoniano incompressível isotérmico são:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo,  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ ,  $p = \bar{p} + p'$ , etc., tem-se:

$$\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = (\bar{f}_i + f'_i) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{A.8})$$

Tomando a média temporal destas equações fornece:

$$\overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i}} = 0; \quad (\text{A.9})$$

$$\overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t}} + \overline{(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j}} = \overline{(\bar{f}_i + f'_i)} - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}} \quad (\text{A.10})$$

Observe que os termos não lineares (como  $\overline{u_i u_i}$ ) podem ser simplificados a,

$$\overline{u_i u_i} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i) (\bar{u}_i + u'_i)} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_i + \bar{u}_i u'_i + u'_i \bar{u}_i + u'_i u'_i} = \bar{u}_i \bar{u}_i + \overline{u'_i u'_i}.$$

Desse modo, tem-se a equação da conservação da massa média:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{A.11})$$

e conclui-se que a componente estacionária do escoamento também é solenoidal. Do mesmo modo, a componente de flutuação equivale a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i + u'_i) = 0 \implies \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Tem-se também a equação de quantidade de movimento média:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{A.13})$$

A equação de quantidade de movimento, colocada na forma conservativa, pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}). \quad (\text{A.14})$$

E com manipulações adicionais fornece:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = \bar{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\frac{\bar{p}}{\rho} \delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]. \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Equações de Navier-Stokes com Médias de Favre

Para derivação das equações médias de Navier-Stokes é necessário utilizar procedimentos de decomposição da variável dependente. Seja  $\phi$  uma variável dependente qualquer. São definidos dois diferente tipos de decomposição de  $\phi$ :

- Decomposição de Reynolds:

$$\phi \equiv \bar{\phi} + \phi'.$$

Onde,

$$\bar{\phi} \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(t) dt.$$

- Decomposição de Favre:

$$\phi \equiv \tilde{\phi} + \phi''.$$

Onde,

$$\tilde{\phi} \equiv \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}.$$

Observe que com as definições acima  $\overline{\phi'} = 0$ , mas  $\overline{\phi''} \neq 0$ .

### A.2.1 Equações Turbulentas Abertas

Para obter as equações governantes numa forma média, são calculadas as médias temporais das equações instantâneas da continuidade, quantidade de movimento e energia. São introduzidas uma decomposição utilizando média temporal ponderada com a massa específica (decomposição de Favre) para  $u_i$  e  $e_0$ , e uma decomposição utilizando média temporal clássica (decomposição de Reynolds) para as demais variáveis dependentes, obtendo o seguinte conjunto de equações abertas:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\rho} \tilde{u}_i] = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} + \overline{\rho u_i'' u_j''} - \bar{\tau}_{ji}] = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{e}_0 + \tilde{u}_j \bar{p} + \overline{u_j'' p} + \overline{\rho u_j'' e_0''} + \bar{q}_j - \overline{u_i \tau_{ij}}] = 0. \quad (\text{A.18})$$

A energia total com média de Favre  $\tilde{e}_0$  é dada por:

$$\tilde{e}_0 \equiv \tilde{e} + \frac{\tilde{u}_k \tilde{u}_k}{2} + k. \quad (\text{A.19})$$

Onde a energia turbulenta,  $k$ , é definida por:

$$k \equiv \frac{\widetilde{u_k'' u_k''}}{2}. \quad (\text{A.20})$$

As Equações A.16, A.17 e A.18 são conhecidas como as equações de Navier-Stokes com médias de Favre.  $\bar{\rho}$ ,  $\widetilde{u}_i$  e  $\widetilde{e}_0$  são variáveis solução primárias. Note que este é um conjunto de equações diferenciais parciais abertas que contém muitos termos correlacionados desconhecidos. Para obter uma forma fechada das equações de modo que possam ser resolvidas, é necessário modelar estes termos correlacionados desconhecidos.

