



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.06.14.15-TDI

MANOBRAS ORBITAIS COMBINADAS COM USO DE PROPULSÃO IMPULSIVA E PASSAGEM POR UM CORPO INTERMEDIÁRIO

Alessandra Ferraz da Silva Ferreira

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Othon Cabo Winter, e Denilson Paulo Souza dos Santos, aprovada em 22 de fevereiro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NATKT2>>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):

Presidente:

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.06.14.15-TDI

MANOBRAS ORBITAIS COMBINADAS COM USO DE PROPULSÃO IMPULSIVA E PASSAGEM POR UM CORPO INTERMEDIÁRIO

Alessandra Ferraz da Silva Ferreira

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Othon Cabo Winter, e Denilson Paulo Souza dos Santos, aprovada em 22 de fevereiro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NATKT2>>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ferreira, Alessandra Ferraz da Silva.

F413m Manobras orbitais combinadas com uso de propulsão impulsiva e passagem por um corpo intermediário / Alessandra Ferraz da Silva Ferreira. – São José dos Campos : INPE, 2017.
xxviii + 206 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.06.14.15-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Othon Cabo Winter, e Denilson Paulo Souza dos Santos.

1. Manobras orbitais. 2. Swing-by propulsado. 3. Satélites artificiais. 4. Manobras impulsivas. 5. Tethers. I.Título.

CDU 629.7.017.3



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Alessandra Ferraz da Silva Ferreira**

Título: **"MANOBRAS ORBITAIS COMBINADAS COM USO DE PROPULSÃO IMPULSIVA E PASSAGEM POR UM CORPO INTERMEDIÁRIO"**

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle**

Dr. **Rodolpho Vilhena de Moraes**



Presidente / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Dr. **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado**



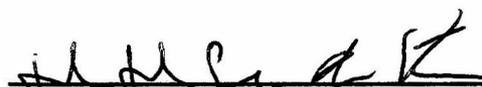
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. **Othon Cabo Winter**



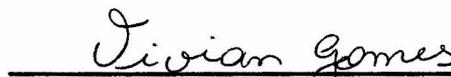
Orientador(a) / UNESP/FEG / Guaratinguetá - SP

Dr. **Denilson Paulo Souza dos Santos**



Orientador(a) / UNESP / São João da Boa Vista - SP

Dra. **Vivian Martins Gomes**



Convidado(a) / UNESP/FEG / Guaratinguetá - SP

Dr. **Jorge Kennety Silva Formiga**



Convidado(a) / UNESP / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 22 de fevereiro 2017

“O errado é errado mesmo que todos o façam; o certo é certo mesmo que ninguém o faça”.

Autor Desconhecido

A minha família, a meu marido e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por tudo em minha vida.

Agradeço a meus pais, Maria Aparecida e Paulo, por toda a dedicação, por eu ser quem sou hoje e pelo total apoio nas minhas escolhas.

A meus irmãos Vivian, Jéssica e Gabriel por estarem sempre comigo me incentivando. A meu sobrinho Lucas, uma criança simples, que me ensina todos os dias a nunca perder a criança que tem dentro de mim.

A meu marido Douglas pela parceria e paciência sempre. Por estar presente em todos os momentos bons e ruins.

Agradeço aos meus orientadores Antônio F. Bertachini A. Prado, Othon Cabo Winter e Denilson P. S. Santos pelo imenso apoio e dedicação neste trabalho e por tudo que me ensinaram. Ao Denilson agradeço também pela ajuda e amparo durante o período que estive em Portugal para o doutorado sanduíche.

As minhas amigas, Liana e Bruna, fiéis parceiras de curso e na vida, literalmente rimos e choramos juntas para tudo.

Agradeço a todos os professores que passaram por minha vida escolar pelo conhecimento transmitido e aos colegas pela parceria e amizade.

Por fim, agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre manobras orbitais que possam ser realizadas com o uso de propulsão impulsiva e de uma passagem por um corpo celeste intermediário. Duas principais opções são consideradas: i) um “Swing-By propulsado”, que consiste em uma passagem por um corpo celeste combinada com a aplicação de um impulso no veículo espacial, e ii) manobras de “Swing-By assistidas por cabo”, aonde o giro do vetor velocidade é obtido através de um sistema que liga o veículo espacial a um corpo celeste através do uso de um cabo. Ambas as manobras provocam modificação na trajetória do veículo espacial. O objetivo principal é a economia de combustível na missão espacial. O “Swing-By propulsado” já foi estudado na literatura, e aqui é realizada uma extensão para considerar um sistema cuja órbita dos primários seja elíptica em torno de um centro de massa comum. Os resultados mostram que aplicar um impulso em diferentes direções e pontos da trajetória, trabalhando em conjunto com a parte gravitacional da manobra, otimiza o ganho ou perda de energia do veículo espacial. A manobra de “Swing-By assistida por cabo” é a combinação do “Swing-By puro” com o efeito catapulta que um tether fixado na superfície de um corpo, com o veículo espacial preso na outra extremidade, pode causar. É suposto que a estrutura do tether já está fixada no corpo, em um ponto de equilíbrio, preparado para receber o veículo. As condições de equilíbrio, estabilidade e força para alocar o tether será apresentada para diferentes sistemas de corpos, com formas regulares e irregulares. A motivação do presente trabalho é colaborar nos estudos para o envio de um veículo espacial a um asteroide, inspirado na missão ASTER, que é uma missão proposta por diversas instituições brasileiras e em fase de estudos. Nessa etapa o veículo deverá se utilizar de uma passagem pela Lua para aumentar sua energia. Sendo assim, as possibilidades aqui estudadas podem ser consideradas pela missão, em particular o “Swing-By Propulsado”.

Palavras-chave: Astrodinâmica, Manobras orbitais, Swing-By propulsado, Satélites artificiais, Manobras impulsivas, Tethers.

ORBITAL MANEUVERS COMBINED WITH THE USE OF IMPULSIVE PROPULSION AND PASSAGE BY AN INTERMEDIATE BODY

ABSTRACT

This research presents a study about the orbital maneuvers that can be performed with the use of impulsive propulsion and an intermediary passage by a celestial body. Two main options are considered: i) a “powered Swing-By”, that consists in a passage by a celestial body combined with the application of an impulse in the spacecraft, and ii) the “tethered Swing-By” maneuvers, where the rotation of the velocity vector is obtained through a system that connects the spacecraft to a celestial body, using a cable. Both maneuvers generate modifications in the trajectory of the spacecraft. The main goal is fuel economy in space mission. The "powered Swing-By" has already been studied in the literature, and an extension to consider a system whose orbits of the primaries are elliptical around a common center of mass is made here. The results show that applying an impulse in different directions and points of the trajectory, combined with the gravitational part of the maneuver, optimize the energy gain or loss of the spacecraft. The “tethered Swing-By” maneuver is the combination of the standard Swing-by with the slingshot effect generated by a tether attached to the surface of a body with the spacecraft at the other end. It is assumed that the structure of the tether is already fixed in the body, in an equilibrium point, ready to receive the spacecraft. The equilibrium conditions, stability and force to allocate the tether, are presented for different systems with regular and irregular forms. The motivation of this work is to collaborate in studies to send a spacecraft to an asteroid, inspired by the ASTER mission, which is a mission proposed by several Brazilian institutions and under study at this moment. At this stage, the spacecraft should use a passage by the Moon to increase its energy, so the possibilities studied here can be considered for the mission, in particular the "powered Swing-By".

Keywords: Astrodynamics, Orbital maneuvers, Powered Swing-By, Artificial satellite Impulsive maneuvers, Tethers.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1. Geometria da manobra de Swing-By puro (adaptado de Prado, 1996).....	10
Figura 2.2. Vetores velocidade envolvidos na manobra de Swing-By (adaptado de Prado, 1996).	10
Figura 2.3. Variação da energia para $e = 0.1$ e $\nu = 0^\circ$	13
Figura 2.4. Variação da energia para $e = 0.1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 90^\circ$ e $\psi = 270^\circ$	13
Figura 2.5. Geometria da manobra de Swing-By propulsado (adaptado de Prado, 1996).	19
Figura 2.6. Vetores velocidade envolvidos na manobra de Swing-By propulsado.....	19
Figura 2.7. Comparação entre os modelos analítico e numérico.....	22
Figura 3.1 – Sistema de coordenadas para o Problema Restrito Elíptico de Três Corpos.	25
Figura 3.2 – Geometria da manobra de Swing-By propulsado.	29
Figura 4.1 – Variação da energia em função da direção do impulso para $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ$	33
Figura 4.2 – Mapa de capturas e colisões para $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ$	38
Figura 4.3 – Variação da energia em função da direção do impulso para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.	39
Figura 4.4 – Mapa de capturas e colisões para $e = 0,1$ e $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.	42
Figura 4.5 – Variação da energia em função da direção do impulso para $e = 0,3$ e $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.	43
Figura 4.6 – Mapa de capturas e colisões para $e = 0,3$ e $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.	46
Figura 4.7 – Variação da energia em função da direção do impulso para $\psi = 270^\circ$ e $\nu = 0^\circ$	47
Figura 4.8 – Mapa de capturas e colisões para $\psi = 270^\circ$ e $\nu = 0^\circ$	48

Figura 4.9 – Variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\delta V = 0,5$, $\delta V = 2,0$ u.c. e diferentes valores de ψ	51
Figura 4.10 – Variação da energia para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 90^\circ$ e diferentes valores para a excentricidade.....	54
Figura 4.11 – Variação da energia para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores de ν ..	55
Figura 4.12 – Trajetória do veículo espacial resultante em colisão para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$, $\delta V = 0,3$ u.c. e $\alpha = 144^\circ$	57
Figura 4.13 – Trajetória do veículo espacial resultante em colisão para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\alpha = -156^\circ$	57
Figura 4.14 - Trajetória do veículo espacial resultante em captura para $e = 0,3$, $\nu = 180^\circ$, $\psi = 90^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\alpha = -180^\circ$	58
Figura 4.15 - Trajetória do veículo espacial resultante em captura para $e = 0,5$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 180^\circ$, $\delta V = 1,5$ u.c. e $\alpha = 155^\circ$	58
Figura 4.16 – Máxima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,1$	59
Figura 4.17 – Máxima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,3$	61
Figura 4.18 - Máxima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,5$	62
Figura 4.19 – Trajetórias resultantes em máxima variação da energia para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$ (a) $e = 0$ e $\delta V = 0$ u.c., (b) $e = 0,1$ e $\delta V = 4,0$ u.c., (c) $e = 0,3$ e $\delta V = 4,0$ u.c. e (d) $e = 0,5$ e $\delta V = 4,0$ u.c. O símbolo + em vermelho representa M_2	64
Figura 4.20 - Mínima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,1$	66
Figura 4.21 - Mínima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,3$	68
Figura 4.22 - Mínima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,5$	69

Figura 4.23 - Variação da energia para $e = 0,1, \nu = 0^\circ, \psi = 0^\circ$ e diferentes valores para δV .	72
Figura 4.24 - Variação da energia para $e = 0,1, \nu = 0^\circ, \psi = 90^\circ$ e diferentes valores para δV .	75
Figura 4.25 - Variação da energia para $e = 0,1, \nu = 0^\circ, \psi = 180^\circ$ e diferentes valores para δV .	78
Figura 4.26 - Variação da energia para $e = 0,1, \nu = 0^\circ, \psi = 270^\circ$ e diferentes valores para δV .	80
Figura 4.27 - Variação da energia para $e = 0,1, \psi = 270^\circ, \delta V = 0,5$ u.c. e diferentes valores para anomalia verdadeira.	83
Figura 4.28 – Máxima variação da energia, direção e ponto de aplicação do impulso para $e = 0,1$.	85
Figura 4.29 – Mínima variação da energia, direção e ponto de aplicação do impulso para $e = 0,1$.	86
Figura 4.30 - Variação da energia para $\nu = 0^\circ, \psi = 270^\circ, \delta V = 0,3$ u.c. e diferentes valores para excentricidade.	88
Figura 5.1. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1, \nu = 0^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.	93
Figura 5.2. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1, \nu = 180^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.	94
Figura 5.3. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1, \nu = 0^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.	95
Figura 5.4. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1, \nu = 180^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.	96
Figura 5.5. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3, \nu = 0^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.	97
Figura 5.6. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3, \nu = 180^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.	98
Figura 5.7. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3, \nu = 0^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.	99
Figura 5.8. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3, \nu = 180^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.	100
Figura 6.1 – Taxa de variação instantânea de ΔE em relação à (a) r_p e (b) ψ .	104

Figura 6.2 – Variação em ΔE para erros de até ± 20 km na atribuição de r_p , para diferentes valores de ψ	106
Figura 6.3 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 5^\circ$ na atribuição de ψ , para diferentes valores de r_p	109
Figura 6.4 – Taxa de variação instantânea de ΔE em relação à V_{inf} , para $\psi = 270^\circ$..	112
Figura 6.5 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 0,01$ km/s na atribuição de V_{inf} , para $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores de r_p	113
Figura 6.6 – Taxa de variação instantânea de ΔE em relação à (a) δV e (b) α para $\psi = 270^\circ$	117
Figura 6.7– Mapa de capturas e colisões para $\psi = 270^\circ$ (adaptado de Ferreira et al., 2015).....	118
Figura 6.8 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 0,01$ km/s na atribuição de δV , para $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores de α	119
Figura 6.9 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 5^\circ$ na atribuição de α , para $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores do impulso.....	122
Figura 7.1 – Geometria do sistema de tether.....	128
Figura 7.2 – Descrição da região fisicamente possível do tether.....	132
Figura 7.3 – Diagrama das forças envolvidas no sistema.....	135
Figura 7.4 – Diagrama das forças envolvidas no sistema com tração no cabo.....	136
Figura 7.5 – Diagrama das forças envolvidas no sistema com compressão no cabo...	137
Figura 7.6 – Mapa dos valores de τ , para $\mu = 0,01214$, $R = 0,0044$ $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$	137
Figura 7.7 – “Portal de Captura”	138
Figura 7.8 – Descrição dos efeitos do TSSM na trajetória do veículo espacial, no sistema Júpiter - Thebe, para $l = 100$ km e $\delta = 90^\circ$	140
Figura 7.9 – Descrição dos efeitos do TSSM na trajetória do veículo espacial, no sistema Urano - Cordélia, para $l = 100$ km e $\delta = 90^\circ$	142
Figura 7.10 – Descrição dos efeitos do TSSM na trajetória do veículo espacial, no sistema Netuno - Naiad, para $l = 100$ km e $\delta = 90^\circ$	144

Figura 8.1 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.....	147
Figura 8.2 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = \pi/2$ e $\psi_0 = 0$ para o sistema Terra-Lua.....	149
Figura 8.3 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.....	150
Figura 8.4 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = 3\pi/2$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.....	151
Figura 8.5 – Curva S_ψ é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.....	152
Figura 8.6 – Curva S_ψ é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.....	153
Figura 8.7 – Curva S_η é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = \pi/2$, para o sistema Terra-Lua.....	156
Figura 8.8 – Curva S_η é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = 3\pi/2$, para o sistema Terra-Lua.....	157
Figura 8.9 – Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.....	158
Figura 8.10 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.....	159
Figura 8.11 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.....	160
Figura 8.12 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.....	160
Figura 8.13 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Júpiter-Thebe.....	161
Figura 8.14 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Júpiter-Thebe.....	162
Figura 8.15 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Júpiter-Thebe.....	163

Figura 8.16 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Júpiter-Thebe.....	163
Figura 8.17 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Saturno-Daphnis.....	164
Figura 8.18 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Saturno-Daphnis.....	165
Figura 8.19 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Saturno-Daphnis.....	165
Figura 8.20 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Saturno-Daphnis.....	166
Figura 8.21 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Urano-Cordélia.....	167
Figura 8.22- Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Urano-Cordélia.....	167
Figura 8.23 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Urano-Cordélia.....	168
Figura 8.24 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Urano-Cordélia.....	169
Figura 8.25 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Netuno-Naiad.	169
Figura 8.26 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Netuno-Naiad.	170
Figura 8.27 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Netuno-Naiad.	171
Figura 8.28 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Netuno-Naiad.	171
Figura 9.1 – Pontos de equilíbrio para o sistema (3169) Ostro, considerando os asteroides com a forma esférica (a), evoluindo a deformidade dos corpos até a forma irregular real (i), com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$	175
Figura 9.2 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$	176

Figura 9.3 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$...	177
Figura 9.4 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$	177
Figura 9.5 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.	178
Figura 9.6 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 0$	179
Figura 9.7 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi/2$	179
Figura 9.8 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi$	180
Figura 9.9 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 3\pi/2$	180
Figura 9.10 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$, (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.....	181
Figura 9.11 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = 3\pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.....	182
Figura 9.12 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$..	184
Figura 9.13 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$	185
Figura 9.14 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.	185

Figura 9.15 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$	186
Figura 9.16 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 0$	186
Figura 9.17 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi/2$	187
Figura 9.18 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi$	187
Figura 9.19 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 3\pi/2$	188
Figura 9.20 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ e (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.....	189
Figura 9.21 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = 3\pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ e (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.....	190

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 2.1 – Comparação da variação da energia usando o método analítico e numérico para $e = 0.1$	15
Tabela 2.2 – Comparação da variação da energia usando o método analítico e numérico para $e = 0.3$	15
Tabela 2.3 – Comparação da variação da energia usando o método analítico e numérico para $e = 0.5$	16
Tabela 4.1 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, diferentes valores de ψ e δV	34
Tabela 4.2 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$, diferentes valores de ν e δV	40
Tabela 4.3 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $e = 0,3$, $\psi = 270^\circ$, diferentes valores de ν e δV	44
Tabela 4.4 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $\psi = 270^\circ$, $\nu = 0^\circ$ e diferentes valores da excentricidade.....	49
Tabela 4.5 – Variação máxima e mínima da energia com o valor de α correspondente para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\delta V = 2,0$ u.c. e diferentes valores de ψ	52
Tabela 4.6 – Variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente para $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ$	54
Tabela 4.7 - Variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente para $e = 0,1$ e $\psi = 270^\circ$	55
Tabela 4.8 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 0^\circ$	74
Tabela 4.9 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 0^\circ$	74
Tabela 4.10 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ$	76

Tabela 4.11 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ$	77
Tabela 4.12 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$	79
Tabela 4.13 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$	79
Tabela 4.14 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 270^\circ$	81
Tabela 4.15 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 270^\circ$	82
Tabela 4.16 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,5$ u.c.....	84
Tabela 4.17 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,5$ u.c.....	84
Tabela 4.18 – Máxima variação da energia e os dados correspondentes, para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,3$ u.c.....	88
Tabela 4.19 – Mínima variação da energia e os dados correspondentes, para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,3$ u.c.....	89
Tabela 7.1 – Descrição das órbitas.....	139
Tabela 9.1 – Semieixo do corpo primário e secundário (em km) para (3169) Ostro (DESCAMPS et al., 2007a).....	174
Tabela 9.2 – Semieixo do corpo primário e secundário (em km) para (90) Antíope (DESCAMPS et al., 2007b).	183

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1	INTRODUÇÃO 1
1.1.	Revisão Bibliográfica..... 3
2	ESTUDO ANALÍTICO DA MANOBRA DE SWING-BY PURO E PROPULSADO..... 9
2.1.	Equações analíticas da manobra de Swing-By puro 9
2.1.1.	Configurações de máximo ganho e perda de energia..... 12
2.1.2.	Comparação entre os resultados obtidos pelo método analítico e numérico 14
2.2.	Equações analíticas da manobra de Swing-By propulsado..... 16
2.2.1.	Comparação entre os resultados obtidos pelos métodos analítico e numérico 21
3	ESTUDO NUMÉRICO DA MANOBRA DE SWING-BY PROPULSADO..... 25
3.1.	Problema Restrito Elíptico de Três Corpos..... 25
3.2.	Swing-By propulsado..... 26
4	RESULTADOS DA MANOBRA DE SWING-BY PROPULSADO USANDO O PROBLEMA RESTRITO ELÍPTICO DE TRÊS CORPOS..... 31
4.1.	Manobras de Swing-By com impulso aplicado no periapsis da órbita ($\theta = 0^\circ$).... 31
4.1.1.	Efeitos do ângulo de aproximação (ψ)..... 50
4.1.2.	Efeitos da excentricidade (e)..... 53
4.1.3.	Efeitos da anomalia verdadeira de M_2 (v)..... 54
4.1.4.	Capturas e colisões..... 56
4.1.5.	Máxima variação de energia ($\Delta E_{\text{máx}}$)..... 58
4.1.6.	Mínima variação de energia (ΔE_{min})..... 64
4.2.	Manobras de Swing-By com impulso aplicado em diferentes posições da órbita (θ variando)..... 70
5	EFICIÊNCIA DO SWING-BY PROPULSADO 91
6	ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DA MANOBRA DE SWING-BY PROPULSADO NA VARIAÇÃO DA ENERGIA DA MANOBRA 101
6.1.	Método de aproximação linear e diferencial..... 101

6.2.	Variação da energia (ΔE)	102
6.3.	Sensibilidade dos parâmetros referentes à posição inicial da órbita	103
6.4.	Sensibilidade do parâmetro referente à velocidade.....	111
6.5.	Sensibilidade dos parâmetros referentes ao impulso	114
6.6.	Variação total em ΔE devido a erros nos parâmetros	125
7	MANOBRAS DE SWING-BY ASSISTIDAS POR CABO	127
7.1.	Tethers.....	127
7.1.1.	Condições de equilíbrio do tether	130
7.1.2.	Estabilidade do ponto equilíbrio	132
7.1.3.	Tensão no cabo.....	134
7.2.	Ganho de energia obtido pelo TSSM.....	138
8	TETHERS: SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO, FORÇA E ESTABILIDADE PARA CORPOS REGULARES.....	145
8.1.	Sistema Terra-Lua.....	146
8.1.1.	Soluções no plano dos primários	147
8.1.2.	Soluções fora do plano dos primários	152
8.2.	Sistema Júpiter-Adrastea.....	157
8.3.	Sistema Júpiter-Thebe	161
8.4.	Sistema Saturno-Daphnis	164
8.5.	Sistema Urano-Cordélia	166
8.6.	Sistema Netuno-Naiad	169
9	TETHERS: SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO, FORÇA E ESTABILIDADE PARA CORPOS IRREGULARES.....	173
9.1.	(3169) Ostro	174
9.1.1.	Soluções no plano dos primários	174
9.1.2.	Soluções fora do plano dos primários	178
9.2.	(90) Antíope	183
9.2.1.	Soluções no plano dos primários	184
9.2.2.	Soluções fora do plano dos primários	186
10	LIMITAÇÕES PRÁTICAS DO TRABALHO.....	193
11	CONCLUSÕES	195

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	199
APÊNDICE A – COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES EMPÍRICAS	207

1 INTRODUÇÃO

Manobras orbitais (PRADO; RIOS NETO, 1993; PRADO; KUGA, 2001) são extremamente importantes em quase todos os tipos de missões. Diversas linhas de trabalho estão incluídas dentro dessa categoria. Um tipo particular, que será abordado no presente trabalho, se constitui no conjunto conhecido como “Manobras de Swing-By”. Elas são usadas em missões espaciais para enviar sondas a alvos como planetas, luas ou asteroides, com a intenção de fazer uma passagem próxima ou orbitar o corpo. Ela pode também ser usada para provocar a captura ou escape de uma sonda em relação ao corpo celeste.

Neste trabalho o objetivo é estudar manobras derivadas do “Swing-By” que são executadas através do uso de um terceiro corpo com o qual o veículo espacial se aproxima. O primeiro caso é o “Swing-By propulsado” e o segundo o “Swing-By assistido por cabo”, e ambos serão apresentados.

Quando um veículo espacial passa próximo a um corpo celeste e usa a gravidade deste corpo para alterar sua órbita, chamamos de “manobra de Swing-By puro” ou “manobra de Swing-By padrão”. Essa alteração inclui modificação da velocidade, energia e momento angular do veículo espacial. Esse é um tipo de manobra conhecido na literatura, já usado em missões espaciais, cujo principal objetivo é a economia de combustível, considerando que o Swing-By é equivalente à aplicação de um impulso com gasto de combustível zero.

Este trabalho apresenta um estudo sobre a manobra de Swing-By propulsado em sistemas com primários em órbitas elípticas. Além de resultados numéricos para diferentes condições iniciais, foi feito também um estudo analítico da variação da velocidade, energia e momento angular da manobra pura e propulsada, análise da eficiência do Swing-By propulsado quando comparado a um Swing-By puro com impulso aplicado fora da esfera de influência do corpo secundário e, por fim, análise da sensibilidade dos parâmetros envolvidos na manobra de Swing-By propulsado.

A manobra assistida por cabo é conhecida na literatura, inclusive com propostas recentes da criação de "Portais" de escape e captura (PRADO, 2015; 2016) se utilizando de sistemas baseados em cabos fixos em luas ou asteroides. Porém, não existem estudos mais detalhados sobre esse assunto e o presente trabalho se propõe a dar mais um passo

nessa direção, utilizando os pontos de equilíbrio para um cabo espacial. Este é um assunto bastante considerado na literatura com o objetivo de instalações de “pêndulos orbitais” e “elevadores espaciais”, para construir essas estruturas que funcionem como portais para as manobras. Essa situação será estudada com vistas a aplicações em luas planetárias, com a ideia de capturar o veículo espacial em relação ao planeta central, e em asteroides, com o objetivo de enviar veículos espaciais para os planetas do sistema solar exterior ou mesmo para fora do sistema solar.

A proposta neste trabalho para esta manobra segue as ideias de Prado (2015). O objetivo é otimizar a variação da energia e estudar o problema de captura ou escape do veículo espacial. Para ajudar a reduzir os problemas tecnológicos relatados para a fase de ancoragem, a proposta é construir uma estrutura fixa na lua. Neste caso, uma grande rede seria fixada na extremidade do tether, que tem a outra ponta presa na lua. O veículo espacial apenas necessita ser manobrado para alcançar a rede. A manobra funciona da seguinte forma: o veículo espacial se aproxima da lua com uma dada velocidade, então ele é conectado ao tether pela rede, que servirá como dispositivo de ancoragem. Em seguida é feita uma rotação em torno da lua, durante o tempo em que o tether está ativo. Esta rotação pode servir para lançar o veículo espacial em direção ao planeta forçando sua captura, ou como uma catapulta lançando o veículo para um ponto distante do sistema.

Além do sistema Terra-Lua, outros sistemas de planeta e lua foram usados no estudo. São eles: Júpiter-Adrastea, Júpiter-Thebe, Saturno-Daphnis, Urano-Cordélia e Netuno-Naiad. Estes foram escolhidos por que: i) as luas são pequenas, requerendo cabos mais curtos a fim de facilitar o trabalho de engenharia a ser feito; ii) eles têm velocidade orbital alta, que é um dos principais parâmetros que define a quantidade de energia obtida pelo veículo espacial; iii) tem ressonância de spin-órbita 1:1, o que significa que eles mantêm a mesma face para o planeta, evitando os problemas de movimento relativo durante a manobra.

O equilíbrio em torno de um sistema de corpos com formas irregulares, assumidas serem elipsoides, também foi analisado. A irregularidade dos corpos foi descrita pelos coeficientes de expansão dos harmônicos esféricos. O estudo foi aplicado aos sistemas de asteroides binários síncronos (3169) Ostro e (90) Antíope, ambos pertencentes ao cinturão principal de asteroides.

A principal motivação do presente trabalho é colaborar nos estudos para o envio de um veículo espacial a um asteroide, inspirado na missão ASTER, que é uma missão proposta por diversas instituições brasileiras e em fase de estudos. Nessa etapa o veículo deverá se utilizar de uma passagem pela Lua para aumentar sua energia, sendo assim as possibilidades aqui estudadas podem ser consideradas pela missão.

O capítulo 1 apresenta a introdução e uma revisão bibliográfica sobre os assuntos aqui abordados. O capítulo 2 apresenta um estudo analítico da manobra de Swing-By puro e propulsado. O capítulo 3 apresenta o modelo matemático do problema restrito elíptico de três corpos e do Swing-By propulsado. Os resultados para a manobra de Swing-By propulsado para o caso particular de quando o impulso é aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial ($\theta = 0^\circ$) e quando o ponto de aplicação do impulso na trajetória é variado (mudanças no valor de θ) são mostrados no capítulo 4. O capítulo 5 apresenta a eficiência da manobra de Swing-By propulsado e o capítulo 6 à análise da sensibilidade dos parâmetros envolvidos na manobra. Já o capítulo 7 expõe a manobra de Swing-By assistida por cabo, o qual é subdividido em: modelo matemático do tether, condições de equilíbrio, estabilidade, tensão no cabo e ganho de energia obtido na manobra. Os capítulos 8 e 9 apresentam os pontos de equilíbrio, estabilidade e força do tether, para corpos regulares e irregulares, respectivamente. No capítulo 8 o estudo é feito para diferentes sistemas de planeta-lua e no capítulo 9 a abordagem é para sistemas de asteroides binários. As limitações práticas do trabalho são apresentadas no capítulo 10. Por fim, são apresentadas as conclusões no capítulo 11.

1.1. Revisão Bibliográfica

Minovitch (1961) foi o autor de um dos primeiros e mais importantes documentos sobre manobras de Swing-By. Ele mostrou os fatos básicos sobre Swing-Bys quando aplicados a trajetórias de veículos espaciais. Uma descrição deste trabalho desenvolvido por Minovitch está disponível em Dowling et al. (1990, 1991). Em relação às aplicações práticas, Flandro (1966) projetou as missões Voyager, baseado em equações desenvolvidas por Minovitch. Depois disto, manobras de Swing-By nos grandes planetas do Sistema Solar foram usadas para obter energia e ajudar o veículo espacial a alcançar seus objetivos. A missão Galileo também usou a manobra de Swing-By padrão, como mostrado em D'Amario et al. (1981, 1982) e Byrnes e D'Amario (1982) e as missões Messenger e BepiColombo enviadas para Mercúrio (McNUTT et al., 2004;

McNUTT et al., 2006; GRARD, 2006; JEHN et al., 2008). Mais missões são mostradas em NASA (2010) e JHU/APL (1999–2016).

A manobra de Swing-By pode também contribuir para a captura de veículos espaciais pelo corpo celeste, como mostrado em Nock e Upholf (1979), Lynam et al. (2011) e Brasil et al. (2015).

Alguns autores estudaram a combinação da manobra com uma passagem da sonda pela atmosfera de um planeta, conhecida como “manobra de aero-gravidade assistida” (LEWIS; McRONALD, 1992; SIMS et al., 1995; LOHAR et al., 1996; BONFIGLIO et al., 2000; SIMS et al., 2000; LAVAGNA et al., 2005; ARMELLIN et al., 2007). O estudo de manobras considerando uma nuvem de partículas foi feito por Gomes e Prado (2010).

Gomes et al. (2015) estudaram situações em que o encontro próximo é suficientemente perto da superfície da Terra, de tal forma que a sonda atravessa a sua atmosfera, considerando forças de arrasto e de sustentação.

Trabalhos foram desenvolvidos combinando a manobra de Swing padrão com um impulso aplicado no veículo espacial em algum ponto da trajetória, com o objetivo de otimizar a manobra. Chamado de “Swing-By propulsado” o uso desta manobra é ideal quando a energia obtida a partir da manobra de Swing-By puro não é o suficiente para atender as necessidades da missão.

