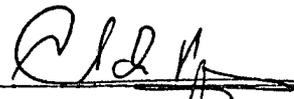


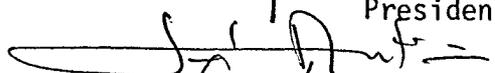
Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Computação Aplicada

Dr. Celso de Renna e Souza



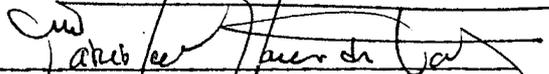
Presidente

Dr. José Antonio Gonçalves Pereira



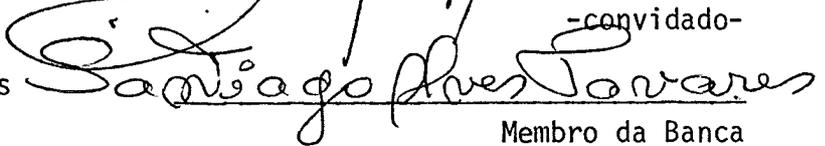
Orientador

Dr. Marcio Lourival Xavier dos Santos



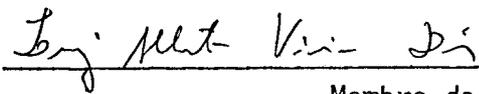
Membro da Banca
-convidado-

Dr. Santiago Alves Tavares



Membro da Banca

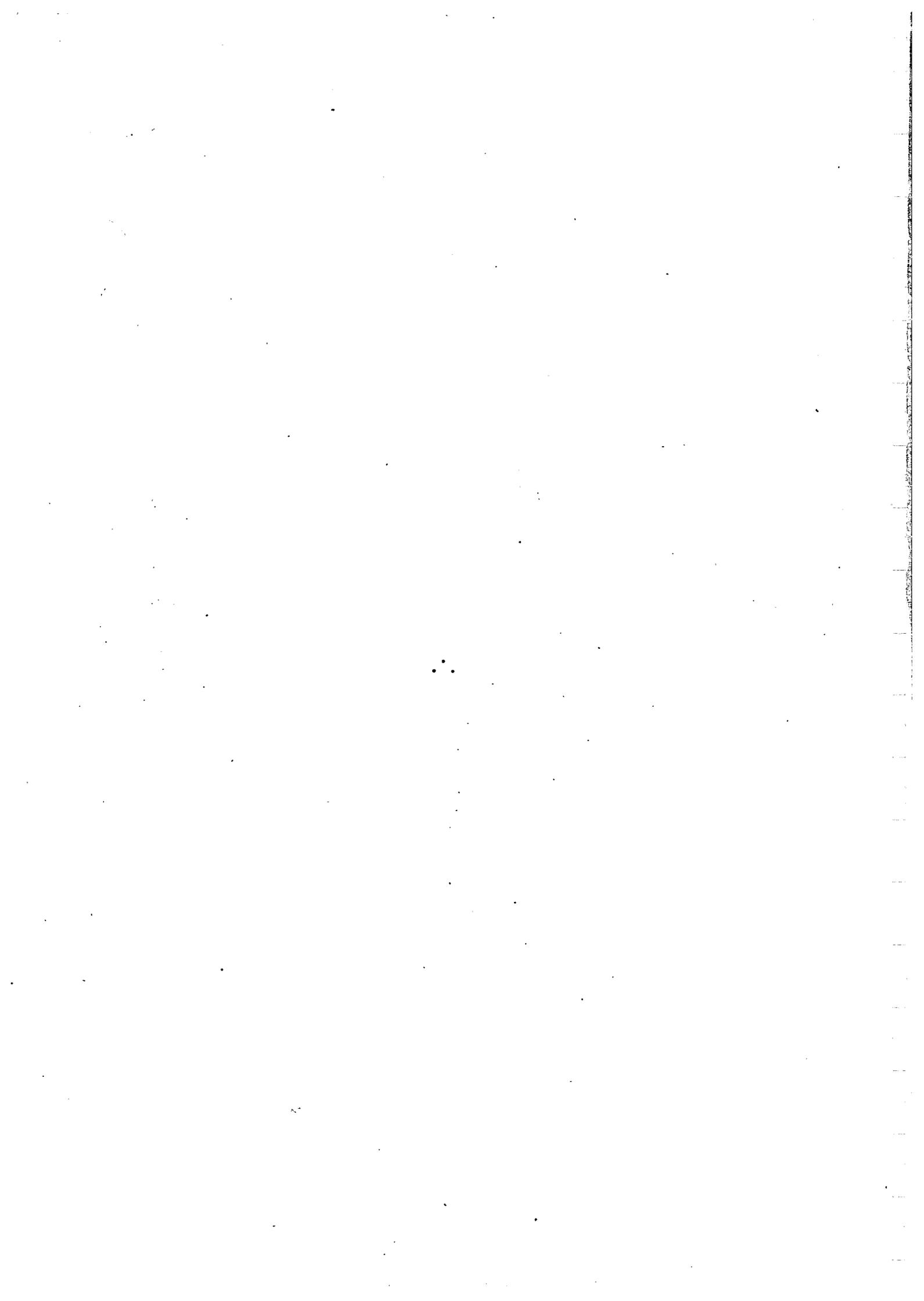
Dr. Luiz Alberto Vieira Dias

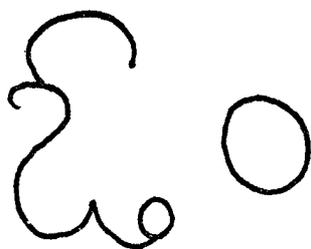


Membro da Banca

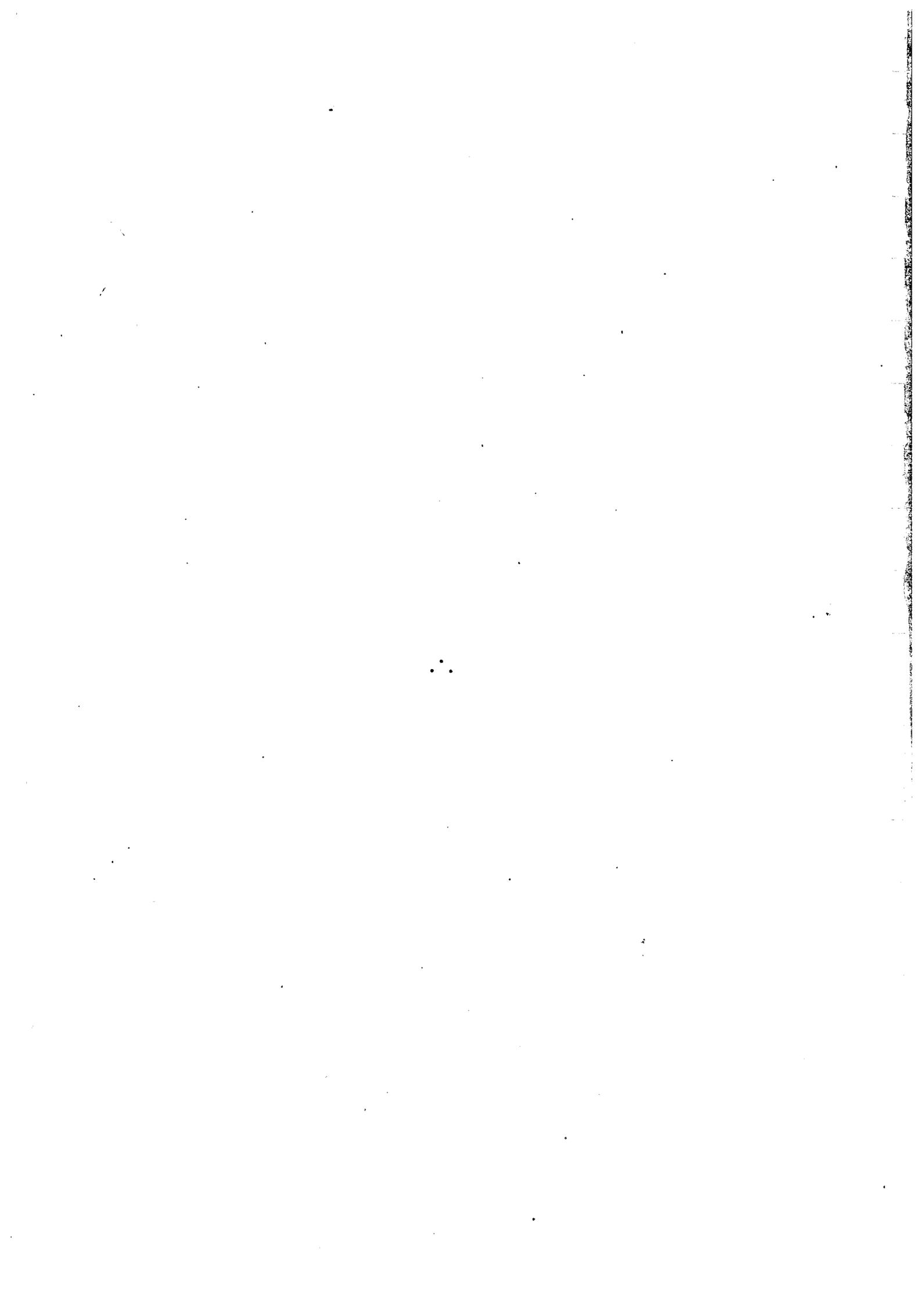
Candidato: Nandamudi L. Vijaykumar

São José dos Campos, 20 de setembro de 1984





A DEUSA DA SABEDORIA



AGRADECIMENTOS

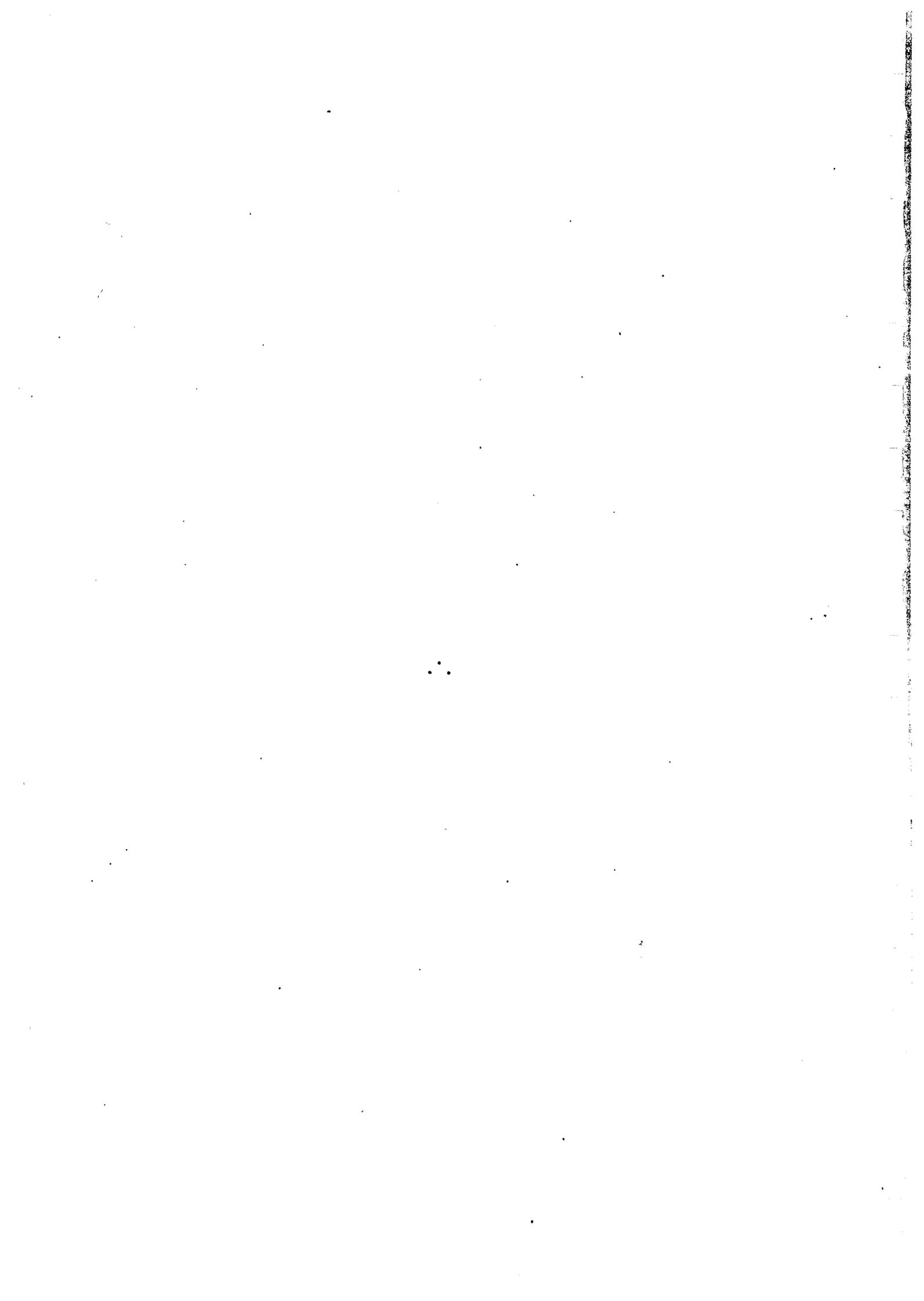
Ao Dr. Celso de Renna e Souza pela idéia inicial dessa dissertação e pelo apoio necessário.

Ao Dr. Antonio Divino Moura por ter trazido dos E.U.A. o livro "Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms" de Coons, que não se encontrava no Brasil, fundamental para este trabalho.

Ao Dr. José Antonio Gonçalves Pereira pela valiosa orientação e principalmente pelo incentivo.

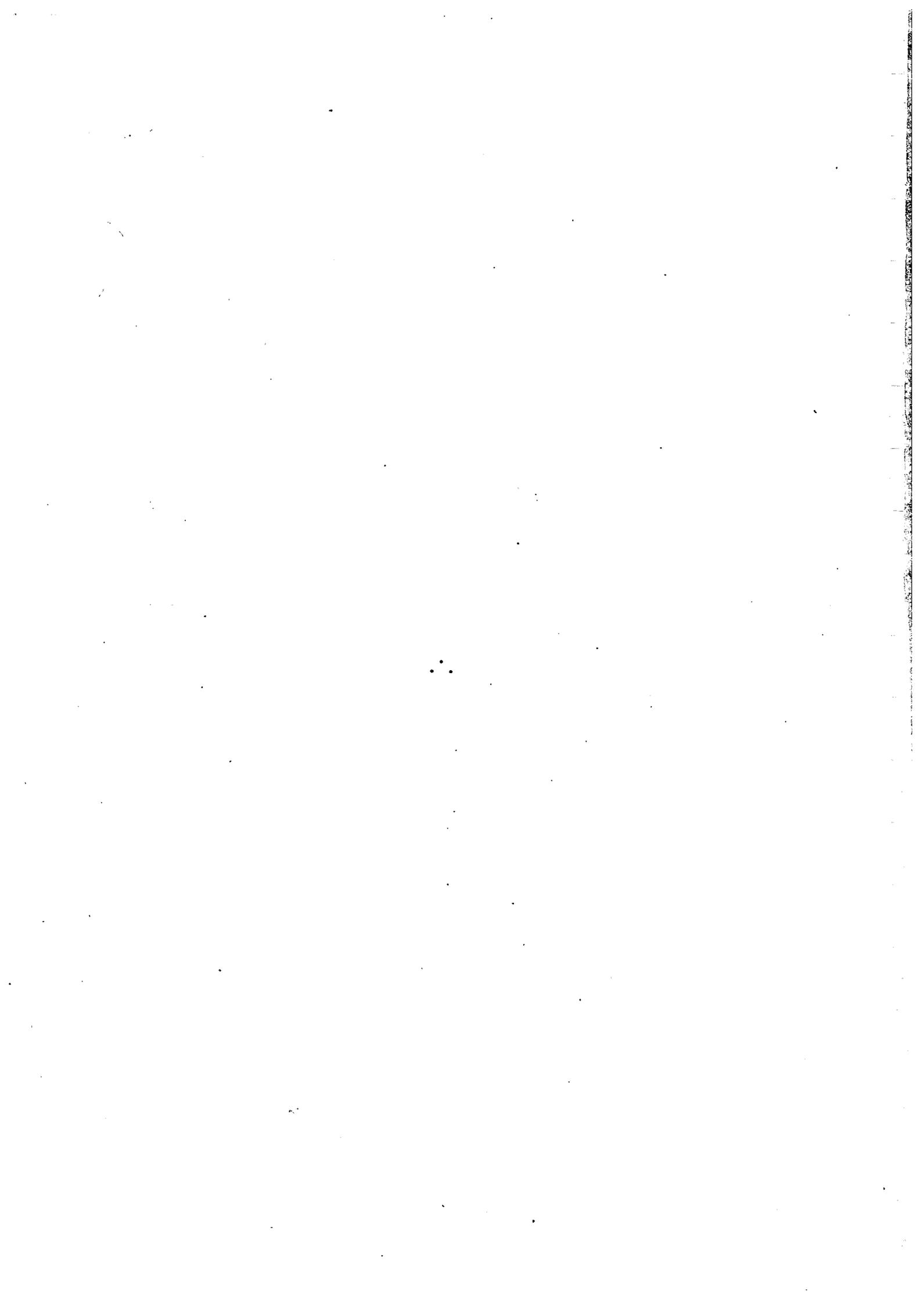
À Solange Mara Balieiro por ter tido paciência nos meus momentos mais difíceis.