### A.2.2 Aproximações e Modelagem

Para analisar as Equações A.16, A.17 e A.18, é conveniente reescrever os termos desconhecidos da seguinte maneira:

$$\overline{\tau_{ji}} = \widetilde{\tau_{ji}} + \overline{\tau_{ji}''}, \quad (\text{A.21})$$

$$\overline{u_j'' p} + \overline{\rho u_j'' e_0''} = C_p \overline{\rho u_j'' T} + u_i \overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2}, \quad (\text{A.22})$$

$$\overline{q_j} = -C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} = -C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} - C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \overline{T}''}{\partial x_j}, \quad (\text{A.23})$$

$$\overline{u_i \tau_{ij}} = \widetilde{u}_i \widetilde{\tau}_{ij} + \overline{u_i'' \tau_{ij}} + \widetilde{u}_i \overline{\tau_{ij}''}. \quad (\text{A.24})$$

Observa-se que as relações de gás perfeito e lei de Fourier foram utilizadas. Observa-se também que flutuações na viscosidade molecular,  $\mu$ , foram desprezadas.

Inserindo de A.21-A.24 em A.16, A.17 e A.18 fornece:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\rho} \widetilde{u}_i] = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \widetilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} + \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_j''}}_{(1^*)} - \widetilde{\tau}_{ji} - \underbrace{\overline{\tau_{ji}''}}_{(2^*)} \right] = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{e}_0 + \tilde{u}_j \bar{p} + \underbrace{C_p \overline{\rho u_j'' T}}_{(3^*)} + \underbrace{\tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_j''}}_{(4^*)} + \underbrace{\frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2}}_{(5^*)} - C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - \underbrace{C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \overline{T''}}{\partial x_j}}_{(6^*)} - \tilde{u}_i \tilde{\tau}_{ij} - \underbrace{\overline{u_i'' \tau_{ij}}}_{(7^*)} - \underbrace{\tilde{u}_i \overline{\tau_{ij}''}}_{(8^*)} \right] = 0. \quad (\text{A.27})$$

Os termos marcados de (1\*)-(8\*) são desconhecidos, e tem que ser modelados de alguma forma. Os termos (1\*) e (4\*) podem ser modelados usando uma hipótese de viscosidade turbilhonar (hipótese de Boussinesq) para as tensões de Reynolds,  $\tau_{ij}^{turb}$ :

$$\tau_{ij}^{turb} \equiv -\overline{\rho u_i'' u_j''} \approx \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}, \quad (\text{A.28})$$

onde  $\mu_t$  é uma viscosidade turbulenta, a qual é estimada com um modelo de turbulência. O último termo na [Equação A.28](#) é incluído para garantir que o mínimo valor do tensor de tensões de Reynolds seja igual a  $-2\rho k$ .

Os termos (2\*) e (8\*) podem ser desprezados se:

$$|\tilde{\tau}_{ij}| \gg |\overline{\tau_{ij}''}|. \quad (\text{A.29})$$

Isto é verdadeiro para praticamente todos escoamentos.

O termo (3\*), corresponde á um transporte turbulento de calor e pode ser modelado usando uma aproximação do gradiente para o fluxo de calor turbulento:

$$q_j^{turb} \equiv C_p \overline{\rho u_j'' T} \approx -C_p \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (\text{A.30})$$

onde  $\text{Pr}_t$  é um número de Prandtl turbulento. Frequentemente uma constante  $\text{Pr}_t \approx 0.9$  é usada.

Os termos (5\*) e (7\*), correspondem ao transporte turbulento e difusão molecular da energia turbulenta, podem ser desprezados se a energia turbulenta é pequena comparado à entalpia:

$$k \ll \tilde{h} = C_p \tilde{T}. \quad (\text{A.31})$$

Esta é uma aproximação razoável para a maioria dos escoamentos abaixo do regime

hipersônico. Uma melhor aproximação pode ser uma expressão do gradiente da forma:

$$\frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2} - \overline{u_i'' \tau_{ij}} \approx - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (\text{A.32})$$

onde  $\sigma_k$  é uma constante do modelo. Esta aproximação não será incluída em formulas derivadas abaixo. No lugar dos termos (5\*) e (7\*) serão colocados zeros na equação de energia. O termo (6\*) é um produto resultante da média de Favre. Está relacionado aos efeitos da condução de calor associados com flutuações da temperatura. Ele pode ser desprezado se:

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_j^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \overline{T''}}{\partial x_j^2} \right|. \quad (\text{A.33})$$

Isto é verdadeiro para praticamente todos escoamentos, e tem sido assumido em todas as equações seguintes.