Uma combinação de baixo empuxo e gravidade assistida foram usadas nos trabalhos de McConaghy et al. (2003) e Okutsu et al. (2006). O caso particular do Swing-By propulsado, considerando a órbita dos primários como circulares, foram estudados em Prado (1996), Silva et al. (2013a, 2013b) e Ferreira et al. (2015).

Prado (1996) mostrou como funciona a manobra de Swing-By propulsado com a condição de que o impulso seja aplicado no veículo espacial exatamente no instante de sua passagem pelo periapsis da órbita (ponto mais próximo entre o veículo espacial e o corpo secundário) e em um ponto após a saída do veículo espacial da esfera de influência do corpo celeste. A ideia foi mostrar a eficiência da manobra e o local onde é mais interessante aplicar o impulso.

O trabalho de Silva et al. (2013a) apresenta a variação da energia do veículo espacial na manobra, para o impulso aplicado antes ou depois do periapsis da órbita, na vizinhança do corpo secundário. Silva et al. (2013b) estudaram a aplicação do impulso durante o encontro próximo, analisando apenas o máximo ganho de energia. Ambos os trabalhos contém apenas resultados parciais. O resultado completo e detalhado para o caso com impulso aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial, incluindo análise de máximo ganho e perda de energia, foi apresentado em Ferreira et al. (2015).

O presente trabalho visa o estudo da manobra de Swing-By propulsado realizada em um sistema onde os corpos primários estão em órbitas elípticas em torno de seu centro de massa comum.

Sistemas elípticos são numerosos no mundo real e há vários estudos relatados para esta dinâmica. Broucke (1969) estudou a estabilidade das órbitas periódicas no problema restrito elíptico de três corpos. Um exemplo de sistema altamente excêntrico no Sistema Solar é o planeta anão Haumea, que tem uma lua com excentricidade próxima de 0,25 (SANCHEZ et al., 2016). Uma primeira observação de manobras neste sistema é mostrado em Ferreira et al. (2016). Também relacionado com a presente pesquisa, Prado (1997) estudou a manobra de Swing-By puro (sem impulso) para o caso elíptico. Outra possível aplicação de manobras envolvendo uma passagem próxima e aplicação de impulsos em sistemas altamente elípticos são asteroides do sistema solar. Uma missão interplanetária pode se utilizar desses corpos para enviar um veículo espacial para os planetas exteriores ou mesmo para fora do sistema solar. Essas passagens próximas teriam também a função de observar esses corpos, o que faria das passagens próximas uma necessidade científica da missão, independente dos ganhos de energia que possam ser obtidos.

Sobre a manobra de “Swing-By assistida por cabo”, ou “Tethered Sling Shot Maneuver (TSSM)”, a ideia vem do conceito de tethers espaciais. Um tether espacial consiste em dois ou mais veículos espaciais conectados por um fino cabo que orbitam um corpo celeste (BELETSKY; LEVIN, 1993; TROGER et al., 2010). Os “tethers” mais comuns na literatura são os que permitem a transferência de energia e momento angular entre os objetos (CARTMELL; MCKENZIE, 2008). O tamanho do cabo pode variar de metros a milhares de quilômetros. Há outros estudos para os tethers espaciais, tais como geração

de energia na atmosfera, elevador espacial para transporte de carga e outros (ARTSUTANOV, 1979; PEARSON, 1978; PEARSON, 1979).

O “Swing-By assistido por cabo” ou “Tethered Sling Shot Maneuver (TSSM)” (PENZO; MAYER, 1986; PUIG-SUAI et al., 1995; THOMPSON; STERN, 1995; LANOIX, 1996; LANOIX; MISRA, 2000; PRADO, 2015) é uma manobra onde uma extremidade do cabo é ancorada em um corpo celeste e a outra em um veículo espacial. Esta configuração faz o veículo espacial rotacionar em torno do corpo em um dado ângulo, fazendo modificações mais significativas na trajetória do veículo espacial quando comparado à manobra de Swing-By puro. Esse maior ganho de energia ocorre devido a um ângulo maior de giro proporcionado pelo cabo, quando comparado ao giro dado exclusivamente pela gravidade do corpo.

Penzo e Mayer (1986) aplicaram o conceito a asteroides, com o objetivo de enviar sondas a planetas exteriores. Thompson e Stern (1995) estudaram características de materiais para a estrutura do tether. Lanoix (1996) considerou problemas de massa e tensão do tether. Lanoix e Misra (2000) estudaram manobras para asteroides próximos da Terra (NEAs), considerando os problemas de ancoragem e o projeto do tether. Prado (2015) apresentou um estudo do problema de captura do veículo espacial pelo planeta usando este tipo de manobra em uma das luas do planeta. Ele considerou uma manobra onde a sonda carrega o cabo a bordo e usa um dispositivo de ancoragem para fixar a corda na lua.

A ideia de Prado (2015) tem problemas complexos de engenharia a serem resolvidos. Mesmo sendo um cabo fino, ele requer um espaço grande para ser armazenado na sonda. Além disso, aumenta também a massa que tem que ser lançada a partir da Terra. Este é um problema relevante quando consideramos pequenas sondas, com espaço e massa muito limitados. O segundo problema é a fase de ancoragem da missão. O veículo espacial aproxima-se da lua com a velocidade muito alta, o que disponibiliza um tempo curto para a manobra de ancoragem. Se esta manobra falhar, a missão é perdida.

Um dos problemas abordados nesta pesquisa é encontrar os pontos de equilíbrio, em torno do corpo celeste, para alocar o mecanismo de ancoragem da sonda. Eles são pontos onde a força resultante é zero no topo do tether. O raio do corpo é considerado finito (PEARSON, 2004; PEARSON et al., 2005; LEVIN, 2005), a massa do tether negligenciada e o tamanho do tether obtido a partir das condições de equilíbrio. A

análise foi feita para o tether ancorado em diferentes posições da superfície do corpo. O veículo espacial pode se mover no espaço tridimensional e não influencia o movimento dos corpos primários.

A análise de um ponto de equilíbrio é importante, porque uma partícula posicionada neste ponto com velocidade inicial zero irá permanecer indefinidamente neste ponto. Alguns trabalhos disponíveis na literatura apresentam estudos relacionados ao equilíbrio, como o de Blitzer (1979), que estudou o equilíbrio e a estabilidade de um pêndulo em um veículo espacial em órbita. Ele verificou que o número, a orientação e a estabilidade dos pontos de equilíbrio dependem do comprimento do pêndulo e a localização do ponto de ligação em relação ao centro de gravidade do veículo espacial. Sarychev (1999) apresentou um estudo do equilíbrio de um pêndulo duplo em uma órbita circular. Burov e Troger (2000) apresentaram o equilíbrio relativo de um pêndulo orbital suspenso em um tether. Lavagna et al. (2005) apresentaram soluções analíticas para as configurações de equilíbrio, em relação ao sistema de referência da órbita, para um sistema espacial articulado de três corpos. Guerman (2003) estudou o equilíbrio de uma cadeia de vários corpos no plano da órbita. Em 2006, Guerman sugeriu um estudo analítico de um sistema que consiste em um número arbitrário de veículos espaciais conectados, em uma órbita circular. O objetivo da análise foi determinar todas as configurações de equilíbrio espacial do sistema. Sobre elevadores lunares, Burov et al. (2014a) fez o estudo variando o tamanho do cabo e com leis de controle para esta variação. Burov e Kosenko (2014) estudaram o movimento de libração de um elevador lunar. Há também a análise do equilíbrio relativo na vizinhança dos pontos colineares (BUROV; RICARD, 2005; BUROV et al., 2011) e triangulares (BUROV; KOSENKO, 2007). Burov et al. (2014b) apresentou uma análise das condições de existência das configurações de equilíbrio para um tether ancorado na superfície da Lua.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio e a força que age no tether em cada ponto também serão analisadas. Para o veículo espacial conectar-se ao tether durante a manobra é necessário que a força sobre o tether seja de tração e, preferencialmente, o equilíbrio seja estável.

Os detalhes de engenharia da aplicação do tether não estão no escopo dessa pesquisa. A literatura tem vários trabalhos considerando alguns desses pontos (PENZO; MAYER, 1986; PUIG-SUAI et al., 1995; THOMPSON; STERN, 1995; LANOIX, 1996;

LANOIX; MISRA, 2000). Também não são estudadas aqui as manobras necessárias para colocar o dispositivo de ancoragem do veículo espacial de volta para a sua posição após a sua utilização em uma manobra. Presume-se sempre que o dispositivo está localizado em pontos de equilíbrio quando o veículo espacial chega ao sistema e conecta-se na rede.

2 ESTUDO ANALÍTICO DA MANOBRA DE SWING-BY PURO E PROPULSADO

Será efetuado um estudo analítico da manobra de Swing-By puro e propulsado, desenvolvida em sistemas com primários em órbitas elípticas em torno de um centro de massa comum.

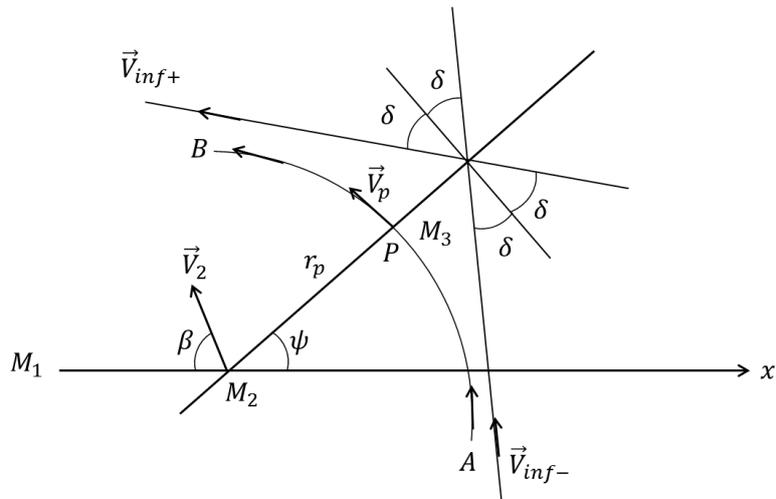
Em 1988, Broucke apresentou um trabalho sobre a manobra de gravidade assistida, ou Swing-By, para sistemas com órbitas circulares. Ele desenvolveu equações analíticas para a variação da velocidade, energia e momento angular do veículo espacial em função de parâmetros que descrevem a órbita inicial do veículo. A manobra é desenvolvida em torno do corpo secundário (M_2) e as variações calculadas em relação ao corpo primário do sistema (M_1).

Partindo da ideia de Broucke, este trabalho visa apresentar as equações analíticas da manobra de Swing-By para sistemas com primários em órbitas elípticas. Sabe-se que a excentricidade da órbita dos primários e a anomalia verdadeira do corpo secundário mudam o comportamento da velocidade de M_2 (\vec{V}_2), que deixa de ser constante. A variação dos parâmetros é dependente desta velocidade, logo é necessário um estudo detalhado da influência destes parâmetros na manobra.

2.1. Equações analíticas da manobra de Swing-By puro

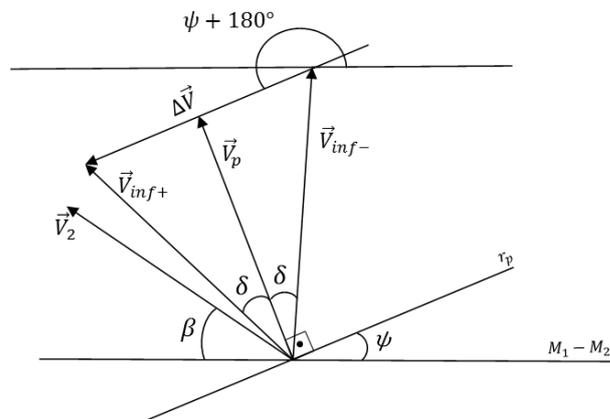
Na manobra de Swing-By puro o veículo espacial usa apenas a gravidade do corpo M_2 para modificar sua trajetória. Na Figura 2.1 da geometria da manobra, M_1 , M_2 e M_3 são: o corpo primário com maior massa, o corpo secundário e o veículo espacial, respectivamente. r_p é o raio do periapsis da órbita do veículo espacial, P o periapsis de sua órbita e \vec{V}_p a velocidade do veículo no periapsis. ψ é o ângulo de aproximação, que define a orientação do Swing-By. \vec{V}_{inf-} e \vec{V}_{inf+} são as velocidades de aproximação e afastamento em relação ao corpo secundário, respectivamente, e 2δ é a deflexão total da manobra. \vec{V}_2 é a velocidade do corpo secundário em torno do centro de massa do sistema, que no caso da órbita elíptica varia de acordo com a posição do corpo na órbita. β é o ângulo entre \vec{V}_2 e a linha que conecta os primários.

Figura 2.1. Geometria da manobra de Swing-By puro (adaptado de Prado, 1996).



A Figura 2.2 apresenta os vetores velocidade envolvidos na manobra.

Figura 2.2. Vetores velocidade envolvidos na manobra de Swing-By (adaptado de Prado, 1996).



Na manobra de Swing-By puro \vec{V}_{inf-} e \vec{V}_{inf+} são iguais em magnitude, mas não em direção. Logo $V_{inf-} = V_{inf+} = V_{inf}$. $\vec{V}_i = \vec{V}_{inf-} + \vec{V}_2$ é o vetor velocidade do veículo espacial antes do encontro próximo e $\vec{V}_o = \vec{V}_{inf+} + \vec{V}_2$ o vetor velocidade do veículo espacial depois do encontro próximo, ambos em relação a M_1 . A variação da velocidade do veículo espacial é dada por $\Delta \vec{V} = \vec{V}_o - \vec{V}_i$ e a variação das componentes da velocidade são dadas por $\Delta \dot{X}$ e $\Delta \dot{Y}$.

$$\vec{V}_{inf-} : \begin{cases} \dot{X} = V_{inf} \cos(90^\circ + \psi - \delta) = -V_{inf} \text{sen}(\psi - \delta) \\ \dot{Y} = V_{inf} \text{sen}(90^\circ + \psi - \delta) = +V_{inf} \cos(\psi - \delta) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\vec{V}_{inf+} : \begin{cases} \dot{X}_+ = V_{inf} \cos(90^\circ + \psi + \delta) = -V_{inf} \text{sen}(\psi + \delta) \\ \dot{Y}_+ = V_{inf} \text{sen}(90^\circ + \psi + \delta) = +V_{inf} \cos(\psi + \delta) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = -2V_{inf} \text{sen} \delta \cos \psi \\ \Delta \dot{Y} = -2V_{inf} \text{sen} \delta \text{sen} \psi \end{cases}$$

Portanto, a variação da velocidade para um sistema com órbitas elípticas é dada por:

$$\Delta V = |\Delta \vec{V}| = 2V_{inf} \text{sen} \delta, \quad (2.3)$$

$$\text{para } \text{sen} \delta = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_p V_{inf}^2}{\mu}\right)}.$$

O próximo passo é calcular a variação da energia, que é dada por $\Delta E = \frac{1}{2}(\vec{V}_o^2 - \vec{V}_i^2)$ ou $\Delta E = \vec{V}_2 \cdot \Delta \vec{V}$ (BROUCKE, 1988; BARGER; OLSSON, 1973).

Temos que \vec{V}_2 é a velocidade orbital de M_2 . Logo:

$$\begin{cases} V_{2x} = -V_2 \cos \beta \\ V_{2y} = V_2 \text{sen} \beta \end{cases} \quad (2.4)$$

O ângulo entre \vec{V}_2 e a linha que conecta os primários é $\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{V_r}{V_2}\right)$. Sendo

$V_r = e \sqrt{\frac{(1-\mu)}{a(1-e^2)}} \text{sen} \nu$ a velocidade radial da lua, $V_2 = \sqrt{(1-\mu) \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a}\right)}$ a velocidade orbital da lua, μ o parâmetro de massa do corpo secundário, a o semieixo maior da órbita dos primários, e a excentricidade da órbita dos primários, ν a anomalia verdadeira de M_2 e $d = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}$ a distância entre os primários.

A variação da energia de um veículo espacial em função dos três parâmetros independentes relacionados ao Swing-By e aos parâmetros relacionados à excentricidade da órbita é dada por ΔE .

$$\Delta E = 2V_{inf}V_2\text{sen}\delta \cos(\psi + \beta) \quad (2.5)$$

As subseções a seguir apresentarão as configurações de máximo ganho e máxima perda de energia, além de um estudo do erro obtido entre o estudo analítico e o numérico para a variação da energia.

A variação do momento angular também será apresentada. Sabe-se que o momento angular é igual ao produto vetorial da posição pela velocidade, logo $\vec{C} = \vec{d} \times \vec{v}$. Sabemos também que o Swing-By muda a órbita do veículo espacial instantaneamente, logo \vec{d} , que é a posição do corpo secundário em relação à M_1 , devido a aproximação “patched conics”, é o mesmo nos dois instantes. Então, se considerarmos $\vec{C}_- = \vec{d} \times \vec{V}_i$ o momento angular calculado antes do Swing-By e $\vec{C}_+ = \vec{d} \times \vec{V}_o$ o momento angular calculado depois do Swing-By, podemos fazer a diferença entre eles e teremos a variação do momento angular $\Delta\vec{C} = \vec{d} \times (\vec{V}_o - \vec{V}_i) = \vec{d} \times \Delta\vec{V}$. Os módulos de \vec{d} e $\Delta\vec{V}$ são conhecidos e o ângulo entre eles também (ver Figura 2.2).

$$\begin{aligned} \Delta C &= |\Delta\vec{C}| = 2dV_{inf}\text{sen}\delta\text{sen}(180^\circ + \psi) = -2dV_{inf}\text{sen}\delta\text{sen}\psi \\ &= -2\frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos v)}V_{inf}\text{sen}\delta\text{sen}\psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.1. Configurações de máximo ganho e perda de energia

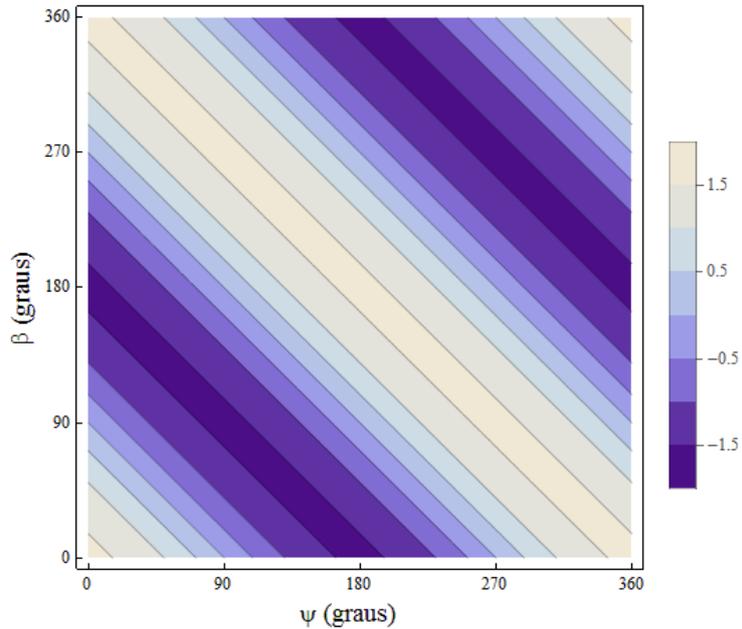
Para sistemas com órbitas circulares, o veículo espacial perde energia quando $0^\circ < \psi < 180^\circ$, com perda máxima em $\psi = 90^\circ$. E ganha energia quando $180^\circ < \psi < 360^\circ$, com ganho máximo em $\psi = 270^\circ$ (BROUCKE, 1988).

Para sistemas em órbitas elípticas, examinando a Equação 2.5, temos que V_{inf} , V_2 e $\text{sen } \delta$ são sempre positivos ($0 < \delta < 90^\circ$), logo a orientação do Swing-By em relação a M_2 , dada por ψ , e a orientação de \vec{V}_2 , dada por β , é que definem o sinal de ΔE . A região de perda de energia ocorre para $90^\circ < \psi + \beta < 270^\circ$, com perda máxima em $\psi + \beta = 180^\circ$. A região de ganho é $-90^\circ < \psi + \beta < 90^\circ$, com ganho máximo em $\psi + \beta = 0^\circ$ ou $\psi + \beta = 360^\circ$.

O efeito do Swing-By puro é nulo quando $\psi + \beta = 90^\circ$ ou $\psi + \beta = 270^\circ$.

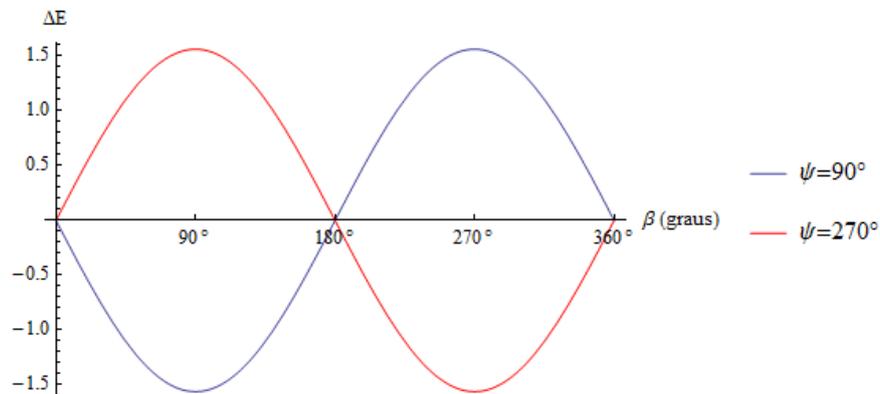
A Figura 2.3 é um gráfico referente a Eq. 2.5 que mapeia a variação da energia para diferentes valores de ψ e β , para um sistema com massa similar à Terra-Lua, $r_p = 1.1$ raios da Lua, $V_{inf} = 1.0$ u.c., excentricidade igual a 0.1 e $\nu = 0$.

Figura 2.3. Variação da energia para $e = 0.1$ e $\nu = 0^\circ$.



A Figura 2.4 é um destaque da variação da energia em função de β , para $\psi = 90^\circ$ e $\psi = 270^\circ$.

Figura 2.4. Variação da energia para $e = 0.1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 90^\circ$ e $\psi = 270^\circ$.



Quando $\psi = 90^\circ$, a máxima perda é em $\beta = 90^\circ$ e o máximo ganho em $\beta = 270^\circ$. Quando $\psi = 270^\circ$, a máxima perda é em $\beta = 270^\circ$ e o máximo ganho em $\beta = 90^\circ$. A variação de energia é nula quando $\beta = 0^\circ$ ou $\beta = 180^\circ$.

Note que a análise da manobra para um sistema elíptico coincide com o caso circular quando a lua está no periapsis ou apoapsis de sua órbita. Isto porque, nestes casos com $\beta = 90^\circ$ e no caso circular, onde β é sempre 90° , o ponto de máximo ganho é em $\psi = 270^\circ$ e máxima perda em $\psi = 90^\circ$, para ambos os casos. O Swing-By tem variação de energia nula para $\psi = 0^\circ$ ou $\psi = 180^\circ$.

2.1.2. Comparação entre os resultados obtidos pelo método analítico e numérico

O objetivo é mostrar a diferença que ocorre nos resultados da variação da energia quando o estudo é feito analiticamente, usando a aproximação “patched-conics” e, numericamente, integrando as equações do movimento do veículo espacial.

A aproximação “patched-conics” é um método de simplificação dos cálculos da trajetória de um veículo espacial em um ambiente com vários corpos envolvidos. A trajetória é analisada por partes. Quando o veículo está dentro da esfera de influência de um corpo, a força gravitacional dos outros corpos é desconsiderada e assim a trajetória é calculada por partes. O estudo numérico integra as equações do movimento do Problema Restrito Elíptico de Três Corpos no tempo, obtendo os dados desejados.

Em 2007, Prado apresentou um trabalho com a comparação dos resultados analíticos e numéricos da manobra de Swing-By no sistema Sol-Júpiter, considerando a órbita dos primários como circulares. Nesse estudo ele mostrou que, para diferentes condições iniciais, o erro entre os dois métodos chega a até $\pm 5\%$. Nos casos onde o erro é positivo, o modelo “patched-conics” superestimou os efeitos do Swing-By. Quando o erro foi negativo, o modelo “patched-conics” subestimou os efeitos do Swing-By. Isto ocorreu para condições com variação de energia próximas ou igual a zero. Para estas situações o método de aproximação “patched-conics” tem uma precisão limitada.

Neste trabalho o erro absoluto entre os modelos será apresentado pela diferença entre a variação da energia usando o método “patched conics” e a variação da energia usando o Problema Restrito Elíptico de Três Corpos.

A Tabela 2.1 apresenta a variação da energia usando o método numérico, analítico e o erro absoluto entre eles para $e = 0.1$.

Tabela 2.1 – Comparação da variação da energia usando o método analítico e numérico para $e = 0.1$.

ν (°)	$\Delta E_{numérico}$ (u.c)	$\Delta E_{analítico}$ (u.c)	Erro Absoluto (u.c)
$\psi = 90^\circ$			
0	-1.6668	-1.5611	0.1057
90	-1.5596	-1.4192	0.1404
180	-1.4452	-1.2773	0.1679
270	-1.5585	-1.4192	0.1393
$\psi = 270^\circ$			
0	1.6668	1.5611	-0.1057
90	1.5585	1.4192	-0.1393
180	1.4452	1.2773	-0.1679
270	1.5596	1.4192	-0.1404

A Tabela 2.2 apresenta a variação da energia usando o método numérico, analítico e o erro absoluto entre eles para $e = 0.3$.

Tabela 2.2 – Comparação da variação da energia usando o método analítico e numérico para $e = 0.3$.

ν (°)	$\Delta E_{numérico}$ (u.c)	$\Delta E_{analítico}$ (u.c)	Erro Absoluto (u.c)
$\psi = 90^\circ$			
0	-1.8932	-1.9243	-0.0311
90	-1.6167	-1.4803	0.1364
180	-1.2542	-1.0362	0.2180
270	-1.5997	-1.4803	0.1194
$\psi = 270^\circ$			
0	1.8932	1.9243	0.0311
90	1.5997	1.4803	-0.1194
180	1.2542	1.0362	-0.2180
270	1.6167	1.4803	-0.1364

A Tabela 2.3 apresenta a variação da energia usando o método numérico, analítico e o erro absoluto entre eles para $e = 0.5$.

Tabela 2.3 – Comparação da variação da energia usando o método analítico e numérico para $e = 0.5$.

ν (°)	$\Delta E_{numérico}$ (u.c)	$\Delta E_{analítico}$ (u.c)	Erro Absoluto (u.c)
$\psi = 90^\circ$			
0	-2.2520	-2.4458	-0.1938
90	-1.7468	-1.6305	0.1163
180	-1.0943	-0.8153	0.2790
270	-1.8438	-1.6305	0.2133
$\psi = 270^\circ$			
0	2.2520	2.4458	0.1938
90	1.8438	1.6305	-0.2133
180	1.0943	0.8153	-0.2790
270	1.7468	1.6305	-0.1163

O erro nos casos apresentados é maior que 5%, pois mostram os resultados máximos obtidos para o caso circular no sistema Sol-Júpiter (PRADO, 2007) e com valores próximos aos resultados obtidos no caso circular do sistema Terra-Lua (PRADO, 1996). Este comportamento é esperado, devido ao parâmetro de massa Terra-Lua e a excentricidade da órbita dos primários. Quanto maior for o parâmetro de massa do sistema, maior também será a diferença entre os resultados obtidos. Já a excentricidade faz a velocidade do corpo secundário (\vec{V}_2) ter um comportamento diferente para cada posição de M_2 na órbita.

Note que para a maioria dos casos com $\psi = 270^\circ$ o erro é negativo, isso significa que o modelo “patched-conics” subestima o ganho de energia perto do ponto de efeito máximo do Swing-By. Para os casos com $\psi = 90^\circ$, o modelo “patched-conics” superestima o ganho de energia do veículo espacial.

2.2. Equações analíticas da manobra de Swing-By propulsado

A manobra de Swing-By propulsado é a combinação da manobra de Swing-By puro com a aplicação de um impulso no momento em que o veículo espacial passa pelo periapsis da órbita em torno de M_2 . O impulso é aplicado no plano dos primários, porém com magnitude e direção variáveis. A descrição da primeira parte da trajetória do veículo espacial, antes da aplicação do impulso, permanece similar a da manobra de Swing-By puro. A segunda parte da trajetória é modificada devido ao impulso. A

magnitude do impulso é dada por δV e a direção do impulso definida por α (ângulo entre o vetor velocidade do veículo espacial no periapsis e o vetor impulso).

Para este caso a manobra também é desenvolvida em um sistema de primários com órbitas elípticas. Logo, a excentricidade da órbita dos primários, a anomalia verdadeira do corpo secundário e a velocidade do corpo secundário, que varia de acordo com sua posição na órbita, serão consideradas.

Sabemos que o vetor velocidade $\Delta \vec{V}$ é dado pela diferença entre \vec{V}_o e \vec{V}_i , e que $\vec{V}_i = \vec{V}_{inf-} + \vec{V}_2$ e $\vec{V}_o = \vec{V}_{inf+} + \vec{V}_2$. Logo $\Delta V = \sqrt{(V_{ox} - V_{ix})^2 + (V_{oy} - V_{iy})^2}$. As componentes de \vec{V}_2 são descritas pela Equação 2.4, \vec{V}_{inf-} é o mesmo descrito para a manobra pura, para $V_{inf} = V_{inf-}$ (Eq. 2.1) e \vec{V}_{inf+} é reescrita para a manobra propulsada.

$$\vec{V}_{inf+} : \begin{cases} \dot{X}_+ = V_{inf+} \cos(90^\circ - \delta + \psi + \Theta) = -V_{inf+} \text{sen}(\psi - \delta + \Theta) \\ \dot{Y}_+ = V_{inf+} \text{sen}(90^\circ - \delta + \psi + \Theta) = +V_{inf+} \cos(\psi - \delta + \Theta) \end{cases} \quad (2.7)$$

Sendo Θ a deflexão total para a manobra (ângulo entre \vec{V}_{inf-} e \vec{V}_{inf+}), temos:

$$V_{ix} = -V_{inf-} \text{sen}(\psi - \delta) - V_2 \cos \beta, \quad (2.8)$$

$$V_{iy} = V_{inf-} \cos(\psi - \delta) + V_2 \text{sen} \beta, \quad (2.9)$$

$$V_{ox} = -V_{inf+} \text{sen}(\psi - \delta + \Theta) - V_2 \cos \beta, \quad (2.10)$$

$$V_{oy} = V_{inf+} \cos(\psi - \delta + \Theta) + V_2 \text{sen} \beta. \quad (2.11)$$

Usando a conservação de energia, calcula-se a velocidade do veículo espacial no periapsis da órbita antes da aplicação do impulso: $V_{p-} = \sqrt{V_{inf-}^2 + \frac{2\mu}{r_p}}$. A velocidade do veículo espacial no periapsis da órbita depois da aplicação do impulso é dada por $V_{p+} = \sqrt{V_{p-}^2 + \delta V^2 + 2V_{p-} \delta V \cos \alpha}$. Logo, a velocidade de afastamento do veículo

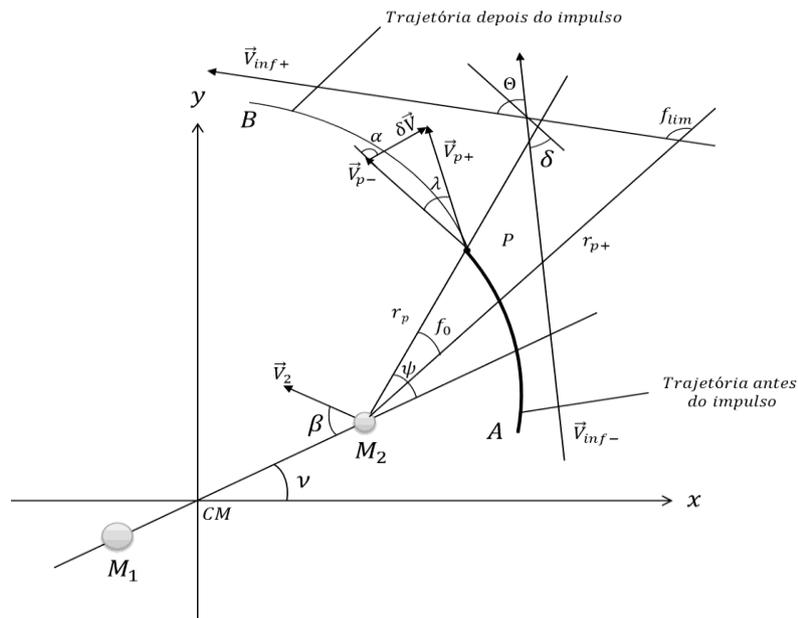
especial depois do impulso é $V_{inf+} = \sqrt{V_{p+}^2 - \frac{2\mu}{r_p}}$. Situações onde $V_{p+}^2 - \frac{2\mu}{r_p} < 0$ significam que o veículo espacial não escapou da órbita em torno do corpo secundário.