À Maria Cristina Braga Peloggia pela sua disposição e paciência para a datilografia deste trabalho.



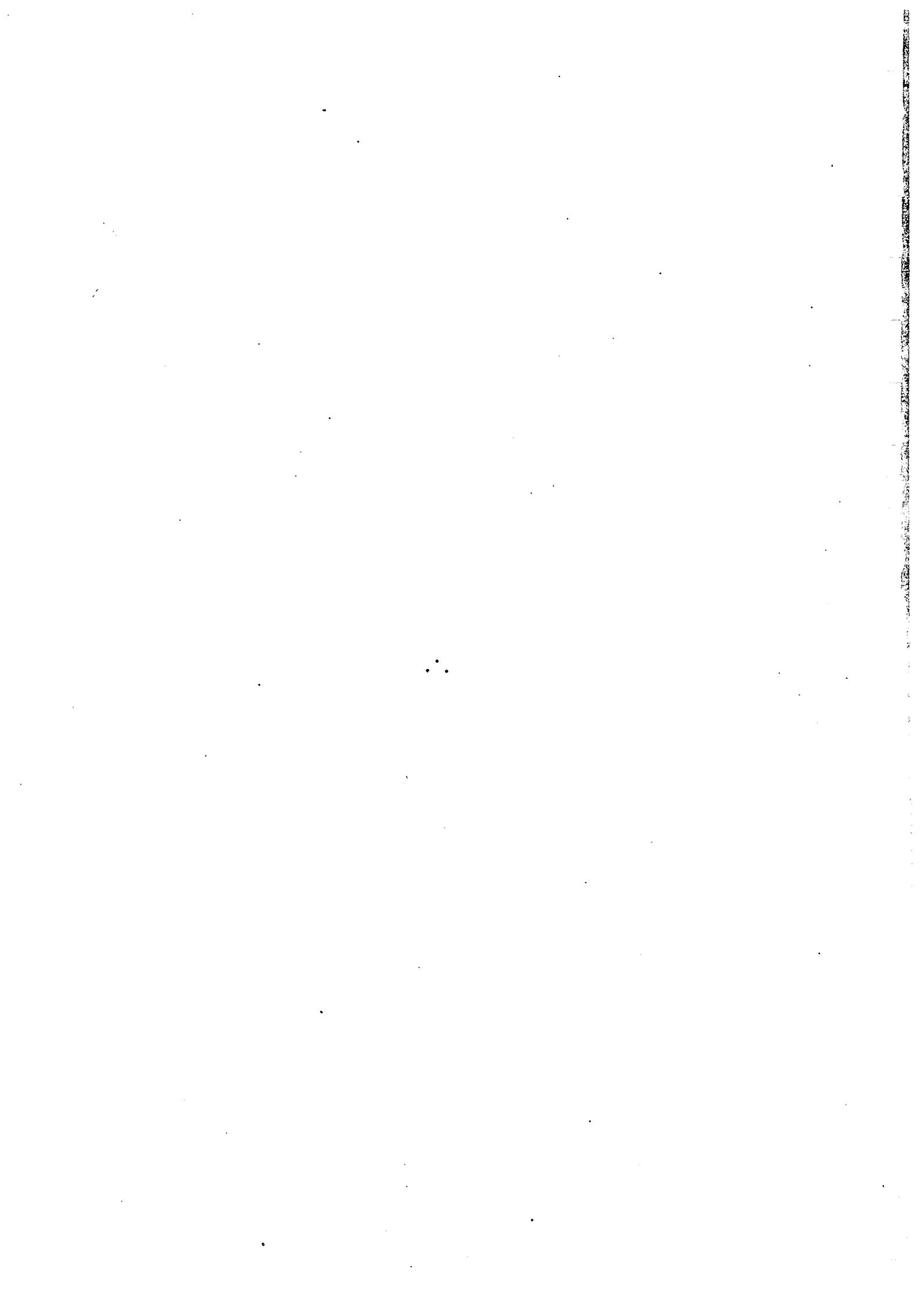
ABSTRACT

The surface generating method proposed by Coons is very much used in designing automobile bodies, ship hulls and other complex forms, which are impossible to be analytically described. In order to describe the "cages", which basically provide these surfaces, Bézier or B-Spline methods are traditionally used, but with the disadvantage that the control points do not belong to the generated curves, making difficult modifications in the design. The present work proposes, for generating the "cages", a method known as Weighted Splines, of a great computational efficiency and without the restriction regarding the control points, which belong to the generated curves. This method is known to be a particular case of Coons' ideas.



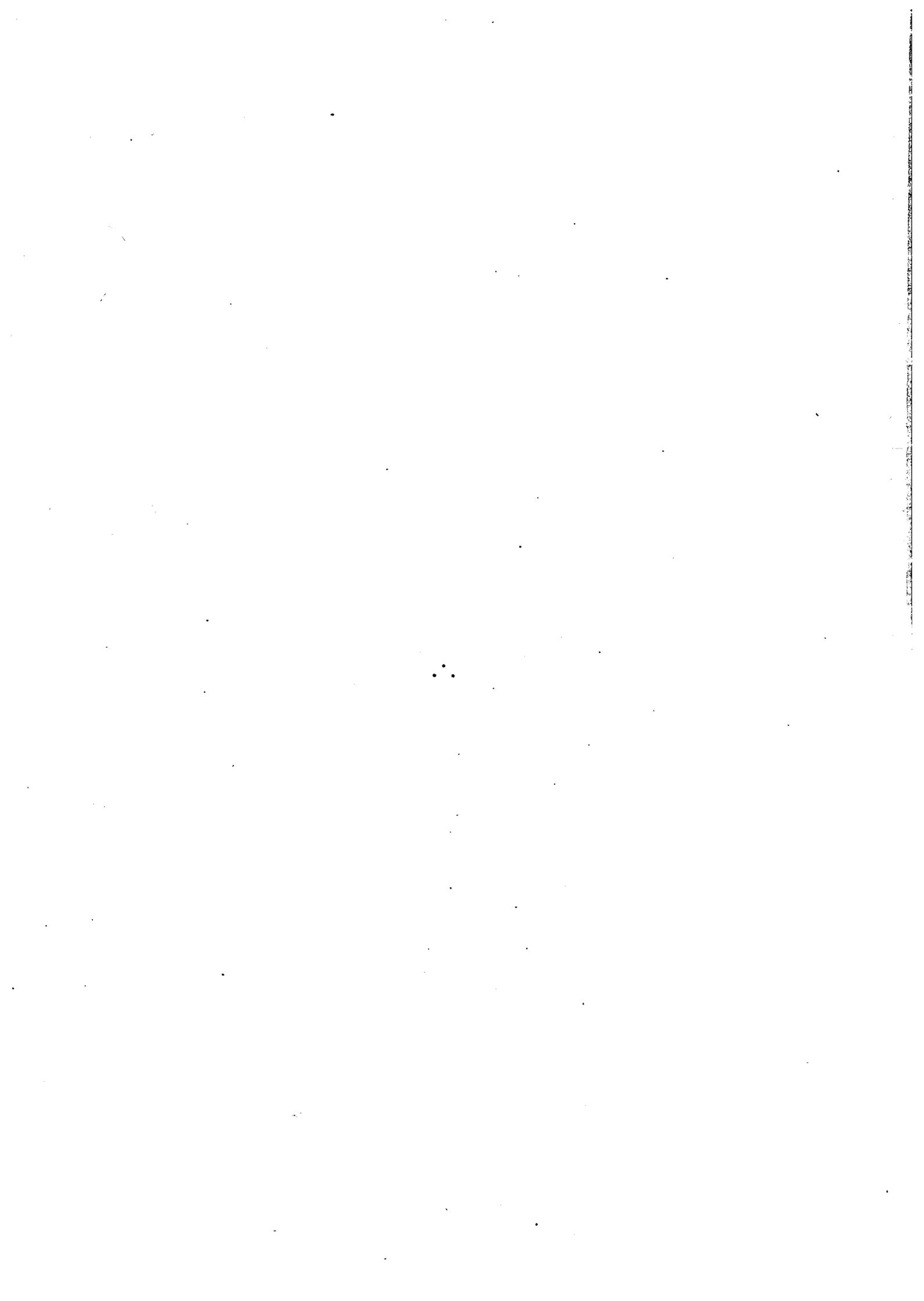
SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>xi</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - SUPERFÍCIES COONS</u>	5
2.1 - A Equação da Superfície	5
2.2 - Continuidade da derivada na borda	12
2.3 - Continuidade da curvatura na borda	15
2.4 - Determinação de uma função de mistura	16
<u>CAPÍTULO 3 - POLINÔMIO A DUAS DIMENSÕES</u>	21
<u>CAPÍTULO 4 - SUPERFÍCIE CORRETORA DE INCLINAÇÃO</u>	29
4.1 - Arco corretor para o caso bidimensional	33
<u>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES</u>	49
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51



LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Interpolação usando método de Bézier	2
2.1 - Retalho de uma superfície	5
2.2 - Interpolação linear que fixa as bordas w	6
2.3 - Interpolação linear que fixa as bordas u	6
2.4 - Interpolação bilinear que fixa as curvas u e w	7
2.5 - Retalhos adjacentes	12
2.6 - Comportamento das funções de mistura F_0 e F_1	19
3.1 - Interpolação no intervalo $[i, i+1]$ usando arcos de parábola	21
3.2 - Comportamento das funções de mistura λ_0 e λ_1	27
3.3 - Interpolação usando "Spline" ponderado	28
4.1 - Comportamento das funções de mistura para arco corretor de inclinação	36
4.2 - Curva original interpolada com correções de inclinação	37
4.3 - Ampliação da região do ponto onde foram impostas as derivadas desejadas	38
4.4 - Curva interpolada que força uma descontinuidade	39
4.5 - Uma superfície completa usando o interpolador	40
4.6 - Ocorrência de uma oscilação	41
4.7 - Eliminação da oscilação com a inclusão de pontos auxiliares	41
4.8 - Interpolação em um retalho onde as bordas são as funções x^2 e $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2$	42
4.9 - Interpolação em um retalho onde as bordas são a função x^2 ..	43
4.10 - Interpolação em um retalho onde as bordas são a função x^2+1	44
4.11 - Interpolação em quatro retalhos onde as bordas são a função x^2-4	45
4.12 - Interpolação em quatro retalhos onde as bordas são a função $4-x^2$	46
4.13 - Exemplo de cabine de avião	47



CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nas indústrias aeronáutica e automobilística tem sido comum a utilização de computadores para resolver problemas relacionados a tensões em materiais, dinâmica, aerodinâmica, termodinâmica, etc. Usando a experiência das fábricas de aviões, os fabricantes de automóveis também tentaram, nos últimos anos, fazer com que o controle numérico fosse introduzido no processo de projetar carrocerias de carro e de fabricar estampas ou matrizes. Este tipo de aplicações requer que os computadores gerem superfícies livres, ou seja, superfícies de grande complexidade, impossíveis de ser descritas analiticamente. Muitos sistemas foram desenvolvidos para este fim (Bézier, 1971). A geração de superfícies livres é usada para projetar carenagens ou até projetar embalagens sofisticadas como vidros de "shampoo".

O método mais utilizado para gerar tais superfícies livres é o método de interpolação de Coons (1967). Este método, para gerar as superfícies, necessita das "gaiolas" (grades) obtidas através de uma malha de pontos de entrada, também conhecidos como pontos de controle.

Existem várias maneiras de interpolar as curvas através dos pontos conhecidos. Uma das mais conhecidas é a de Lagrange (Hildebrand, 1956 e Forsythe et alii, 1977). O problema deste método é o grande esforço computacional, o qual depende do número de pontos, pois ajusta um polinômio de grau n para $n+1$ pontos dados. Devido ao grau muito grande deste polinômio, este método apresenta oscilações indesejáveis. Um outro método é o de interpolação de Hermite (Hildebrand, 1956 e Forsythe et alii, 1977), para o qual devem ser fornecidos, além dos valores de abscissas e ordenadas, as inclinações. Isto é uma desvantagem, pois nem sempre se conhecem as derivadas, ou não há interesse em aplicá-las. Um outro método ainda é o de "Spline" cúbico

(Hildebrand, 1956; Forsythe et alii, 1977) que não apresenta problemas relativos ao grau muito grande do polinômio. O problema deste método é resolver um sistema de equações lineares que pode ser muito grande dependendo do número de pontos de entrada e apresentar pontos de inflexão indesejáveis.

Hoje os métodos mais utilizados para gerar as "gaiolas" necessárias a partir dos pontos de controle são os de Bézier e "B-Spline" (Giloj, 1978; Newman and Sproull, 1979; Gordon and Riesenfeld, 1974; Forrest, 1972). Estes métodos requerem um esforço computacional muito pequeno, são extremamente rápidos e fáceis de serem implementados. O grande problema destes métodos é que a curva gerada não contém os pontos de controle, como mostra a Figura 1.1.

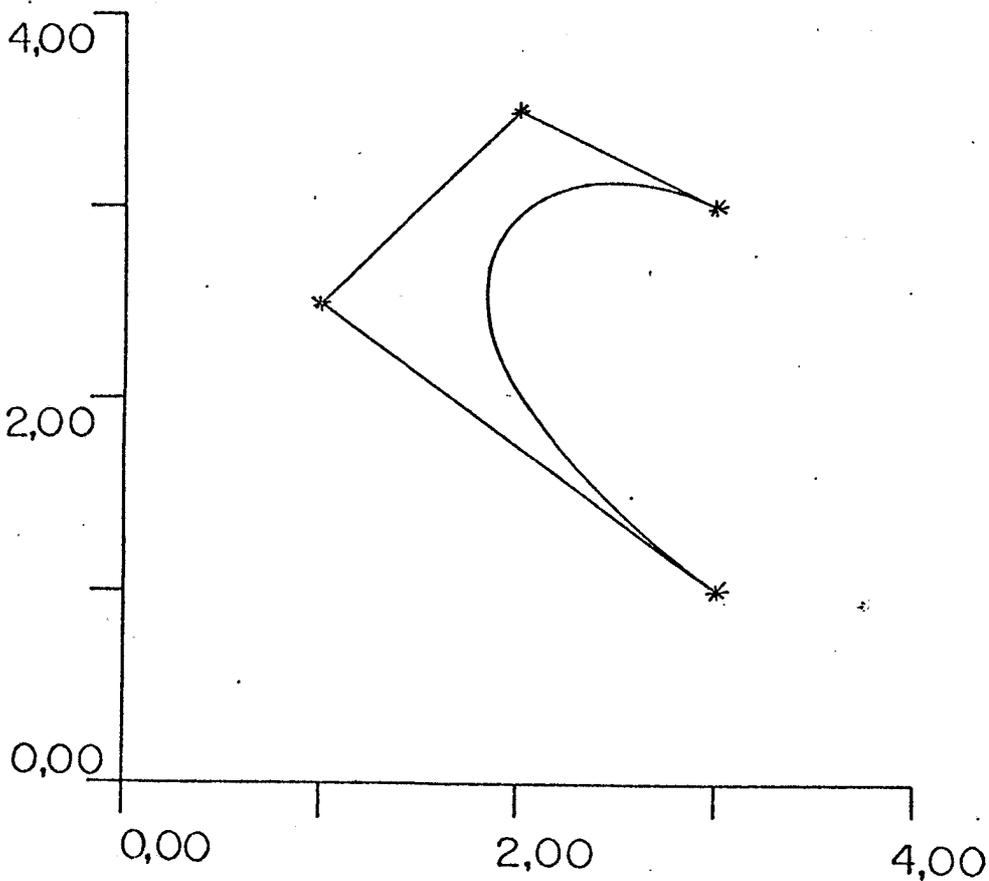
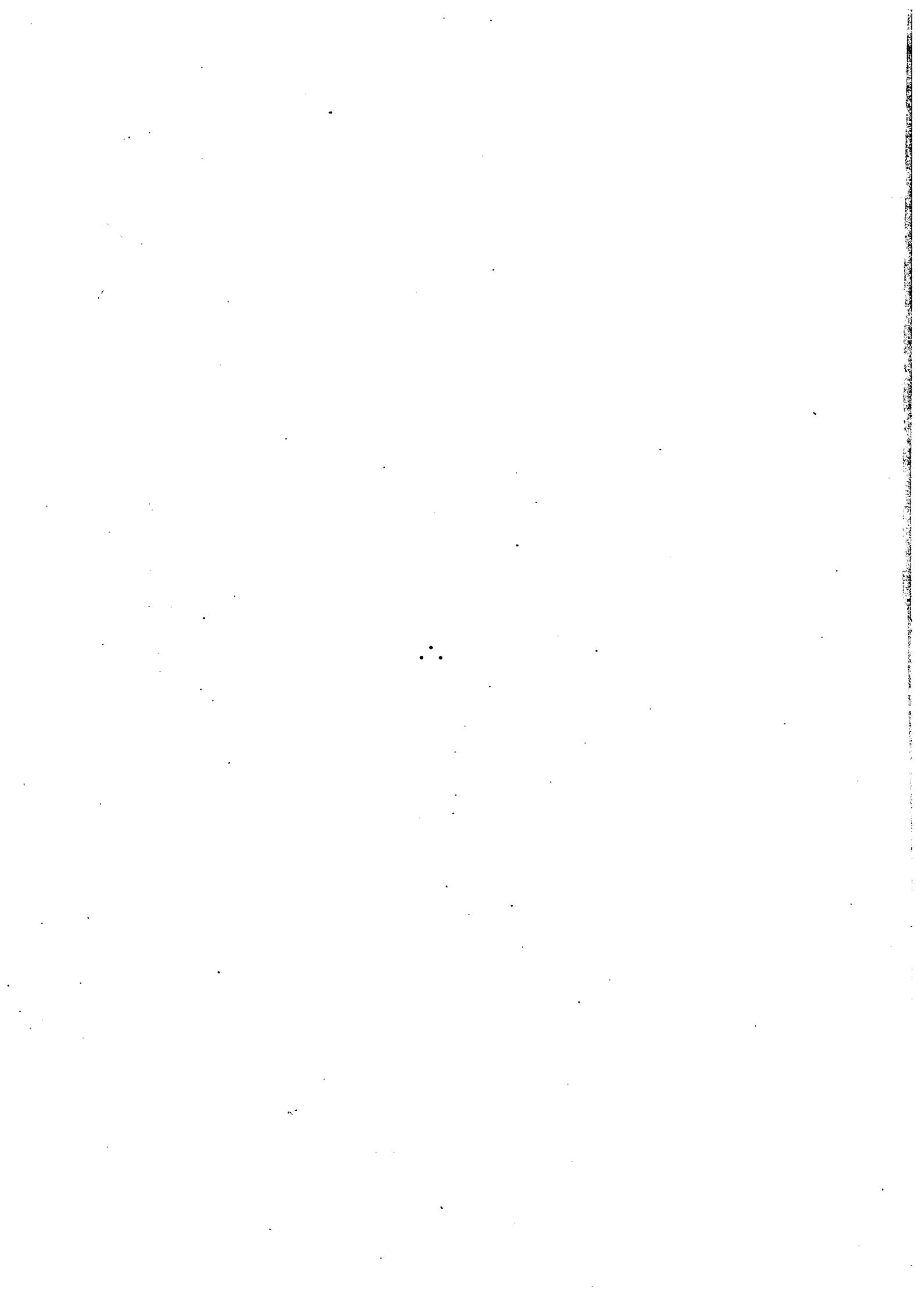


Fig. 1.1 - Interpolação usando método de Bézier.