### A.2.3 Fechamento das Equações Turbulentas

As equações governantes, com as hipóteses acima descritas podem ser escritas da seguinte forma na sequência. Estas equações são válidas para um gás perfeito. Note também que todas as flutuações na viscosidade molecular tem sido desprezadas.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\rho} \tilde{u}_i] = 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i + \bar{p} \delta_{ij} - \tau_{ji}^{tot}] = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{e}_0 + \tilde{u}_j \bar{p} + q_j^{tot} - \tilde{u}_i \tau_{ij}^{tot}] = 0. \quad (\text{A.36})$$

Sendo

$$\tilde{\tau}_{ij}^{tot} \equiv \tilde{\tau}_{ij}^{lam} + \tilde{\tau}_{ij}^{turb}, \quad (\text{A.37})$$

$$\tilde{\tau}_{ij}^{lam} \equiv \tilde{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{\tau}_{ij}^{turb} \equiv -\overline{\rho u_i'' u_j''} \approx \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}, \quad (\text{A.39})$$

$$q_j^{tot} \equiv q_j^{lam} + q_j^{turb}, \quad (\text{A.40})$$

$$q_j^{lam} \equiv \tilde{q}_j \approx -C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (\text{A.41})$$

$$q_j^{turb} \equiv C_p \overline{\rho u_j'' T} \approx -C_p \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right), \quad (\text{A.42})$$

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \left( \tilde{e}_0 - \frac{\tilde{u}_k \tilde{u}_k}{2} - k \right). \quad (\text{A.43})$$

Se um modelo de turbulência separado é usado para calcular  $\mu_t$ ,  $k$  e  $\text{Pr}_t$ , e dados do gás são fornecidos para  $\mu$ ,  $\gamma$  e  $\text{Pr}$ , estas equações formam um conjunto fechado de equações diferenciais parciais, as quais podem ser resolvidas numericamente.

## B DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA AS QUANTIDADES TURBULENTAS

### B.1 Tensões de Reynolds

As equações médias de Reynolds envolvem novas quantidades relacionadas à produtos de flutuações  $-\overline{u'_i u'_k}$ , chamadas tensões de Reynolds, e  $-\overline{h' u'_k}$ , chamados fluxos de calor turbulentos. Estas quantidades surgem quando realizamos o processo de média sobre equações não lineares. Uma equação para as flutuações pode ser obtida subtraindo as equações para quantidades médias das equações para quantidades instantâneas.

$$\rho \left( \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - \rho \left( u'_j \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \rho \left( u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right). \quad (\text{B.1})$$

Observe que o índice livre desta equação é  $i$ . Multiplicando a [Equação B.1](#) por  $u'_k$  e calculando a média resulta em

$$\rho \left( \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u_j u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = -\overline{u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_k \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}} - \rho \left( \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \rho \left( \overline{u'_k u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right). \quad (\text{B.2})$$

Agora, desde que  $i$  e  $k$  são índices livres eles podem ser alternados para fornecer uma segunda equação dada por

$$\rho \left( \overline{u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial t}} + \overline{u_j u'_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) = -\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{kj}}{\partial x_j}} - \rho \left( \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \right) - \rho \left( \overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right). \quad (\text{B.3})$$

Alternativamente, a [Equação B.1](#) pode ser reescrita com  $k$  sendo o índice livre, então é multiplicada por  $u'_i$  e calculada a média. As equações [B.2](#) e [B.3](#) podem ser somadas resultando em uma equação para as tensões de Reynolds:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial t} (u'_i u'_k)} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_k)} &= -\frac{1}{\rho} \left( \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) \\ &\quad - \left( \overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{u'_k u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left( \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{kj}}{\partial x_j}} - \overline{u'_k \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad - \left( \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j}} + \overline{u'_k u'_j \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

É habitual rearranjar o primeiro termo no lado direito da seguinte maneira:

$$\left( \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) = \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{p' u'_i \delta_{kj}} + \overline{p' u'_k \delta_{ij}} \right). \quad (\text{B.5})$$

O primeiro termo no lado direito desta equação é geralmente denominado como o termo de taxa de tensão da pressão. O segundo termo no lado direito desta equação é escrito como um termo divergente, e é geralmente denominado como o termo de difusão da pressão.