O semieixo maior da órbita depois do Swing-By é dado por $a_s = \sqrt{\frac{\mu}{V_{inf+}^2}}$, para valores de V_{inf+} maior que zero, e o ângulo entre V_{p-} e V_{p+} é $\lambda = \cos^{-1}\left(\frac{\delta V^2 - V_{p-}^2 - V_{p+}^2}{-2V_{p-}V_{p+}}\right)$. O momento angular h , o semilatus rectum p e a excentricidade da segunda órbita são calculados. As equações são $h = r_p V_{p+} \sin(90^\circ - \lambda)$, $p = \frac{h^2}{\mu}$ e $e_s = \sqrt{1 + \frac{p}{a_s}}$.

Em seguida calcula-se a anomalia verdadeira $f_0 = \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{e_s}\left(\frac{p}{r_p} - 1\right)\right)$ do veículo espacial, em torno do corpo secundário, na órbita após a aplicação do impulso. Este é o ângulo de deflexão entre r_p e r_{p+} , sendo r_{p+} o raio do periapsis da segunda órbita. A anomalia verdadeira das assíntotas da segunda órbita do veículo espacial, depois do impulso, é dada por $f_{lim} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e_s}\right)$. Logo, $\Theta = \delta - f_0 + f_{lim} - 90^\circ$. Sendo $\delta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1+(r_p V_{inf+}^2/\mu)}\right)$ o ângulo de deflexão da manobra antes do impulso.

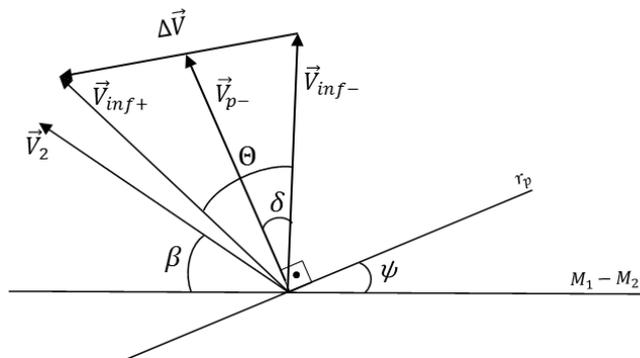
O valor de α define se f_0 é positivo ou negativo. Se $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o veículo espacial é enviado na direção contrária ao corpo secundário, logo já terá passado pelo periapsis da segunda órbita e a anomalia verdadeira f_0 é positiva. Se $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$, o veículo espacial é enviado na direção do corpo secundário e ainda passará pelo periapsis da segunda órbita. Logo, a anomalia verdadeira f_0 é negativa. A Figura 2.5 apresenta a geometria da manobra de Swing-By propulsado.

Figura 2.5. Geometria da manobra de Swing-By propulsado (adaptado de Prado, 1996).



A Figura 2.6 mostra os vetores velocidade envolvidos na manobra.

Figura 2.6. Vetores velocidade envolvidos na manobra de Swing-By propulsado.



Trabalhando com essas informações, a variação da velocidade para uma manobra de Swing-By propulsado com primários em órbitas elípticas pode ser encontrada.

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \sqrt{V_{inf-}^2 + V_{inf+}^2 - 2V_{inf-}V_{inf+} \cos \Theta} \\
&= \delta V^2 + 2V_{inf-}^2 + 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha - 2V_{inf-}(\delta V^2 + V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^{1/2} \text{sen}(\delta + \cos^{-1} (1 / (1 + ((r_p(\delta V^2 + \\
&\quad V_{inf-}^2 + 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha) (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu + \delta V r_p (V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^2) / (\mu^2 (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu))))^{1/2}) \pm \cos^{-1} (((r_p V_{inf-}^2 + \mu + \\
&\quad \delta V r_p \cos \alpha (2(V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} + \delta V \cos \alpha)) / (\mu(1 + ((r_p(\delta V^2 + V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha) (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu + \\
&\quad \delta V r_p (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^2) / (\mu^2 (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu))))^{1/2}))
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A variação da energia é dada por $\Delta E = \frac{1}{2} (\vec{V}_o^2 - \vec{V}_i^2)$ ou $\Delta E = \vec{V}_2 \cdot \Delta \vec{V}$ (BROUCKE, 1988; BARGER; OLSSON, 1973).

$$\begin{aligned}
\Delta E &= 1/2(V_{inf+}^2 - V_{inf-}^2 - 2V_2V_{inf-} \text{sen}(\beta - \delta + \psi) + 2V_2V_{inf+} \text{sen}(\beta - \delta + \Theta + \psi)) \\
&= \frac{\delta V^2}{2} + \delta V(V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha - V_2V_{inf-} \text{sen}(\beta - \delta + \psi) - (\delta V^2 + V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^{1/2} \cos (\beta + \psi + \cos^{-1} (-1 / (1 + ((r_p (\delta V^2 + V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha) (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu + \delta V r_p (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^2) / \\
&\quad (\mu^2 (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu))))^{1/2}) \pm \cos^{-1} (((r_p V_{inf-}^2 + \mu + \delta V r_p \cos \alpha (2 (V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\mu/r_p)^{1/2} + \\
&\quad \delta V \cos \alpha)) / (\mu (1 + ((r_p(\delta V^2 + V_{inf-}^2 + 2\delta V (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha) (r_p V_{inf-}^2 + \\
&\quad 2\mu + \delta V r_p (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^2) / (\mu^2 (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu))))^{1/2}))
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A variação do momento angular é calculada por $\Delta \vec{C} = \vec{d} \times (\vec{V}_o - \vec{V}_i) = \vec{d} \times \Delta \vec{V}$. Sendo d conhecido e as componentes do vetor $\Delta \vec{V}$ dadas pelas equações 2.8 a 2.11. Desenvolvendo o produto vetorial temos que $\Delta C = d(V_{oy} - V_{iy})$.

(2.14)

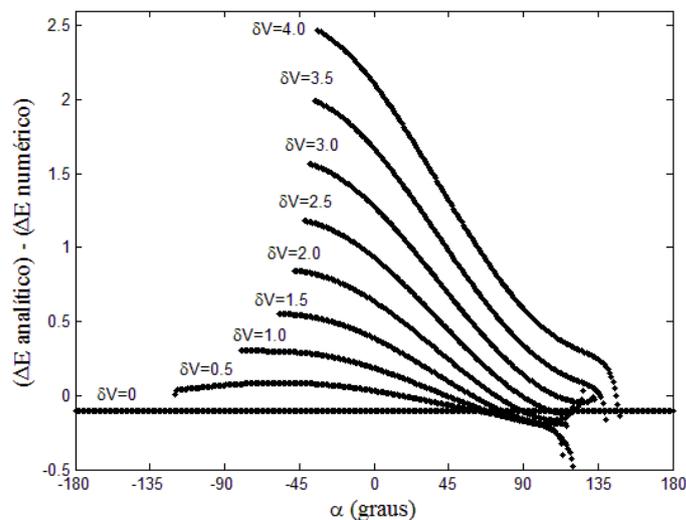
$$\begin{aligned}
\Delta C &= d(-V_{inf-} \cos(\delta - \psi) + V_{inf+} \cos(\delta - \Theta - \psi)) \\
&= -\frac{\alpha(1 - e^2)}{(1 + e \cos v)} (V_{inf-} \cos(\psi - \delta) \\
&\quad - (\delta V^2 + V_{inf-}^2 + 2\delta V(V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^{1/2} \text{sen}(\psi \\
&\quad + \cos^{-1} \left(1 / (1 + ((r_p(\delta V^2 + V_{inf-}^2 + 2\delta V(V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)(r_p V_{inf-}^2 + 2\mu + \delta V r_p (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^2) / (\mu^2 (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu)))^{1/2} \right) \pm \cos^{-1} \left(((r_p V_{inf-}^2 + \mu + \delta V r_p \cos \alpha (2(V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} + \delta V \cos \alpha)) / (\mu(1 + ((r_p(\delta V^2 + V_{inf-}^2 + 2\delta V(V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)(r_p V_{inf-}^2 + 2\mu + \delta V r_p (V_{inf-}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha)^2) / (\mu^2 (r_p V_{inf-}^2 + 2\mu)))^{1/2} \right)
\end{aligned}$$

Nas equações de ΔV , ΔE e ΔC , o termo $\pm \cos^{-1}$ é positivo para $\alpha < 0$ e negativo para $\alpha > 0$. A partir das equações analíticas somente é possível identificar casos em que o veículo espacial não escapou da região de influência do corpo secundário. Não é possível distinguir entre captura e colisão. Essa distinção somente é possível a partir do estudo numérico. No estudo aqui apresentado, ocorreram casos em que o veículo espacial colidiu com o corpo, porém analiticamente foi considerada uma trajetória que escapou, devido às colisões não serem computadas.

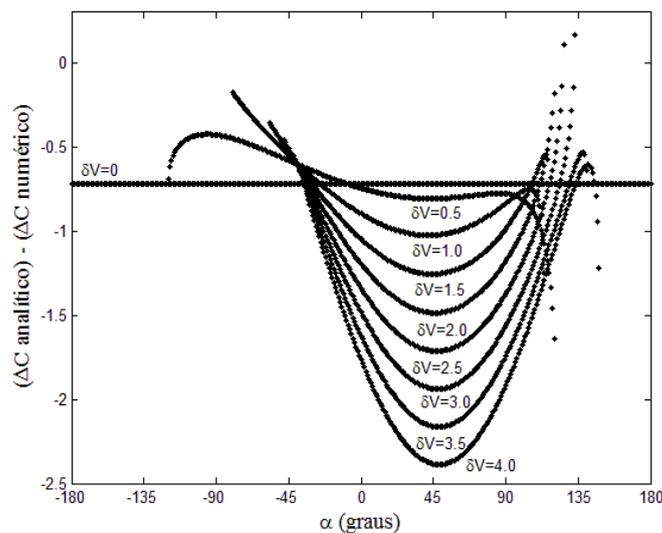
2.2.1. Comparação entre os resultados obtidos pelos métodos analítico e numérico

A comparação entre os modelos analítico e numérico da variação da energia e do momento angular é feita na Figura 2.7, para $e = 0.1$, $v = 0^\circ$, $r_p = 1.1$ raios da Lua, $\psi = 270^\circ$, $V_{inf-} = 1.0$ u.c., magnitude e direção do impulso variando.

Figura 2.7. Comparação entre os modelos analítico e numérico.



(a) Diferença entre as variações da energia do modelo analítico e numérico



(b) Diferença entre as variações do momento angular do modelo analítico e numérico

Para facilitar o entendimento da Fig. 2.7 para o momento angular, a diferença entre os métodos foi dividida por 10^5 .

As magnitudes das diferenças variam de aproximadamente -0.4 a aproximadamente 2.3 para a energia e de aproximadamente -2.4 a aproximadamente -0.3 para o momento angular. Note que o erro é menor para valores de α maiores que 90° , referente à energia.

Em relação ao momento angular, a magnitude do erro é maior para α entre aproximadamente -45° e 135° . Em ambos os casos o aumento da magnitude do impulso aumenta também a magnitude do erro entre os métodos.

A região em branco nas bordas do gráfico, incompleta em relação a α , representa casos em que o veículo espacial foi capturado ou colidiu com o corpo secundário.

Para validar a equação analítica obtida para a variação da velocidade, energia e momento angular, comparamos os resultados para excentricidade igual à zero com os resultados apresentados em Prado (1996) para o sistema Terra-Lua, obtendo resultados semelhantes.

O estudo analítico será usado para calcular a eficiência do Swing-By, comparando o impulso aplicado no periapsis da órbita e o impulso aplicado depois do Swing-By, fora da esfera de influência do corpo secundário. E também usaremos esse estudo para verificar a sensibilidade dos parâmetros envolvidos na manobra.

Usaremos o método numérico para apresentar a variação da energia para trajetórias com diferentes condições iniciais e então apresentar a análise dos resultados. A vantagem deste modelo é o aumento da precisão dos resultados, pois não depende de aproximações, além da identificação de trajetórias resultantes em capturas e colisões.

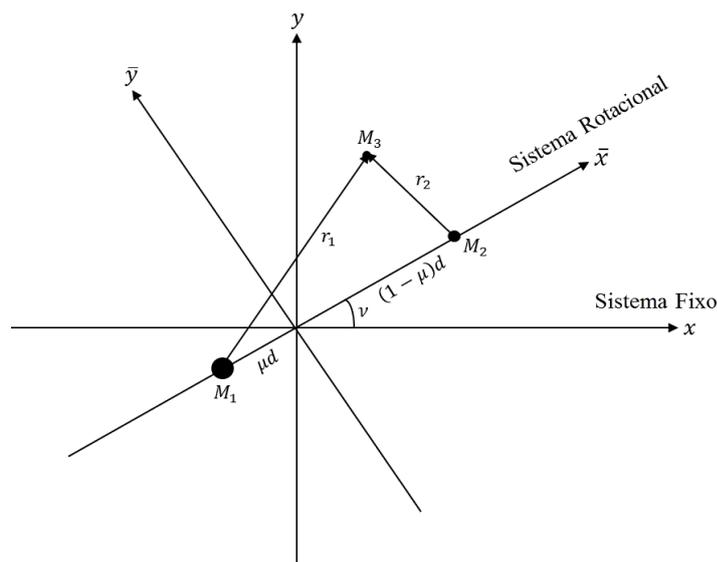
3 ESTUDO NUMÉRICO DA MANOBRA DE SWING-BY PROPULSADO

O estudo numérico integra as equações do movimento do Problema Restrito Elíptico de Três Corpos no tempo, obtendo os dados desejados.

3.1. Problema Restrito Elíptico de Três Corpos

O estudo aqui desenvolvido é baseado no modelo matemático dado pelo “Problema Elíptico Restrito de Três Corpos (*PRETC*)” (SZEBEHELY, 1967). O sistema é formado por dois corpos com massas finitas, chamados primários, e denotados por M_1 e M_2 , sendo M_1 o corpo principal com a maior massa e M_2 o corpo secundário. Há também um terceiro corpo com massa negligenciável, chamado M_3 , que se desloca sob as forças gravitacionais dos dois primários. Neste caso ele representa o veículo espacial se movendo em torno dos dois corpos e tem seu movimento limitado ao plano dos primários. Este veículo espacial faz um encontro próximo com M_2 , cujo estudo é o principal objetivo do presente trabalho. Os dois primários M_1 e M_2 movem-se em torno de um centro de massa comum em órbitas elípticas. O sistema canônico de unidades é usado e abreviado por “u.c.” Ele tem as seguintes propriedades: a massa de M_2 é dada por $\mu = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$ (sendo m_1 e m_2 as massas reais de M_1 e M_2); a massa de M_1 é $(1 - \mu)$, tal que a massa total do sistema é unitária; a constante gravitacional também é unitária; a unidade de distância é o semieixo maior da órbita dos primários; e a unidade de tempo é definida tal que o período orbital dos primários seja 2π .

Figura 3.1 – Sistema de coordenadas para o Problema Restrito Elíptico de Três Corpos.



As equações do movimento no sistema fixo de referência com origem no centro de massa (SZEBEHELY, 1967) são dadas por:

$$\ddot{x} = -\frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-x_2)}{r_2^3}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{(1-\mu)(y-y_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(y-y_2)}{r_2^3}, \quad (3.2)$$

onde r_1 é a distância entre M_1 e M_3 ; r_2 a distância entre M_2 e M_3 ; $\vec{r} = (x, y)$ o vetor posição de M_3 medida a partir da origem do sistema fixo, ν a anomalia verdadeira de M_2 em relação à M_1 ; x_1, y_1, x_2 e y_2 são as posições de M_1 e M_2 , respectivamente.

$$\begin{cases} x_1 = -\mu d \cos \nu \\ y_1 = -\mu d \operatorname{sen} \nu \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x_2 = (1-\mu) d \cos \nu \\ y_2 = (1-\mu) d \operatorname{sen} \nu \end{cases} \quad (3.4)$$

A distância entre os primários é definida por d , sendo $a = 1$ o semieixo maior da órbita dos primários.

$$d = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \quad (3.5)$$

Um algoritmo foi desenvolvido para integrar numericamente as equações do movimento, com diferentes condições iniciais, para encontrar as trajetórias de interesse.

3.2. Swing-By propulsado

O “Swing-By propulsado” é uma técnica em que o veículo espacial se aproxima de um corpo celeste e usa a gravidade deste corpo para modificar sua trajetória, combinado com um impulso efetuado por um sistema de propulsão. Esta é uma manobra mais complexa comparada com o “Swing-By padrão”, onde apenas o campo de gravidade do corpo celeste é usado para modificar a trajetória.

A manobra será feita em sistemas onde os dois corpos primários estão em órbitas elípticas em torno de seu centro de massa comum. O movimento do veículo espacial é limitado ao plano dos primários.

O algoritmo desenvolvido integra as equações do movimento do *PRETC* para obter a variação da energia do veículo espacial, calculada pela diferença da energia antes e depois da manobra propulsada. A magnitude e direção do impulso e o ponto da órbita onde será aplicado podem ser variados, podendo-se buscar os melhores resultados de acordo com o objetivo da manobra.

A Figura 3.2 mostra uma descrição da manobra. Os eixos x e y definem o sistema fixo de referência com origem no centro de massa do sistema (CM). \vec{V}_2 é o vetor velocidade de M_2 em relação à M_1 ; ν é a anomalia verdadeira do corpo secundário, que descreve a posição de M_2 em relação à M_1 ; θ define o ponto de aplicação do impulso (ponto Q) na órbita do veículo espacial, e ϵ é o ângulo entre \vec{r}_p^i e \vec{r} ; \vec{r}_p^i é o vetor posição com origem no centro de massa do sistema fixo (CM) ao periapsis (ponto P); \vec{r} é o vetor posição do veículo espacial, com componentes x e y , obtido por integração numérica; ψ é o ângulo de aproximação, \vec{r}_p o vetor posição do periapsis, ambos especificam a posição inicial do veículo espacial, definindo sua órbita; $\delta\vec{V}$ é o impulso aplicado; \vec{V}_- é a velocidade do veículo espacial no ponto Q , antes da aplicação do impulso, e \vec{V}_+ a velocidade do veículo espacial no ponto Q , depois da aplicação do impulso. A linha cinza contínua representa a trajetória do veículo espacial antes do impulso, que finaliza no ponto Q , onde o impulso é aplicado. A linha cinza tracejada é uma continuação imaginária desta trajetória, que seria a trajetória do veículo espacial se não houvesse o impulso. No ponto Q inicia-se a segunda parte da trajetória do veículo espacial, representada pela linha preta contínua, que mostra a trajetória depois do impulso. A linha preta tracejada é uma representação imaginária da trajetória do veículo espacial depois do impulso, antes do ponto Q . O ângulo α descreve a direção do impulso, medido em relação à direção do movimento do veículo espacial (\vec{V}_-). Se $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$ o impulso tem uma componente na direção do corpo secundário, fazendo o veículo espacial se aproximar dele. Se $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o impulso tem uma componente na direção oposta de M_2 , fazendo o veículo espacial se afastar. Para $\alpha < -90^\circ$ ou $\alpha > 90^\circ$ há uma componente do impulso que é oposta a direção do movimento do veículo espacial, causando uma desaceleração. No intervalo $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ o veículo espacial é acelerado pela manobra impulsiva, porque o impulso é aplicado na direção do movimento do veículo.

Se $\theta = 0^\circ$, o ponto Q coincide com o ponto P . Isso significa que o impulso será aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial. O passo a passo da manobra é apresentado a seguir:

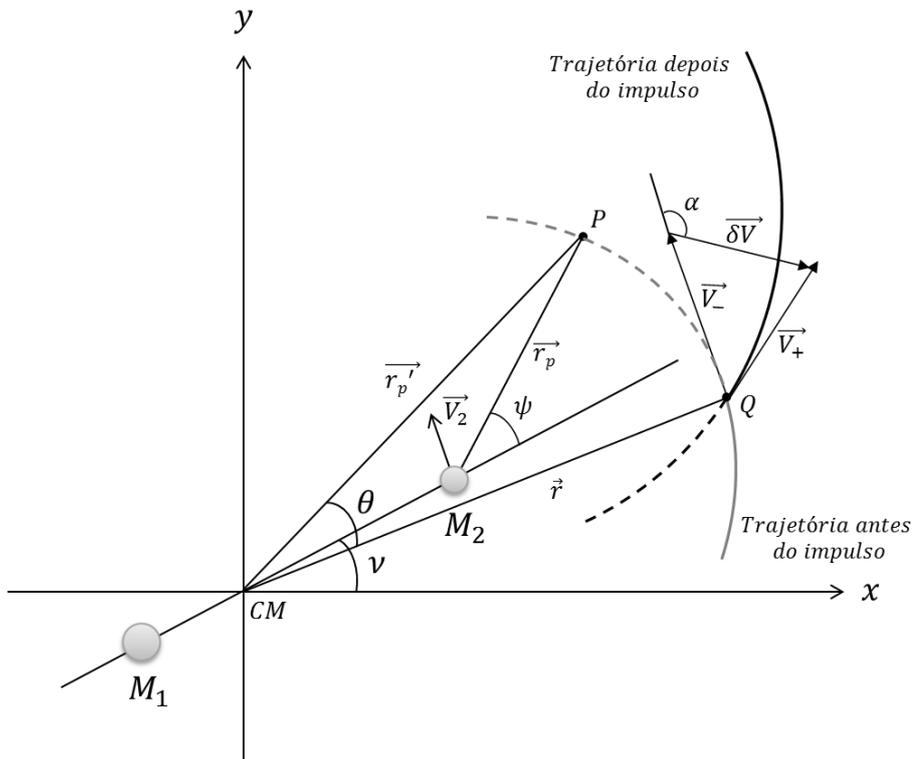
- a) As condições iniciais são os parâmetros que definem o periapsis da órbita do veículo espacial (ponto P , Fig. 3.2) em torno de M_2 (x_p, y_p, \dot{x}_p e \dot{y}_p). São eles: V_{inf-} , a velocidade de aproximação do veículo espacial com respeito à M_2 ; \vec{r}_p , o vetor posição do periapsis com origem no centro de M_2 e r_p , a distância do periapsis ao centro de M_2 ; ψ é o ângulo de aproximação, o ângulo formado entre a linha dos primários e o vetor \vec{r}_p ; e , a excentricidade orbital dos primários; e ν a anomalia verdadeira do corpo secundário em relação à M_1 no momento em que a manobra é desenvolvida;

$$(2.6) \quad \begin{cases} x_p = \frac{(1-\mu)(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \cos \nu + r_p \cos(\psi + \nu) \\ y_p = \frac{(1-\mu)(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \sin \nu + r_p \sin(\psi + \nu) \\ \dot{x}_p = \frac{(1-\mu)e \sin \nu}{\sqrt{1-e^2}} \cos \nu - \frac{(1-\mu)(1+e \cos \nu)}{\sqrt{1-e^2}} \sin \nu - \sqrt{V_{inf-}^2 + \frac{2\mu}{r_p}} \sin(\psi + \nu) \\ \dot{y}_p = \frac{(1-\mu)e \sin \nu}{\sqrt{1-e^2}} \sin \nu + \frac{(1-\mu)(1+e \cos \nu)}{\sqrt{1-e^2}} \cos \nu + \sqrt{V_{inf-}^2 + \frac{2\mu}{r_p}} \cos(\psi + \nu) \end{cases}$$

- b) A partir do periapsis efetua-se uma integração reversa ou direta, de acordo com o valor de θ , para definir o ponto da órbita onde o impulso será aplicado (ponto Q , Fig. 3.2). θ é medido a partir do vetor posição do periapsis com origem no sistema fixo (\vec{r}_p') até o vetor posição do ponto Q com origem no sistema fixo (\vec{r}). Foi adotado para o deslocamento de θ o sentido anti-horário como positivo e o sentido horário como negativo, e seu valor é especificado antes da integração;
- c) Definido o ponto Q , a partir dele a trajetória é integrada reversamente no tempo até o veículo espacial alcançar a distância onde é assumido que o movimento veículo espacial- M_1 é kepleriano. Este valor está no intervalo 0,3 a 0,5 u.c. Um teste é feito para escolher o melhor valor. Neste ponto são medidos todos os dados importantes do veículo espacial antes da manobra: posição, velocidade, energia, momento angular, etc.;

- d) Depois as condições iniciais do veículo espacial são ajustadas no ponto Q , e neste momento o impulso é aplicado, usando as variáveis: δV , a magnitude do impulso; α , ângulo entre \vec{V}_- e $\delta\vec{V}$, que define a direção do impulso. A trajetória é integrada para frente no tempo, até o veículo espacial alcançar novamente a distância onde é assumido que o movimento veículo espacial- M_1 é kepleriano, da mesma forma que foi feita no passo (c). Então são medidos todos os mesmos parâmetros do veículo espacial que foram avaliados antes da manobra;
- e) Baseados nos parâmetros de antes e depois da manobra, as variações podem ser obtidas subtraindo diretamente as quantidades envolvidas. Então é possível mapear as variações das grandezas desejadas como função de todas as variáveis, buscando as melhores condições para aplicar o impulso para uma dada geometria e magnitude do impulso. A Figura 3.2 mostra a geometria da manobra.

Figura 3.2 – Geometria da manobra de Swing-By propulsado.



4 RESULTADOS DA MANOBRA DE SWING-BY PROPULSADO USANDO O PROBLEMA RESTRITO ELÍPTICO DE TRÊS CORPOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações feitas para um sistema com parâmetro de massa $\mu = 0,01214$, tamanho e distância similares ao sistema Terra-Lua, mas com diferentes valores da excentricidade dos primários, tais como $e = 0,1$, $e = 0,3$ e $e = 0,5$. O objetivo é medir o efeito desse parâmetro nas manobras em um sistema equivalente ao Terra-Lua.

Foi adotado um raio de periapsis $r_p = 1,1$ raio do corpo secundário, para obter grandes efeitos por parte da gravidade na manobra. Para o ângulo de aproximação ψ , vários valores foram usados para cobrir diferentes possibilidades, a partir de 0° a 360° , em passos de 45° . A anomalia verdadeira (ν) de M_2 em relação à M_1 recebeu os valores $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e 270° , cobrindo as regiões de máximo ganho, máxima perda e variação zero da energia em relação à manobra usando apenas a gravidade. A magnitude do impulso δV varia de 0,1 u.c a 4,0 u.c.

O ponto de aplicação do impulso na manobra pode variar de acordo com o ângulo θ . O caso particular $\theta = 0^\circ$, quando o impulso é aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial em torno do corpo secundário e no plano, será apresentado na Seção 4.1. A Seção 4.2 apresentará os resultados, no plano, para o impulso aplicado em diferentes pontos da trajetória, com θ variando de -180° a 180° com passo de $1,0^\circ$.

Para entender os resultados que serão apresentados é necessário considerar que o impulso muda a trajetória em todos os aspectos. Isso inclui a modificação do ângulo de aproximação (ψ). Os valores de ψ mostrados nos resultados são relativos às manobras efetuadas apenas com gravidade. Os valores reais dependem da aplicação do impulso.

4.1. Manobras de Swing-By com impulso aplicado no periapsis da órbita ($\theta = 0^\circ$)

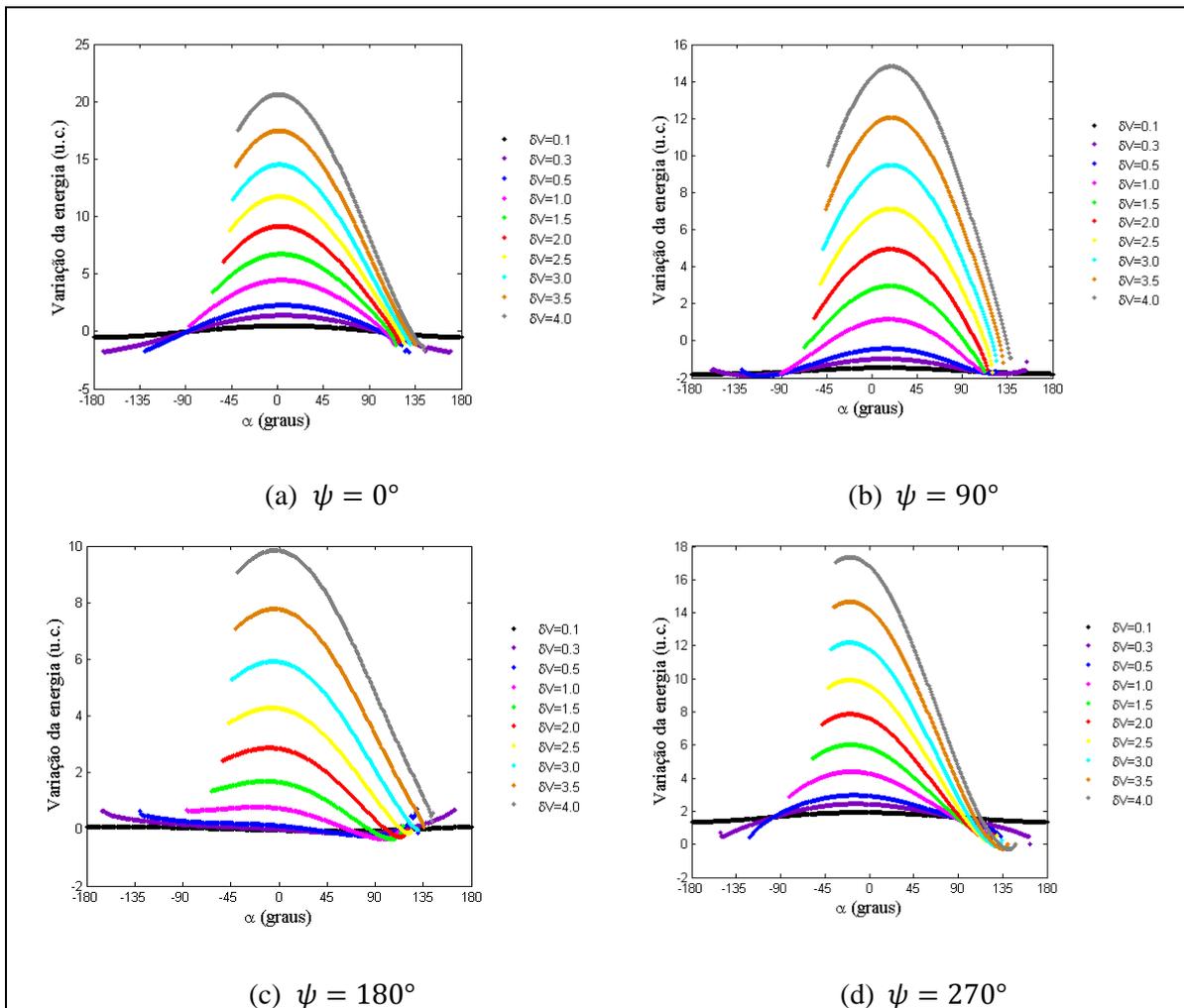
Nesta seção o impulso será aplicado sempre no periapsis da órbita e o veículo espacial se movimentará somente no plano dos primários. As combinações dos parâmetros acima apresentados resultam em um total de 960 diferentes condições iniciais, que foram integradas numericamente com a direção do impulso α variando de -180° a 180° , com passo de $1,0^\circ$, resultando em 346.560 trajetórias com diferentes variações de energia. Alguns desses resultados serão apresentados nesta seção para análise.