Nas aplicações de Projetos Auxiliados por Computador e Fabricação Auxiliada por Computador (CAD/CAM), os métodos mencionados dificultam o trabalho de um projetista, principalmente quanto à modificação do projeto original, pois ele deve ter muita experiência para poder introduzir novos pontos no gráfico, imaginando a possível forma da nova curva. Isto pode ser muito demorado devido à necessidade de repetir este processo até que se consiga a forma esperada.

O trabalho proposto trata de um método de interpolação que gera "gaiolas" a partir dos pontos de controle, os quais pertencem à curva gerada. Este método também é de grande eficiência computacional, fácil de ser implementado e tem a grande vantagem de garantir que a curva traçada passe pelos pontos de entrada dados. Esta vantagem auxilia muito o projetista, pois ele tem a idéia exata de onde vai passar a curva, introduzindo ou reposicionando um novo ponto. O método, apesar de ter sido desenvolvido de uma outra maneira (Costa, 1980), é uma decorrência muito particular das idéias do Coons quando se reduz seu formalismo para duas dimensões. Apresenta também, como característica adicional, a possibilidade de especificar as derivadas da curva nos pontos de controle (todos ou alguns), permitindo até mesmo a geração de descontinuidades.



CAPÍTULO 2

SUPERFÍCIES COONS

2.1 - A EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE

Entre várias maneiras de gerar uma superfície, conhecendo apenas alguns dos pontos a ela pertencentes, um método bastante simples (Forrest, 1972) é fazer uma interpolação linear a cada quatro pontos adjacentes. Para gerar uma superfície como na Figura 2.1, associam-se os vértices a um trecho plano unitário (U-W).

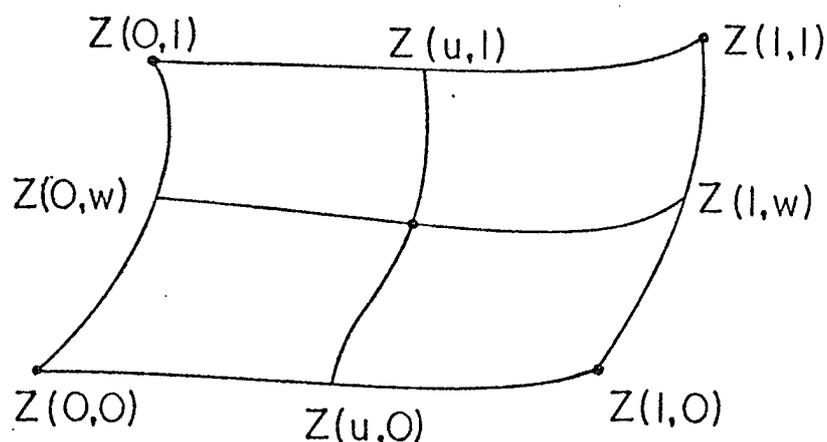


Fig. 2.1 - Retalho de uma superfície.

Esta figura mostra um *retalho* Z com os quatro pontos $Z(0, 0)$, $Z(0, 1)$, $Z(1, 0)$ e $Z(1, 1)$ e as quatro bordas ou curvas, chamadas $Z(u, 0)$, $Z(u, 1)$, $Z(0, w)$ e $Z(1, w)$. Pelo método mencionado acima, pode-se criar uma expressão para interpolar e obter uma superfície bilinear, que é:

$$\begin{aligned} Z(u, w) = & Z(0, 0)(1 - u)(1 - w) + \\ & + Z(0, 1)(1 - u)w + \\ & + Z(1, 0)u(1 - w) + \\ & + Z(1, 1)uw. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Este método garante a continuidade da superfície entre retalhos, mas não entre suas derivadas. Em muitos casos tem-se alguma informação sobre as bordas do retalho, por exemplo, sua forma analítica, ou obtidas por algum tipo de interpolação. Neste caso, utiliza-se esta informação para gerar a superfície. Por exemplo, conhecendo as duas curvas $Z(u, 0)$ e $Z(u, 1)$, pode-se obter uma superfície, como na Figura 2.2, usando uma interpolação linear entre elas.

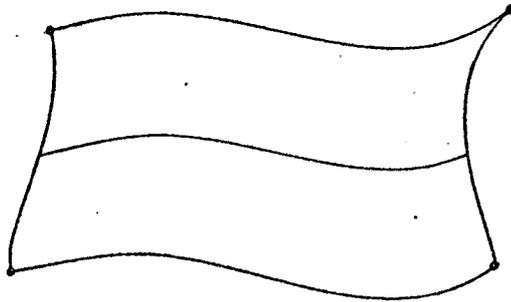


Fig. 2.2 - Interpolação linear que fixa as bordas W .

A expressão para o resultado desta superfície é:

$$Z(u, w) = Z(u, 0)(1 - w) + Z(u, 1)w. \quad (2.2)$$

Por outro lado, conhecendo as outras duas curvas $Z(0, w)$ e $Z(1, w)$, uma outra superfície pode ser construída, como na Figura 2.3, usando uma interpolação entre elas.

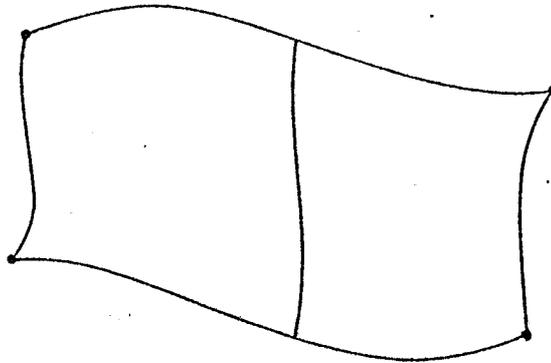


Fig. 2.3 - Interpolação linear que fixa as bordas U .

A expressão para o resultado desta superfície é:

$$Z(u, w) = Z(0, w)(1 - u) + Z(1, w)u. \quad (2.3)$$

Estas superfícies são conhecidas como superfícies "raspadas" ("ruled surfaces") e, tanto uma quanto a outra, têm a influência das curvas que as geraram, porém são exclusivas.

Uma solução para gerar uma superfície, conhecendo quatro curvas, foi desenvolvida no Massachusetts Institute of Technology - MIT - na década de 60 por Coons (1967). Por este método, a expressão usada para gerar tal superfície, como mostrado na Figura 2.4, é a seguinte:

$$\begin{aligned} Z(u, w) = & Z(u, 0)(1 - w) + Z(u, 1)w + \\ & + Z(0, w)(1 - u) + Z(1, w)u + \\ & - (Z(0, 0)(1 - w)(1 - u) + \\ & + Z(0, 1)(1 - u)w + \\ & + Z(1, 0)(1 - w)u + \\ & + Z(1, 1)uw). \end{aligned} \quad (2.4)$$

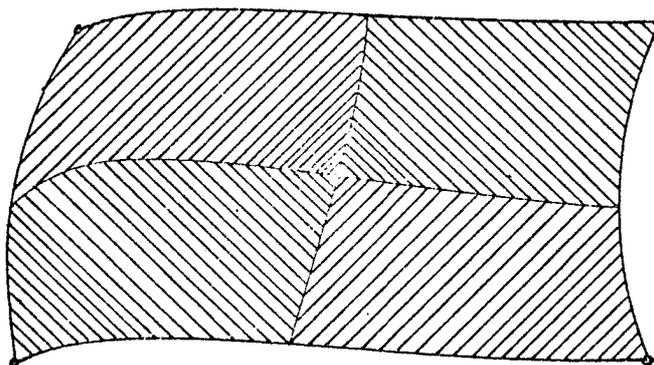


Fig. 2.4 - Interpolação bilinear que fixa as curvas u e w .

Pode-se notar que a expressão acima é a soma das Equações 2.2 e 2.3 menos a Equação 2.1. A subtração é necessária pois os cantos

jã estão implicitamente presentes nas Equações 2.2 e 2.3 duas vezes, ou seja, os quatro pontos $Z(0, 0)$, $Z(0, 1)$, $Z(1, 0)$ e $Z(1, 1)$ estão incluídos em $Z(u, 0)$ e $Z(0, w)$, $Z(u, 1)$ e $Z(0, w)$, $Z(u, 0)$ e $Z(1, w)$ e $Z(u, 1)$ e $Z(1, w)$, respectivamente. Nota-se também que cada curva contribui proporcionalmente para sua *distância* ao ponto a ser interpolado, e os cantos são subtraídos proporcionalmente à *área* do *quadrilátero* que os contém.

A Equação 2.4 é satisfeita para $u=0$ e $u=1$ e para $w=0$ e $w=1$, da mesma maneira que a Equação 2.1 garante a continuidade da superfície entre dois retalhos, mas não garante a de suas derivadas. De uma maneira mais geral, pode-se substituir as misturas lineares por funções de mistura mais complexas, capazes de garantir estas continuidades.

Substituindo $1-u$ por $F_0(u)$, u por $F_1(u)$, $1-w$ por $F_0(w)$ e w por $F_1(w)$, a Equação 2.4 toma a seguinte forma mais geral:

$$\begin{aligned} Z(u, w) = & Z(u, 0)F_0(w) + Z(u, 1)F_1(w) + \\ & Z(0, w)F_0(u) + Z(1, w)F_1(u) + \\ & -(Z(0, 0)F_0(u)F_0(w) + \\ & +Z(0, 1)F_0(u)F_1(w) + \\ & +Z(1, 0)F_1(u)F_0(w) + \\ & +Z(1, 1)F_1(u)F_1(w)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

ou

$$\begin{aligned} Z(u, w) = & \sum_{i=0}^1 Z(i, w)F_i(u) + \sum_{j=0}^1 Z(u, j)F_j(w) + \\ & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 Z(i, j)F_i(u)F_j(w). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demonstra-se que esta equação representa uma superfície que contém as quatro curvas de borda e é definida por elas. Faz-se a imposição de que as funções de mistura têm como condições de contorno:

$$\begin{aligned} F_0(0) &= 1, \\ F_1(0) &= 0, \\ F_0(1) &= 0, \\ F_1(1) &= 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

para garantir que a superfície contenha as bordas, sendo portanto definida por elas. Isto pode ser conseguido expandindo um dos termos, por exemplo $Z(u, j)F_j(w)$ da Equação 2.6, que resulta em:

$$Z(u, 0)F_0(w) + Z(u, 1)F_1(w), \tag{2.8}$$

o qual representa uma média ponderada das curvas $Z(u, 0)$ e $Z(u, 1)$. Quando w é igual a 0, os valores das funções $F_0(0)$ e $F_1(0)$ são 1 e 0, respectivamente, reduzindo assim a Expressão 2.8 a $Z(u, 0)$. Quando se aumenta w , o peso de $F_0(w)$ diminui, enquanto o de $F_1(w)$ aumenta para que a superfície respeite a forma de ambas as curvas de borda. Quando w está se aproximando do valor 1, a influência de $Z(u, 0)$ na forma da superfície desaparece gradualmente, e a influência de $Z(u, 1)$ torna-se gradualmente dominante. Finalmente, quando w é igual a 1, as funções $F_0(1)$ e $F_1(1)$ assumem, respectivamente, 0 e 1 para que a Expressão 2.8 tome a forma de $Z(u, 1)$. Então, pode-se dizer que a superfície é gerada por uma transição gradual de $Z(u, 0)$ para $Z(u, 1)$, e as formas destas duas curvas são "misturadas" pela influência das funções de mistura F_0 e F_1 , o mesmo valendo para a mistura ao longo de w .

Uma outra imposição bastante natural é a de que F_0 e F_1 sejam contínuas e monotônicas no intervalo $[0, 1]$.

Dadas as duas funções F_0 e F_1 contínuas, obedecendo as condições 2.7, e quatro curvas de bordas $Z(0, w)$, $Z(1, w)$, $Z(u, 0)$ e $Z(u, 1)$ contínuas, as quais formam um contorno que se fecha nos pontos $Z(0, 0)$, $Z(0, 1)$, $Z(1, 0)$ e $Z(1, 1)$, mas não necessariamente em outros pontos, a Equação 2.6 representa uma superfície definida unicamente por estas bordas, as quais estão nela contidas, o que se demonstra abaixo.

Fazendo $u=a$, onde $a \in \{0, 1\}$, tem-se:

$$Z(a, w) = \sum_{i=0}^1 Z(i, w)F_i(a) + \sum_{j=0}^1 Z(a, j)F_j(w) + \\ - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 Z(i, j)F_i(a)F_j(w).$$

Pelas Restrições 2.7, sabe-se que:

$$F_i(a) = 1, \text{ se } i=a,$$

$$F_i(a) = 0, \text{ se } i \neq a.$$

Para $a=0$, obtêm-se o seguinte:

$$Z(0, w) = Z(0, w)F_0(0) + Z(1, w)F_1(0) + \\ +Z(0, 0)F_0(w) + Z(0, 1)F_1(w) + \\ -(Z(0, 0)F_0(0)F_0(w) + \\ +Z(0, 1)F_0(0)F_1(w) + \\ +Z(1, 0)F_1(0)F_0(w) + \\ +Z(1, 1)F_1(0)F_1(w)),$$

$$Z(0, w) = Z(0, w) + Z(0, 0)F_0(w) + Z(0, 1)F_1(w) + \\ -Z(0, 0)F_0(w) - Z(0, 1)F_1(w)$$

$$= Z(0, w).$$

E, para $a=1$, obtêm-se o seguinte:

$$\begin{aligned} Z(1, w) = & Z(0, w)F_0(1) + Z(1, w)F_1(1) + \\ & Z(1, 0)F_0(w) + Z(1, 1)F_1(w) + \\ & -(Z(0, 0)F_0(1)F_0(w) + \\ & +Z(0, 1)F_0(1)F_1(w) + \\ & +Z(1, 0)F_1(1)F_0(w) + \\ & +Z(1, 1)F_1(1)F_1(w)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(1, w) = & Z(1, w) + Z(1, 0)F_0(w) + Z(1, 1)F_1(w) + \\ & -Z(1, 0)F_0(w) - Z(1, 1)F_1(w) \\ & = Z(1, w), \end{aligned}$$

ou seja, nas bordas $u \in \{0, 1\}$ a superfície reduz-se às curvas que a de
finem.

Analogamente, repetindo o processo anterior para w , con
clui-se que nas bordas $w \in \{0, 1\}$ a superfície reduz-se às curvas que a
definem.

Deve-se observar que:

- 1) As bordas têm de se encontrar nos quatro cantos do *retalho* pa
ra garantir valores únicos dentro dele.
- 2) A superfície representa uma espécie de média ponderada com os
pesos F_0 e F_1 das quatro bordas, em exceção dos termos dos can
tos $Z(i, j)F_i(u)F_j(w)$.

3) A equação da superfície \bar{e} simétrica em w e u e também em F_0 e F_1 . Por este motivo pode-se resumir as provas sobre o comportamento das curvas numa única prova para uma borda típica qualquer.