O terceiro termo no lado direito da [Equação B.4](#) pode, de forma similar, ser reescrito como:

$$\left( \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{kj}}{\partial x_j}} + \overline{u'_k \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}} \right) = - \left( \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{\tau'_{kj} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_i \tau'_{kj}} + \overline{u'_k \tau'_{ij}} \right). \quad (\text{B.6})$$

O último termo no lado direito desta equação é também um termo divergente. Para um fluido Newtoniano, este termo é também conhecido como dissipação das tensões de Reynolds pelas tensões viscosas turbulentas. Isto é facilmente visto através da substituição da relação constitutiva Newtoniana para obter:

$$\left( \overline{u'_i \tau'_{kj}} + \overline{u'_k \tau'_{ij}} \right) = 2\nu \left( \overline{S'_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{S'_{kj} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right), \quad (\text{B.7})$$

onde  $S'_{ij}$  é a componente flutuante do tensor da taxa de deformação definido por:

$$S'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{B.8})$$

A relação deste termo analisado com a dissipação ficará mais clara quando for considerada a energia cinética turbulenta.

Da mesma forma, podemos reescrever o terceiro termo da [Equação B.4](#) para obter:

$$\left( \overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{u'_k u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_i u'_k u'_j} \right). \quad (\text{B.9})$$

Este é também um termo divergente.

Com este desenvolvimento acima descrito, podemos reescrever a [Equação B.4](#) como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u'_i u'_k}) + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u'_i u'_k}) &= -\frac{\overline{p'}}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -(\overline{p' u'_k} \delta_{ij} + \overline{p' u'_i} \delta_{kj}) - \overline{u'_i u'_k u'_j} + 2\nu (\overline{S'_{ij} u'_k} + \overline{S'_{ij} u'_i}) \right] \\
&- \left( \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) \\
&- 2\nu \left( \overline{S'_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + \overline{S'_{kj} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right). \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Está é a tão conhecida equação das tensões de Reynolds, a qual tem sido o veículo preliminar para muitos dos esforços de modelagens turbulentas.

O lado esquerdo da equação das tensões de Reynolds pode ser facilmente reconhecida como a taxa de variação das tensões de Reynolds depois do movimento médio. Os termos do lado direito são conhecidos respectivamente como:

- O termo de taxa de tensão da pressão;
- O termo de transporte turbulento (ou divergente);
- O termo de produção;
- O termo de dissipação.

## B.2 Energia Cinética Turbulenta

Uma equação para a energia cinética flutuante (turbulenta) para escoamento com densidade constante pode ser obtida diretamente da equação das tensões de Reynolds ([Equação B.10](#)) pela contração dos índices livres. O resultado é:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial}{\partial t}(\overline{u'_i u'_i}) + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u'_i u'_i}) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{2}{\rho} \overline{p' u'_i} \delta_{ij} - \overline{q^2 u'_j} + 4\nu \overline{S'_{ij} u'_i} \right) \\
&- 2\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - 4\nu \overline{S'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \tag{B.11}
\end{aligned}$$

onde a condição de incompressibilidade ( $\partial u'_j / \partial x_j = 0$ ) foi usada para eliminar o termo da taxa de tensão da pressão, e  $q^2 \equiv u'_i u'_i$ .

O último termo pode ser simplificado relembrando que o tensor da taxa de deformação

da velocidade,  $\partial u'_i / \partial x_j$ , pode ser decomposto nas suas partes simétrica e anti-simétrica:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = S'_{ij} + \Omega'_{ij}, \quad (\text{B.12})$$

onde a parte simétrica é a componente de flutuação do tensor da taxa de deformação,  $S'_{ij}$ , e a parte anti-simétrica é o tensor da taxa de rotação,  $\Omega'_{ij}$ , definido por:

$$\Omega'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{B.13})$$

Desde que a contração dupla de um tensor simétrico com um tensor anti-simétrico é nula, segue imediatamente que:

$$\begin{aligned} \overline{S'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} &= \overline{S'_{ij} S'_{ij}} + \overline{S'_{ij} \Omega'_{ij}} \\ &= \overline{S'_{ij} S'_{ij}}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Agora é habitual definir uma nova variável  $k$ , a energia cinética flutuante por unidade de massa, por:

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \overline{q^2} = \frac{1}{2} \left( \overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} \right). \quad (\text{B.15})$$

Dividindo a [Equação B.11](#) por 2 e inserindo esta definição, a equação para a energia cinética flutuante pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} \overline{p' u'_i} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \overline{q^2 u'_j} + 2\nu \overline{S'_{ij} u'_i} \right) \\ &\quad - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Nota que uma formulação alternativa desta equação pode ser derivada deixando as tensões viscosas em termos da taxa de deformação. Nós podemos obter a formulação apropriada da equação para a quantidade de movimento flutuante da [Equação B.1](#) substituindo a equação constitutiva Newtoniana incompressível nela para obter:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u'_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \left( u'_j \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \left( u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right). \quad (\text{B.17})$$

Se fizermos uma análise do produto escalar deste com a própria velocidade flutuante e

calcularmos a média, tem-se que (após algum rearranjo):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} \overline{p' u_i'} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \overline{q^2 u_j'} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} k \right) \\ &\quad - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

As equações B.16 e B.18 tem um papel importante no estudo de turbulência. A primeira formulação dada pela Equação B.16 fornece uma estrutura para a compreensão da dinâmica do movimento turbulento. A segunda formulação (Equação B.18) fornece uma forma básica para a maioria das tentativas de fechamento de segunda ordem em modelagem turbulenta, por exemplo, nos conhecidos modelos  $k - \epsilon$ .

Cada termo na equação para a energia cinética turbulenta (Equação B.16) tem um papel distinto em contrapeso da energia cinético total. Estes termos podem ser definidos como:

- Taxa de variação de energia cinética por unidade de massa devido ao regime transiente,

$$\frac{\partial k}{\partial t}; \quad (\text{B.19})$$

- A taxa de variação de energia cinética por unidade de massa devido à convecção do escoamento médio através de um campo não homogêneo,

$$\overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}; \quad (\text{B.20})$$

- Transporte de energia cinética em um campo não homogêneo devido às flutuações da pressão, à própria turbulência e às tensões viscosas respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} \overline{p' u_i'} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \overline{q^2 u_j'} + 2\nu \overline{S'_{ij} u_i'} \right); \quad (\text{B.21})$$

- Taxa de produção de energia cinética turbulenta do escoamento médio (gradiente),

$$- \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}; \quad (\text{B.22})$$

- Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa devido às tensões viscosas,

$$\epsilon \equiv 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}. \quad (\text{B.23})$$

### B.3 Taxa de Dissipação de Energia Cinética Turbulenta

O último termo na equação para a energia cinética turbulenta foi identificado como sendo a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa, ou seja,

$$\epsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} = \nu \left( \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right). \quad (\text{B.24})$$

É fácil ver que  $\epsilon \geq 0$ , desde que ele é somente um somatório da média de quantidades quadradas (isto é,  $\overline{S'_{ij} S'_{ij}} \geq 0$ ). Também, desde que ocorra no lado direito da equação da energia cinética para os movimentos flutuantes precedidos por um sinal negativo, é claro que ele pode agir para reduzir somente a energia cinética do escoamento. Conseqüentemente causa uma taxa de variação negativa da energia cinética, por isso é conhecida como dissipação.

Fisicamente, energia é dissipada por causa do trabalho feito pelas tensões viscosas flutuantes na resistência à deformação do material fluido pelas taxas flutuantes de deformação, isto é

$$\epsilon = \overline{\tau'_{ij} S'_{ij}}. \quad (\text{B.25})$$

Isto reduz a [Equação B.24](#) somente a equação para um fluido Newtoniano. Em fluidos não Newtoniano, partes deste produto não podem ser negativas, senão eles todos podem representar uma perda irrecuperável da energia cinética flutuante.

## PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

### **Arquivos Eletrônicos de Publicações (ePrint)**

O ePrint é uma forma de comunicação científica em arquivo eletrônico, como alternativa para publicação direta dos trabalhos em texto completo, os assim chamados "open archives".

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o International Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Os Relatórios de Pesquisa reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

As Publicações Didáticas incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto os executáveis.