Mapas serão plotados mostrando a variação da energia como uma função do ângulo que define a direção do impulso (ΔE vs α), para as diferentes condições iniciais. Quando a variação da energia é negativa significa que o veículo perdeu energia na segunda órbita (depois da manobra) em relação à primeira órbita (antes da manobra). Caso contrário, o veículo espacial ganhou energia.

Para cada conjunto de figuras da variação da energia serão apresentados seus respectivos mapas de capturas e colisões. Na subseção 4.1.4 este assunto será tratado mais detalhadamente. Os pontos na cor vermelha representam casos de captura e os pontos na cor preta representam colisão do veículo espacial com a Lua. No eixo horizontal temos a magnitude do impulso e no eixo vertical o ângulo que define a direção do impulso (α).

A Figura 4.1 apresenta a variação da energia, em unidades canônicas (u.c.), para excentricidade $e = 0,1$, anomalia verdadeira $\nu = 0^\circ$ e diferentes valores de ψ .

Figura 4.1 – Variação da energia em função da direção do impulso para $e = 0,1$ e $v = 0^\circ$.



A Figura 4.1 apresenta a variação da energia para os casos com excentricidade igual a 0,1, anomalia verdadeira igual a 0° (quando ocorre o encontro entre o veículo espacial e M_2), diferentes valores de ψ e δV . Há uma curva para cada valor do impulso (representada por diferentes cores) e uma figura para cada ângulo de aproximação (Figura 4.1(a) até 4.1(d)). A Tabela 4.1 apresenta os valores numéricos da variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente, para as condições da Figura 4.1.

Tabela 4.1 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, diferentes valores de ψ e δV .

δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{i}n}$ (u.c.)	α ($^\circ$)
$\psi = 0^\circ$				
0,1	0,4841	6,0	-0,5156	-175,0
0,3	1,3987	6,0	-1,7839	169,0
0,5	2,2784	6,0	-1,788	129,0
1,0	4,4620	4,0	-1,0864	114,0
1,5	6,7340	3,0	-1,1553	116,0
2,0	9,1525	3,0	-0,9204	119,0
2,5	11,7415	2,0	-0,9866	124,0
3,0	14,5125	2,0	-1,1014	130,0
3,5	17,4721	1,0	-1,1483	136,0
4,0	20,6250	1,0	-1,6185	144,0
$\psi = 90^\circ$				
0,1	-1,4616	13,0	-1,7944	-165,0
0,3	-0,9778	14,0	-1,8714	-121,0
0,5	-0,4206	15,0	-1,9092	-110,0
1,0	1,1637	17,0	-1,7585	-91,0
1,5	2,9572	18,0	-1,6423	112,0
2,0	4,9422	18,0	-1,5504	115,0
2,5	7,1177	19,0	-1,7178	120,0
3,0	9,4857	19,0	-1,0605	124,0
3,5	12,0479	19,0	-1,1794	131,0
4,0	14,8058	19,0	-0,9442	138,0
$\psi = 180^\circ$				
0,1	0,0941	-154,0	-0,0661	58,0
0,3	0,6733	165,0	-0,1627	75,0
0,5	0,7087	129,0	-0,2343	84,0
1,0	0,7816	-21,0	-0,3365	97,0
1,5	1,6928	-13,0	-0,345	106,0
2,0	2,8683	-9,0	-0,2738	113,0
2,5	4,2817	-7,0	-0,1433	121,0
3,0	5,9199	-5,0	-0,0161	130,0
3,5	7,7757	-4,0	0,0848	136,0
4,0	9,8448	-4,0	0,2753	143,0

(continua)

Tabela 4.1 – Conclusão.

$\psi = 270^\circ$				
0,1	1,9248	-9,0	1,3561	179,0
0,3	2,4384	-13,0	0,0168	163,0
0,5	2,9611	-16,0	0,4358	-121,0
1,0	4,3881	-18,0	0,5633	121,0
1,5	6,0203	-19,0	0,5248	121,0
2,0	7,8651	-19,0	0,3344	121,0
2,5	9,9222	-20,0	0,091	124,0
3,0	12,1901	-20,0	-0,1245	129,0
3,5	14,6673	-20,0	-0,2686	135,0
4,0	17,3524	-20,0	-0,2986	141,0

Quando M_2 está no periapsis da órbita ($\nu = 0^\circ$), ocorre à máxima variação de energia para a manobra assistida pela gravidade pura (sem impulso), se todos os outros parâmetros são fixados (PRADO, 1997). Neste ponto o corpo M_2 está alinhado à direita de M_1 e esta é a menor distância entre esses corpos.

A primeira característica visível nos resultados apresentados na Figura 4.1 é o aumento da variação da energia proporcional ao aumento da magnitude do impulso. Embora este resultado seja esperado, os resultados mostrados aqui podem quantificar esses aumentos, que ajudam a determinar a melhor magnitude que deve ser usada em uma manobra real.

Observando a Tabela 4.1, temos que para $\psi = 0^\circ$, onde a variação da energia é nula por parte da gravidade, a direção ótima (de máxima variação de energia) para aplicar o impulso é próxima de zero (direção do movimento do veículo espacial). Isso é consistente com a ideia de que, não havendo contribuição a partir da parte gravitacional da manobra, é importante obter a maior variação de energia possível a partir do impulso. Esta situação ocorre quando o impulso é aplicado na direção do movimento do veículo espacial. A direção do impulso é próxima de zero e positiva para enviar o veículo para longe de M_2 , e isso faz o ângulo de aproximação final estar na região de ganho de energia ($180^\circ < \psi < 360^\circ$). A direção do impulso é reduzida para mais próxima de zero quando a magnitude do impulso aumenta, porque nesta situação a parte propulsada da manobra tem maior participação, comparada com a parte gravitacional.

Para o caso de mínima variação de energia, α está próximo de 180° para $\delta V > 0,1$ u.c., tendo assim uma componente oposta ao movimento para desacelerar o veículo espacial e outra componente na direção oposta a M_2 , afastando o veículo do corpo. Para $\delta V = 0,1$ u.c., o ângulo que define a direção do impulso é -175° . O impulso é retrógrado e há uma componente na direção do corpo secundário. Essa diferença em relação à geometria do impulso com magnitudes maiores deve-se a complexidade da dinâmica da manobra. A combinação das várias variáveis envolvidas na manobra e o impulso modificam os parâmetros, como o raio do periapsis e o ângulo de aproximação para regiões que, neste caso, são propícias a perda de energia.

Para o caso oposto, quando $\psi = 180^\circ$, também não há contribuição da parte gravitacional da manobra para a variação da energia. Agora o impulso retrógrado aumentará o ângulo de giro do veículo espacial e deslocará o ângulo de aproximação para a região de ganho de energia ($180^\circ < \psi < 360^\circ$). Isto é visível para impulsos até 0,5 u.c. A partir de 0,5 u.c. o impulso é aplicado na direção do movimento do veículo espacial para obter mais energia, a partir da parte propulsada da manobra, e α é negativo, fazendo o veículo aproximar-se de M_2 e se beneficiar da parte gravitacional da manobra, que agora proporciona um aumento de energia.

Para obter a mínima variação de energia, para impulsos até 0,5 u.c., α está próximo de 90° , enviando o veículo espacial para longe de M_2 e deslocando o ângulo de aproximação para a região de perda de energia ($0^\circ < \psi < 180^\circ$). Para impulso acima de 0,5 u.c. o impulso é retrógrado e positivo, fazendo o veículo espacial desacelerar perdendo energia e se afastar do corpo secundário.

Para o caso $\psi = 90^\circ$, onde há a maior perda de energia por parte da gravidade do corpo, a direção ótima para obter a máxima variação de energia está próxima de 20° , tendo assim uma componente da velocidade do veículo espacial oposta à direção de M_2 . Este comportamento se justifica pelo princípio que, havendo perda da energia por parte da gravidade, é melhor mover a sonda para o mais longe possível do corpo celeste, com o objetivo de minimizar essa perda de energia. O impulso também modifica o ângulo de aproximação, removendo ele do ponto de máxima perda de energia ($\psi = 90^\circ$). Por outro lado, para obter a maior variação de energia possível por parte do impulso, a direção de aplicação deve estar o mais próximo possível da direção do movimento do veículo espacial. Firmando o compromisso entre esses dois efeitos, as soluções ótimas

têm valores positivos e próximos de 20° para a direção do impulso. A magnitude de α aumenta conforme aumenta a magnitude do impulso, representando o fato de que um aumento na magnitude permite modificações mais fortes na órbita, fazendo alterações maiores no ângulo de aproximação. Para o caso $\psi = 90^\circ$, que representa a máxima perda de energia por parte da gravidade, modificações na geometria causam efeitos mais fortes do que no caso $\psi = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$, por exemplo, que estão em regiões onde o efeito da gravidade é nulo.

Para obter a mínima variação de energia, a configuração $\psi = 90^\circ$ é a mais conveniente. Em todos os casos o impulso é retrógrado. Combinando a máxima perda de energia por parte da gravidade do corpo com a desaceleração causada pelo impulso aplicado contrário à direção do movimento do veículo espacial, obtendo assim a mínima variação de energia.

A geometria com $\psi = 270^\circ$ representa o caso com máximo ganho de energia a partir da gravidade do corpo celeste. O ideal é aproximar o veículo espacial o máximo possível do corpo para intensificar este ganho. Por isso α é negativo, enviando o veículo para a direção de M_2 , maximizando este ganho por parte da gravidade. A magnitude da direção do impulso aumenta proporcional ao aumento da magnitude do impulso.

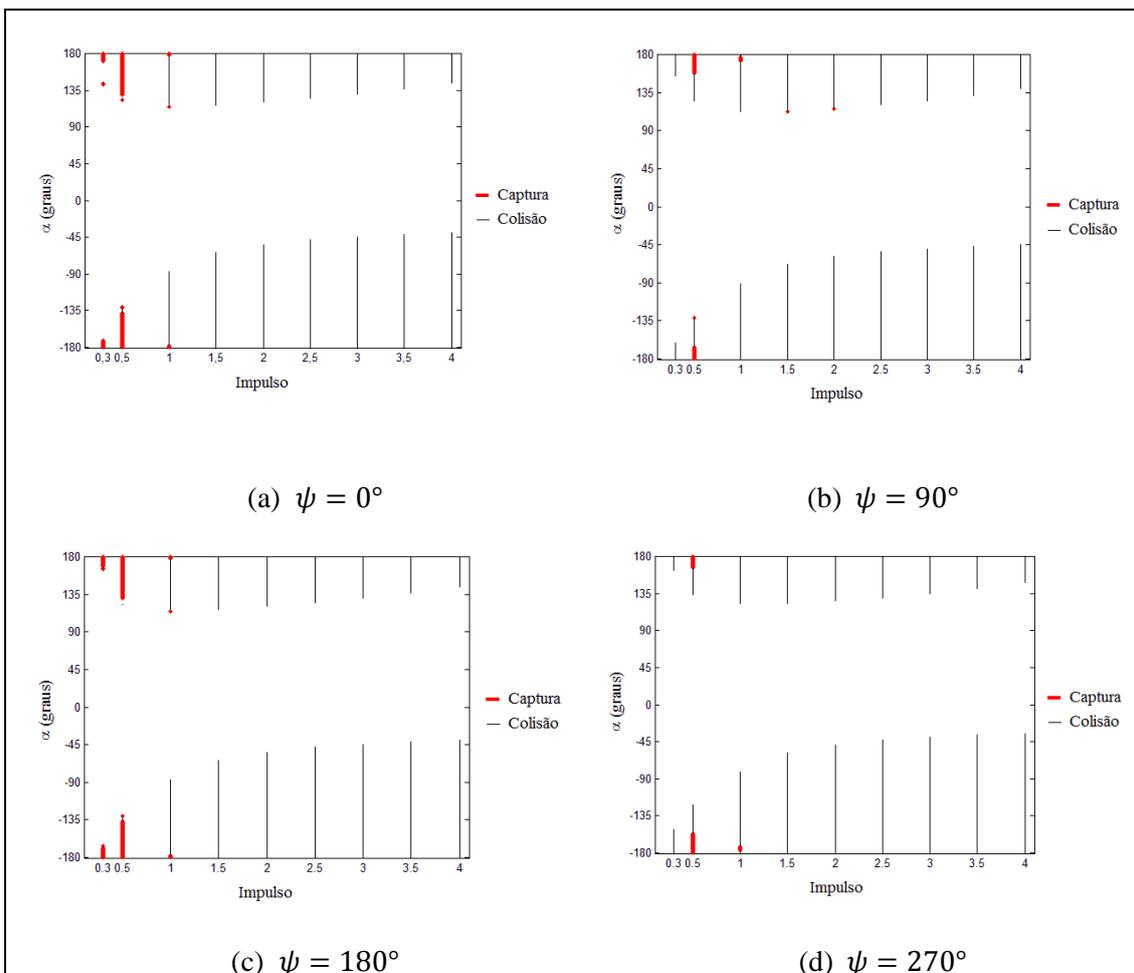
Quando o objetivo é a mínima variação de energia, o impulso é retrógrado e na maioria dos casos positivo, desacelerando a sonda e afastando-a do corpo celeste, para minimizar o efeito da gravidade, que neste caso trabalha contra o objetivo da manobra.

Nota-se, em geral, que para valores pequenos da magnitude do impulso, o ganho de energia por parte da gravidade da manobra domina o cenário. Os máximos e mínimos ganhos de energia estão localizados na mesma região prevista pela manobra padrão (pura), $\psi = 270^\circ$ e $\psi = 90^\circ$, respectivamente. Nos casos de ganho nulo de energia pela parte gravitacional da manobra ($\psi = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$), o impulso é aplicado de tal forma que o ângulo de aproximação se desloca para a região de ganho de energia (quando o objetivo é a variação máxima de energia). Outra observação a ser feita é relacionada com o sinal da variação da energia. É possível encontrar regiões de variação positiva na geometria de máxima perda de energia ($\psi = 90^\circ$). Nas situações de variação neutra de energia ($\psi = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$) a manobra propulsada pode sempre obter ganhos de energia, como esperado. O caso $\psi = 0^\circ$ gera uma maior variação comparada com o

caso $\psi = 180^\circ$. Para mudar o ângulo de aproximação para a região de ganho de energia, o impulso tem que ser aplicado na direção do movimento do veículo espacial, no caso $\psi = 0^\circ$, obtendo efeitos maiores a partir da parte impulsionada da manobra. Para o caso oposto, quando $\psi = 180^\circ$, o impulso é aplicado na direção oposta do movimento do veículo espacial, obtendo mais energia pela parte gravitacional da manobra, mas menos energia a partir da parte propulsada.

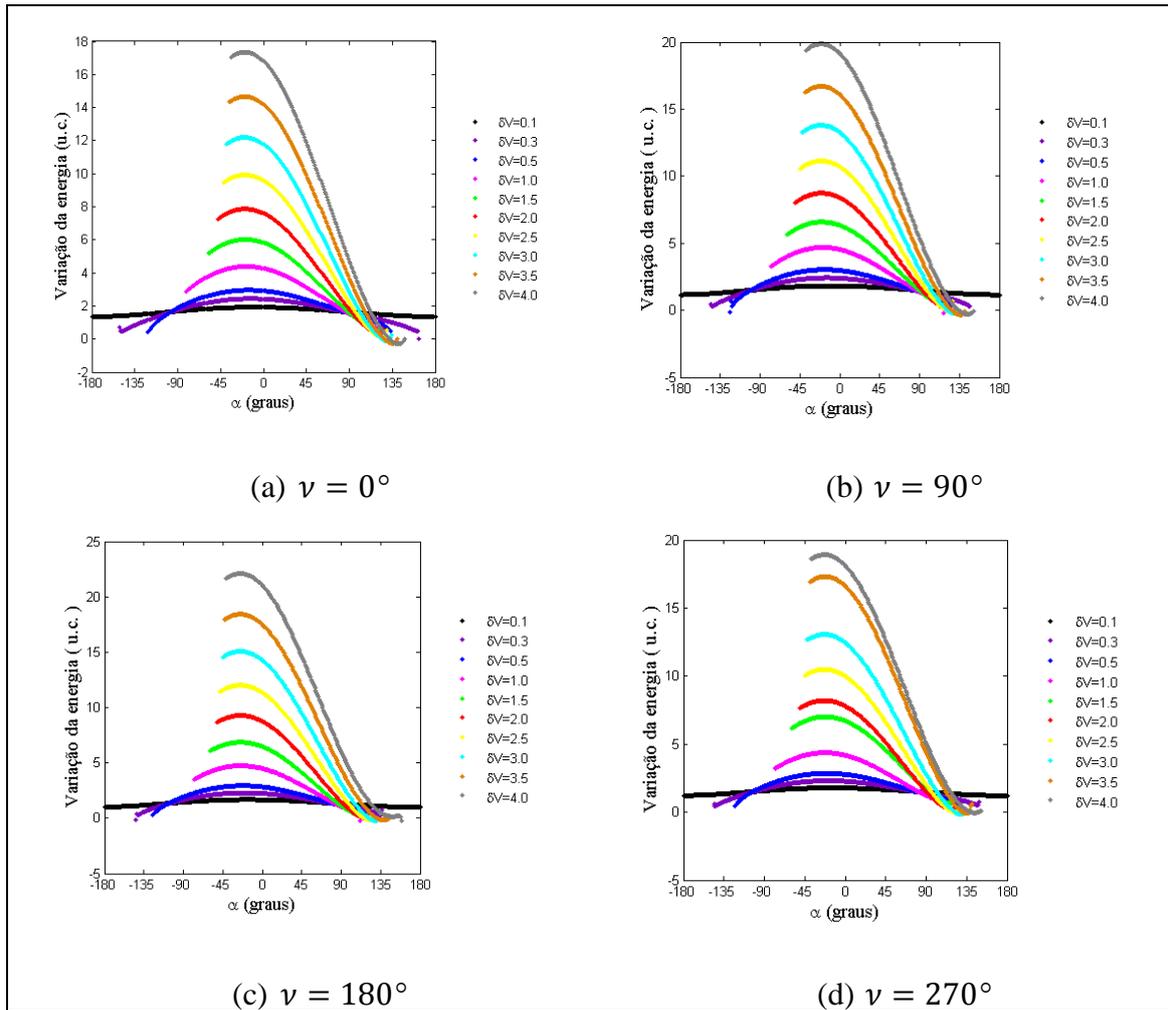
Na Figura 4.2, a parte em branco no fim das curvas indicam regiões de captura ou colisão do veículo espacial por M_2 . É possível notar que a grande maioria dos casos foi de colisão, quando comparado com os casos de captura. Pode-se notar também que a maior região de captura é para impulso menor que 1.0 u.c. e que a região de captura e colisão é maior para impulso retrógrado.

Figura 4.2 – Mapa de capturas e colisões para $e = 0,1$ e $v = 0^\circ$.



A Figura 4.3 apresenta a variação da energia em função da direção do impulso para excentricidade igual a 0,1 e ângulo de aproximação igual a 270° .

Figura 4.3 – Variação da energia em função da direção do impulso para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.



A Tabela 4.2 apresenta os valores numéricos da variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente, para as condições da Figura 4.3.

Tabela 4.2 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$, diferentes valores de ν e δV .

δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c)	α ($^\circ$)	ΔE_{min} (u.c)	α ($^\circ$)
$\nu = 0^\circ$				
0,1	1,9248	-9,0	1,3561	179,0
0,3	2,4384	-13,0	0,0168	163,0
0,5	2,9611	-16,0	0,4358	-121,0
1,0	4,3881	-18,0	0,5633	121,0
1,5	6,0203	-19,0	0,5248	121,0
2,0	7,8651	-19,0	0,3344	121,0
2,5	9,9222	-20,0	0,091	124,0
3,0	12,1901	-20,0	-0,1245	129,0
3,5	14,6673	-20,0	-0,2686	135,0
4,0	17,3524	-20,0	-0,2986	141,0
$\nu = 90^\circ$				
0,1	1,8228	-11,0	1,1541	177,0
0,3	2,4197	-15,0	-0,1955	148,0
0,5	3,0262	-17,0	-0,1748	-124,0
1,0	4,6835	-19,0	-0,1865	117,0
1,5	6,5835	-20,0	0,3521	117,0
2,0	8,7361	-21,0	0,1772	119,0
2,5	11,1417	-21,0	-0,0508	123,0
3,0	13,799	-21,0	-0,2456	129,0
3,5	16,7068	-21,0	-0,3478	136,0
4,0	19,8641	-21,0	-0,2903	144,0
$\nu = 180^\circ$				
0,1	1,6809	-17,0	1,0042	171,0
0,3	2,2971	-21,0	-0,1735	-144,0
0,5	2,9385	-22,0	0,2645	-125,0
1,0	4,7394	-24,0	-0,2405	112,0
1,5	6,8516	-25,0	0,2674	112,0
2,0	9,279	-25,0	0,0565	116,0
2,5	12,0194	-25,0	-0,1387	122,0
3,0	15,0706	-25,0	-0,2445	129,0
3,5	18,4307	-25,0	-0,1919	139,0
4,0	22,0982	-25,0	-0,2225	159,0

(continua)

Tabela 4.2 – Conclusão.

$\nu = 270^\circ$				
0,1	1,7819	-15,0	1,2157	174,0
0,3	2,304	-19,0	0,4517	-145,0
0,5	2,848	-21,0	0,4255	-123,0
1,0	4,3722	-23,0	0,5421	116,0
1,5	7,0047	-22,0	0,6494	115,0
2,0	8,1973	-23,0	0,2066	118,0
2,5	10,4976	-23,0	-0,0119	122,0
3,0	13,0528	-23,0	-0,1608	129,0
3,5	17,3258	-22,0	-0,0969	135,0
4,0	18,9199	-23,0	-0,0508	144,0

Os resultados na Figura 4.3 mostram o efeito da anomalia verdadeira do corpo secundário na variação da energia, neste caso para $e = 0,1$.

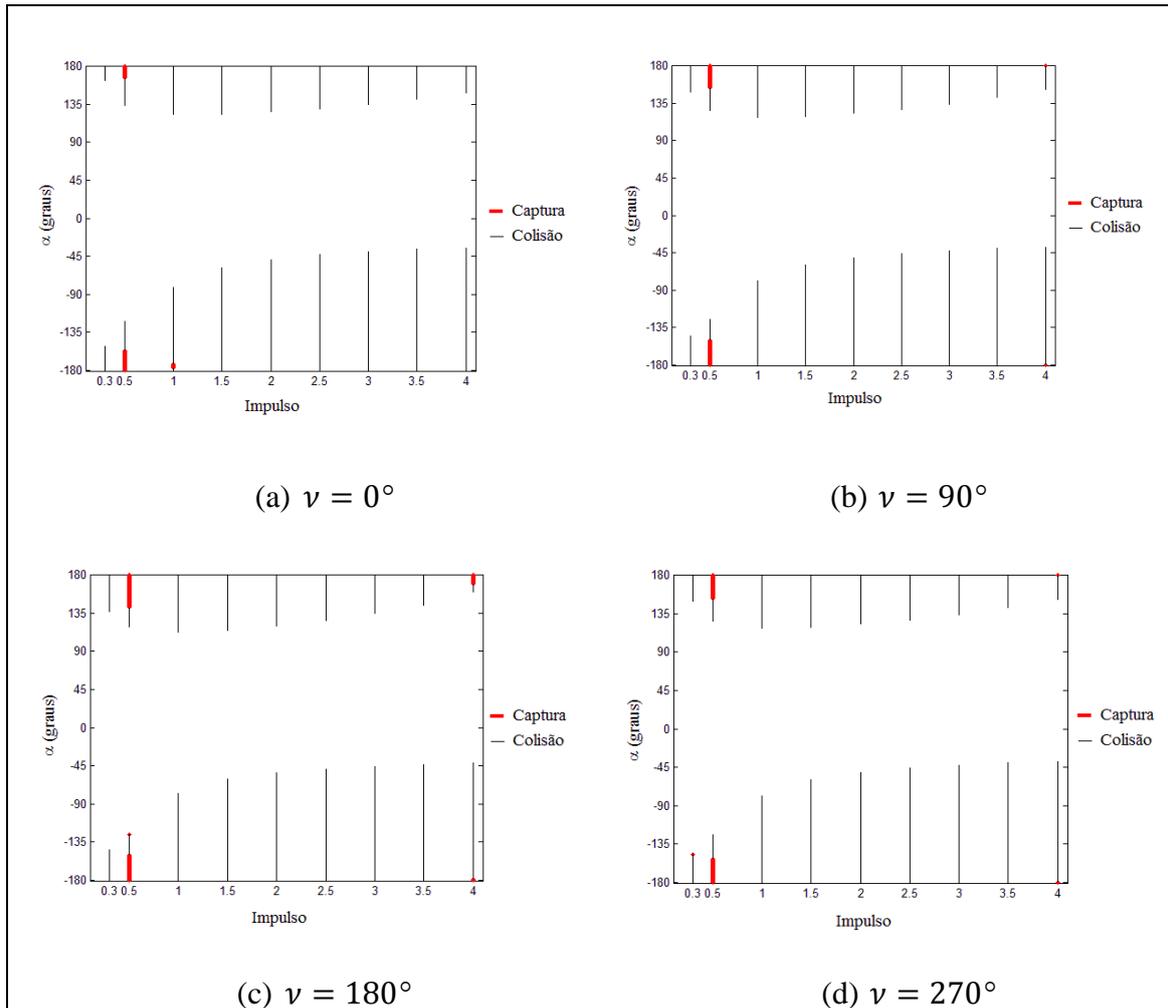
Os resultados mostram que as direções ótimas para aplicar o impulso, quando o objetivo é a máxima variação da energia, são sempre negativas, desde que o ângulo de aproximação seja 270° e a manobra tente obter a maior variação possível de energia a partir da parte gravitacional da manobra. A anomalia verdadeira não muda este fato.

Para entender o efeito deste parâmetro é necessário lembrar que a variação da energia é proporcional à velocidade do corpo secundário (V_2), que é maior no periapsis. É possível confirmar esta regra observando a Tabela 4.2, para valores com impulso igual a 0,1 u.c. A máxima variação da energia é maior para $\nu = 0^\circ$ e menor para $\nu = 180^\circ$. Para valores altos da magnitude do impulso é difícil fazer previsões sobre este resultado, pois o impulso causa mudanças significativas na geometria.

Na maioria dos casos de variação mínima de energia (ΔE_{min}), o impulso é aplicado na direção contrária ao movimento do veículo espacial e afastando o veículo de M_2 , para desacelerar e forçar a perda da energia.

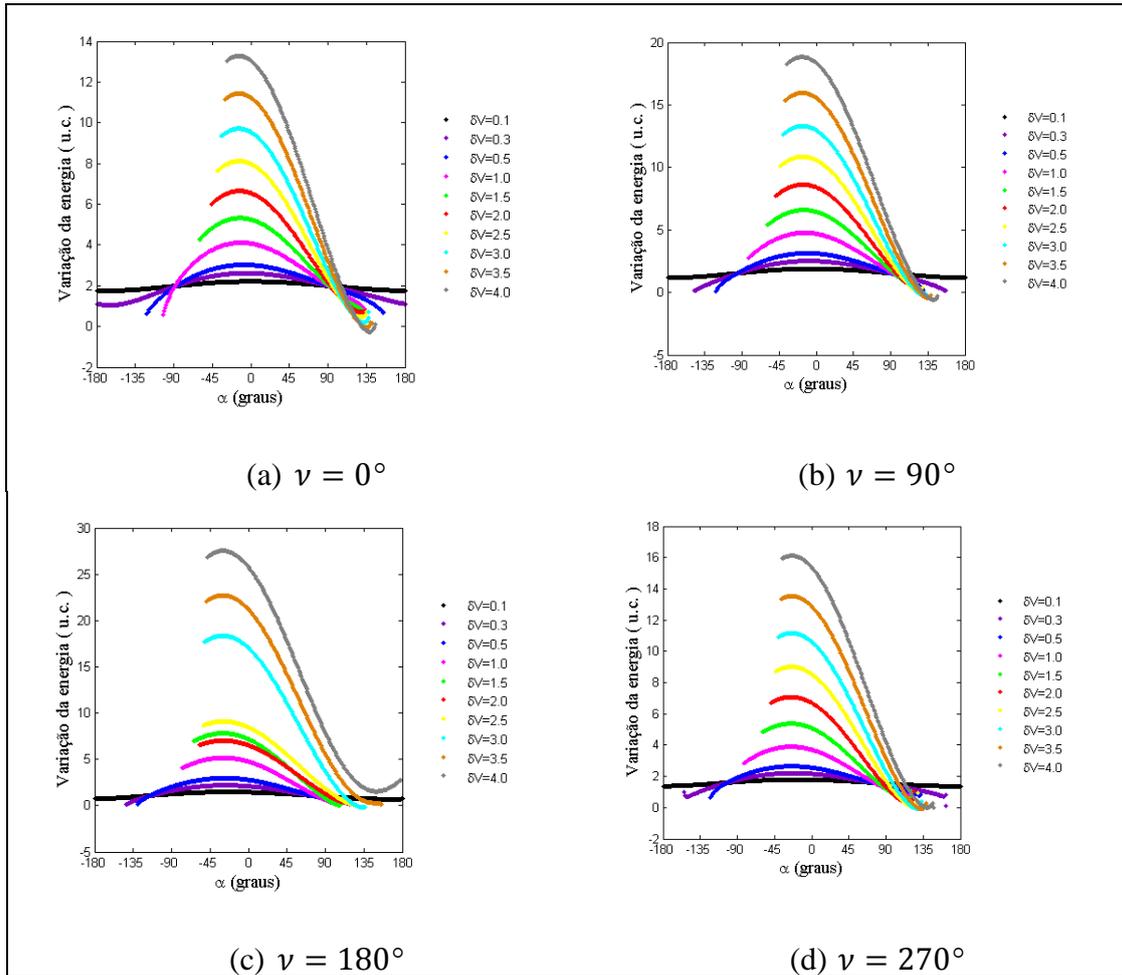
O mapa de capturas e colisões apresentado na Figura 4.4 refere-se às condições da Figura 4.3. Observe que a quantidade de colisões é significativamente maior que a de capturas e a maioria das capturas ocorrem para impulso igual a 0,5.