2.2 - CONTINUIDADE DA DERIVADA NA BORDA

A construção de grandes superfícies \bar{e} é feita juntando os retalhos. Considerem-se dois retalhos adjacentes A e B com uma borda comum, como mostrado na Figura 2.5. Para o retalho A, a fronteira \bar{e} é $A(1, w)$ e para o retalho B, a fronteira \bar{e} é $B(0, w)$, e os vetores de coordenadas são iguais, ou seja, na fronteira,

$$A(1, w) = B(0, w) \quad (2.9)$$

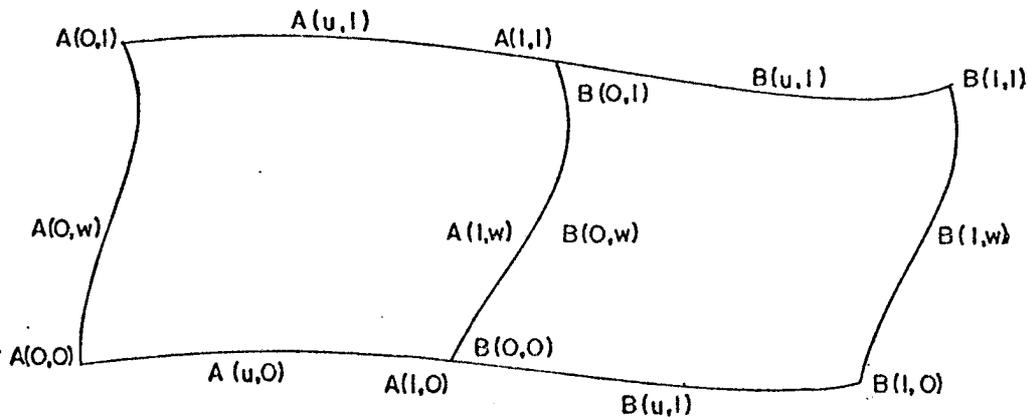


Fig. 2.5 - Retalhos adjacentes.

A partir da Expressão 2.9 garante-se que os retalhos são contínuos na fronteira por tenderem para a mesma curva. Deve-se agora investigar se as inclinações também variam continuamente na fronteira e fazer algumas imposições para garantir a sua continuidade. Como a

fronteira \bar{e} ao longo da curva w , consideram-se as derivadas parciais em relação a u , ou seja $Z(u, w)_u$.

Derivando a Expressão 2.5 obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 Z(u, w)_u = & \sum_{i=0}^1 Z(i, w)F'_i(u) + \\
 & + \sum_{j=0}^1 Z(u, j)_u F_j(w) + \\
 & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 Z(i, j)F'_i(u)F_j(w).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Fazendo $u=a$, onde $a \in \{0, 1\}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 Z(a, w)_u = & \sum_{i=0}^1 Z(i, w)F'_i(a) + \\
 & + \sum_{j=0}^1 Z(a, j)_u F_j(w) + \\
 & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 Z(i, j)F'_i(a)F_j(w),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

ou

$$\begin{aligned}
 Z(a, w)_u = & Z(0, w)F'_0(a) + Z(1, w)F'_1(a) + \\
 & + Z(a, 0)_u F_0(w) + Z(a, 1)_u F_1(w) + \\
 & - (Z(0, 0)F'_0(a)F_0(w) + \\
 & + Z(0, 1)F'_0(a)F_1(w) + \\
 & + Z(1, 0)F'_1(a)F_0(w) + \\
 & + Z(1, 1)F'_1(a)F_1(w)).
 \end{aligned}$$

Para satisfazer a Equação 2.11, garantindo assim a cont
nuidade da derivada, as seguintes condições podem ser impostas às deri
vadas das funções de mistura F_0 e F_1 :

$$\begin{aligned} F_0'(0) &= 0, \\ F_0'(1) &= 0, \\ F_1'(0) &= 0, \\ F_1'(1) &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Com isso, a Equação 2.11 reduz-se à:

$$\text{Para } a=0, Z(0, w)_u = Z(0, 0)_u F_0(w) + Z(0, 1)_u F_1(w) \text{ e}$$

$$\text{Para } a=1, Z(1, w)_u = Z(1, 0)_u F_0(w) + Z(1, 1)_u F_1(w),$$

o que significa que a derivada em qualquer ponto da fronteira na dire
ção u (cruzando a fronteira) s \tilde{o} depende das derivadas nos cantos da
fronteira, sendo uma mistura delas, e \tilde{e} inteiramente independente das
bordas $Z(0, w)$ e $Z(1, w)$.

Consequentemente para os dois retalhos A e B, se
 $A(1, 0)_u = B(0, 0)_u$ e $A(1, 1)_u = B(0, 1)_u$, isto \tilde{e} , se as bordas s \tilde{a} o con
tínuas em inclinação na direção u nos cantos da fronteira entre reta
lhos, garante-se que:

$$A(1, w)_u = B(0, w)_u$$

em qualquer ponto da fronteira, qualquer que seja a forma desta. A de
monstração aplica-se, por simetria, a qualquer borda tomada como fron
teira.

2.3 - CONTINUIDADE DA CURVATURA NA BORDA

Garantida a continuidade da primeira derivada, deve-se investigar a continuidade da segunda derivada (curvatura). Derivando a Equação 2.10, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 Z(u, w)_{uu} = & \sum_{i=0}^1 Z(i, w)F_i''(u) + \sum_{j=0}^1 Z(u, j)_{uu}F_j(w) + \\
 & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 Z(i, j)F_i''(u)F_j(w).
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Fazendo $u=a$, onde $a \in \{0, 1\}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 Z(a, w)_{uu} = & \sum_{i=0}^1 Z(i, w)F_i''(a) + \sum_{j=0}^1 Z(a, j)_{uu}F_j(w) + \\
 & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 Z(i, j)F_i''(a)F_j(w),
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

ou

$$\begin{aligned}
 Z(a, w)_{uu} = & Z(0, w)F_0''(a) + Z(1, w)F_1''(a) + \\
 & + Z(a, 0)_{uu}F_0(w) + Z(a, 1)_{uu}F_1(w) + \\
 & - (Z(0, 0)F_0''(a)F_0(w) + \\
 & + Z(0, 1)F_0''(a)F_1(w) + \\
 & + Z(1, 0)F_1''(a)F_0(w) + \\
 & + Z(1, 1)F_1''(a)F_1(w)).
 \end{aligned}$$

Para garantir a continuidade da curvatura, ou seja, satisfazer a Equação 2.14, impõe-se, analogamente, os seguintes valores às seguintes derivadas das funções de mistura F_0 e F_1 :

$$\begin{aligned} F_0''(0) &= 0, \\ F_0''(1) &= 0, \\ F_1''(0) &= 0, \\ F_1''(1) &= 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Com essas imposições, a Equação 2.14 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Para } a=0, Z(0, w)_{uu} &= Z(0, 0)_{uu} F_0(w) + Z(0, 1)_{uu} F_1(w) \text{ e} \\ \text{Para } a=1, Z(1, w)_{uu} &= Z(1, 0)_{uu} F_0(w) + Z(1, 1)_{uu} F_1(w). \end{aligned}$$

Isto garante a continuidade da curvatura entre retalhos adjacentes, sendo esta, a exemplo da inclinação, dada por uma mistura das segundas derivadas nos cantos.

2.4 - DETERMINAÇÃO DE UMA FUNÇÃO DE MISTURA

Uma das formas funcionais mais simples para definir uma função de mistura é a utilização de um polinômio. As restrições para uma função, por exemplo F_1 , são:

$$\begin{aligned} F_1(1) &= 1, \\ F_1(0) &= 0, \\ F_1'(0) &= 0, \\ F_1'(1) &= 0, \\ F_1''(1) &= 0, \\ F_1''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Como existem seis restrições, deve-se escolher um polinômio do 5º grau. Então, o polinômio, a sua primeira derivada e a sua segunda derivada têm a seguinte forma:

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f,$$

$$P'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e,$$

$$P''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d.$$

Impondo essas condições à função de mistura F_1 , obtêm-se:

$$f = 0,$$

$$a + b + c + d + e + f = 1,$$

$$5a + 4b + 3c + 2d + e = 0,$$

$$e = 0,$$

$$20a + 12b + 6c + 2d = 0,$$

$$2d = 0.$$

Resolvendo esse sistema, obtêm-se a seguinte solução:

$$F_1(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3,$$

e como $F_0(x) = 1 - F_1(x)$, já que a soma dos pesos deverá ser 1, a função F_0 será:

$$F_1(x) = 1 - 6x^5 + 15x^4 - 10x^3.$$

A primeira derivada da função $F_1(x)$ é:

$$F_1'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2,$$

um polinômio de duplas raízes 0 e 1; portanto, a função $F_1(x)$ é monotônica no intervalo $[0, 1]$, uma vez que não há máximos e mínimos no intervalo mencionado.

A segunda derivada de $F_1(x)$ é:

$$F_1''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x,$$

que é uma cúbica com raízes 0, 1/2 e 1. Esta função tem um ponto de inflexão (mudança do sinal da curvatura) no ponto $x=1/2$.

O aspecto destas funções de mistura F_0 e F_1 encontra-se na Figura 2.6.

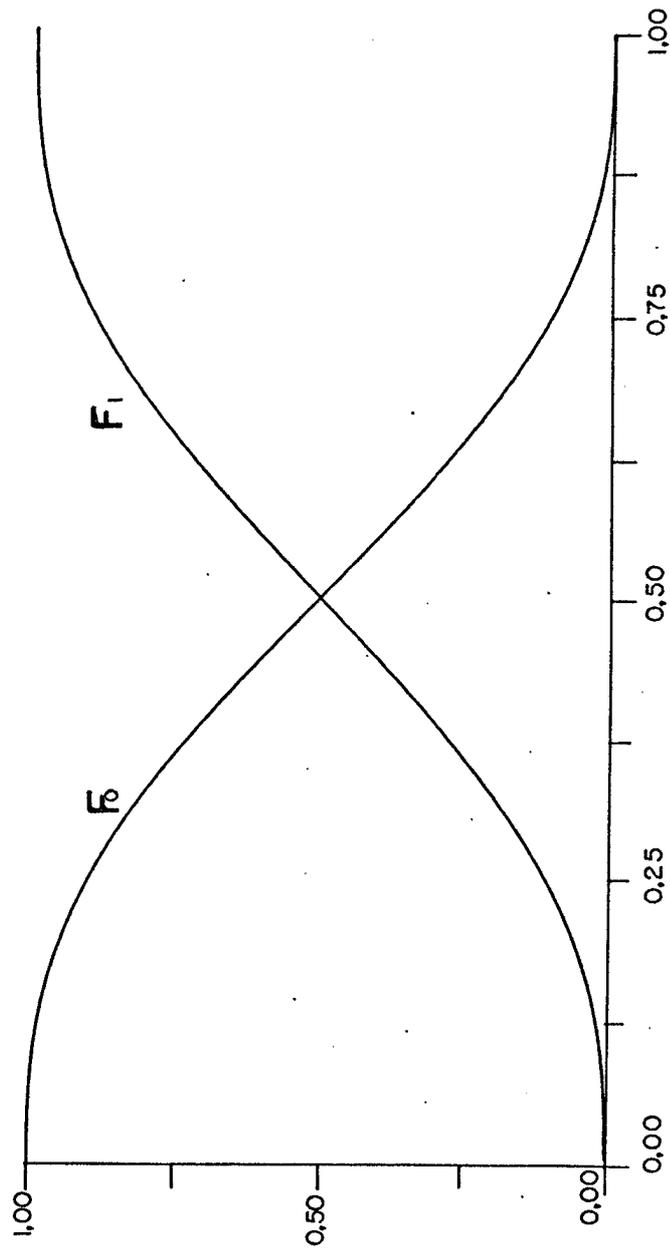
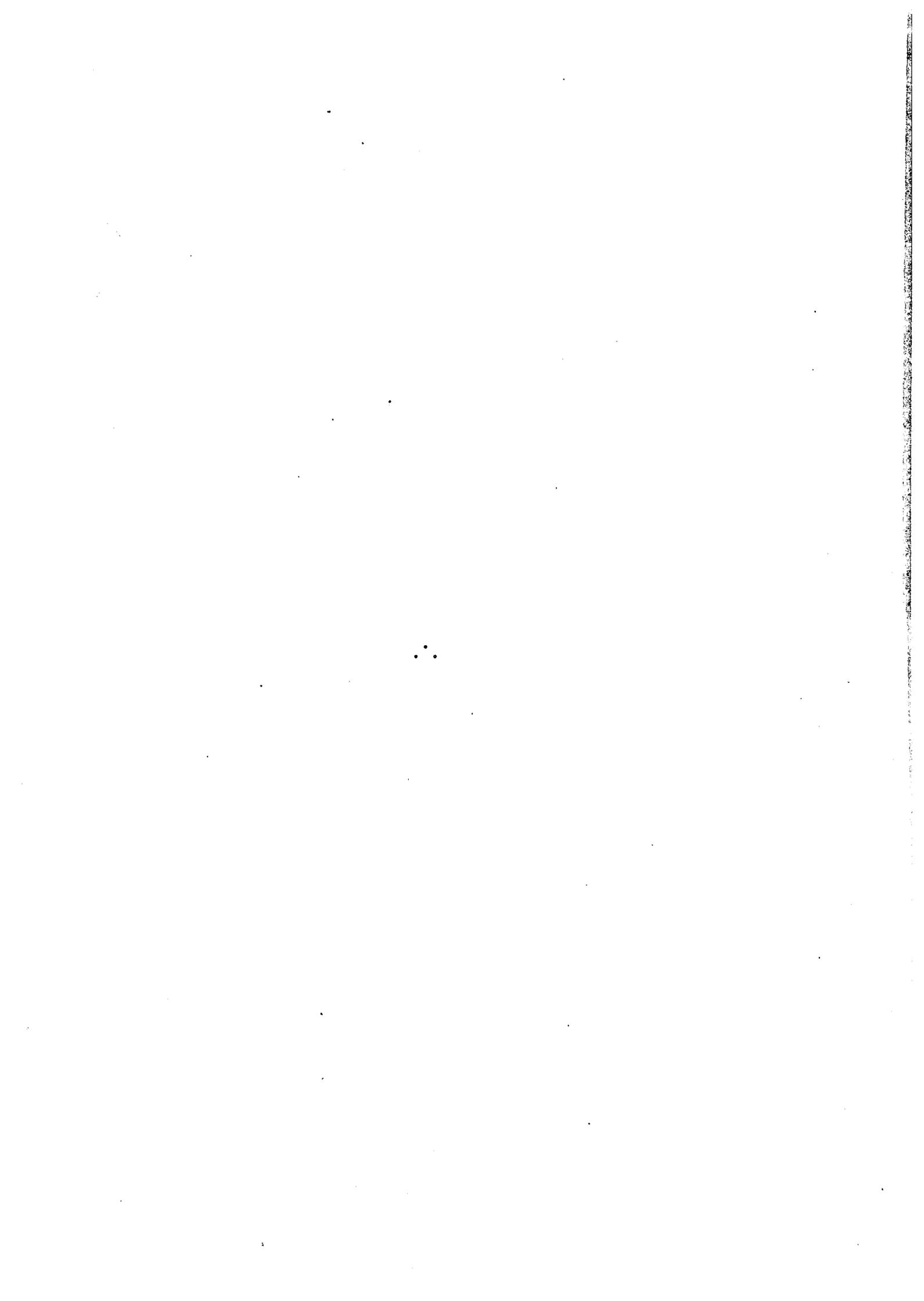


Fig. 2.6 - Comportamento das funções de mistura F_0 e F_1 .



CAPÍTULO 3

POLINÔMIO A DUAS DIMENSÕES

Pode-se pensar em uma solução análoga às superfícies Coons para duas dimensões. Uma solução para a interpolação entre dois pontos com garantia de continuidade da inclinação e da curvatura, se polinomial, tem de ser forçosamente, no mínimo do quinto grau.

Uma função de mistura como a anterior, do quinto grau, que satisfaz a continuidade exigida, mapeia o intervalo sempre como uma reta. A razão disto é clara, pois com a informação apenas dos pontos não se tem idéia da tendência da curva (inclinação, curvatura, etc.).

Como um polinômio do quinto grau representa exatamente as exigências de continuidade, uma solução, por exemplo, seria representar essas tendências da curva por uma interpolação por três pontos, de ambos os lados do intervalo considerado, como na Figura 3.1. Isto leva a usar arcos de parábola (funções de grau dois) e utilizar funções de mistura que seriam funções de grau três. Por exemplo, dado o intervalo $[i, i+1]$, a idéia é usar também os pontos $i-1$ e $i+2$ para que uma parábola interpole os pontos $i-1$, i e $i+1$, e outra interpole os pontos i , $i+1$ e $i+2$.

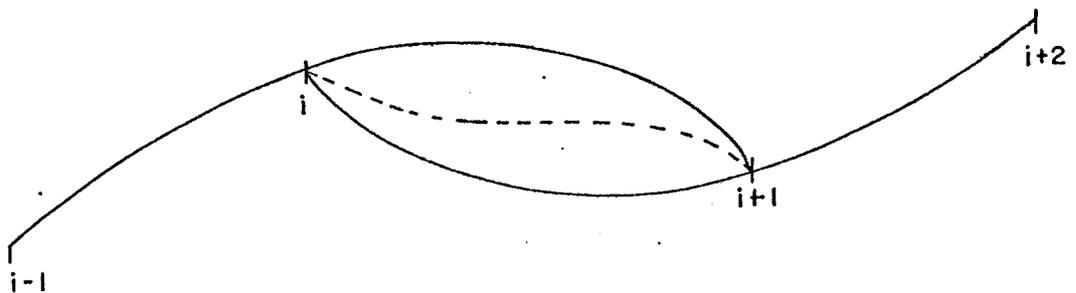


Fig. 3.1 - Interpolação no intervalo $[i, i+1]$ usando arcos de parábola.

A seguir, ver-se-á como determinar as funções de mistura necessárias.

As seis condições de contorno para o intervalo $[i, i+1]$ são:

$$P(x_i) = y_i,$$

$$P(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$P'(x_i) = y'_i,$$

$$P'(x_{i+1}) = y'_{i+1},$$

$$P''(x_i) = y''_i,$$

$$P''(x_{i+1}) = y''_{i+1},$$

onde \bar{a} semelhança das superfícies Coons,

$$P(x) = \lambda_0(x)h_0(x) + \lambda_1(x)h_1(x),$$

sendo λ_0 e λ_1 as funções de mistura e h_0 e h_1 as parábolas interpoladas. Para as condições de contorno têm-se:

$$\lambda_0(0)h_0(0) + \lambda_1(0)h_1(0) = y_0 = h_0(0), \quad (3.1)$$

$$\lambda_0(1)h_0(1) + \lambda_1(1)h_1(1) = y_1 = h_1(1). \quad (3.2)$$

Impõe-se agora as mesmas características das funções F_i aos λ_i nos extremos do intervalo, obtendo-se assim:

$$\lambda_0(0) = 1, \quad (3.3a)$$

$$\lambda_0(1) = 0, \quad (3.3b)$$

$$\lambda_1(0) = 0, \quad (3.3c)$$

$$\lambda_1(1) = 1. \quad (3.3d)$$

Quanto a respeitar as tendências da curva, e lembrando que um polinômio do grau três não pode comportar a nulidade dos extremos das duas primeiras derivadas e simultaneamente ter as propriedades mencionadas acima para os extremos, tem-se de escolher entre manter a inclinação ou manter a curvatura das parábolas, sendo a grandeza não-escolhida garantida pelo grau do polinômio resultante.

Um outro conjunto de equações auxiliares para manter as inclinações das parábolas é:

$$\lambda_0'(0) = 0, \quad (3.4a)$$

$$\lambda_0'(1) = 0, \quad (3.4b)$$

$$\lambda_1'(1) = 0, \quad (3.4c)$$

$$\lambda_1'(0) = 0. \quad (3.4d)$$

Para garantir a continuidade das curvaturas, impõe-se que:

$$P''(0) = h_0''(0), \quad (3.5)$$

$$P''(1) = h_1''(1). \quad (3.6)$$

As segundas derivadas nos extremos são dados por:

$$p'' = \lambda_0''h_0 + \lambda_0'h_0' + \lambda_0'h_0' + \lambda_0h_0'' + \lambda_1''h_1 + \lambda_1'h_1' + \lambda_1'h_1' + \lambda_1h_1''. \quad (3.7)$$

Substituindo a Equação 3.7 nas Equações 3.5 e 3.6 obtém-se, para os extremos, as seguintes condições:

$$\lambda_0''(0) + \lambda_1''(0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\lambda_0''(1) + \lambda_1''(1) = 0.$$

As equações para λ_0 e para λ_1 são:

$$\begin{aligned}\lambda_0(0) &= 1, \\ \lambda_0(1) &= 0, \\ \lambda_0'(0) &= 0, \\ \lambda_0'(1) &= 0, \\ \lambda_1(0) &= 0, \\ \lambda_1(1) &= 1, \\ \lambda_1'(0) &= 0, \\ \lambda_1'(1) &= 0, \\ \lambda_0''(0) + \lambda_1''(0) &= 0, \\ \lambda_0''(1) + \lambda_1''(1) &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Este sistema tem dez equações e só se precisa de oito, pois os dois polinômios em questão são do grau três. Então, devem existir equações que são combinações de outras. Sabe-se disto porque as condições impostas sobre λ_0 e λ_1 foram usadas nas Equações 3.8 e 3.9.

Então, as formas dos polinômios λ_0 e λ_1 são:

$$\lambda_0 = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0,$$

$$\lambda_1 = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1.$$

Substituindo esses polinômios nas Equações 3.10, obtêm

-se:

$$d_0 = 1,$$

$$a_0 + b_0 + c_0 = -1,$$

$$c_0 = 0,$$

$$3a_0 + 2b_0 = 0,$$

$$d_1 = 0,$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 1,$$

$$c_1 = 0,$$

$$3a_1 + 2b_1 = 0,$$

$$2a_0 + 2b_1 = 0,$$

$$6a_0 + 2b_0 + 6a_1 + 2b_1 = 0,$$

ou seja:

$$a_0 + b_0 = -1,$$

$$3a_0 + 2b_0 = 0,$$

$$a_1 + b_1 = 1,$$

$$3a_1 + 2b_1 = 0,$$

$$2b_0 + 2b_1 = 0,$$

$$6a_0 + 2b_0 + 6a_1 + 2b_1 = 0.$$

Nota-se que o sistema acima tem seis equações e quatro incógnitas. Eliminando por tentativas as duas primeiras equações, obtém-se o seguinte resultado:

$$\lambda_0 = 2x^3 - 3x^2 + 1,$$

$$\lambda_1 = -2x^3 + 3x^2$$

que satisfaz:

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_0.$$

Este mesmo resultado foi derivado a partir de outras considerações de Costa (1980).

A primeira derivada da função $\lambda_0(x)$ é:

$$\lambda_0'(x) = 6x^2 - 6x,$$

que se anula para os valores de $x=0$ e $x=1$, sendo portanto monotônica no intervalo.

A segunda derivada de $\lambda_0(x)$ é:

$$\lambda_0''(x) = 12x - 6,$$

que se anula para o valor de $x=1/2$, onde existe um ponto de inflexão.

O aspecto destas funções λ_0 e λ_1 está representado na Figura 3.2. Pode-se notar pela figura que o comportamento das funções λ_0 e λ_1 é semelhante às da mistura do Coons.

Um exemplo de utilização deste método é mostrado na Figura 3.3, onde foram usados cinco pontos de entrada. Em cada intervalo foram gerados 19 pontos, ou seja, 20 intervalos.

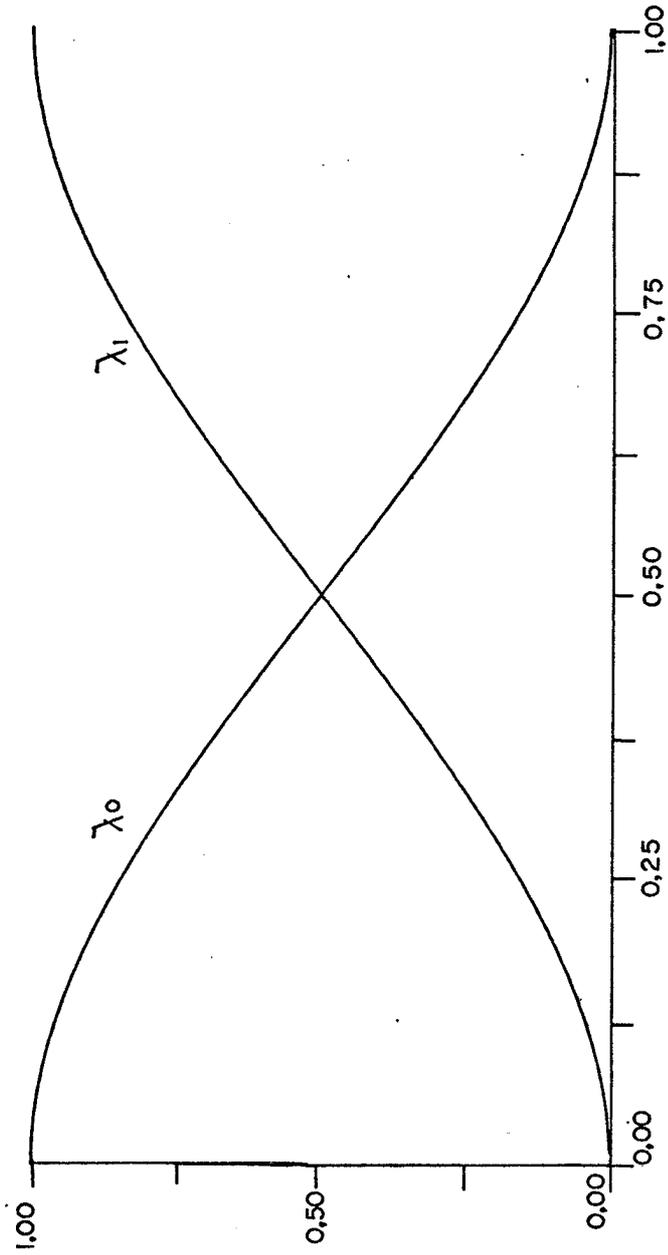


Fig. 3.2 - Comportamento das funções peso λ_0 e λ_1 .

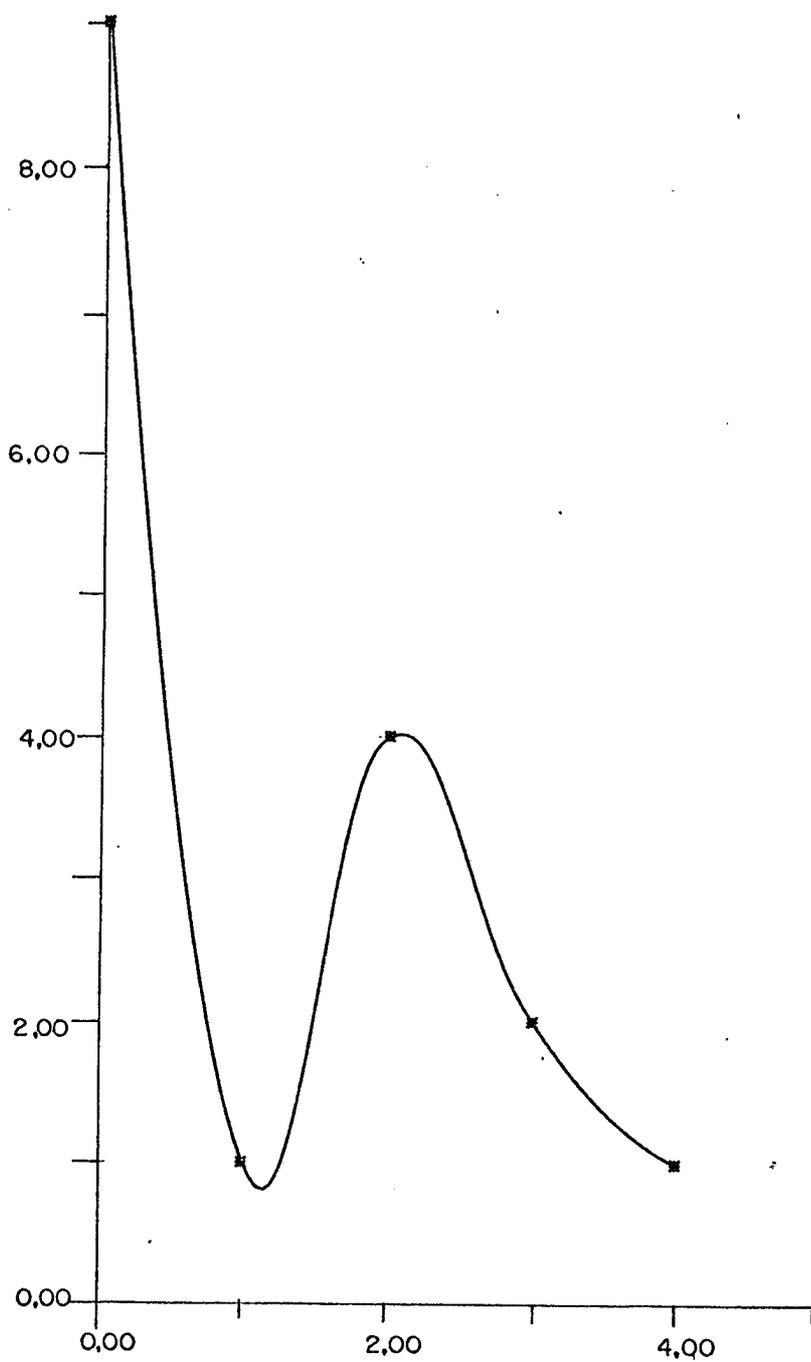


Fig. 3.3 - Interpolação usando "Spline" ponderado.

"*" indica os pontos de entrada 9, 1, 4; 2 e 1.

CAPÍTULO 4

SUPERFÍCIE CORRETORA DE INCLINAÇÃO

A equação da superfície descrita anteriormente é muito geral no sentido de acomodar qualquer contorno limite para o retalho; entretanto, é bastante limitada quanto à concordância de inclinações na fronteira, pois estas são rigidamente descritas por uma fórmula simples.

É frequente a necessidade de ajustar uma dessas fronteiras com a de outra de um outro retalho gerado de uma maneira diferente, ou ter uma imposição de natureza física a uma particular fronteira. Então, pode-se determinar uma superfície aditiva corretora que introduza esta imposição física externa ao problema.

Seja a superfície abaixo definida como a do Capítulo 2:

$$\begin{aligned} \alpha(u, w) = & \sum_{i=0}^1 \alpha(i, w)_u G_i(u) + \\ & + \sum_{j=0}^1 \alpha(u, j)_w G_j(w) + \\ & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha(i, j)_{uw} G_i(u) G_j(w). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nesse caso, $\alpha(i, w)_u$ é uma função apenas de w , que descreve uma variação arbitrária da derivada na direção u quando w varia ao longo das fronteiras ou bordas. A função $\alpha(i, j)_{uw}$ representa a derivada cruzada nos quatro cantos.

Do mesmo modo que F_0 e F_1 (Seção 2.4), as funções G_0 e G_1 também são funções de mistura com propriedades ligeiramente diferentes, ou seja:

$$G_0(0) = G_0(1) = G_1(0) = G_1(1) = 0,$$

$$G_0'(0) = 1,$$

$$G_0'(1) = 0,$$

$$G_1'(0) = 0,$$

$$G_1'(1) = 1.$$

Pode-se perceber que, com essas condições impostas, nenhuma característica da continuidade da curvatura foi colocada. Então, a adição dessa nova superfície pode alterar a curvatura, mas esta pode ser corrigida por uma outra superfície semelhante.

É necessário garantir que a nova superfície seja identicamente nula nas fronteiras, e sobre estas a inclinação seja dada pela equação fornecida. Fazendo $u=a$ na Equação 4.1, obtêm-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \alpha(a, w) = & \sum_{i=0}^1 \alpha(i, w)_u G_i(a) + \sum_{j=0}^1 \alpha(a, j)_w G_j(w) + \\ & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha(i, j)_{uw} G_i(a) G_j(w), \end{aligned} \quad (4.2a)$$

que resulta em:

$$\alpha(a, w) = \sum_{j=0}^1 \alpha(a, j)_w G_j(w). \quad (4.2b)$$

A superfície da conexão deve deixar as fronteiras inalteradas, logo ela deve ser nula ao longo destas, ou seja:

$$\alpha(i, w) = 0,$$

$$\alpha(u, j) = 0.$$

Em vista da Equação 4.2b, as derivadas nessas fronteiras têm de ser nulas também, ou seja:

$$\alpha(i, w)_w = 0,$$

$$\alpha(u, j)_u = 0.$$

Com estas características, percebe-se que $\alpha(a, w) = 0$ como se queria. De maneira semelhante ao procedimento acima obtêm-se $\alpha(u, a) = 0$.

Para examinar a variação da inclinação ao longo da fronteira, deriva-se a superfície em relação a u obtendo:

$$\begin{aligned} \alpha(u, w)_u &= \sum_{i=0}^1 \alpha(i, w)_u G'_i(u) + \\ &+ \sum_{j=0}^1 \alpha(u, j)_{uw} G_j(w) + \\ &- \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha(i, j)_{uw} G'_i(u) G_j(w). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Substituindo a no lugar de u , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \alpha(a, w)_u &= \sum_{i=0}^1 \alpha(i, w)_u G'_i(a) + \\ &+ \sum_{j=0}^1 \alpha(a, j)_{uw} G_j(w) + \\ &- \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha(i, j)_{uw} G'_i(a) G_j(w). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sabe-se que:

$$G_i^!(a) = 0, \text{ se } i \neq a,$$

$$G_i^!(a) = 1, \text{ se } i = a,$$

então a Expressão 4.4 toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha(a, w)_u &= \sum_{i=0}^1 \alpha(a, w)_u + \sum_{j=0}^1 \alpha(a, j)_{uw} G_j(w) + \\ &\quad - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha(a, j)_{uw} G_j(w) \\ &= \alpha(a, w)_u. \end{aligned}$$

Isso mostra que essa superfície possui as propriedades impostas anteriormente.

Para usar essa superfície de correção deve-se primeiro, determinar a inclinação da superfície gerada anteriormente nas bordas, subtrai-la da desejada e, então, achar a inclinação que a superfície de correção deverá ter.

Se $C(0, w)_u$ é a inclinação desejada e $I(0, w)_u$ a inclinação intrínseca, então $\alpha(0, w)_u$, a inclinação corretora, é $C(0, w)_u - I(0, w)_u$. As funções $\alpha(i, w)_u$ e $\alpha(u, j)_w$ são as quatro que fazem parte da superfície de correção de inclinação.

A superfície no retalho é:

$$C(u, w) = Z(u, w) + \alpha(u, w),$$

onde $Z(u, w)$ é a superfície cuja inclinação das fronteiras está sendo ajustada.

O mesmo procedimento pode ser estendido a derivadas de qualquer ordem.

4.1 - ARCO CORRETOR PARA O CASO BIDIMENSIONAL

A exemplo da restrição dimensional que foi feita para o caso da interpolação dos retalhos, pode-se pensar num arco corretor para as derivadas no caso bidimensional. O extenso uso de curvas de Bêzier na geração de curvas e superfícies deve-se à facilidade de especificar as inclinações nas pontas (e nas bordas), além de sua grande rapidez.