Figura 4.4 – Mapa de capturas e colisões para $e = 0,1$ e $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.



A variação da energia para $\psi = 270^\circ$ e $e = 0,3$ é apresentada na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Variação da energia em função da direção do impulso para $e = 0,3$ e $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.



A Tabela 4.3 apresenta os valores numéricos da variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente para as condições da Figura 4.5.

Tabela 4.3 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $e = 0,3$, $\psi = 270^\circ$, diferentes valores de ν e δV .

δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c)	α ($^\circ$)	ΔE_{min} (u.c)	α ($^\circ$)
$\nu = 0^\circ$				
0,1	2,2062	-1,0	1,7513	-173,0
0,3	2,6180	-5,0	1,0433	-164,0
0,5	3,0284	-8,0	0,5987	-122,0
1,0	4,1148	-11,0	0,5782	-102,0
1,5	5,3199	-13,0	0,7491	132,0
2,0	6,6537	-13,0	0,694	130,0
2,5	8,1178	-14,0	0,4541	129,0
3,0	9,7116	-14,0	0,1901	132,0
3,5	11,4342	-14,0	-0,0578	135,0
4,0	13,2847	-14,0	-0,2645	139,0
$\nu = 90^\circ$				
0,1	1,8895	-5,0	1,1728	-179,0
0,3	2,5166	-9,0	0,1255	-148,0
0,5	3,1360	-11,0	0,1182	-122,0
1,0	4,7725	-14,0	0,2725	120,0
1,5	6,5944	-15,0	0,2381	120,0
2,0	8,6217	-16,0	0,1869	122,0
2,5	10,858	-17,0	-0,0094	125,0
3,0	13,3049	-17,0	-0,2438	130,0
3,5	15,9618	-17,0	-0,4506	135,0
4,0	18,8284	-17,0	-0,5734	142,0
$\nu = 180^\circ$				
0,1	1,4769	-24,0	0,6977	164,0
0,3	2,1985	-27,0	0,1331	-143,0
0,5	2,9665	-28,0	0,1631	-130,0
1,0	5,1751	-29,0	0,1844	103,0
1,5	7,8195	-30,0	0,0564	106,0
2,0	7,0127	-29,0	0,3367	114,0
2,5	9,0900	-30,0	0,0784	123,0
3,0	18,3566	-30,0	-0,1769	133,0
3,5	22,7282	-30,0	0,0935	156,0
4,0	27,5265	-30,0	1,5358	149,0

(continua)

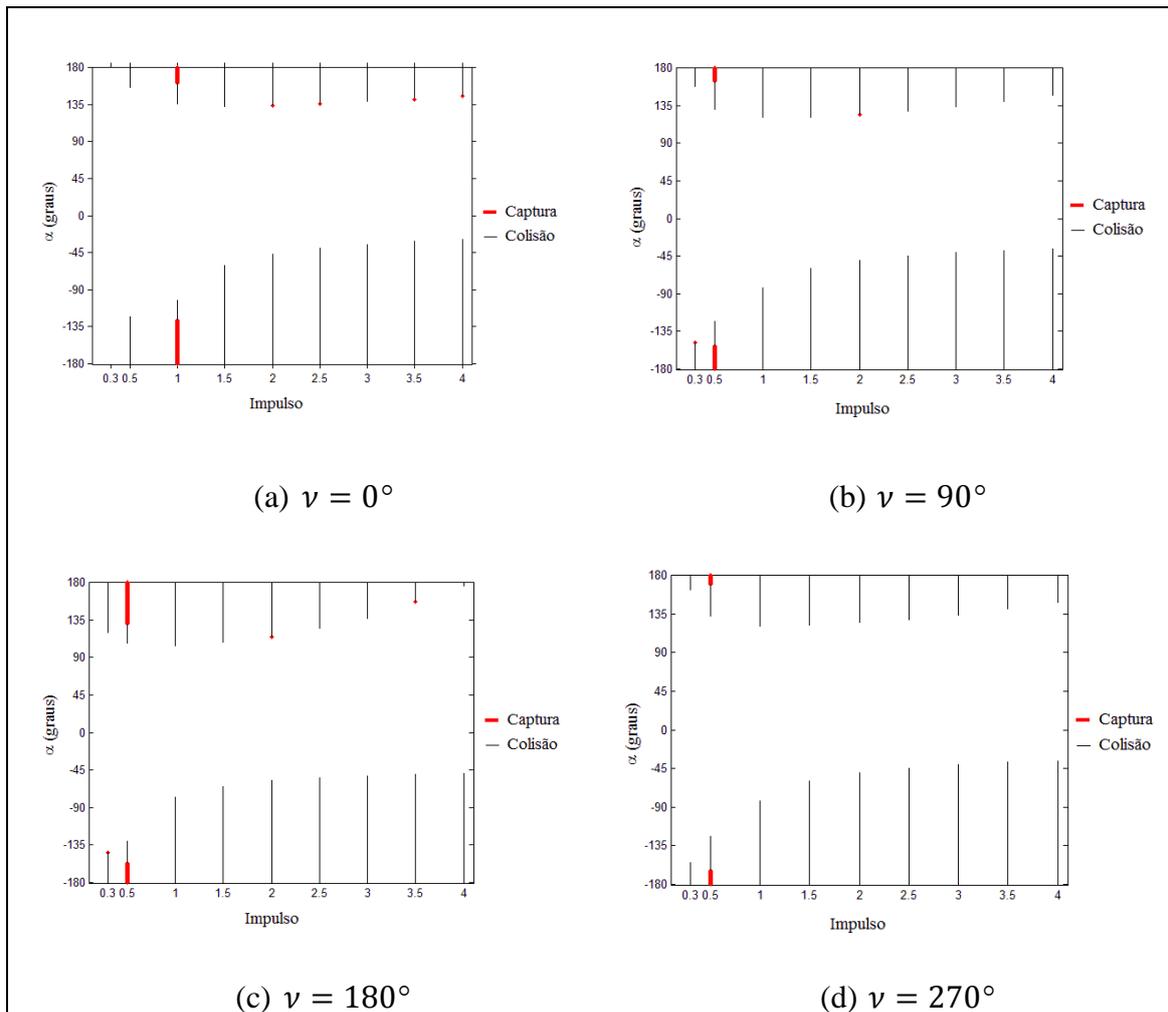
Tabela 4.3 – Conclusão.

$\nu = 270^\circ$				
0,1	1,7946	-18,0	1,371	172,0
0,3	2,2051	-22,0	0,0906	163,0
0,5	2,6427	-24,0	0,6588	-123,0
1,0	3,8917	-25,0	0,7606	119,0
1,5	5,3718	-25,0	0,5655	114,0
2,0	7,0799	-25,0	0,309	117,0
2,5	9,0114	-25,0	0,0925	121,0
3,0	11,1627	-24,0	-0,0509	127,0
3,5	13,5310	-24,0	-0,0894	133,0
4,0	16,1141	-24,0	-0,018	148,0

A excentricidade agora é 0,3, o ângulo de aproximação é 270° e a anomalia verdadeira de M_2 é 0° , 90° , 180° e 270° . Novamente todas as direções do impulso são negativas, para aproximar o veículo espacial do corpo celeste e aproveitar ao máximo o efeito da gravidade. A magnitude de α aumenta com a magnitude do impulso, porque maiores impulsos têm efeitos mais fortes na geometria, levando a maiores ganhos de energia a partir da manobra combinada.

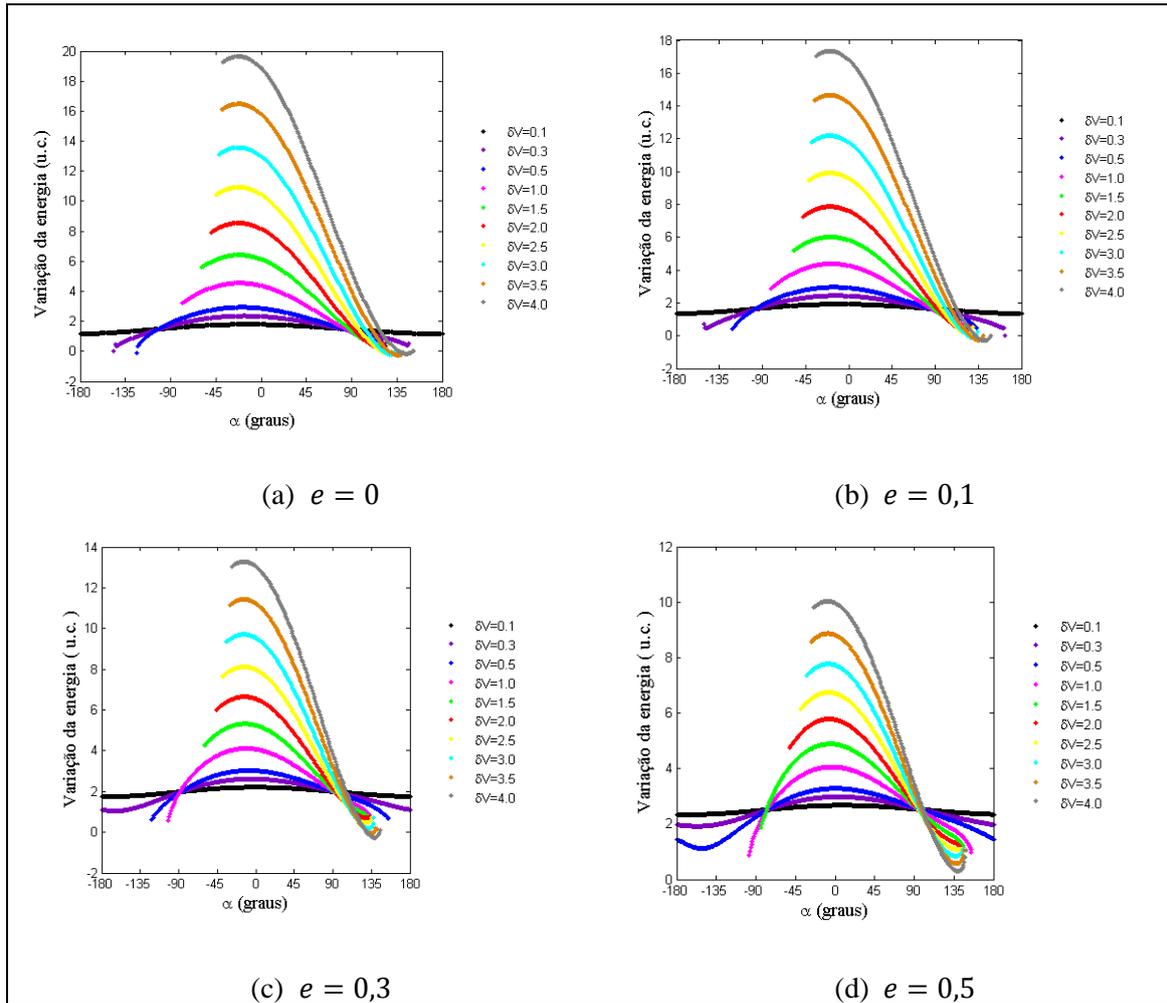
O mapa de capturas e colisões é apresentado a seguir. As capturas e colisões ocorrem para impulso aplicado retrógrado em relação ao movimento do veículo espacial e, com exceção de $\nu = 0^\circ$, a maioria das capturas ocorre para impulso igual a 0,5 u.c.

Figura 4.6 – Mapa de capturas e colisões para $e = 0,3$ e $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para a anomalia verdadeira.



A variação da energia para ângulo de aproximação de 270° e anomalia verdadeira igual a 0° é apresentada a seguir, na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Variação da energia em função da direção do impulso para $\psi = 270^\circ$ e $\nu = 0^\circ$.



A Figura 4.7 e a Tabela 4.4 mostram em detalhes o efeito da excentricidade dos primários. Quanto maior a excentricidade, menor a distância no periapsis entre os corpos e maior a distância no apoapsis. A anomalia verdadeira do corpo secundário é fixada em 0° e o ângulo de aproximação em 270° .

A regra de valores negativos para a direção do impulso não é seguida no caso $e = 0,5$ com pequenos valores da magnitude do impulso, pois nestes casos os valores são positivos. Para magnitudes do impulso até 0,5 u.c., a variação máxima da energia aumenta com o aumento da excentricidade. Acima desse valor de impulso o ganho de energia diminui com órbitas mais excêntricas.

Em relação à variação mínima de energia, as maiores perdas ocorrem para as maiores magnitudes do impulso. Isso porque a configuração $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 270^\circ$ é a mais propícia para se ganhar energia e, como o objetivo é perder energia, usa-se o impulso para modificar ao máximo a manobra e minimizar o ganho.

A Figura 4.8 apresenta o mapa de capturas e colisões para as diferentes excentricidades. Para $e = 0$ e $e = 0,1$, a maior concentração de capturas ocorre para impulso igual a 0,5 u.c. Para $e = 0,3$, essa concentração ocorre em $\delta V = 1,0$ u.c. e para $e = 0,5$, em $\delta V = 1,5$ u.c., mas com quantidades significativas também em $\delta V = 1,0$ u.c. As colisões acontecem em todos os casos com impulso maior que 0,1 u.c., exceto para excentricidade 0,5 em que capturas e colisões ocorrem para magnitude do impulso igual ou maior que 1,0 u.c.

Figura 4.8 – Mapa de capturas e colisões para $\psi = 270^\circ$ e $\nu = 0^\circ$.

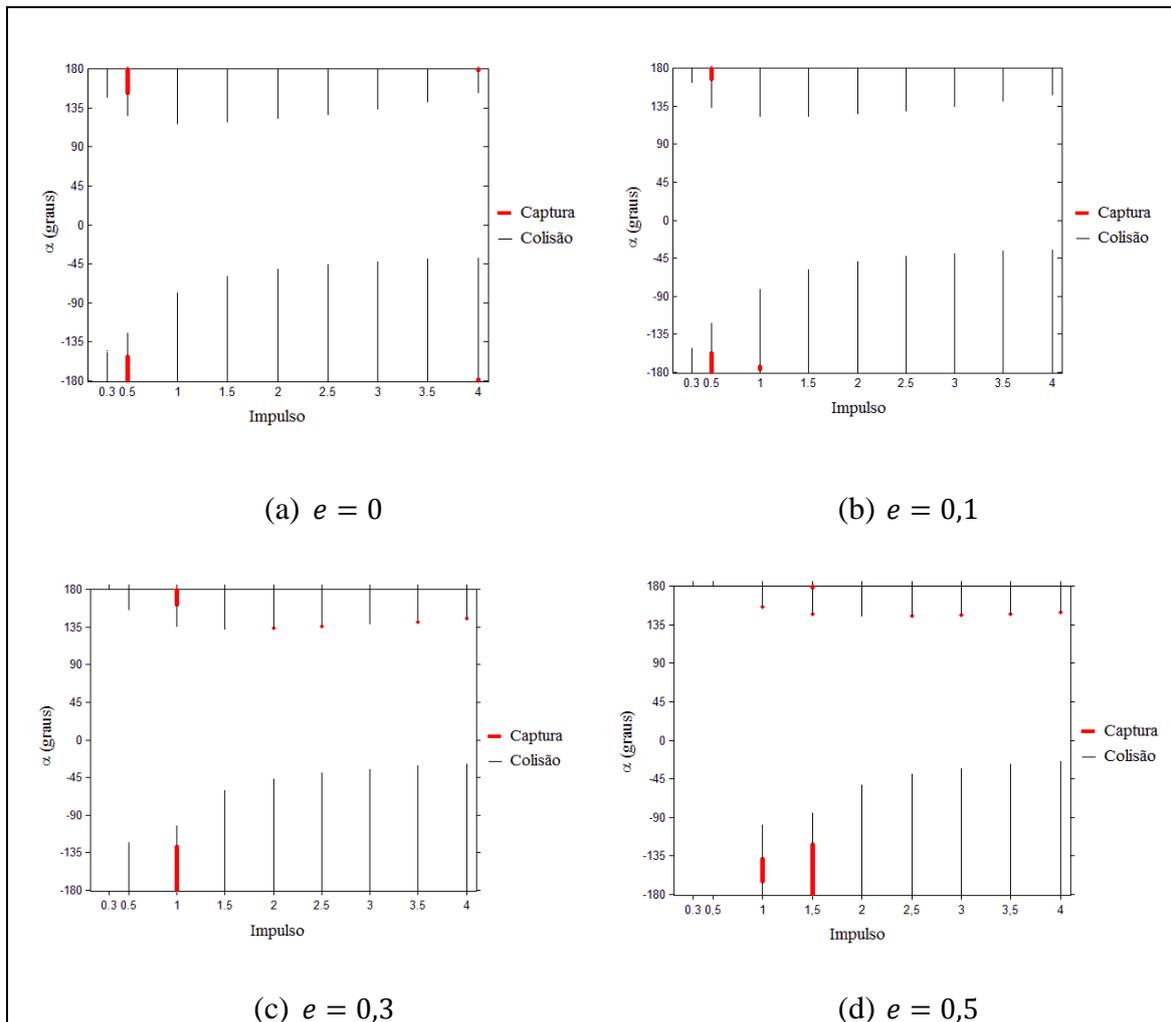


Tabela 4.4 – Variação máxima e mínima da energia com o valor α correspondente para $\psi = 270^\circ$, $\nu = 0^\circ$ e diferentes valores da excentricidade.

δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{i}n}$ (u.c.)	α ($^\circ$)
$e = 0$				
0,1	1,7971	-13,0	1,1737	175,0
0,3	2,3617	-17,0	0,0078	-147,0
0,5	2,9429	-19,0	-0,0924	-124,0
1,0	4,5526	-21,0	0,4497	116,0
1,5	6,4183	-22,0	0,3927	116,0
2,0	8,5455	-22,0	0,1831	118,0
2,5	10,933	-22,0	-0,0422	123,0
3,0	13,5788	-22,0	-0,2103	129,0
3,5	16,4813	-22,0	-0,2692	136,0
4,0	19,6391	-22,0	-0,1502	145,0
$e = 0,1$				
0,1	1,9248	-9,0	1,3561	179,0
0,3	2,4384	-13,0	0,0168	163,0
0,5	2,9611	-16,0	0,4358	-121,0
1,0	4,3881	-18,0	0,5633	121,0
1,5	6,0203	-19,0	0,5248	121,0
2,0	7,8651	-19,0	0,3344	121,0
2,5	9,9222	-20,0	0,091	124,0
3,0	12,1901	-20,0	-0,1245	129,0
3,5	14,6673	-20,0	-0,2686	135,0
4,0	17,3524	-20,0	-0,2986	141,0
$e = 0,3$				
0,1	2,2062	-1,0	1,7513	-173,0
0,3	2,6180	-5,0	1,0433	-164,0
0,5	3,0284	-8,0	0,5987	-122,0
1,0	4,1148	-11,0	0,5782	-102,0
1,5	5,3199	-13,0	0,7491	132,0
2,0	6,6537	-13,0	0,694	130,0
2,5	8,1178	-14,0	0,4541	129,0
3,0	9,7116	-14,0	0,1901	132,0
3,5	11,4342	-14,0	-0,0578	135,0
4,0	13,2847	-14,0	-0,2645	139,0

(continua)

Tabela 4.4 – Conclusão.

$e = 0,5$				
0,1	2,6737	8,0	2,341	-165,0
0,3	2,9804	4,0	1,9175	-157,0
0,5	3,2821	1,0	1,1174	-151,0
1,0	4,0570	-4,0	0,878	-98,0
1,5	4,8869	-6,0	1,0429	147,0
2,0	5,7814	-7,0	1,0533	145,0
2,5	6,7428	-8,0	1,0734	145,0
3,0	7,7721	-8,0	0,8428	137,0
3,5	8,8687	-8,0	0,5716	138,0
4,0	10,0324	-8,0	0,3001	139,0

Os resultados, em geral, mostram que a variação da energia é diretamente proporcional a magnitude do impulso, na maioria dos casos. Esta conclusão não é aplicável em algumas situações, para trajetórias nas extremidades dos gráficos (relativo ao eixo x). Isto é devido à influência de α nestes casos.

Regiões de captura ou colisão do veículo espacial por M_2 também ocorrem em todas as situações estudadas, normalmente para valores extremos de α , com exceção das condições com $\delta V = 0,1$ u.c., como mostrado nos mapas de capturas e colisões. Uma análise deste comportamento será apresentada mais adiante neste trabalho. A seguir será apresentada uma síntese dos efeitos de cada parâmetro na manobra.

4.1.1. Efeitos do ângulo de aproximação (ψ)

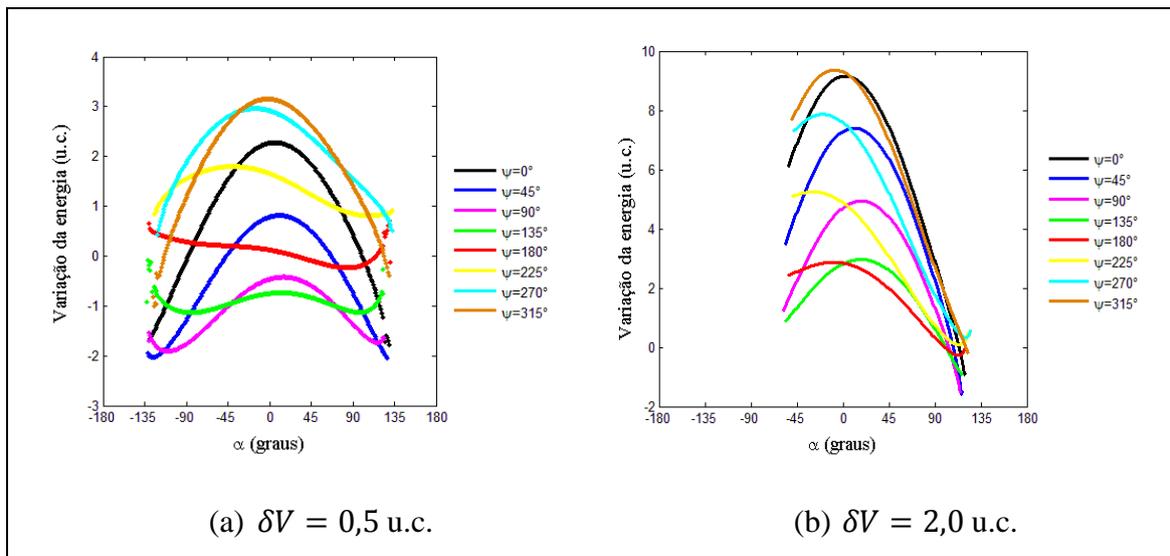
Este ângulo define a posição do periapsis da órbita do veículo espacial em relação ao corpo secundário. Para $0^\circ < \psi < 180^\circ$, quando $\nu = 0^\circ$ ou $\nu = 180^\circ$, o veículo espacial está passando em frente ao corpo secundário e é desacelerado por M_2 , perdendo energia. A máxima perda ocorre quando $\psi = 90^\circ$. Se $180^\circ < \psi < 360^\circ$, o veículo espacial está passando atrás de M_2 e é acelerado, ganhando energia. O máximo ganho ocorre quando $\psi = 270^\circ$. Para $\psi = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$ o efeito da manobra de gravidade pura é nulo. Esta conclusão é obtida a partir da Equação 2.5 que, para estes valores de ν , se reduz a Equação 4.1 que dá a variação da energia para a manobra de Swing-By padrão equivalente a apresentada por Broucke (1988). E_+ é a energia da segunda órbita, E_- a

energia da primeira órbita, V_2 a velocidade de M_2 em relação a M_1 e δ é a curvatura da trajetória do veículo espacial.

$$E_+ - E_- = -2V_{inf} V_2 \sin \delta \sin \psi \quad (4.1)$$

A Figura 4.9 e Tabela 4.5 apresentam alguns resultados para a “Manobra de Swing-By propulsado”.

Figura 4.9 – Variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\delta V = 0,5$, $\delta V = 2,0$ u.c. e diferentes valores de ψ .



Os pontos dispersos, visíveis na Figura 4.9 (a), são contínuos em relação à α a partir do ponto anterior, porém tem um salto no valor da variação da energia. Isso ocorre porque, devido à configuração dessas trajetórias, o veículo espacial aproxima-se cada vez mais da Lua, modificando sua energia, que não é mais contínua em relação aos casos anteriores. Esses pontos são o limite entre o escape e a captura ou colisão.

Tabela 4.5 – Variação máxima e mínima da energia com o valor de α correspondente para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\delta V = 2,0$ u.c. e diferentes valores de ψ .

$\psi(^{\circ})$	$\delta V = 0,5$ u.c.				$\delta V = 2,0$ u.c.			
	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u. c)	α ($^{\circ}$)	$\Delta E_{m\acute{i}n}$ (u. c)	α ($^{\circ}$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u. c)	α ($^{\circ}$)	$\Delta E_{m\acute{i}n}$ (u. c)	α ($^{\circ}$)
0	2,2784	6,0	-1,788	129,0	9,1525	13,0	-0,9204	119,0
45	0,8131	11,0	-2,0498	127,0	7,3981	11,0	-1,5974	116,0
90	-0,4206	15,0	-1,9092	-110,0	4,9422	18,0	-1,5504	115,0
135	-0,0914	-132,0	-1,1349	-85,0	2,9641	18,0	-0,9536	117,0
180	0,7087	129,0	-0,2343	84,0	2,8683	-9,0	-0,2738	113,0
225	1,7953	-39,0	0,8092	107,0	5,2489	-29,0	0,0905	114,0
270	2,9611	-16,0	0,4358	-121,0	7,8651	-19,0	0,3344	121,0
315	3,1518	-2,0	-0,9946	-125,0	9,3545	-8,0	-0,2445	123,0

Os resultados mostram que o ângulo de aproximação desempenha um papel importante no ganho de energia ($\Delta E_{m\acute{a}x}$). Para uma manobra no caso circular sem impulso, $\psi = 270^\circ$ daria a máxima variação de energia. Mas é importante lembrar que o impulso e a excentricidade dos primários mudam o valor real do ângulo de aproximação.

Os resultados numéricos mostram que o caso $\psi = 315^\circ$ tem alguns pontos com maior variação de energia. Isto acontece porque esta combinação faz o ângulo ψ real aproximar-se do ponto de máximo ($\psi = 270^\circ$), quando órbitas com $\psi = 270^\circ$ são desviadas deste ponto pelo impulso.

Nota-se também que o caso $\psi = 0^\circ$ tem alta variação de energia, porque é o caso onde o impulso modifica a trajetória e coloca o ângulo de aproximação na região de ganho de energia.

A mínima variação de energia não ocorre exatamente em $\psi = 90^\circ$, também devido à modificação do ângulo de aproximação pelo impulso.

Estes fatos mostram a importância do presente estudo, porque apenas soluções numéricas podem encontrar as condições de máxima e mínima variação de energia nesta manobra complexa.

4.1.2. Efeitos da excentricidade (e)

A partir das características de uma elipse temos que, quanto maior a excentricidade, menor a distância entre os corpos M_1 e M_2 , no periapsis. Essa distância aumenta, no apoapsis, com o aumento da excentricidade.

O efeito físico da excentricidade é aumentar a velocidade de M_2 em relação ao centro de massa do sistema, uma vez que já não é mais constante. V_2 é maior quando M_2 está no periapsis e menor quando está no apoapsis da órbita. Como mostrado pela Equação 4.1, a variação da energia do veículo espacial é proporcional a V_2 .

Os resultados mostrados são para valores fixos de ν , δV e ψ . A Figura 4.10 mostra a variação da energia do veículo espacial para M_2 no periapsis da órbita ($\nu = 0^\circ$), com ângulo de aproximação $\psi = 90^\circ$ e dois valores para a magnitude do impulso: $\delta V = 0,1$ u.c. e $\delta V = 2,0$ u.c.

Esta é a situação com perda de energia, de modo que o principal efeito do aumento da excentricidade é obter maiores perdas da energia.

Os picos para cada linha são quase zero, com relação à direção do impulso. Há um comportamento muito uniforme para $\delta V = 0,1$ u.c. O caso com $\delta V = 2,0$ u.c. resulta em efeitos mais fortes na geometria e os resultados são menos uniformes e previsíveis analiticamente.

Para excentricidades iguais a 0,01 e 0,05, casos mais próximos de aplicações reais, a variação da energia comporta-se de forma similar ao caso circular, com uma pequena diferença na magnitude da energia.

Nota-se também a aparição de capturas e colisões, já que agora o impulso é capaz de fazer modificações mais fortes na órbita do veículo espacial.

Figura 4.10 – Variação da energia para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 90^\circ$ e diferentes valores para a excentricidade.

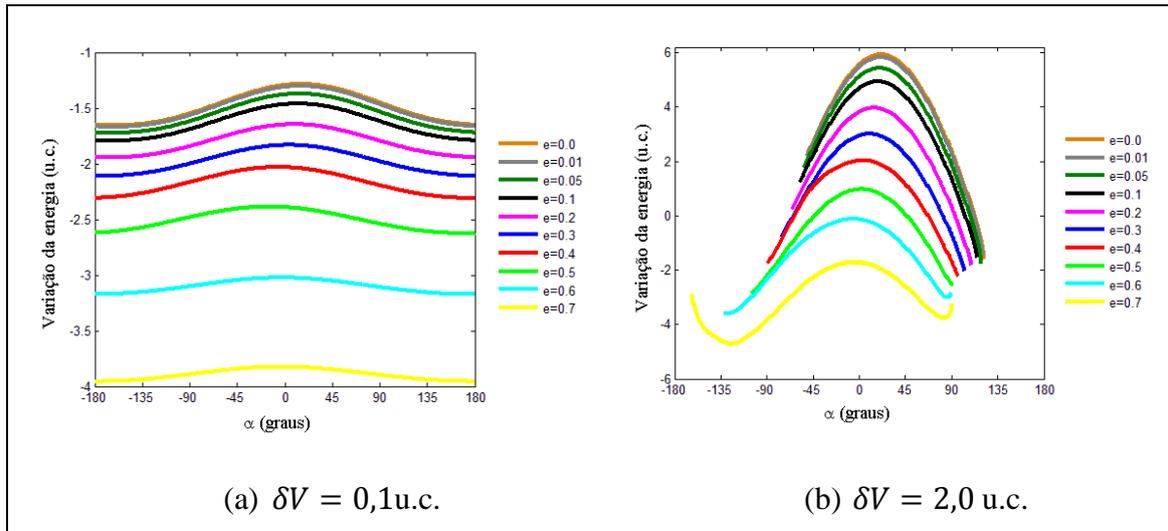


Tabela 4.6 – Variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente para $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ$.

e	$\delta V = 0,1 \text{ u.c.}$				$\delta V = 2,0 \text{ u.c.}$			
	ΔE_{max} (u.c.)	α ($^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.)	α ($^\circ$)	ΔE_{max} (u.c.)	α ($^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.)	α ($^\circ$)
0,0	-1,2852	16,0	-1,6562	-162,0	5,9348	21,0	-1,5971	122,0
0,01	-1,3024	15,0	-1,6694	-163,0	5,8348	21,0	-1,4686	121,0
0,05	-1,3721	14,0	-1,7236	-163,0	5,4360	20,0	-1,7737	119,0
0,1	-1,4616	13,0	-1,7944	-165,0	4,9422	18,0	-1,5504	115,0
0,2	-1,6466	9,0	-1,9463	-168,0	3,9697	15,0	-1,8099	109,0
0,3	-1,8323	5,0	-2,1118	-174,0	3,0127	10,0	-2,0264	103,0
0,4	-2,0313	-6,0	-2,3089	176,0	2,0351	4,0	-2,2291	97,0
0,5	-2,3872	-15,0	-2,6250	167,0	4,3606	-78,0	-2,5171	91,0
0,6	-3,0241	0,0	-3,1749	178,0	-0,3050	0,0	-8,1539	-107,0
0,7	-3,8249	-2,0	-3,9566	180,0	-1,7057	-5,0	-4,7007	-125,0

4.1.3. Efeitos da anomalia verdadeira de M_2 (ν)

A anomalia verdadeira de M_2 (ν) descreve a posição do corpo secundário em relação à M_1 . Para $\nu = 0^\circ$, M_2 está no periapsis da órbita e, para $\nu = 180^\circ$, M_2 está no apoapsis da órbita. Portanto ν influencia a magnitude e direção da velocidade de M_2 (V_2) que, conseqüentemente, influencia a variação da energia.