Ao interpolar a "gaiola" com inclinações conhecidas, para depois gerar as superfícies, quando são unidas duas superfícies de mesmas bordas, geradas da mesma forma e com controle sobre sua inclinação, dispensa-se o uso de superfícies corretoras, já que, pela fórmula da derivada na borda da superfície primária, essa é determinada pelas derivadas nos cantos do retalho.

No caso bidimensional, a função de mistura do arco corretor é $\gamma_i(x)$, $i=0, 1$, com as seguintes propriedades:

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = 0,$$

$$\gamma_0'(0) = 1,$$

$$\gamma_0'(1) = 0,$$

$$\gamma_1'(0) = 0,$$

$$\gamma_1'(1) = 1.$$

Como existem essas oito equações, o polinômio deve ser do terceiro grau, ou seja:

$$\gamma_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0,$$

$$\gamma_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1.$$

Substituindo as expressões de $\gamma_0(x)$ e $\gamma_1(x)$ nas condições acima, tem-se:

Para $\gamma_0(x)$:

$$d_0 = 0,$$

$$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 0,$$

$$c_0 = 1,$$

$$3a_0 + 2b_0 + c_0 + d_0 = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, obtêm-se:

$$\gamma_0(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

Para $\gamma_1(x)$:

$$d_1 = 0,$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0,$$

$$3a_1 + 2b_1 + c_1 = 1,$$

$$c_1 = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, obtêm-se:

$$\gamma_1(x) = x^3 - x^2.$$

Então, o arco corretor obtido é $\bar{\gamma}_0(x)h'_0(0) + \bar{\gamma}_1(x)h'_1(1)$, onde $h'_0(0)$ e $h'_1(1)$ são as inclinações desejadas nos pontos 0 e 1 do arco, respectivamente. O aspecto destas funções está representado na Figura 4.1.

Um exemplo da utilização desse arco corretor é mostrado na Figura 4.2, que é a mesma curva que foi mostrada no capítulo anterior na Figura 3.3, juntamente com suas novas formas depois de corrigidas para as derivadas impostas. A Figura 4.3 mostra a mesma figura, mas com a ampliação da região onde foram impostas novas derivadas.

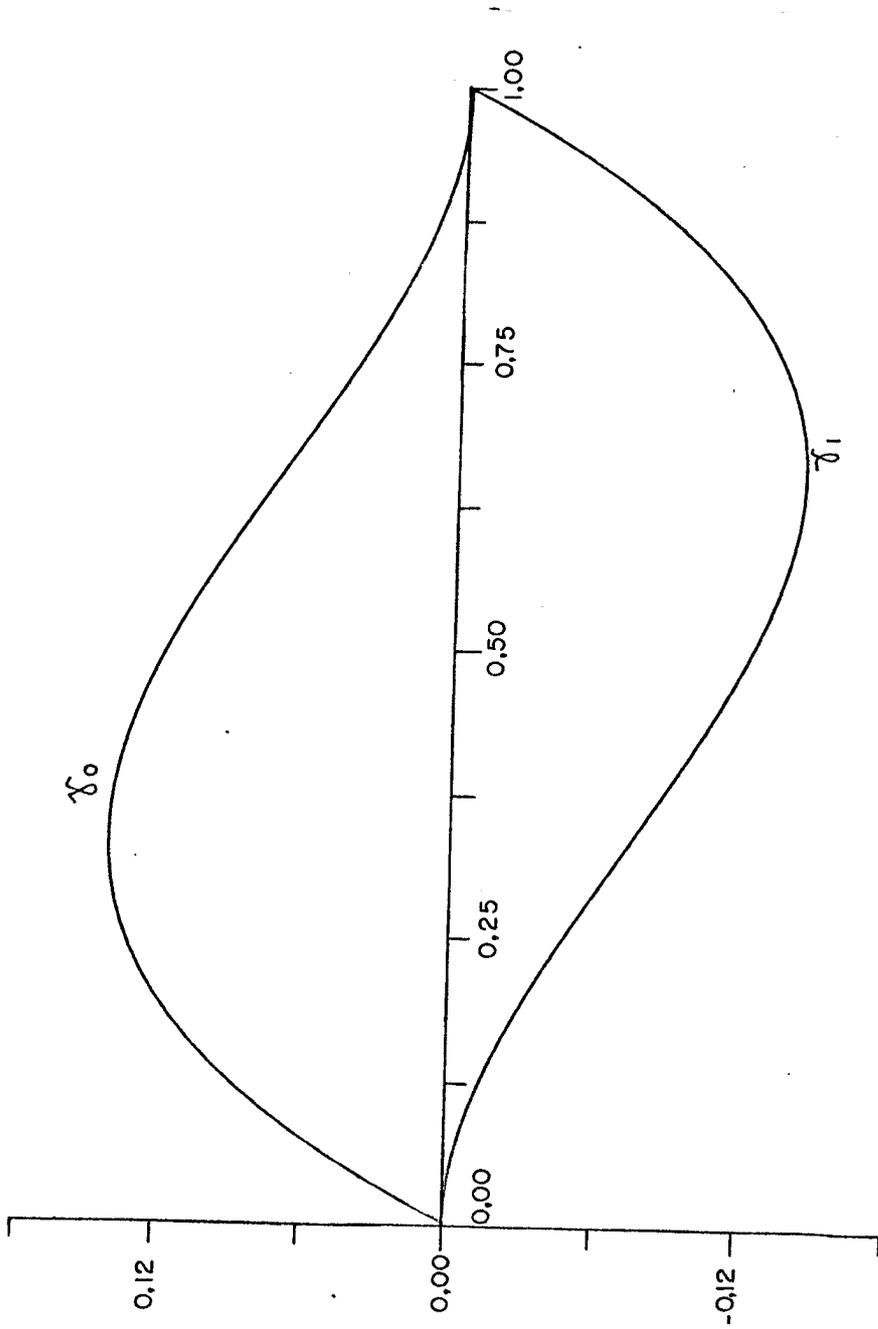


Fig. 4.1 - Comportamento das funções de mistura para o arco corretor de inclinação.

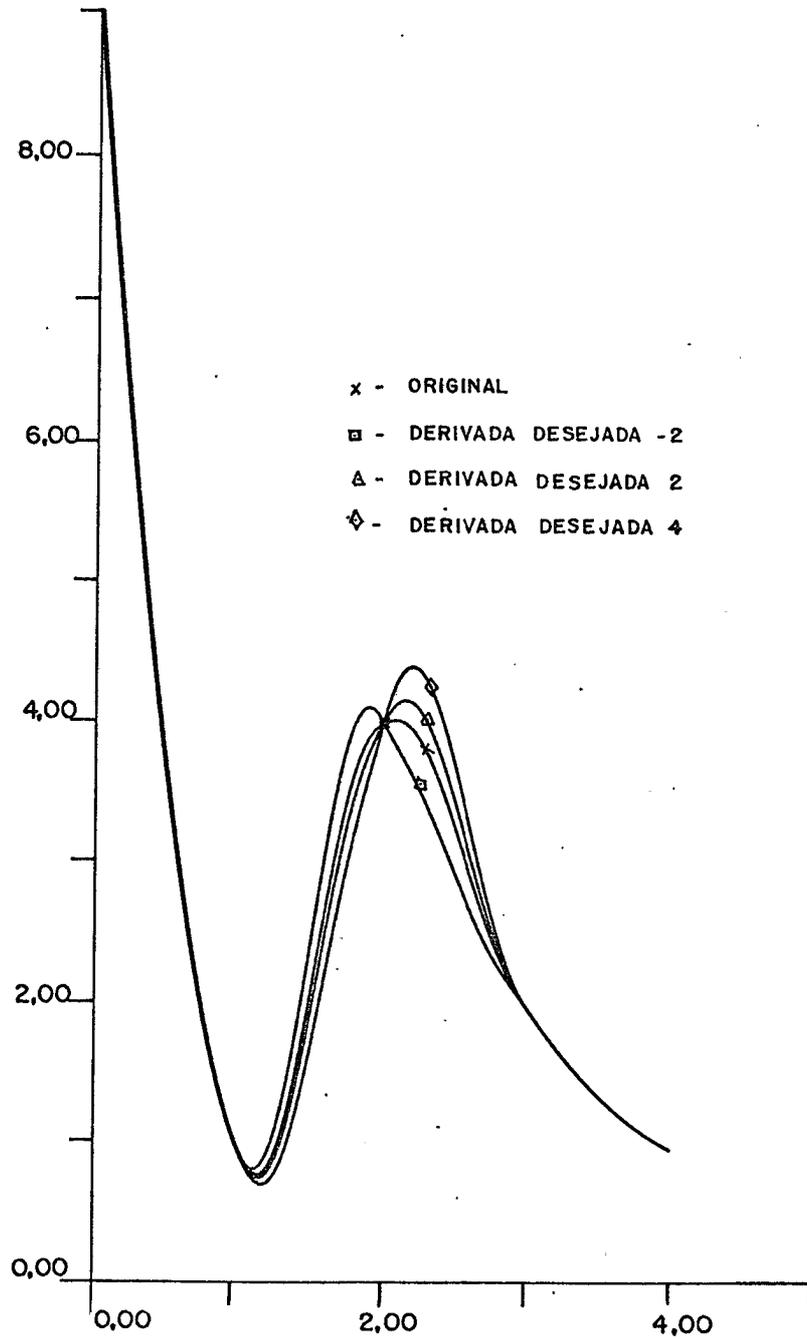


Fig. 4.2 - Curva original interpolada com correções de inclinação.

"*" indica o ponto onde foram impostas as derivadas desejadas.

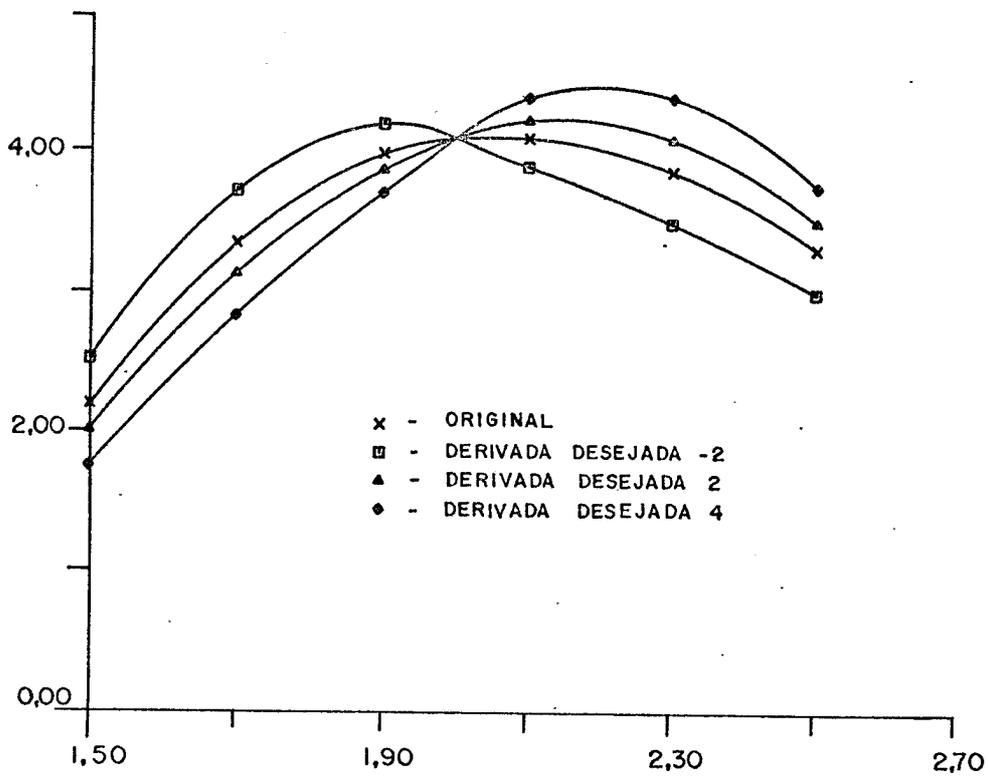


Fig. 4.3 - Ampliação da região do ponto onde foram impostas as derivadas desejadas.

Uma utilização muito importante desse arco corretor é geração de descontinuidade nas derivadas. A Figura 4.4 mostra esta característica. Uma superfície completa foi gerada usando a correção da derivada (Figura 4.5).

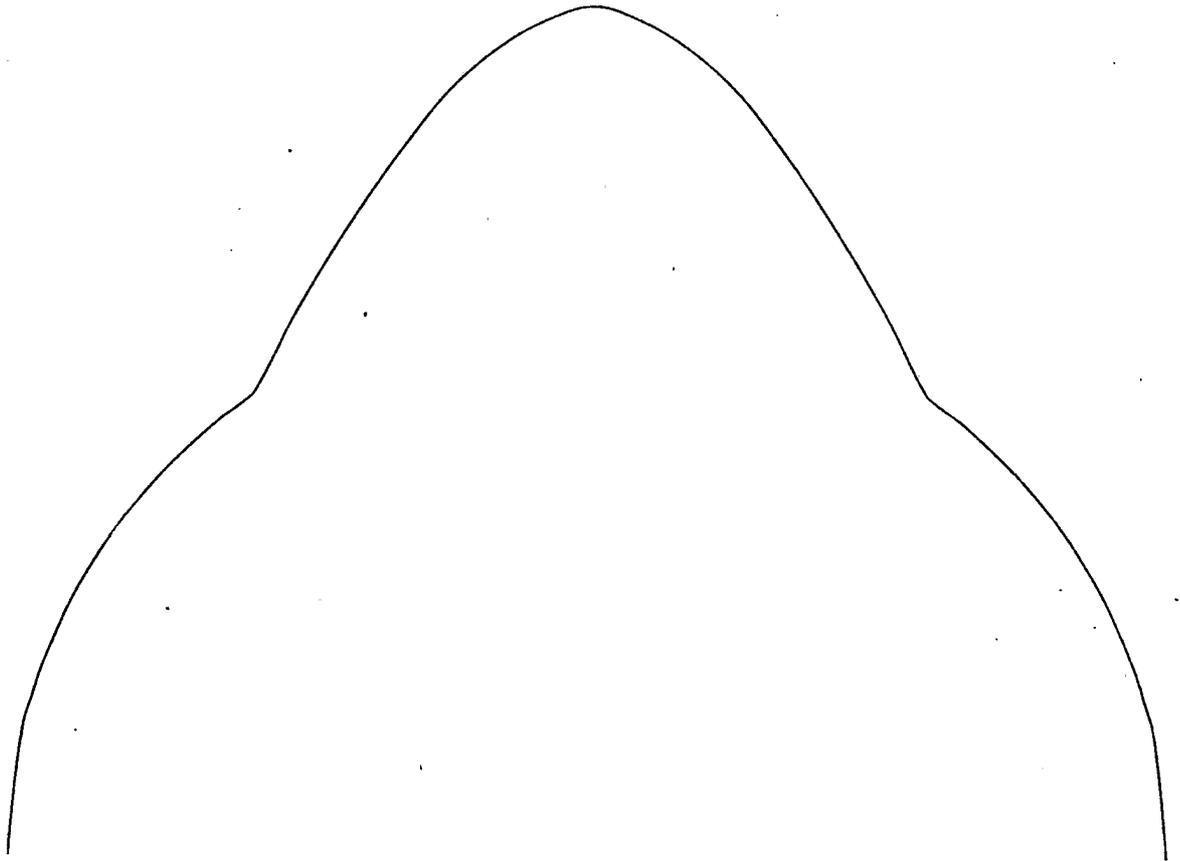


Fig. 4.4 - Curva interpolada que força uma descontinuidade.

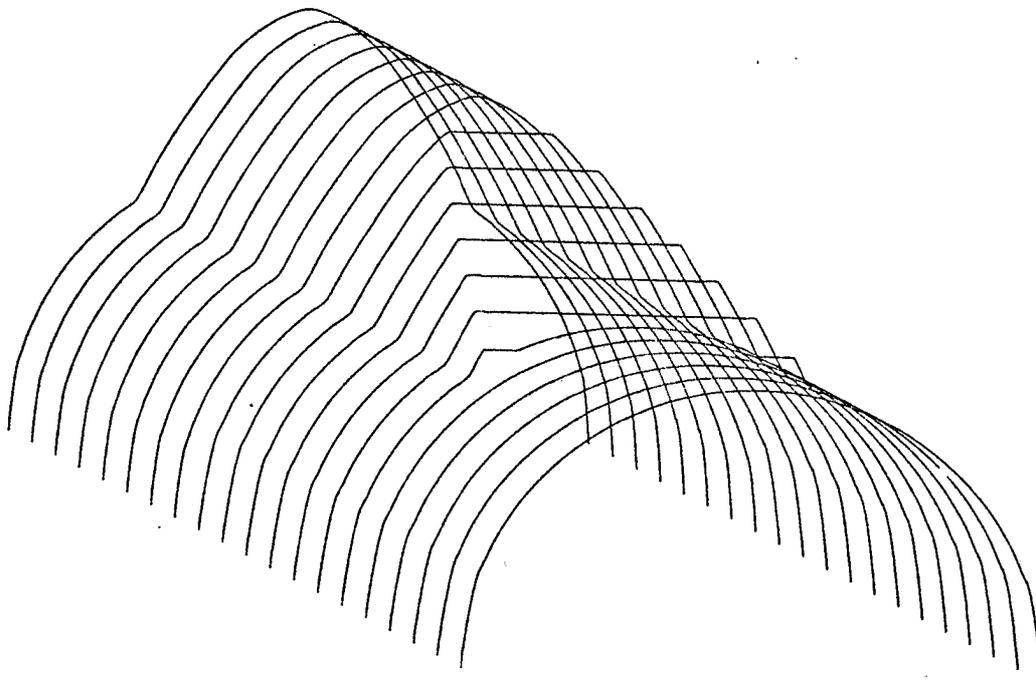


Fig. 4.5 - Uma superfície completa usando o interpolador.

Um cuidado deve ser tomado ao impor uma descontinuidade, pois pode ocorrer uma oscilação do tipo mostrado pela Figura 4.6, devido à grande amplitude do arco corretor, intolerável dentro da precisão requerida.

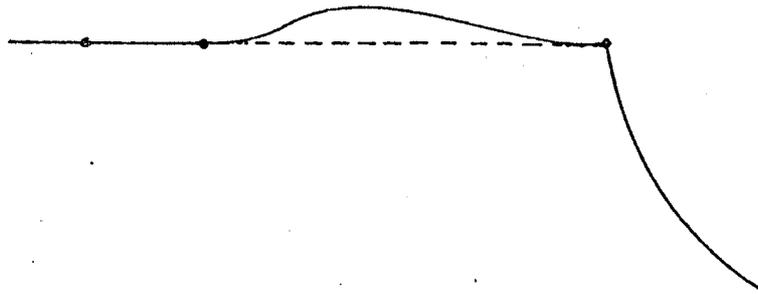


Fig. 4.6 - Ocorrência de uma oscilação.

Uma maneira de contornar este problema é incluir mais dois pontos novos, como mostra a Figura 4.7. Como as curvas interpoladas primeiramente são parábolas, é fácil determinar a posição dos pontos auxiliares de modo a produzir as derivadas desejadas no ponto de descontinuidade.

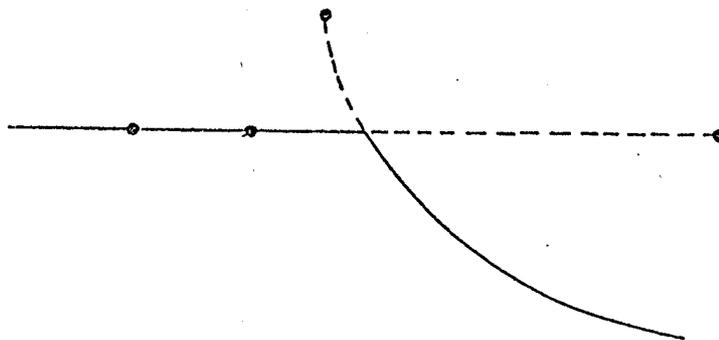


Fig. 4.7 - Eliminação da oscilação com a inclusão de pontos auxiliares.

O método de gerar superfícies de Coons não sofrerá nenhuma alteração, pois a geração da superfície é feita dentro do retalho usando tão somente as suas bordas. As Figuras de 4.8 até 4.13 mostram exemplos que utilizam o sistema completo.

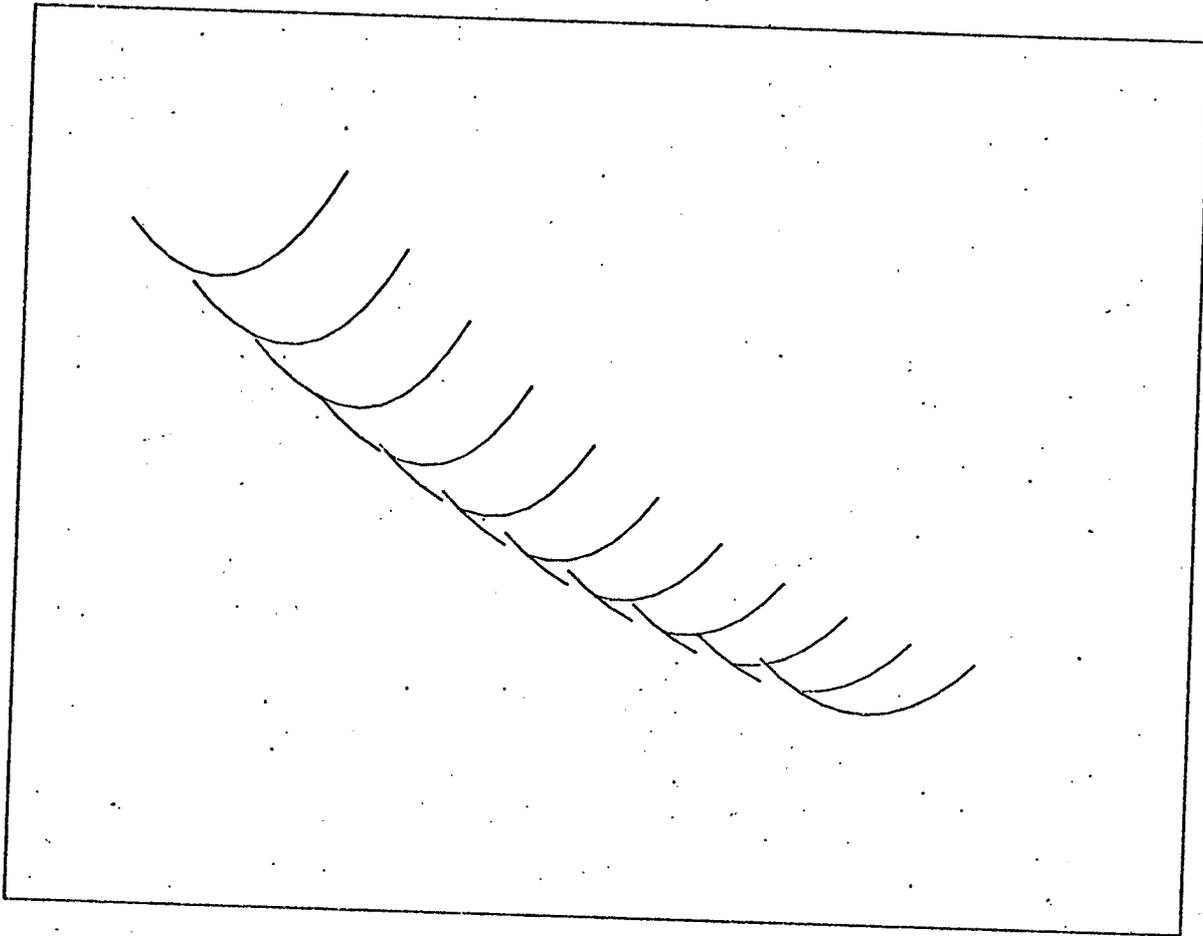


Fig. 4.8 - Interpolação em um retalho onde as bordas são as funções x^2 e $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2$.

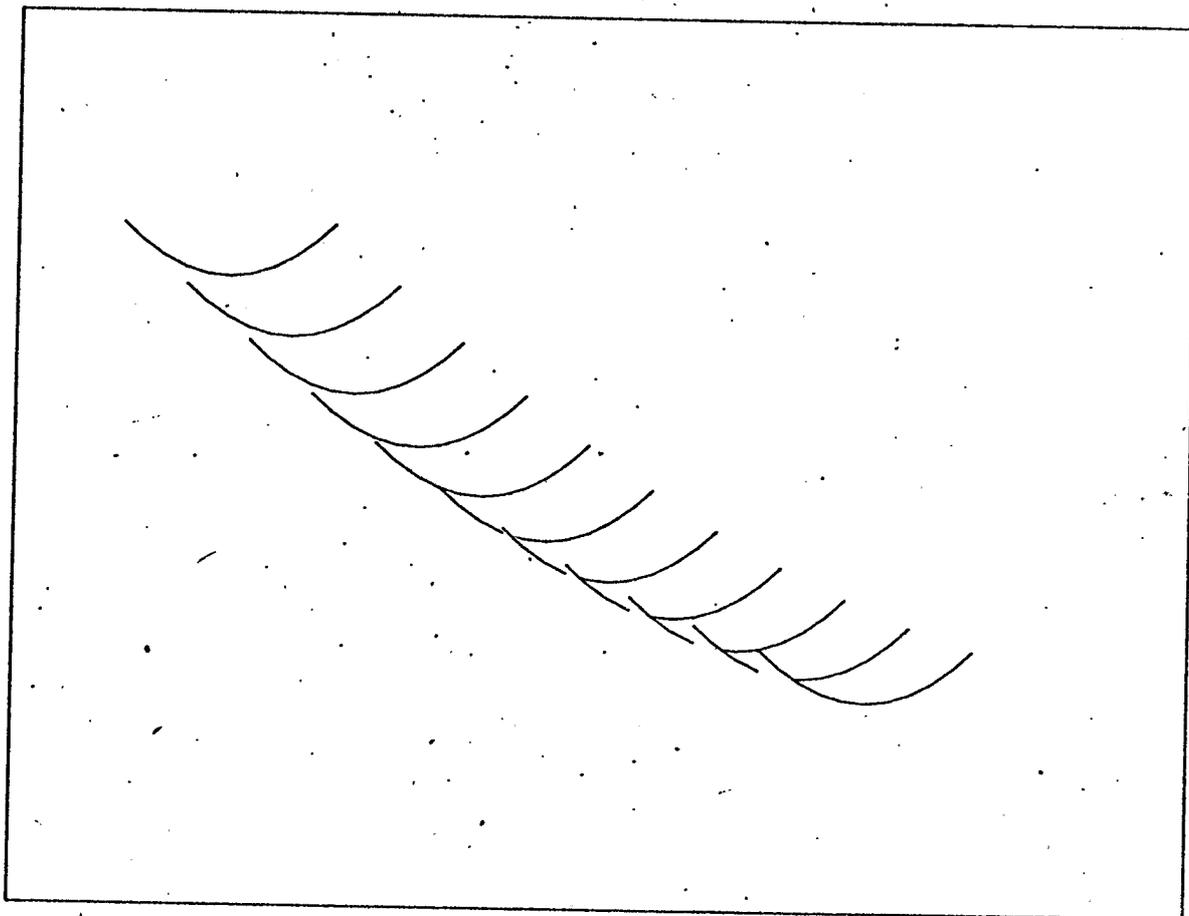


Fig. 4.9 - Interpolação em um retalho onde as bordas são a função x^2 .

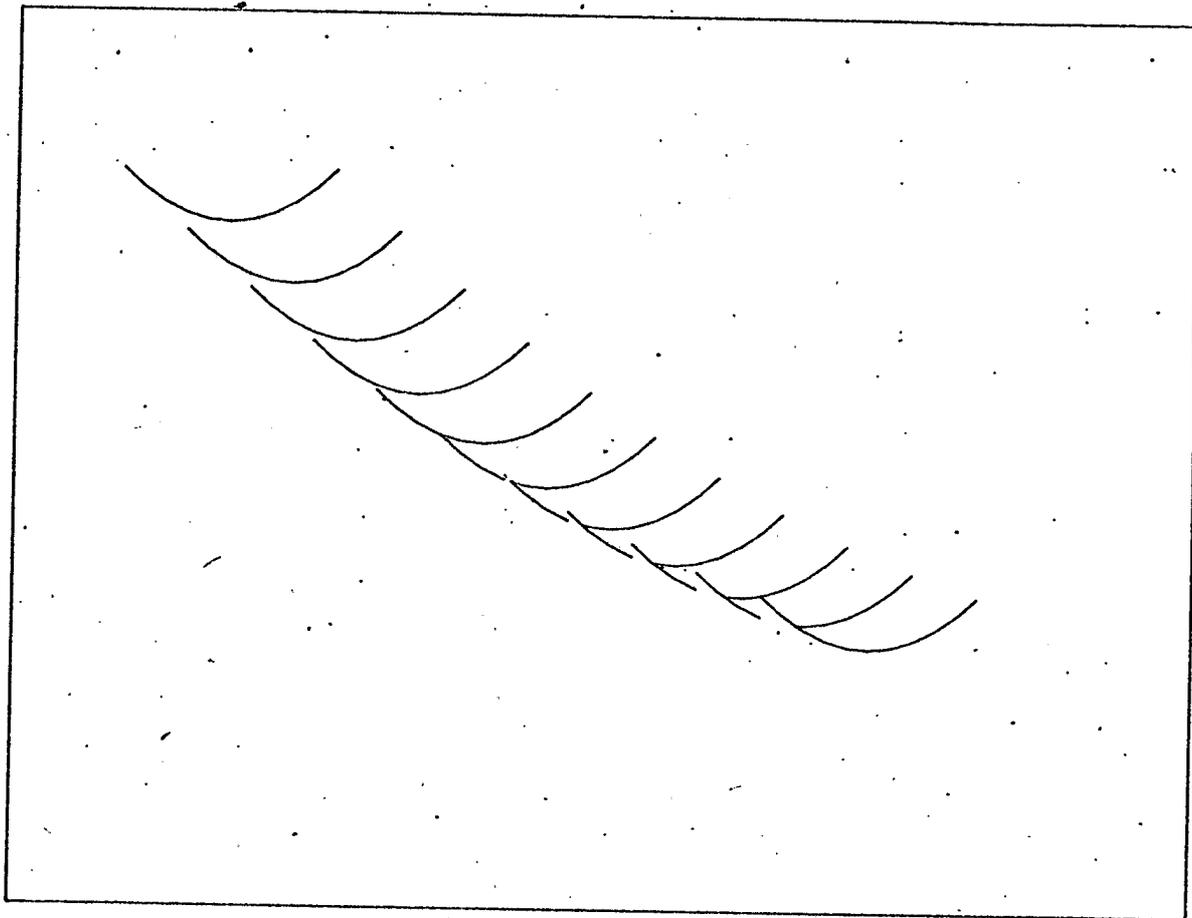


Fig. 4.10 - Interpolação em um retalho onde as bordas são a função x^2+1 .

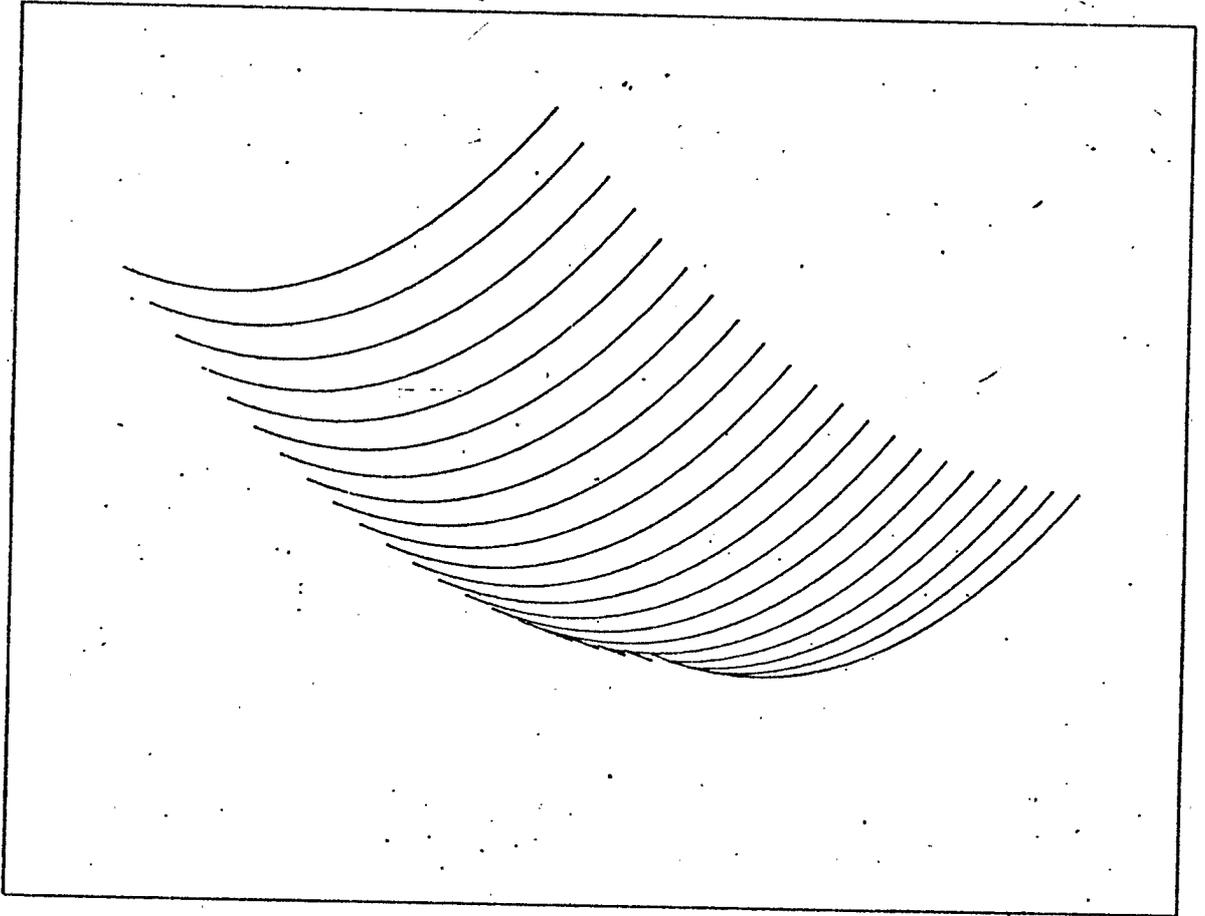


Fig. 4.11 - Interpolação em quatro retalhos onde as bordas são a função $x^2 - 4$.