Para este estudo foi assumido $\nu = 0^\circ, \nu = 90^\circ, \nu = 180^\circ$ e $\nu = 270^\circ$. Os resultados para excentricidade 0,1, $\psi = 270^\circ$, impulso 0,3 u.c. e 1,5 u.c. e para cada valor de ν são apresentados na Figura 4.11 e Tabela 4.7.

Figura 4.11 – Variação da energia para $e = 0,1, \psi = 270^\circ$ e diferentes valores de ν .

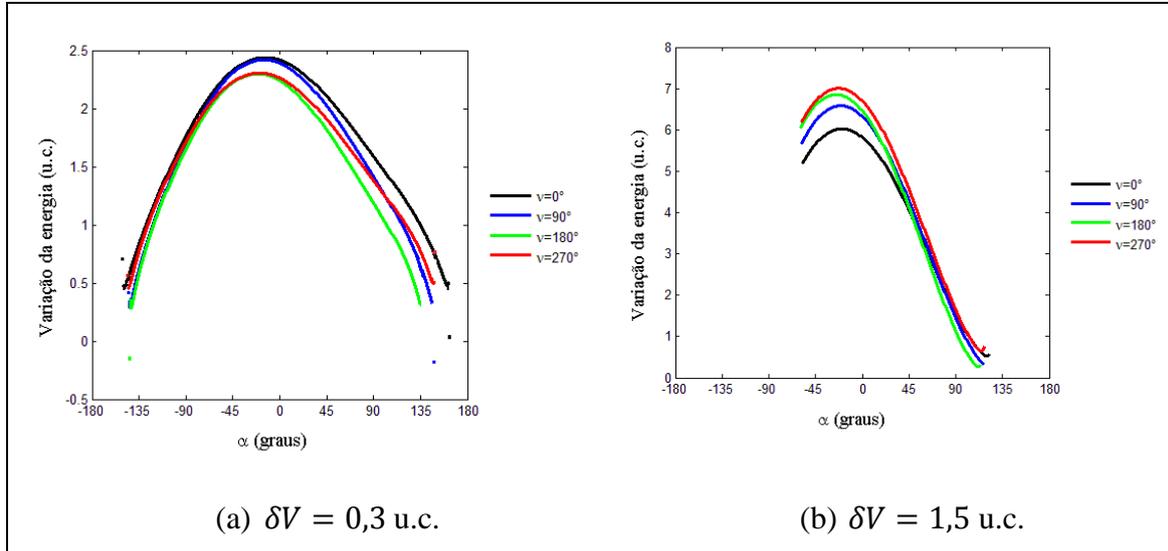


Tabela 4.7 - Variação máxima e mínima de energia e seu α correspondente para $e = 0,1$ e $\psi = 270^\circ$.

ν ($^\circ$)	$\delta V = 0,3$ u.c.				$\delta V = 1,5$ u.c.			
	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u. c.)	α ($^\circ$)	ΔE_{min} (u. c.)	α ($^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u. c.)	α ($^\circ$)	ΔE_{min} (u. c.)	α ($^\circ$)
0	2.4384	-13.0	0.0168	163.0	6.0203	-19.0	0.5248	121.0
90	2.4197	-15.0	-0.1955	148.0	6.5835	-20.0	0.3521	117.0
180	2.2971	-21.0	-0.1735	-144.0	6.8516	-25.0	0.2674	112.0
270	2.3040	-19.0	0.4517	-145.0	7.0047	-22.0	0.6494	115.0

Para $\delta V = 0,3$ u.c. o maior $\Delta E_{m\acute{a}x}$ é, como esperado, em $\nu = 0^\circ$, quando M_2 está no periapsis da órbita, porque a velocidade de M_2 é maior. O menor valor de $\Delta E_{m\acute{a}x}$ é para $\nu = 180^\circ$, no apoapsis, quando a velocidade de M_2 é menor. Neste caso ocorreram descontinuidades na variação da energia devido à combinação das condições iniciais.

Para $\delta V = 1,5$ u.c. a parte propulsada da manobra domina o cenário e o melhor valor para a anomalia verdadeira não pode ser previsto sem a análise numérica efetuada no presente trabalho. Na maioria dos casos, quando $\nu = 0^\circ$ temos um resultado menor em termos de $\Delta E_{m\acute{a}x}$.

4.1.4. Capturas e colisões

Há várias manobras terminando em captura ou colisão do veículo espacial pelo corpo secundário. Captura ocorre quando o veículo espacial permanece em torno do corpo secundário com energia de dois corpos negativa durante o período total de integração. Colisão é quando o veículo espacial choca com a superfície do corpo secundário.

A partir dos mapas de captura e colisão apresentados nas Figuras 4.2, 4.4, 4.6 e 4.8, pode-se notar que a grande maioria dos casos foi de colisão quando comparado com os casos de captura. Nota-se também que a maior região de captura é para impulso menor que 1.0 u.c.

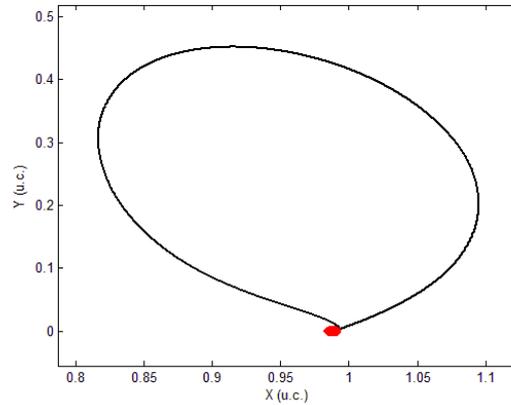
Na maioria dos casos as capturas e colisões ocorrem para valores extremos de α ($\alpha > 90^\circ$ e $\alpha < -90^\circ$). Isso acontece porque, para estes valores, o impulso tem uma componente que desacelera o veículo espacial, agindo na direção oposta ao seu movimento. Para as situações onde há também uma componente enviando o veículo espacial para a direção de M_2 , a quantidade de capturas ou colisões é significativamente maior.

Para todos os casos, quando $\delta V = 0,1$ u.c., não houve capturas ou colisões do veículo espacial pelo corpo, porque esta magnitude do impulso não é grande o suficiente para gerar estas situações.

Algumas trajetórias resultantes em colisões são mostradas a seguir. A linha preta sólida representa a trajetória do veículo espacial e a linha vermelha é a superfície de M_2 .

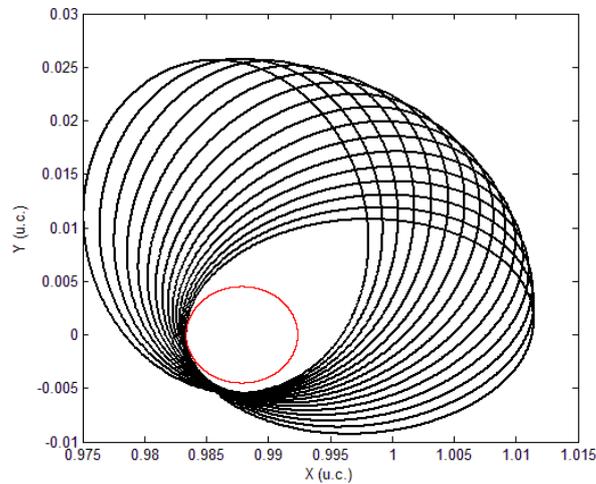
A Figura 4.12 apresenta a trajetória resultante em colisão para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$, $\delta V = 0,3$ u.c. e $\alpha = 144^\circ$. O veículo espacial deixa M_2 devido ao valor positivo de α , é desacelerado, e então retorna para colidir com M_2 .

Figura 4.12 – Trajetória do veículo espacial resultante em colisão para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$, $\delta V = 0,3$ u.c. e $\alpha = 144^\circ$.



A Figura 4.13 mostra a trajetória do veículo espacial colidindo com M_2 para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\alpha = -156^\circ$. Neste caso houve uma captura temporária antes da colisão.

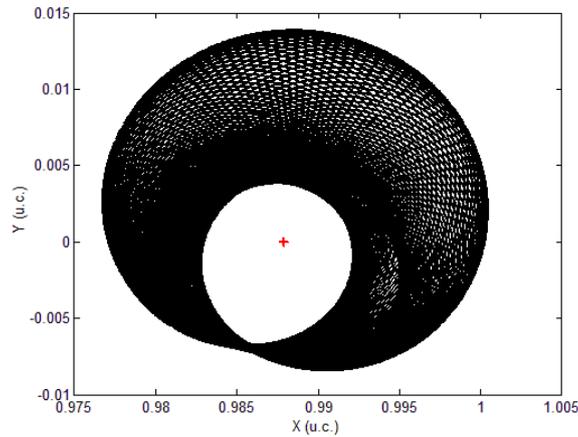
Figura 4.13 – Trajetória do veículo espacial resultante em colisão para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\alpha = -156^\circ$.



A seguir, as Figuras 4.14 e 4.15 mostram trajetórias resultantes em captura do veículo espacial pelo corpo secundário.

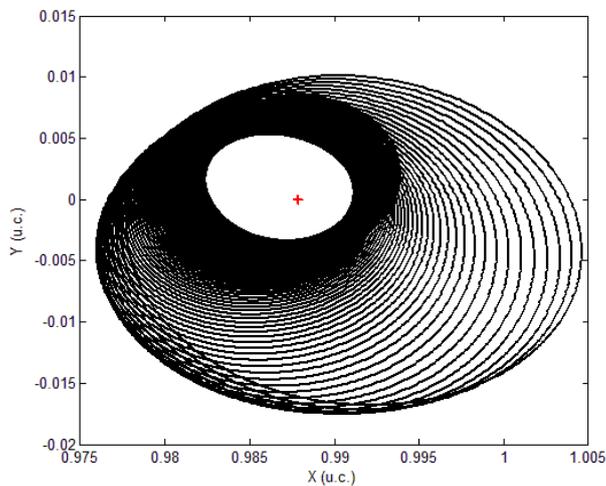
A trajetória mostrada na Figura 4.14 tem um impulso com componente na direção oposta ao movimento do veículo espacial, que reduz sua velocidade e causa a captura. Os dados são: $e = 0,3$, $\nu = 180^\circ$, $\psi = 90^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\alpha = -180^\circ$.

Figura 4.14 - Trajetória do veículo espacial resultante em captura para $e = 0,3$, $\nu = 180^\circ$, $\psi = 90^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e $\alpha = -180^\circ$.



A Figura 4.15 apresenta a trajetória para $e = 0,5$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 180^\circ$, $\delta V = 1,5$ u.c. e $\alpha = 155^\circ$, que é similar ao caso anterior, mas com excentricidade dos primários maior.

Figura 4.15 - Trajetória do veículo espacial resultante em captura para $e = 0,5$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 180^\circ$, $\delta V = 1,5$ u.c. e $\alpha = 155^\circ$.

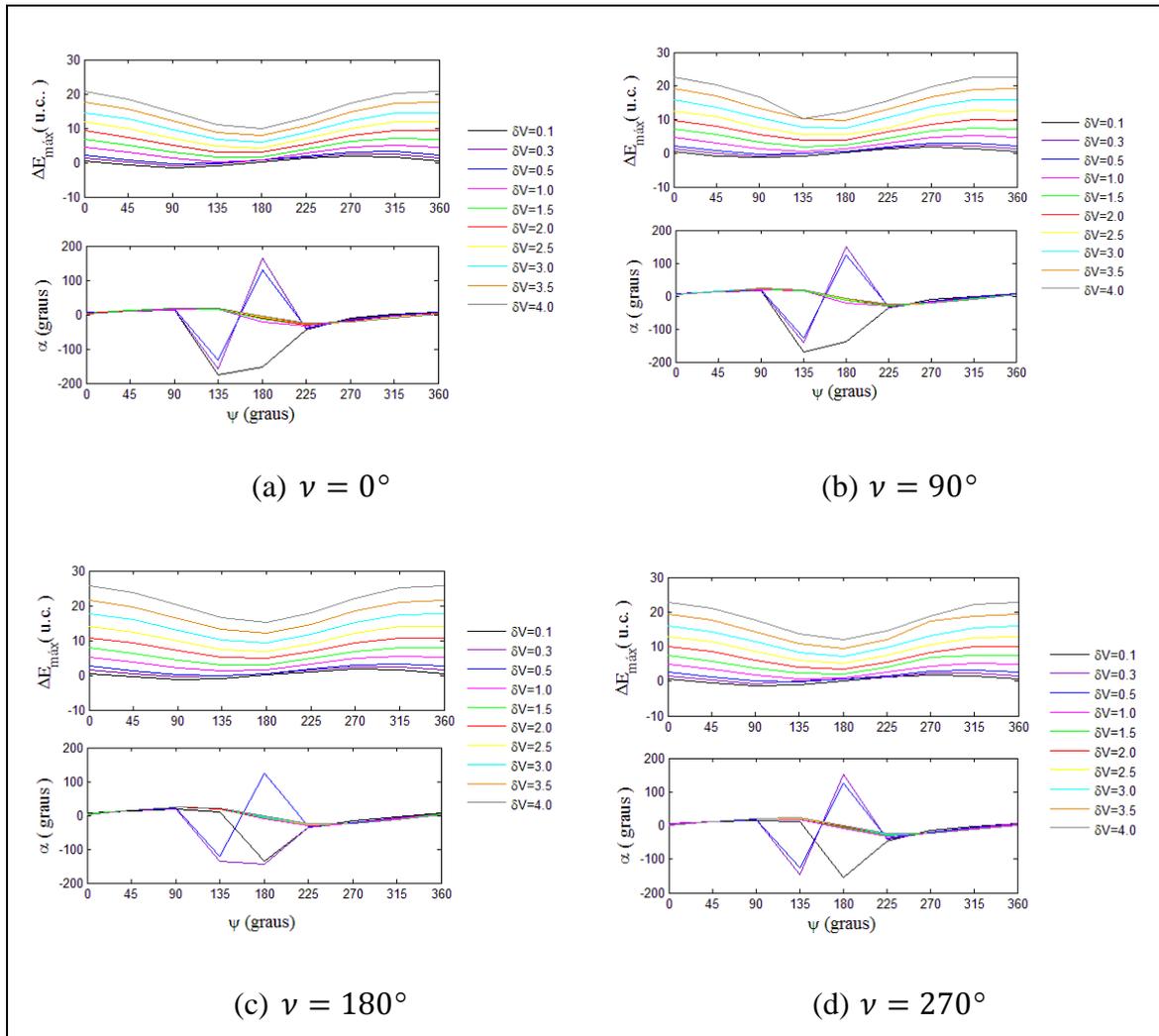


4.1.5. Máxima variação de energia ($\Delta E_{\text{máx}}$)

Para resumir toda a análise feita até aqui, alguns gráficos mostrarão a máxima variação de energia e a respectiva direção do impulso como uma função do ângulo de aproximação, para as diferentes excentricidades dos primários.

Os resultados são mostrados nas Figuras 4.16, 4.17 e 4.18, para $e = 0,1$, $e = 0,3$ e $e = 0,5$, respectivamente. Em cada figura são feitos gráficos para as anomalias verdadeiras: $\nu = 0^\circ$, $\nu = 90^\circ$, $\nu = 180^\circ$ e $\nu = 270^\circ$. A magnitude do impulso assume os valores 0,1, 0,3, 0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, 3,5 e 4,0 u.c.

Figura 4.16 – Máxima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,1$.



A Figura 4.16 quantifica o quanto a variação da energia aumenta com a magnitude do impulso. Para valores pequenos da magnitude do impulso, a curva segue os resultados esperados pela manobra de “gravidade pura” (BROUCKE, 1988). O maior valor de máxima variação da energia está localizado em $\psi = 270^\circ$, o menor valor em $\psi = 90^\circ$ e os valores são próximos de zero para $\psi = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$, todos para a manobra pura.

O aumento do impulso desloca os resultados, e agora os maiores valores de máxima variação da energia estão localizados em $\psi = 0^\circ$ e $\psi = 360^\circ$ e os menores em $\psi =$

180°. A razão é o deslocamento do valor real do ângulo de aproximação feito pelo impulso, assim como a distância do periapsis, que obtém a melhor combinação dos ganhos de energia provenientes da parte gravitacional e propulsada da manobra.

A direção do impulso permanece perto de zero na maioria dos casos, com algumas exceções, nos casos onde o impulso retrógrado é necessário para aumentar o ganho de energia a partir da parte gravitacional da manobra.

Equações empíricas para estimar a variação máxima de energia, a partir das variáveis independentes ψ e δV , foram desenvolvidas. As equações foram obtidas fazendo uma curva de ajuste dos dados disponíveis. As Equações 4.2 até 4.5 referem-se aos dados mostrados na Fig. 4.16, para $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ, \nu = 90^\circ, \nu = 180^\circ$ e $\nu = 270^\circ$, respectivamente. Os coeficientes estão descritos no Apêndice A.

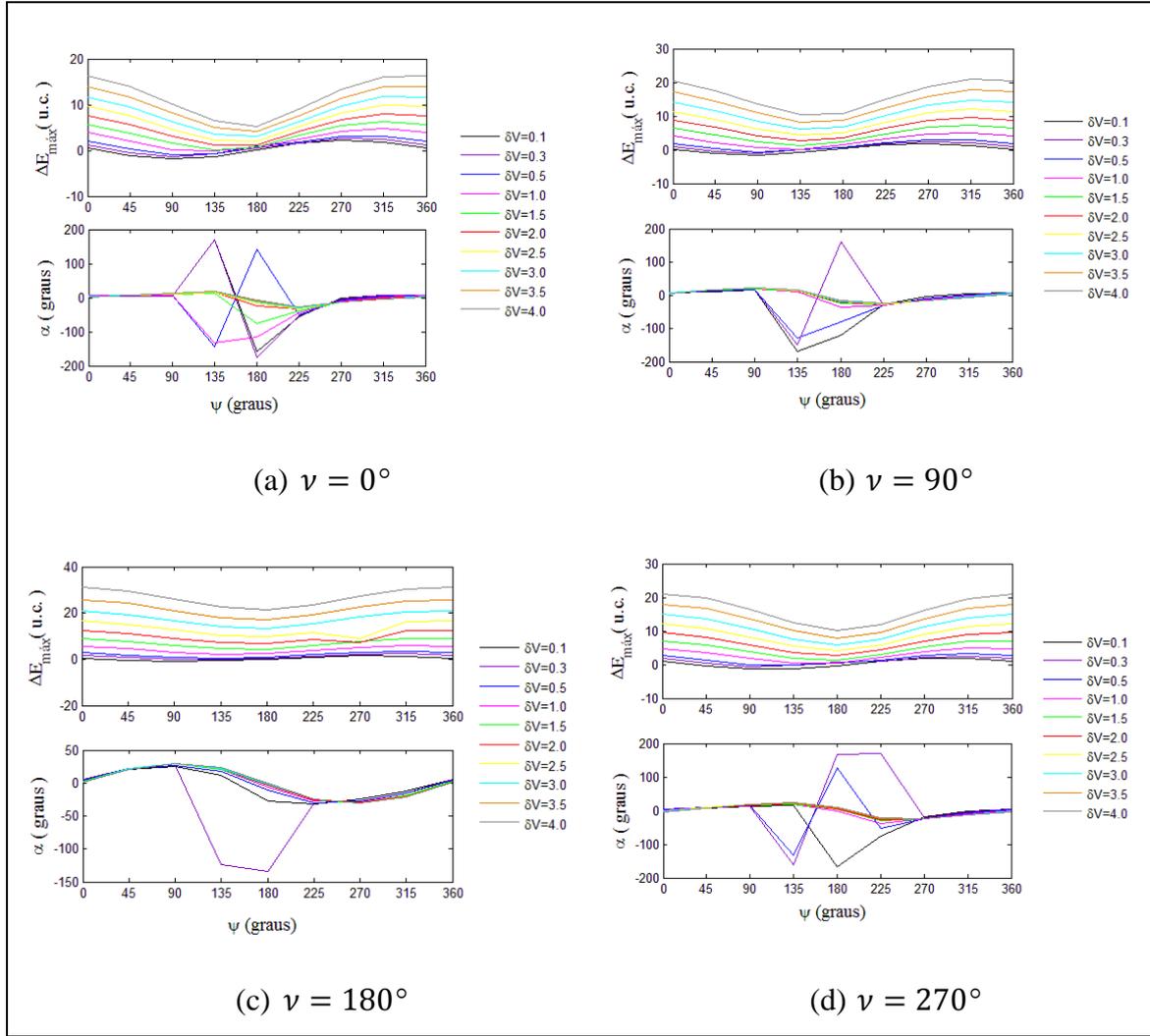
$$\Delta E_{max} = a_1\psi^6 + b_1\psi^5 + c_1\psi^4 + d_1\psi^3 + e_1\psi^2 + f_1\psi + g_1 \quad (4.2)$$

$$\Delta E_{max} = a_2\psi^6 + b_2\psi^5 + c_2\psi^4 + d_2\psi^3 + e_2\psi^2 + f_2\psi + g_2 \quad (4.3)$$

$$\Delta E_{max} = a_3\psi^6 + b_3\psi^5 + c_3\psi^4 + d_3\psi^3 + e_3\psi^2 + f_3\psi + g_3 \quad (4.4)$$

$$\Delta E_{max} = a_4\psi^6 + b_4\psi^5 + c_4\psi^4 + d_4\psi^3 + e_4\psi^2 + f_4\psi + g_4 \quad (4.5)$$

Figura 4.17 – Máxima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,3$.



A máxima variação de energia mostrada na Figura 4.17 tem as mesmas características observadas na Figura 4.16. A principal diferença é um aumento na magnitude da máxima variação da energia, obtida pelo aumento de V_2 . A importância da anomalia verdadeira também é maior, pela mesma razão.

As equações empíricas 4.6 até 4.9 referem-se aos dados mostrados na Fig. 4.17, para $e = 0,3$ e $\nu = 0^\circ, \nu = 90^\circ, \nu = 180^\circ$ e $\nu = 270^\circ$, respectivamente. Os coeficientes estão descritos no Apêndice A.

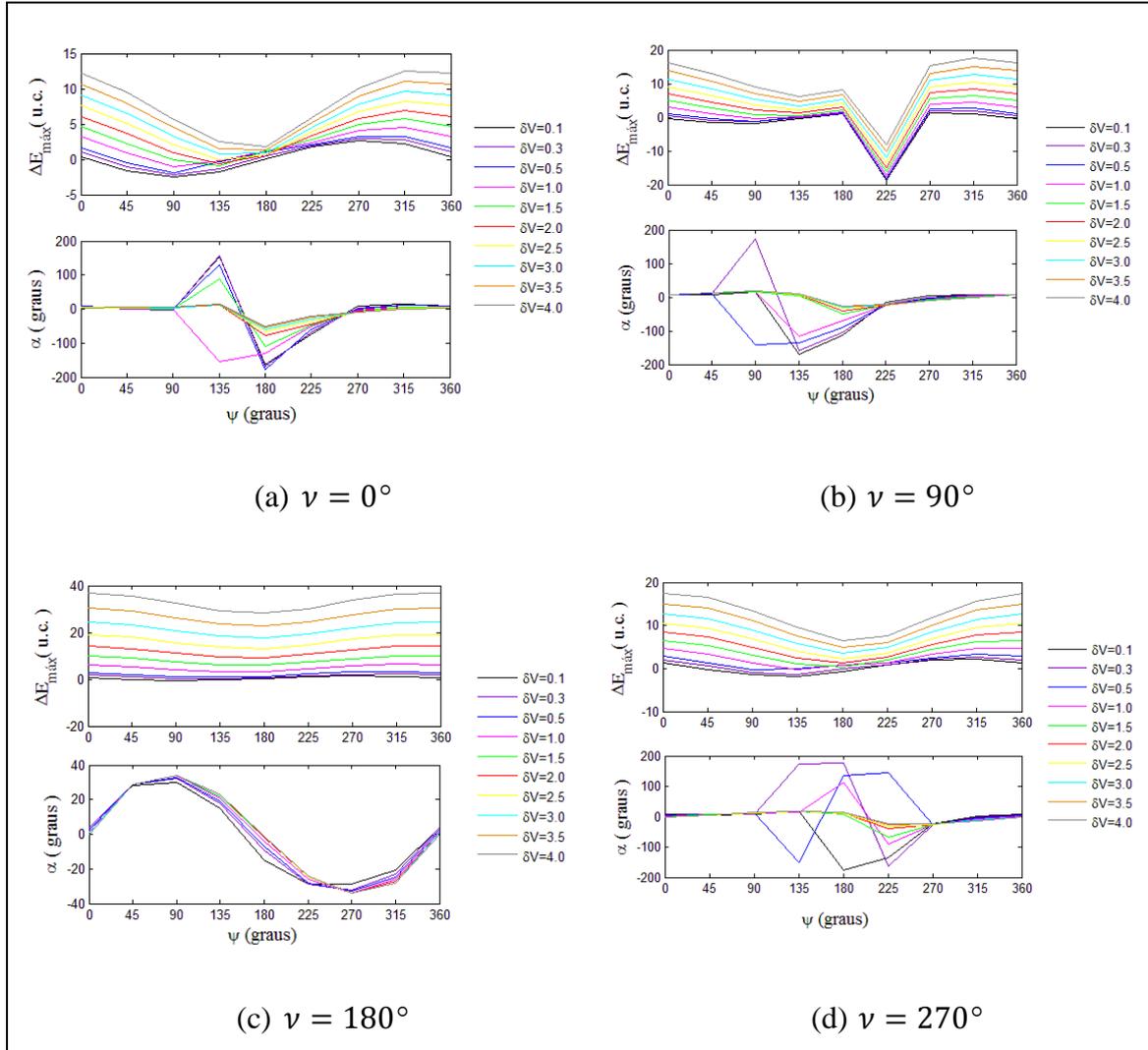
$$\Delta E_{max} = a_5 \psi^6 + b_5 \psi^5 + c_5 \psi^4 + d_5 \psi^3 + e_5 \psi^2 + f_5 \psi + g_5 \quad (4.6)$$

$$\Delta E_{max} = a_6 \psi^6 + b_6 \psi^5 + c_6 \psi^4 + d_6 \psi^3 + e_6 \psi^2 + f_6 \psi + g_6 \quad (4.7)$$

$$\Delta E_{max} = a_7\psi^6 + b_7\psi^5 + c_7\psi^4 + d_7\psi^3 + e_7\psi^2 + f_7\psi + g_7 \quad (4.8)$$

$$\Delta E_{max} = a_8\psi^6 + b_8\psi^5 + c_8\psi^4 + d_8\psi^3 + e_8\psi^2 + f_8\psi + g_8 \quad (4.9)$$

Figura 4.18 - Máxima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,5$.



A Figura 4.18 mostra a máxima variação da energia para $e = 0,5$.

O caso onde $\nu = 0^\circ$ mostra um comportamento regular da máxima variação da energia e direção do impulso próximo de zero para valores do ângulo de aproximação de 0° a 90° e de 270° a 360° . Para os outros valores de ψ , ocorre casos com a direção do impulso retrógrado.

Para $\nu = 90^\circ$, há uma acentuada perda na variação máxima de energia para $\psi = 225^\circ$. A direção do impulso é irregular para ψ entre 45° e 225° .

Para $\psi = 180^\circ$ as magnitudes da máxima variação de energia permanecem muito similares, para os diferentes valores de δV , comparado com outros valores de ψ . A direção do impulso tem um comportamento regular, com a forma de uma senoide. Não há impulsos retrógrados neste caso.

As equações empíricas 4.10 até 4.13 para $e = 0,5$ e $\nu = 0^\circ, \nu = 90^\circ, \nu = 180^\circ$ e $\nu = 270^\circ$, respectivamente, são apresentadas. Os coeficientes estão descritos no Apêndice A.

$$\Delta E_{max} = a_9\psi^6 + b_5\psi^5 + c_9\psi^4 + d_9\psi^3 + e_9\psi^2 + f_9\psi + g_9 \quad (4.10)$$

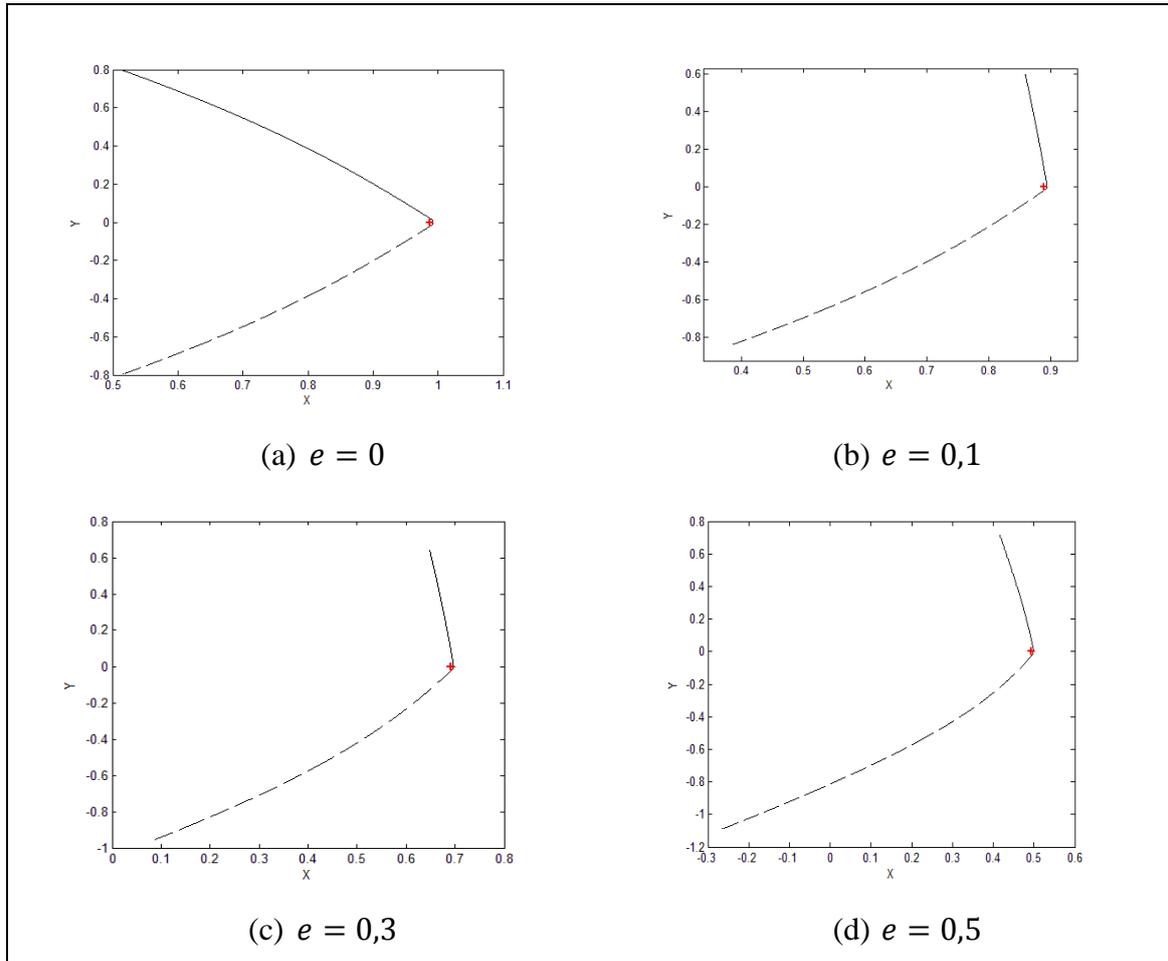
$$\Delta E_{max} = a_{10}\psi^8 + b_{10}\psi^7 + c_{10}\psi^6 + d_{10}\psi^5 + e_{10}\psi^4 + f_{10}\psi^3 + g_{10}\psi^2 + h_{10}\psi + i_{10} \quad (4.11)$$

$$\Delta E_{max} = a_{11}\psi^6 + b_{11}\psi^5 + c_{11}\psi^4 + d_{11}\psi^3 + e_{11}\psi^2 + f_{11}\psi + g_{11} \quad (4.12)$$

$$\Delta E_{max} = a_{12}\psi^6 + b_{12}\psi^5 + c_{12}\psi^4 + d_{12}\psi^3 + e_{12}\psi^2 + f_{12}\psi + g_{12} \quad (4.13)$$

A trajetória do veículo espacial para os casos resultantes em máxima variação de energia, quando $\nu = 0^\circ, \psi = 0^\circ$ e $\delta V = 4,0$ u.c., para as excentricidades 0,1, 0,3 e 0,5, no sistema fixo de referência, é apresentada na Figura 4.19. A trajetória natural ($\delta V = 0$ u.c.) e circular ($e = 0$) é apresentada para comparação (Fig. 4.19(a)). As linhas tracejadas representam a primeira parte da órbita (antes do impulso) e as linhas contínuas a segunda parte (depois do impulso). O símbolo + em vermelho representa M_2 .