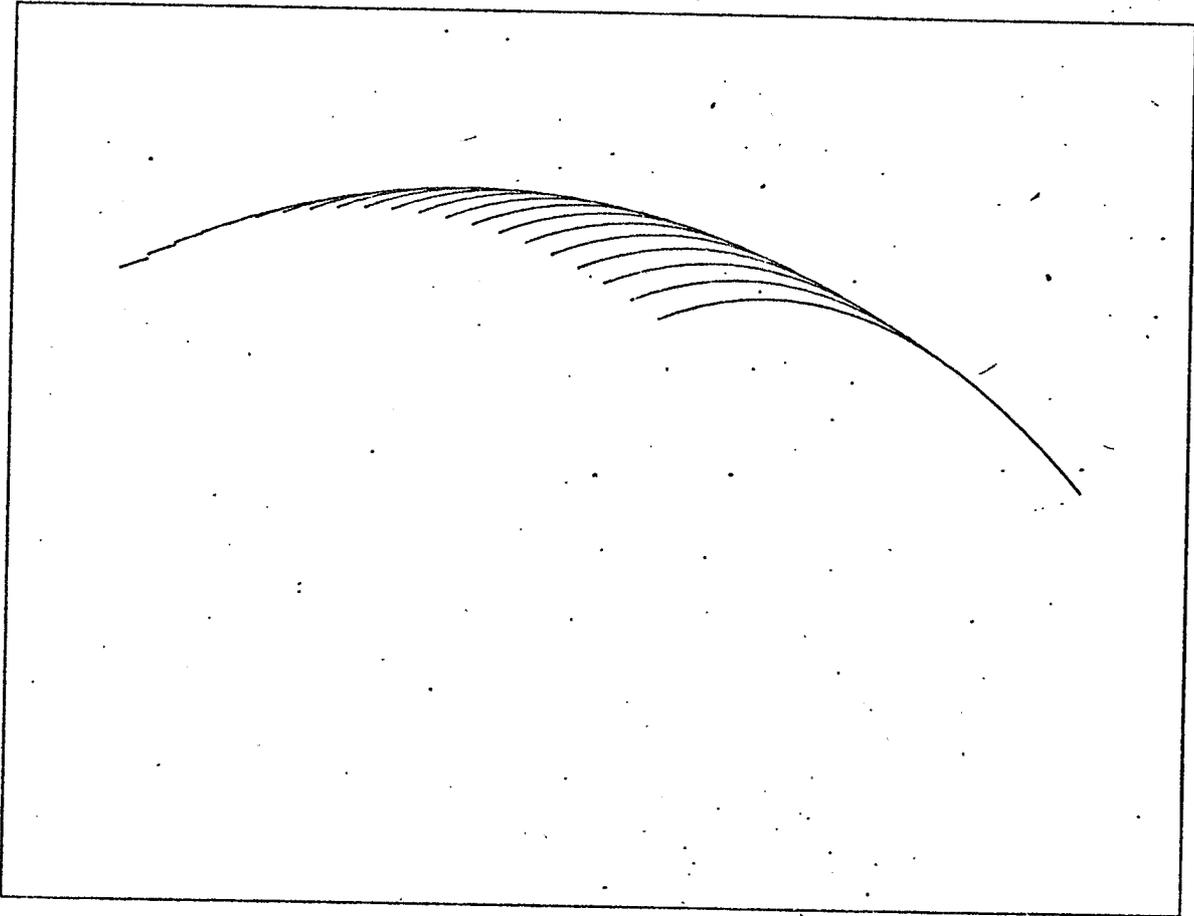


Fig. 4.12 - Interpolac~ao em quatro retalhos onde as bordas s~ao a fun_{cao} $4-x^2$.

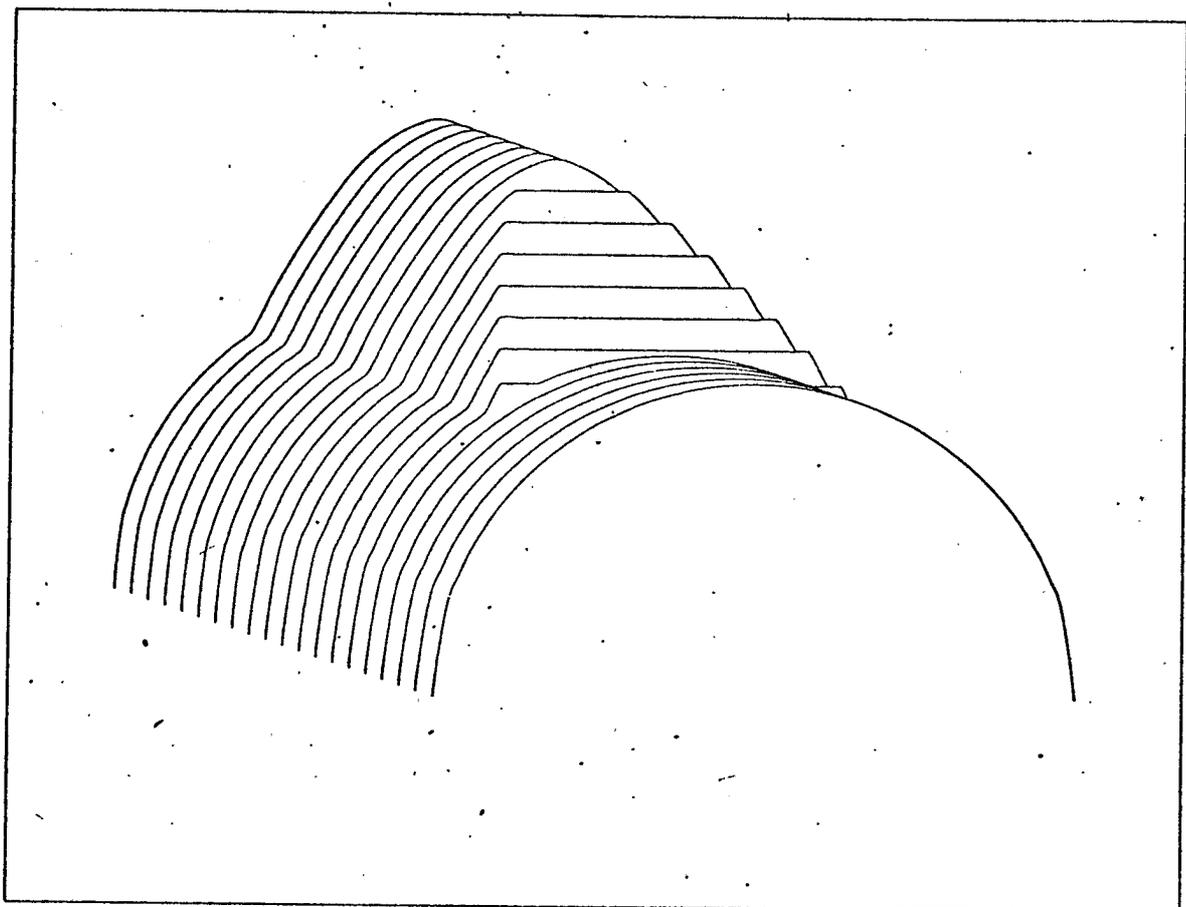
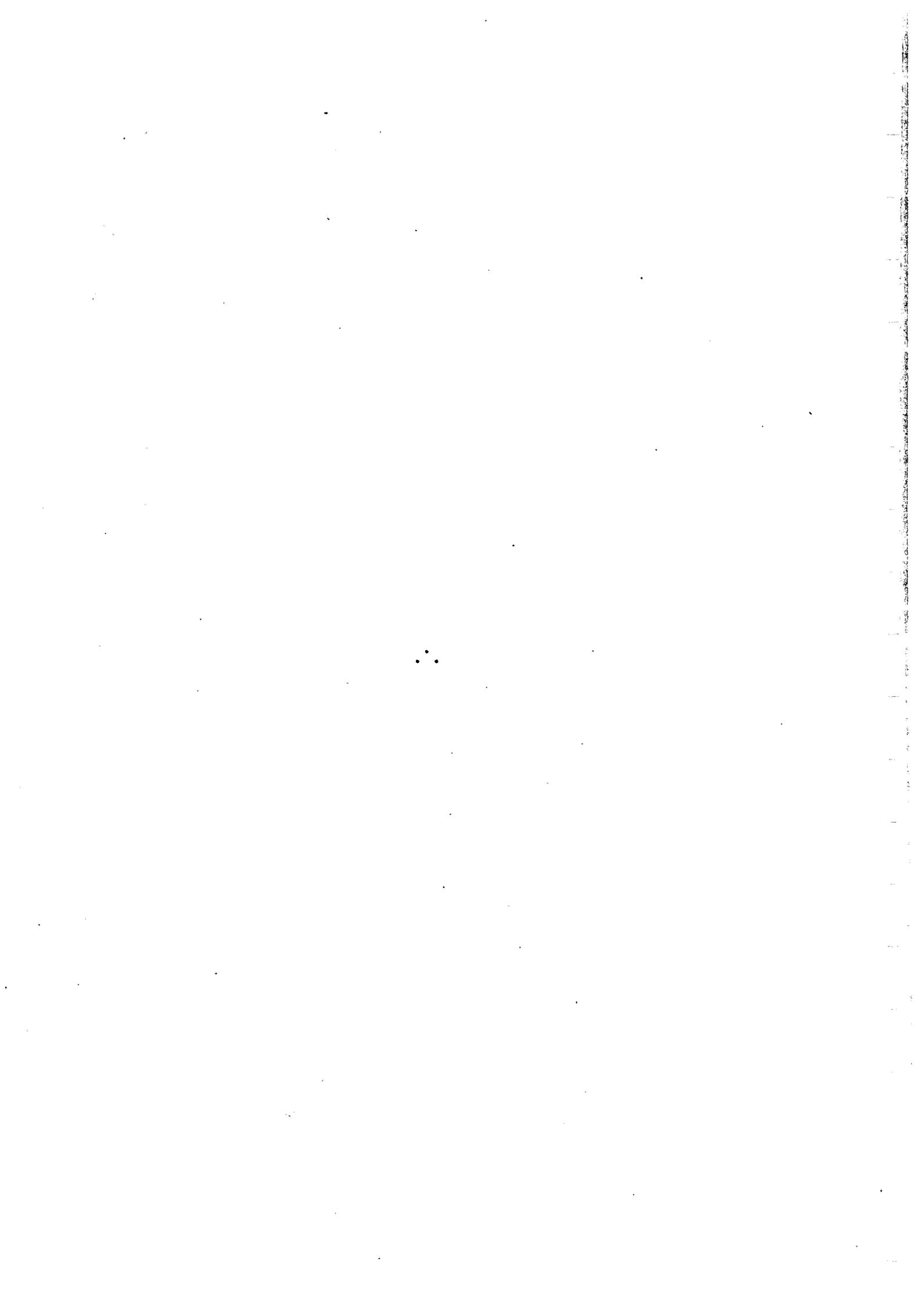


Fig. 4.13 - Exemplo de cabine de avião.



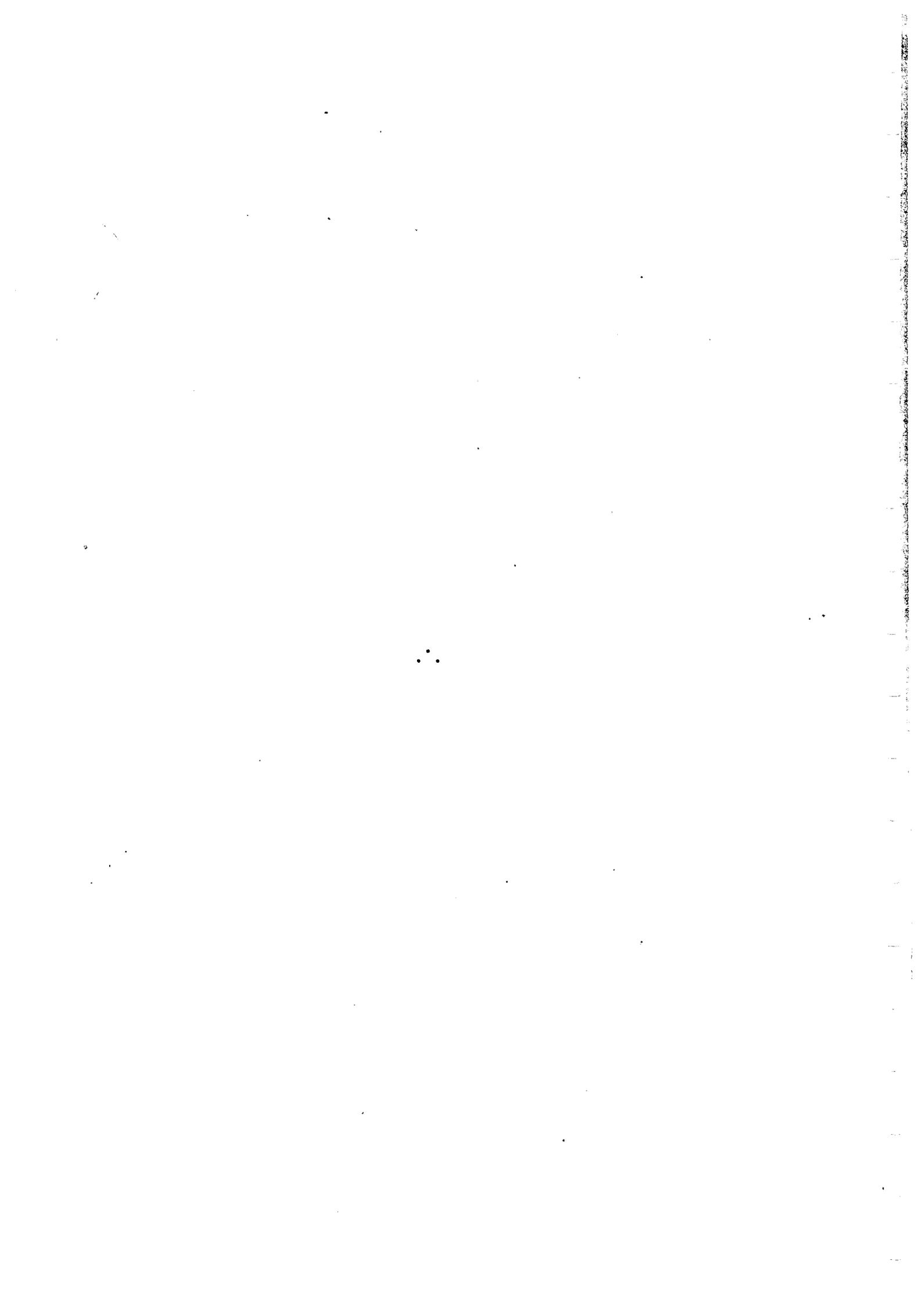
CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

A extensão do caso bidimensional do método de Coons aqui proposta apresenta reais vantagens sobre interpolações tradicionais, quais sejam: 1) o pequeno esforço computacional, que é linearmente crescente com o número de pontos; 2) a garantia da suavidade dos segmentos interpolados; 3) a passagem por todos os pontos de controle; 4) a manutenção da continuidade das derivadas de qualquer ordem (desde que se pague o devido custo computacional); 5) a possibilidade do controle completo das derivadas nos pontos, o que permite especificá-las, como podem fazer os métodos mais complexos, e até mesmo gerar descontinuidade das curvas nos referidos pontos sem que o número deles seja aumentado; 6) a existência de um modo alternativo de geração de descontinuidades na primeira derivada, caso a possibilidade mencionada no item anterior gere alguma rugosidade inadmissível.

A geração das "gaiolas", tal como aqui implementada, baseia-se em coordenadas cartesianas. Para a geração de superfícies inteiramente fechadas, deve-se utilizar a parametrização; as modificações a serem introduzidas no programa são de pequeno porte e quase não requerem esforço de programação.

A parametrização acima mencionada, bem como uma considerável melhoria na capacidade de interação programa-usuário, no sentido de torná-lo totalmente conversacional e auto-explicativo, são os próximos passos propostos para o prosseguimento do trabalho.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BÉZIER, P.E. Example of an existing system in the motor industry: the UNISURF system. *Proceedings of the Royal Society of London*, 321(1545):207-218, 1971.
- COONS, S.A. *Surfaces for computer-aided-design of space forms*. Cambridge, MIT, 1967. (MAC-TR-41).
- COSTA, L.A.Z. da Spline Ponderado-Um novo algoritmo. In: SIMPÓSIO SOBRE APLICAÇÕES GRÁFICAS POR COMPUTADOR E SISTEMAS GRÁFICOS INTERATIVOS, 2.; São Paulo, 1980. *Anais*. São Paulo, SUCESU, 1980, p. 445-464.
- FORREST, A.R. On Coons and other methods for the representation of curved surfaces. *Computer graphics and image processing*, 1:341-359, 1972.
- FORSYTHE, G.E.; MALCOLM, M.A.; MOLER, C.B. *Computer methods for mathematical computations*. New Jersey, Prentice-Hall, 1977.
- GILOI, W.K. *Interactive computer graphics data structures, algorithms, languages*. New Jersey, Prentice-Hall, 1978.
- GORDON, W.J.; RIESENFELD, F. Bernstein-Bézier methods for the computer-aided-design of free-form curves and surfaces. *Journal of ACM*, 21(2):293-310, 1974.
- HILDEBRAND, F.B. *Introduction to numerical analysis*. New York, McGraw-Hill, 1956.
- NEWMAN, W.M.; SPROULL, R.F. *Principles of interactive computer graphics*. Auckland, McGraw-Hill, 1979.