Figura 4.19 – Trajetórias resultantes em máxima variação da energia para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$ (a) $e = 0$ e $\delta V = 0$ u.c., (b) $e = 0,1$ e $\delta V = 4,0$ u.c., (c) $e = 0,3$ e $\delta V = 4,0$ u.c. e (d) $e = 0,5$ e $\delta V = 4,0$ u.c. O símbolo + em vermelho representa M_2 .



A Fig. 4.19(a) é a trajetória natural do veículo espacial, para os primários em órbita circular ($e = 0$). A Fig. 4.19(b) representa a excentricidade 0,1, $\alpha = 1,0^\circ$ e $\Delta E_{m\acute{a}x} = 20,625$ u.c. A Fig. 4.19(c) é o caso com excentricidade 0,3, $\alpha = 2,0^\circ$ e $\Delta E_{m\acute{a}x} = 16,1766$ u.c. Com $e = 0,5$ temos a Fig. 4.19(d), com $\alpha = 3,0^\circ$ e $\Delta E_{m\acute{a}x} = 12,2308$ u.c.

Para esta geometria M_2 está no periapsis da órbita em relação à M_1 e o periapsis da órbita do veículo espacial está alinhado à direita de M_2 . Note que, para cada excentricidade, M_2 tem uma posição diferente no sistema. Isto ocorre porque a excentricidade altera a distância entre os primários.

4.1.6. Mínima variação de energia (ΔE_{\min})

O foco principal é ganhar energia depois da manobra, mas pode haver casos em que a necessidade seja diminuir a energia depois da manobra. Essa situação ocorre quando o

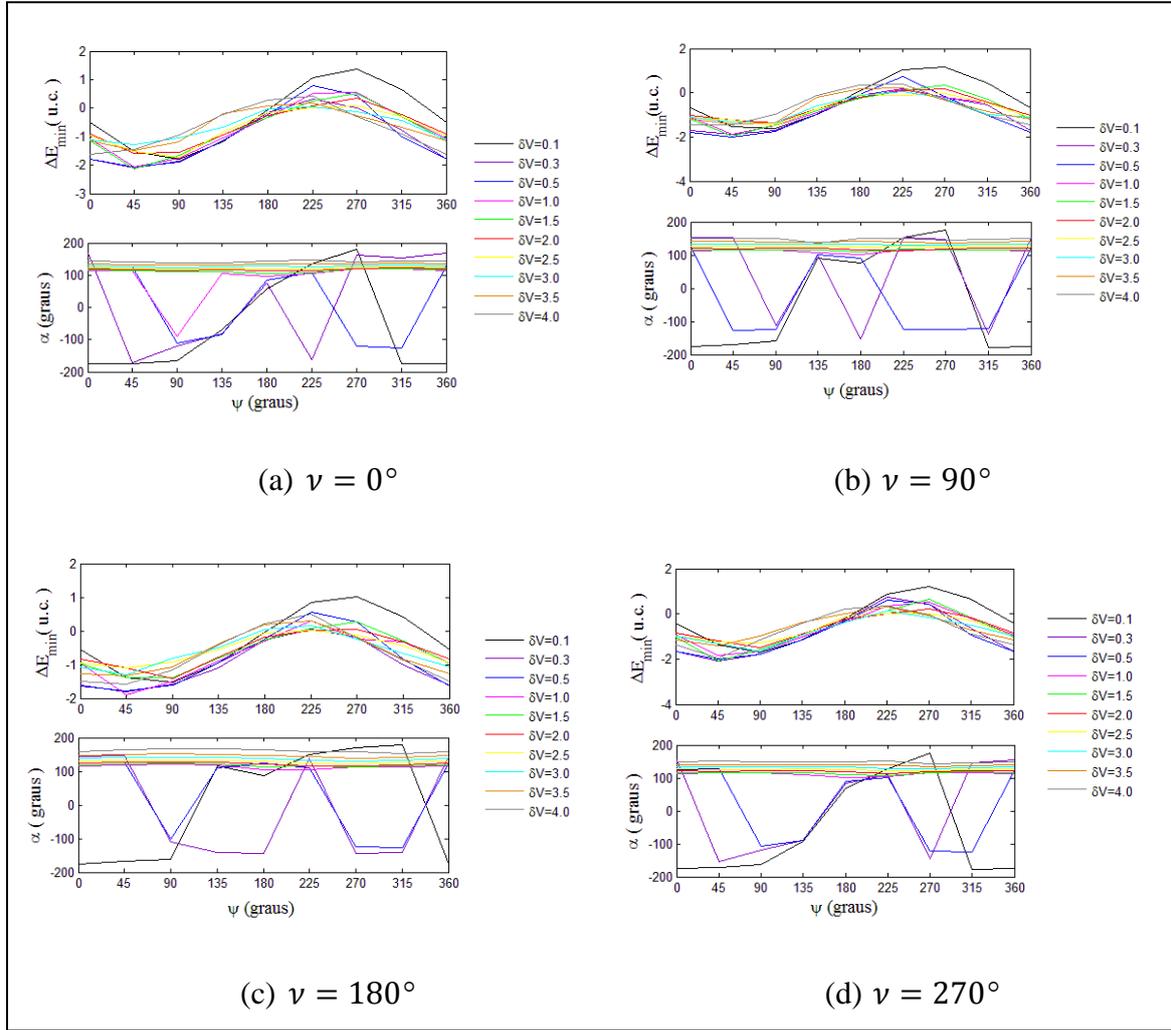
objetivo é capturar um veículo espacial. Pode ocorrer quando da chegada dele ao planeta destino em uma missão interplanetária, ou quando do retorno de um veículo espacial a Terra, etc.

A mínima variação de energia (ΔE_{min}) e a respectiva direção do impulso como uma função do ângulo de aproximação, para as diferentes excentricidades dos primários, serão apresentadas. Lembrando que ΔE_{min} pode ser positivo, quando há um aumento da energia na segunda órbita em relação à primeira. Neste caso é calculado o menor aumento possível. Pode ser negativo, quando o veículo espacial perde energia depois da manobra, comparado com a primeira órbita.

As equações empíricas que estimam a mínima variação de energia, a partir das variáveis independentes ψ e δV , foram obtidas a partir da curva de ajuste dos dados disponíveis. Os coeficientes das equações estão descritos no Apêndice A.

A Figura 4.20 mostra a variação mínima de energia para $e = 0,1$. Em cada figura há gráficos para as anomalias verdadeiras: $\nu = 0^\circ, \nu = 90^\circ, \nu = 180^\circ$ e $\nu = 270^\circ$. A magnitude do impulso assume os valores $\delta V = 0,1$ u. c., $\delta V = 0,3$ u. c., $\delta V = 0,5$ u. c., $\delta V = 1,0$ u. c., $\delta V = 1,5$ u. c., $\delta V = 2,0$ u. c., $\delta V = 2,5$ u. c., $\delta V = 3,0$ u. c., $\delta V = 3,5$ u. c. e $\delta V = 4,0$ u. c.

Figura 4.20 - Mínima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,1$.



As equações empíricas são apresentadas da Eq. 4.14 a 4.17.

$$\Delta E_{min} = a_{13}\psi^7 + b_{13}\psi^6 + c_{13}\psi^5 + d_{13}\psi^4 + e_{13}\psi^3 + f_{13}\psi^2 + g_{13}\psi + h_{13} \quad (4.14)$$

$$\Delta E_{min} = a_{14}\psi^7 + b_{14}\psi^6 + c_{14}\psi^5 + d_{14}\psi^4 + e_{14}\psi^3 + f_{14}\psi^2 + g_{14}\psi + h_{14} \quad (4.15)$$

$$\Delta E_{min} = a_{15}\psi^7 + b_{15}\psi^6 + c_{15}\psi^5 + d_{15}\psi^4 + e_{15}\psi^3 + f_{15}\psi^2 + g_{15}\psi + h_{15} \quad (4.16)$$

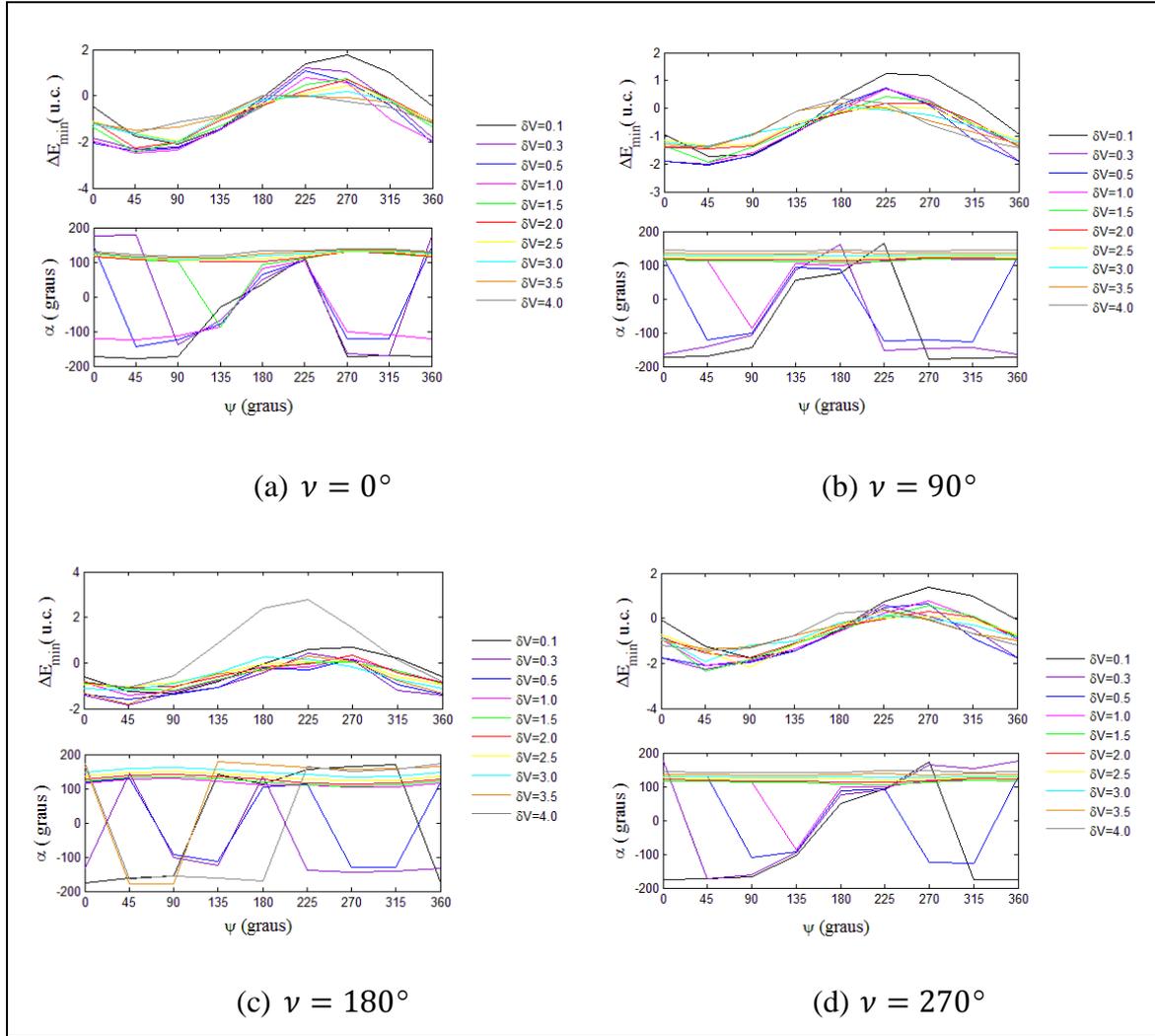
$$\Delta E_{min} = a_{16}\psi^7 + b_{16}\psi^6 + c_{16}\psi^5 + d_{16}\psi^4 + e_{16}\psi^3 + f_{16}\psi^2 + g_{16}\psi + h_{16} \quad (4.17)$$

Uma característica visível é que, para o ângulo de aproximação entre 0° e 180° , ocorre perda de energia depois da manobra de Swing-By propulsado e, para $180^\circ < \psi < 360^\circ$, há valores positivos de ΔE_{min} , o que significa que o esforço da manobra foi feito para ganhar o mínimo possível de energia.

A direção de aplicação do impulso ocorre para os valores extremos apresentados, próximos de -180° ou 180° . Esse é um comportamento esperado, já que um impulso retrógrado tem uma componente na direção oposta ao movimento do veículo espacial, desacelerando-o para forçar a perder energia. Para magnitude do impulso maior ou igual a 1,0 u.c. o impulso afasta o veículo espacial do corpo secundário. Para impulso menor que 1,0 u.c. há casos em que o veículo espacial é enviado na direção do corpo.

A Figura 4.21 mostra a variação mínima de energia, para $e = 0,3$, com anomalias verdadeiras de $\nu = 0^\circ, \nu = 90^\circ, \nu = 180^\circ, \nu = 270^\circ$ e magnitude do impulso assumindo os valores $\delta V = 0,1$ u.c., $\delta V = 0,3$ u.c., $\delta V = 0,5$ u.c., $\delta V = 1,0$ u.c., $\delta V = 1,5$ u.c., $\delta V = 2,0$ u.c., $\delta V = 2,5$ u.c., $\delta V = 3,0$ u.c., $\delta V = 3,5$ u.c. e $\delta V = 4,0$ u.c.

Figura 4.21 - Mínima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,3$.



A Figura 4.21 tem o comportamento similar ao da Figura 4.20, com a mínima variação da energia oscilando entre minimizar o ganho (valores positivos) e maximizar a perda (valores negativos). O impulso é retrógrado e, em situações com magnitude pequena (até 0,5 u.c.), tende a enviar o veículo espacial na direção de M_2 . As equações empíricas são apresentadas da Eq. 4.18 a 4.21.

$$\Delta E_{min} = a_{17}\psi^7 + b_{17}\psi^6 + c_{17}\psi^5 + d_{17}\psi^4 + e_{17}\psi^3 + f_{17}\psi^2 + g_{17}\psi + h_{17} \quad (4.18)$$

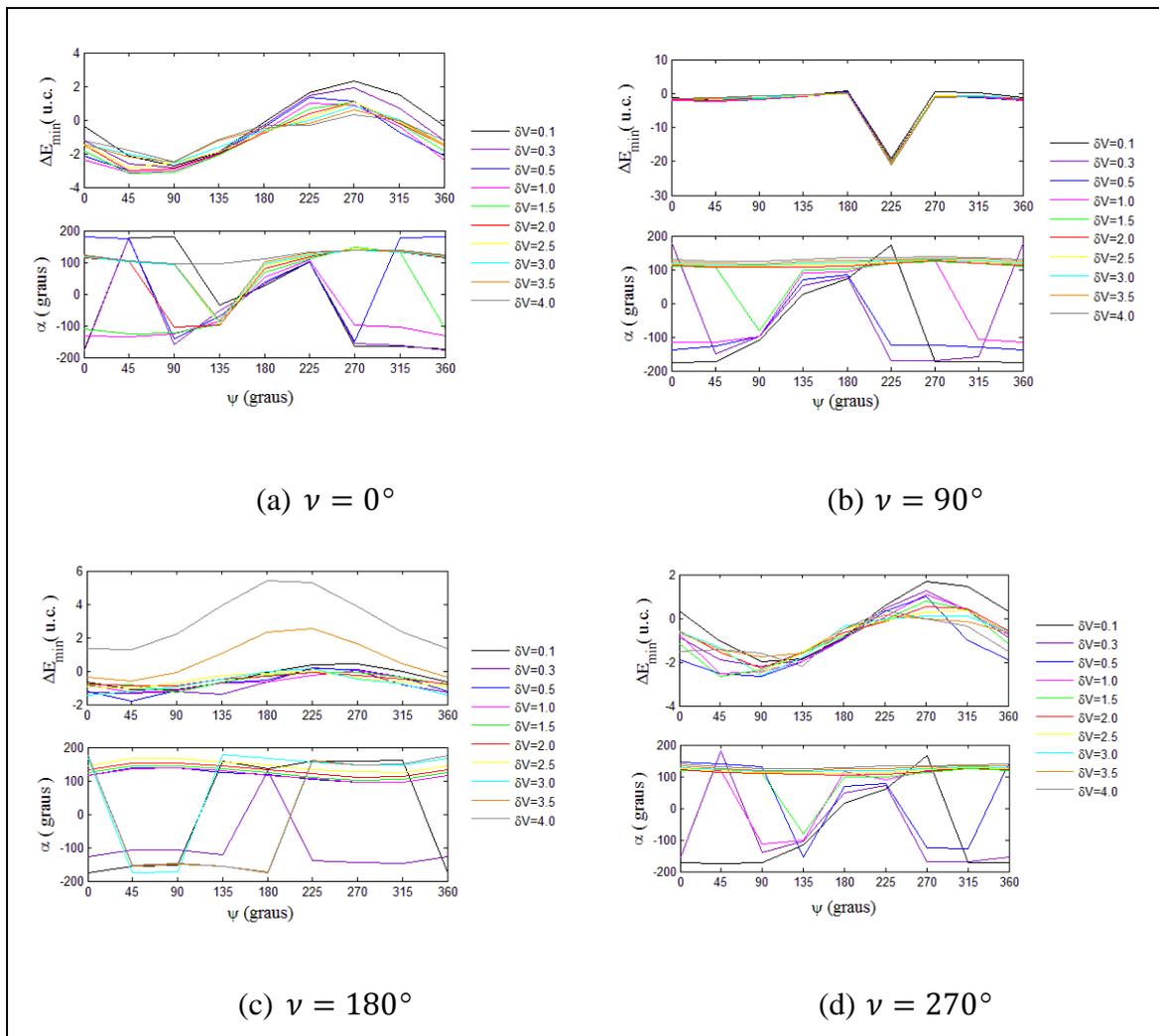
$$\Delta E_{min} = a_{18}\psi^7 + b_{18}\psi^6 + c_{18}\psi^5 + d_{18}\psi^4 + e_{18}\psi^3 + f_{18}\psi^2 + g_{18}\psi + h_{18} \quad (4.19)$$

$$\Delta E_{min} = a_{19}\psi^7 + b_{19}\psi^6 + c_{19}\psi^5 + d_{19}\psi^4 + e_{19}\psi^3 + f_{19}\psi^2 + g_{19}\psi + h_{19} \quad (4.20)$$

$$\Delta E_{min} = a_{20}\psi^7 + b_{20}\psi^6 + c_{20}\psi^5 + d_{20}\psi^4 + e_{20}\psi^3 + f_{20}\psi^2 + g_{20}\psi + h_{20} \quad (4.21)$$

A Figura 4.22 apresenta a mínima variação da energia para $e = 0,5$.

Figura 4.22 - Mínima variação de energia e direção do impulso vs ângulo de aproximação para $e = 0,5$.



Quando $\nu = 0^\circ$ e $\nu = 270^\circ$, a mínima variação da energia tem comportamento similar aos casos anteriores. Quando $\nu = 180^\circ$ também há uma similaridade, com exceção dos casos com impulso 3,5 u.c. e 4,0 u.c., que se destacam da curva em relação à magnitude de ΔE_{min} . Para $\nu = 90^\circ$ e ângulo de aproximação entre 180° e 270° , a perda de energia é significativamente maior em relação a todos os outros casos apresentados. Ocorre um

pico em $\psi = 225^\circ$ e a variação da energia chega a valores em torno de -20 u.c. As equações empíricas para $e = 0,5$ são dadas nas Eqs. 4.22 a 4.25.

$$\Delta E_{min} = a_{21}\psi^7 + b_{21}\psi^6 + c_{21}\psi^5 + d_{21}\psi^4 + e_{21}\psi^3 + f_{21}\psi^2 + g_{21}\psi + h_{21} \quad (4.22)$$

$$\Delta E_{min} = a_{22}\psi^8 + b_{22}\psi^7 + c_{22}\psi^6 + d_{22}\psi^5 + e_{22}\psi^4 + f_{22}\psi^3 + g_{22}\psi^2 + h_{22}\psi + i_{22} \quad (4.23)$$

$$\Delta E_{min} = a_{23}\psi^7 + b_{23}\psi^6 + c_{23}\psi^5 + d_{23}\psi^4 + e_{23}\psi^3 + f_{23}\psi^2 + g_{23}\psi + h_{23} \quad (4.24)$$

$$\Delta E_{min} = a_{24}\psi^7 + b_{24}\psi^6 + c_{24}\psi^5 + d_{24}\psi^4 + e_{24}\psi^3 + f_{24}\psi^2 + g_{24}\psi + h_{24} \quad (4.25)$$

4.2. Manobras de Swing-By com impulso aplicado em diferentes posições da órbita (θ variando)

Uma manobra de Swing-By propulsado com impulso aplicado no momento em que o veículo espacial passa pelo periapsis da órbita é um caso particular que foi estudado inicialmente. Este ponto de aplicação pode variar na órbita, estando ele na vizinhança do periapsis e dentro da esfera de influência (ARAÚJO, 2008) do corpo secundário. θ é o ângulo que define o local de aplicação do impulso na trajetória do veículo espacial (ver Figura 3.2).

Inicialmente pode parecer óbvio que o melhor local para aplicar o impulso na trajetória seja no periapsis da órbita. Porém, os resultados mostram que, quando o sistema de primários está em órbita elíptica, na maioria das situações isso não é válido. Quando se aplica um impulso em diferentes condições, pode-se aumentar ou diminuir a variação de energia devido à parte gravitacional da manobra. Isso ocorre porque a órbita muda instantaneamente, logo seus parâmetros também mudam, incluindo uma nova distância do periapsis até o corpo secundário e o ângulo de aproximação, que poderá ser menor (essa mudança irá depender das condições iniciais, pode-se querer minimizar o efeito do Swing-By e então fazer com que r_p seja maior) e, conseqüentemente, ter um Swing-By mais eficiente. O resultado desta troca é positivo. Por isso a aplicação do impulso fora

do periapsis pode ser mais eficiente para algumas condições, além também de gerar uma manobra mais flexível, pois torna possível abranger vários pontos da trajetória.

Mapas de cores serão plotados mostrando a variação da energia como uma função do ângulo que define a direção do impulso e o ângulo que define o ponto de aplicação do mesmo.

São 960 diferentes condições iniciais, as mesmas adotadas na seção 4.1, que foram integradas numericamente. A magnitude do impulso varia de 0,1 a 4,0 u.c. O ângulo que define a direção do impulso (α) varia de -180° a 180° , com passo de $1,0^\circ$. O ângulo θ , que define o ponto de aplicação do impulso, foi variado entre -180° e 180° , com passo de $0,1^\circ$. Porém, nestes casos, só serão considerados os valores de θ que geram um ponto de aplicação para o impulso dentro da esfera de influência do corpo secundário.

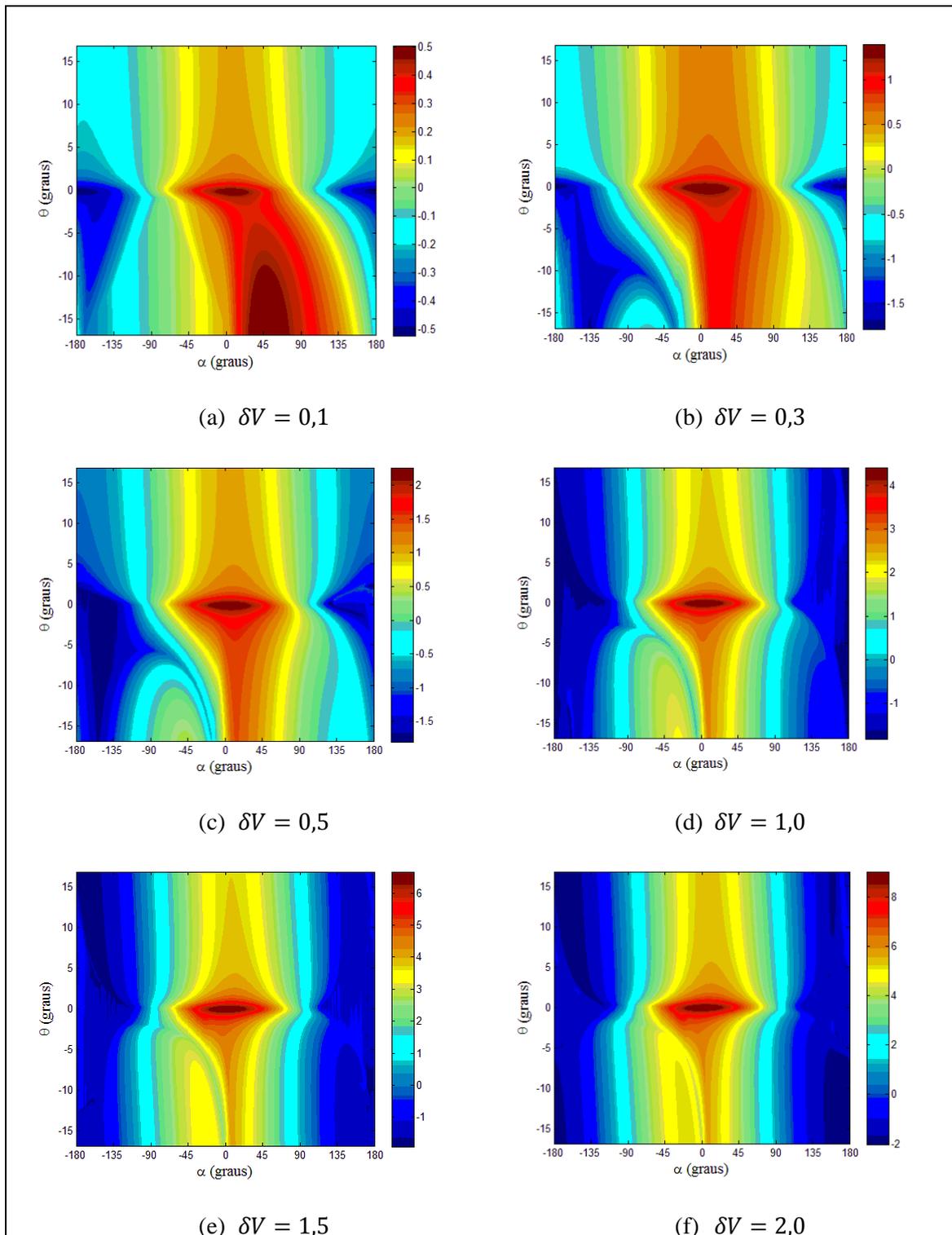
Segundo Araújo (2008), esfera de influência é uma região limitada por um raio em que uma partícula com uma dada velocidade relativa é significativamente influenciada pelo corpo secundário. Adotamos a Esfera de Hill (MURRAY; DERMOTT, 1999) para analisar a influência do corpo. O raio que define esta esfera é dado por:

$$R_{HILL} = \left(\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \right) \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3} \quad (4.26)$$

Somente algumas das trajetórias estudadas serão apresentadas para análise. As informações de variação máxima ($\Delta E_{máx}$) e mínima ($\Delta E_{mín}$) da energia referente a cada condição plotada e seus dados correspondentes: α , θ , V_{inf+} (velocidade do veículo espacial com relação ao corpo por onde faz a passagem próxima após a manobra) e R (distância entre o corpo secundário e o veículo espacial no instante de aplicação do impulso na manobra) serão apresentadas nas tabelas.

As variações da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$ e diferentes valores de impulso são apresentadas a seguir. Note que, para essa configuração, o planeta, a lua e o periapsis da órbita do veículo espacial estão todos alinhados, sendo o periapsis do veículo espacial a direita da lua, que por sua vez está à direita do planeta.

Figura 4.23 - Variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$ e diferentes valores para δV .



Para $\psi = 0^\circ$, a mudança na energia com base na manobra de Swing-By padrão é nula, forçando assim a necessidade de aproveitar ao máximo o impulso para variar a energia.

A variação da energia aumenta com o aumento na magnitude do impulso. Isto pode ser visto a partir dos valores da escala de cores. Este é um comportamento esperado, uma

vez que um impulso com maior magnitude pode dar mais energia para o sistema. Os resultados apresentados podem quantificar este aumento, o que não é fácil de estimar devido à complexa dinâmica envolvida.

A máxima variação da energia para valores do impulso acima de 0,1 u.c. estão localizadas aproximadamente no centro dos gráficos, para direções do impulso positivas e próximas de zero, aproveitando ao máximo a parte impulsiva da manobra (ver Tabela 4.8).

No caso de $\delta V = 2,0$ u.c., variar o ponto de aplicação do impulso não otimizou a trajetória e a melhor opção foi aplicar o impulso no periapsis da órbita.

As regiões de mínima variação da energia estão concentradas nas bordas laterais das figuras, com α próximo de $\pm 180^\circ$ (ver Tabela 4.9). Isto corresponde a aplicar o impulso na direção oposta ao movimento do veículo espacial, para desacelerá-lo e forçar a diminuição na energia.

Os resultados limitam-se as trajetórias em que o ponto de aplicação do impulso pertence à região de influência do corpo secundário. Houve ocorrências de captura e colisões do veículo espacial pela Lua nas situações apresentadas.

A Tabela 4.8 mostra os dados referentes à máxima variação da energia e a Tabela 4.9 referente à mínima variação da energia relativa à Figura 4.23. As informações de máxima e mínima variação de energia e o α correspondente também são apresentadas. O objetivo é mostrar o ganho obtido por otimizar θ .

Tabela 4.8 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 0^\circ$.

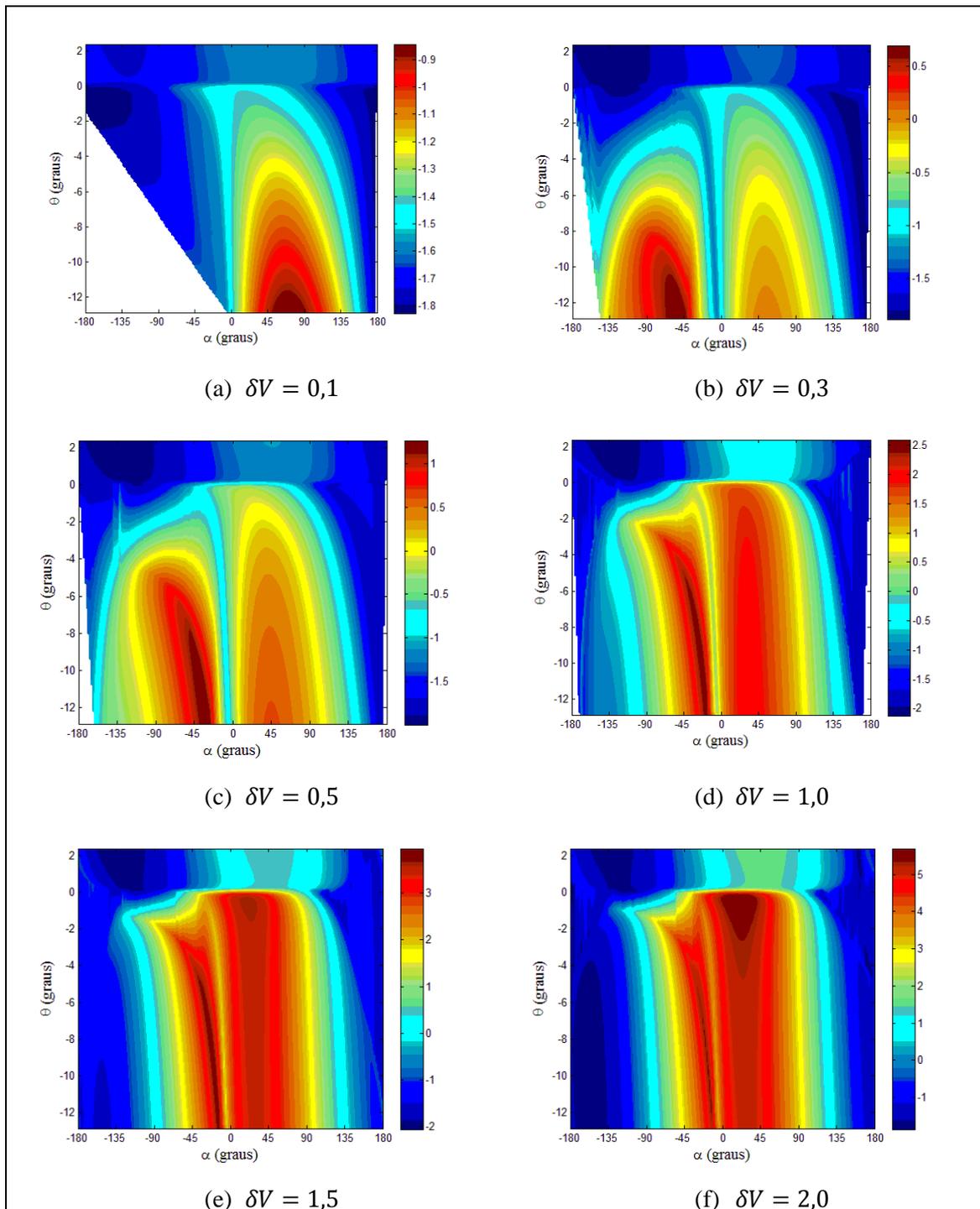
δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 0^\circ$							
0,1	0,48412	6,0	0,51269	48,0	-16,8	1,39346	0,14295
0,3	1,39871	6,0	1,41638	7,0	-0,2	1,86703	0,00522
0,5	2,27838	6,0	2,29892	6,0	-0,1	2,21580	0,00504
1,0	4,46197	4,0	4,47858	4,0	-0,1	2,95030	0,00504
1,5	6,73404	3,0	6,73889	3,0	-0,1	3,59768	0,00504
2,0	9,15248	3,0	9,15248	3,0	0,0	4,20809	0,00495

Tabela 4.9 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 0^\circ$.

δV (u.c.)	ΔE_{min} (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 0^\circ$							
0,1	-0,51561	-175,0	-0,52249	-173,0	-0,2	0,95229	0,00522
0,3	-1,78389	169,0	-1,78928	177,0	0,2	0,77122	0,00522
0,5	-1,78802	129,0	-1,80726	-175,0	1,8	0,81624	0,01725
1,0	-1,08637	114,0	-1,82142	175,0	14,9	0,86769	0,12826
1,5	-1,15529	116,0	-1,91526	-173,0	16,8	1,27360	0,14295
2,0	-0,92045	119,0	-2,03252	-169,0	16,8	1,28961	0,14295

Segue a variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 90^\circ$ e diferentes valores de impulso.

Figura 4.24 - Variação da energia para $e = 0,1, \nu = 0^\circ, \psi = 90^\circ$ e diferentes valores para δV .



Quando $\psi = 90^\circ$ ocorre a maior perda de energia devido ao Swing-By padrão. O veículo espacial passa na frente do corpo celeste e é desacelerado devido à gravidade deste corpo, forçando a perda de energia. Neste caso, quando o objetivo é aumentar a energia depois da manobra, é necessário minimizar o efeito da gravidade do corpo sobre o veículo espacial. Quando o impulso é aplicado no periapsis da órbita ($\theta = 0^\circ$), a direção é configurada para afastar o veículo espacial do corpo secundário, logo α é

positivo. Neste caso ocorreram situações em que α é negativo, mas a posição de aplicação do impulso em um ponto diferente do periapsis compensou a perda que se teve em enviar o veículo espacial na direção do corpo. O impulso foi aplicado antes do periapsis, mudando as características da trajetória e minimizando os efeitos indesejados.

Para $\delta V = 0,1$ u.c., o impulso não foi suficiente para mudar as características da trajetória. O veículo espacial continuou com menos energia na segunda órbita em relação à primeira, antes do impulso. O que se conseguiu foi diminuir essa perda, que foi de -1,46160 u.c. para -0,83611 u.c.

A configuração $\psi = 90^\circ$ corresponde à mínima variação de energia no caso circular. Neste caso o objetivo é perder energia depois da manobra com impulso. Logo, além de um ângulo de aproximação favorável, a direção do impulso retrógrada e negativa faz o veículo espacial desacelerar e se aproximar do corpo celeste, maximizando o efeito da gravidade, fazendo assim o veículo espacial perder mais energia. As regiões em branco dos gráficos da Figura 4.24 pertencem ao grupo resultante em capturas ou colisões do veículo espacial. A Tabela 4.10 mostra os dados referentes à máxima variação da energia e a Tabela 4.11 é referente à mínima variação da energia relativa à Figura 4.24.

Tabela 4.10 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ$.

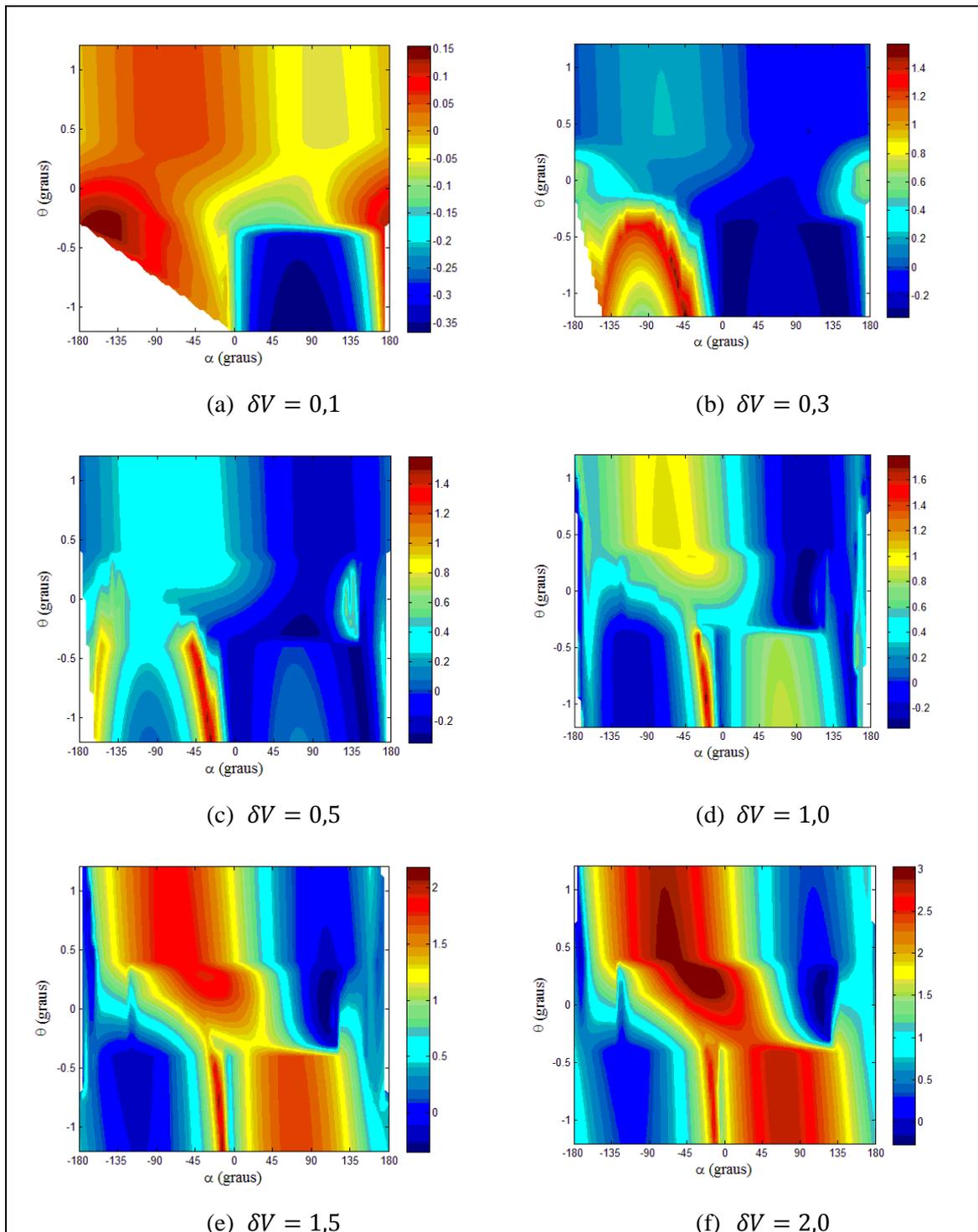
δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 90^\circ$							
0,1	-1,46160	13,0	-0,83611	71,0	-12,9	1,63964	0,14253
0,3	-0,97782	14,0	0,71584	-49,0	-12,9	1,59704	0,14253
0,5	-0,42064	15,0	1,29107	-29,0	-12,9	1,83153	0,14253
1,0	1,16374	17,0	2,63485	-17,0	-12,5	2,35665	0,13795
1,5	2,95717	18,0	4,01277	-17,0	-10,5	2,86611	0,11533
2,0	4,94217	18,0	5,75816	20,0	-0,4	3,85229	0,00826

Tabela 4.11 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ$.

δV (u.c.)	ΔE_{min} (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 90^\circ$							
0,1	-1,79443	-165,0	-1,8276896	-160,0	-0,7	1,59099	0,01133
0,3	-1,87137	-121,0	-1,8881751	-120,0	-0,1	1,44522	0,00542
0,5	-1,90920	-110,0	-1,9928362	-132,0	2,4	1,45785	0,14346
1,0	-1,75853	-91,0	-2,127076	-131,0	2,4	1,10185	0,14346
1,5	-1,64232	112,0	-2,0655732	-131,0	2,4	1,06430	0,14346
2,0	-1,55040	115,0	-1,8660492	-113,0	0,1	1,30740	0,00696

A variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 180^\circ$ é apresentada. Para $\psi = 180^\circ$ o efeito devido à parte gravitacional da manobra é similar ao caso $\psi = 0^\circ$, onde a variação da energia é nula.

Figura 4.25 - Variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 180^\circ$ e diferentes valores para δV .



Se o objetivo é aumentar a energia, o impulso é aplicado de tal forma que o ângulo de aproximação se desloca para a região de ganho de energia. Note que também há regiões de capturas ou colisões do veículo espacial pelo corpo secundário e que, como nos casos anteriores, a variação da energia aumenta com o aumento da magnitude do impulso. Os

dados referentes à máxima variação da energia estão na Tabela 4.12 e os dados referentes à mínima variação de energia na Tabela 4.13.

Tabela 4.12 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$.

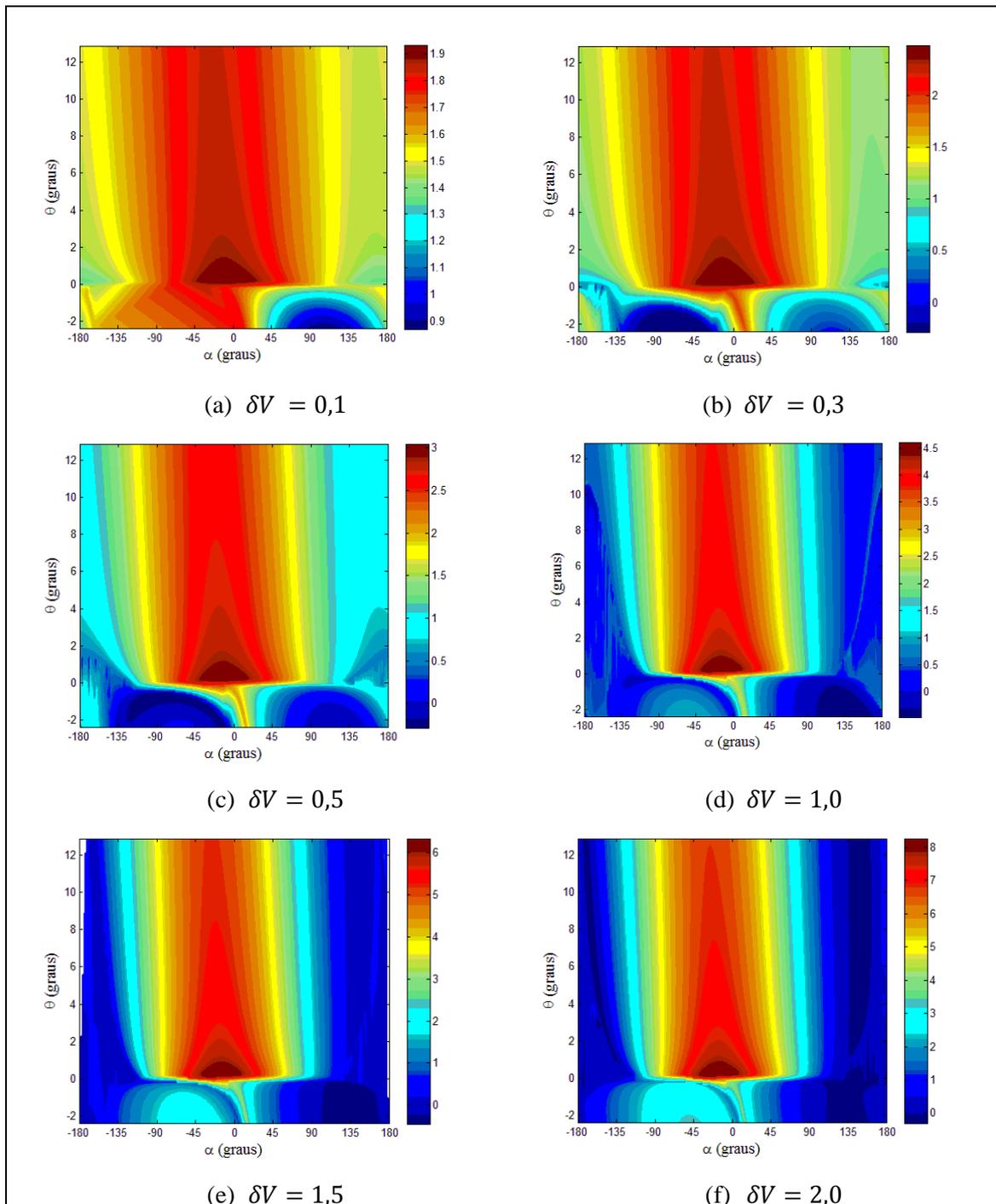
δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 180^\circ$							
0,1	0,09413	-154,0	0,16294	-153,0	-0,3	0,88255	0,01062
0,3	0,67327	165,0	1,60836	-44,0	-1,2	1,63362	0,13938
0,5	0,70871	129,0	1,70307	-29,0	-1,1	1,97737	0,13343
1,0	0,78158	-21,0	1,85293	-20,0	-0,9	2,64189	0,12158
1,5	1,69280	-13,0	2,25080	-18,0	-0,7	3,04782	0,10964
2,0	2,86834	-9,0	3,06809	-33,0	0,3	3,30232	0,01062

Tabela 4.13 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$.

δV (u.c.)	ΔE_{min} (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 180^\circ$							
0,1	-0,06609	58,0	-0,36683	78,0	-1,2	1,06735	0,13938
0,3	-0,16273	75,0	-0,35063	126,0	-0,4	1,21472	0,09102
0,5	-0,23434	84,0	-0,34636	81,0	-0,3	1,12110	0,01062
1,0	-0,33653	97,0	-0,35504	99,0	-0,2	1,12849	0,00709
1,5	-0,34500	106,0	-0,34557	107,0	0,1	1,16053	0,00550
2,0	-0,27383	113,0	-0,27517	115,0	0,1	1,41737	0,00550

Os resultados para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$ são mostrados a seguir.

Figura 4.26 - Variação da energia para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores para δV .



O ângulo de aproximação igual a 270° é onde se tem o maior ganho de energia devido ao Swing-By padrão. Note na Tabela 4.14 que, para todos os valores de impulso, o veículo espacial é enviado na direção do corpo secundário. O objetivo é aproveitar ao máximo o efeito de ganho que a gravidade causa pelo fato do veículo espacial passar atrás do corpo celeste e ser acelerado. O impulso é aplicado sempre depois do periapsis da órbita, permitindo assim aproveitar ao máximo a parte gravitacional, que neste caso trabalha a favor da manobra.

Se o objetivo é a mínima variação de energia, a manobra precisa minimizar os efeitos da gravidade. Logo, o impulso é aplicado antes do periapsis da órbita, para modificar a geometria do Swing-By e, na maioria dos casos, na direção retrógrada e positiva, afastando o veículo espacial do corpo. Veja a Tabela 4.15.

Na Figura 4.26(a) a mínima variação de energia significa que o veículo espacial ganhou menos, mas ainda sim ganhou energia na segunda órbita. Note que seu valor é positivo. O impulso não foi suficiente para modificar a órbita de tal forma que o veículo espacial perdesse energia na segunda órbita em relação à primeira. Nas Figuras (b) e (c) o veículo tem uma variação mínima negativa. O impulso foi aplicado antes do periapsis da órbita, com θ negativo, a uma distância suficiente, que fez o veículo dar a volta no corpo secundário. Para $\delta V \geq 1,0$ u.c., o impulso aplicado antes do periapsis, retrógrado e na direção contrária a M_2 , foi o suficiente para afastar o veículo do corpo secundário.

Tabela 4.14 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 270^\circ$.

δV (u.c.)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
$\psi = 270^\circ$							
0,1	1,92484	-9,0	1,93968	-7,0	0,1	1,56032	0,00542
0,3	2,43840	-13,0	2,49843	-10,0	0,2	1,86742	0,00627
0,5	2,96108	-16,0	3,07524	-11,0	0,2	2,15342	0,00627
1,0	4,38810	-18,0	4,63754	-13,0	0,2	2,79808	0,00627
1,5	6,02033	-19,0	6,39454	-14,0	0,2	3,39217	0,00627
2,0	7,86508	-19,0	8,35348	-15,0	0,2	3,95733	0,00627

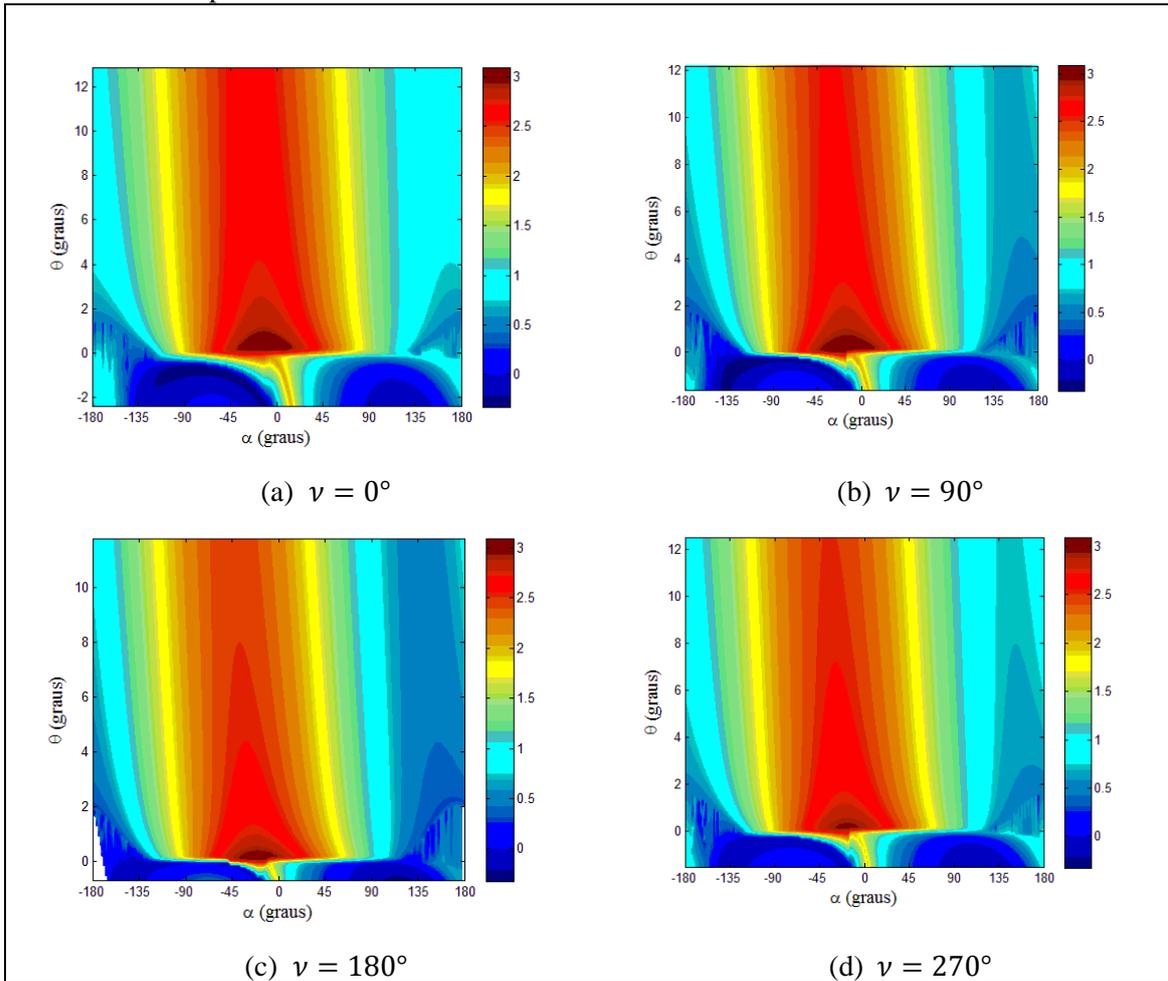
Tabela 4.15 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\psi = 270^\circ$.

δV (u.c.)	ΔE_{min} (u.c) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	ΔE_{min} (u.c)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c)
$\psi = 270^\circ$							
0,1	1,35606	179,0	0,86947	108,0	-2,4	1,21778	0,14346
0,3	0,01675	163,0	-0,28477	-58,0	-1,9	1,14772	0,12252
0,5	0,43579	-121,0	-0,28775	-77,0	-0,7	1,15513	0,06278
1,0	0,56334	121,0	-0,46619	136,0	-2,4	1,07307	0,14346
1,5	0,52483	121,0	-0,44729	136,0	-2,4	1,47922	0,14346
2,0	0,33439	121,0	-0,32223	135,0	-0,2	1,29612	0,02376

A excentricidade da órbita dos primários causa modificações no comportamento da manobra, comparada com o caso circular. A velocidade (V_2) de M_2 em relação ao centro de massa do sistema, que antes era constante, passa a variar. Ela varia de acordo com a posição da lua em relação ao planeta, e essa posição é dada por ν . Se $\nu = 0^\circ$, a lua está no periapsis da órbita e V_2 é maior e, se $\nu = 180^\circ$, a lua está no apoapsis da órbita e V_2 é menor. A variação da energia é dependente de V_2 . Partindo destas informações compararemos o efeito da excentricidade e da anomalia verdadeira de M_2 nos resultados.

A Figura 4.27 apresenta a variação da energia nas trajetórias com $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,5$ u.c., para valores da anomalia verdadeira de M_2 iguais a 0° , 90° , 180° e 270° . Note que os valores da escala de cores são os mesmos.

Figura 4.27 - Variação da energia para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$, $\delta V = 0,5$ u.c. e diferentes valores para anomalia verdadeira.



Note na Tabela 4.16 que a máxima variação da energia em $\nu = 0^\circ$ é maior que em $\nu = 180^\circ$, tanto no caso em que $\theta = 0^\circ$ quanto no caso que θ varia. Mas, quando θ varia, a magnitude da máxima variação da energia é maior. O oposto ocorre para a mínima variação de energia, e a perda é maior em $\nu = 180^\circ$ do que em $\nu = 0^\circ$, como esperado (veja Tabela 4.17).

Tabela 4.16 – Máxima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,5$ u.c.

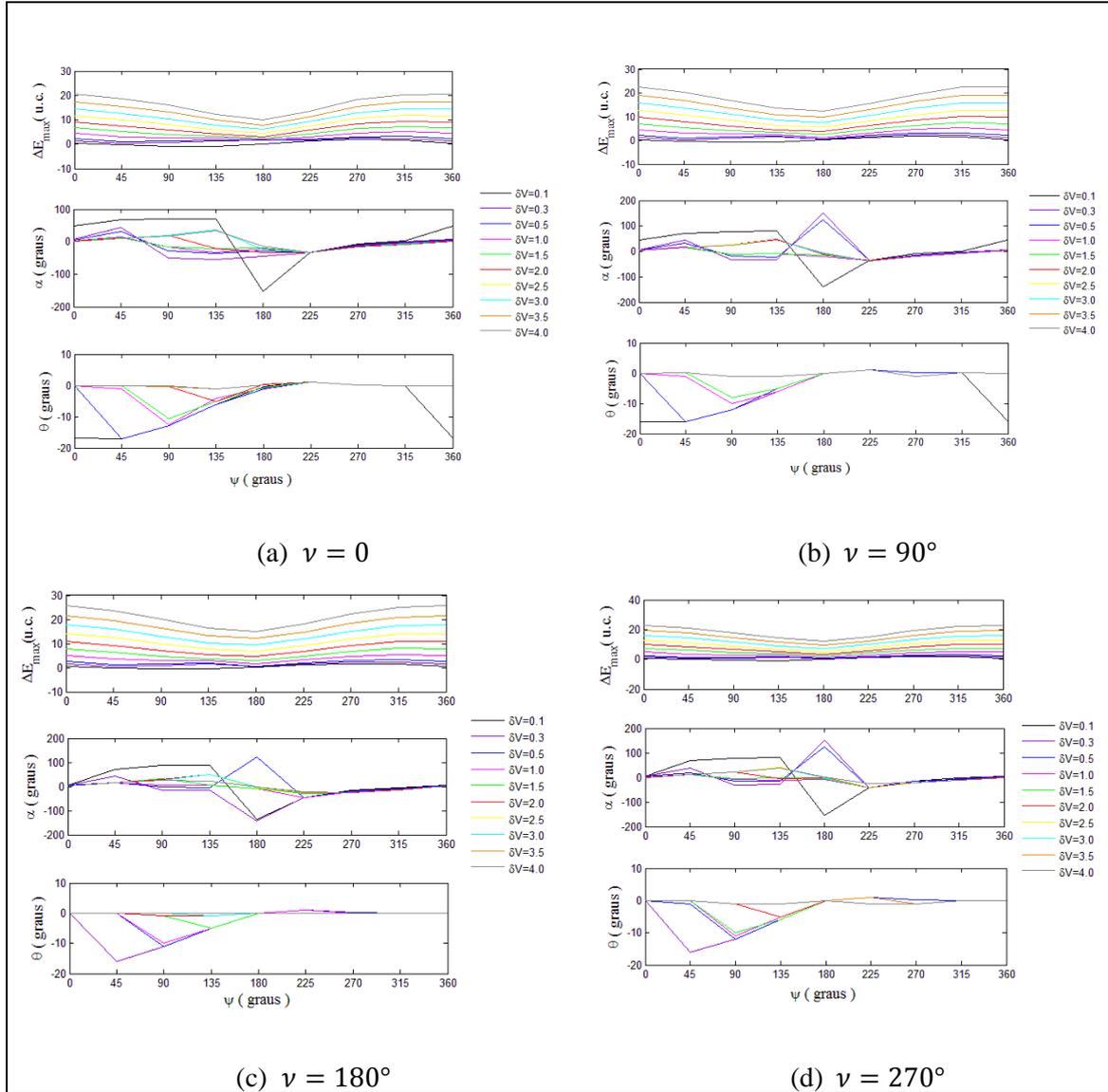
ν ($^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
0	2,96108	-16,0	3,07524	-11,0	0,2	2,15342	0,00627
90	3,02618	-17,0	3,12268	-14,0	0,1	1,92283	0,00558
180	2,93854	-22,0	3,04552	-19,0	0,1	1,87437	0,00576
270	2,84796	-21,0	2,97179	-16,0	0,2	2,09137	0,00660

Tabela 4.17 – Mínima variação da energia e dados correspondentes, para $e = 0,1$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,5$ u.c.

ν ($^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	ΔE_{min} (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
0	0,43579	-121,0	-0,28775	-77,0	-0,7	1,15513	0,06278
90	-0,17477	-124,0	-0,33484	-102,0	-0,3	1,01088	0,05762
180	0,26449	-125,0	-0,33233	153,0	1,4	1,16410	0,02403
270	0,42554	-123,0	-0,18152	-95,0	-0,3	1,13163	0,05797

A máxima e mínima variação da energia e sua respectiva direção e ponto de aplicação do impulso, como uma função de ψ , para anomalia verdadeira da Lua igual a 0° , 90° , 180° e 270° e excentricidade igual a 0,1 será apresentado.

Figura 4.28 – Máxima variação da energia, direção e ponto de aplicação do impulso para $e = 0,1$.



Os gráficos da Figura 4.28 mostram o quanto a máxima variação da energia aumenta com o aumento da magnitude do impulso. Note que o impulso tem a direção próxima ou igual de sua máxima transferência, para valores de ψ maior ou igual a 225° . Para a maioria dos casos o ponto de aplicação do impulso, quando ψ maior ou igual a 180° , é em torno do periapsis da órbita. As equações empíricas que estimam a máxima variação de energia da Figura 4.28, são dadas nas Eqs. 4.27 a 4.30.

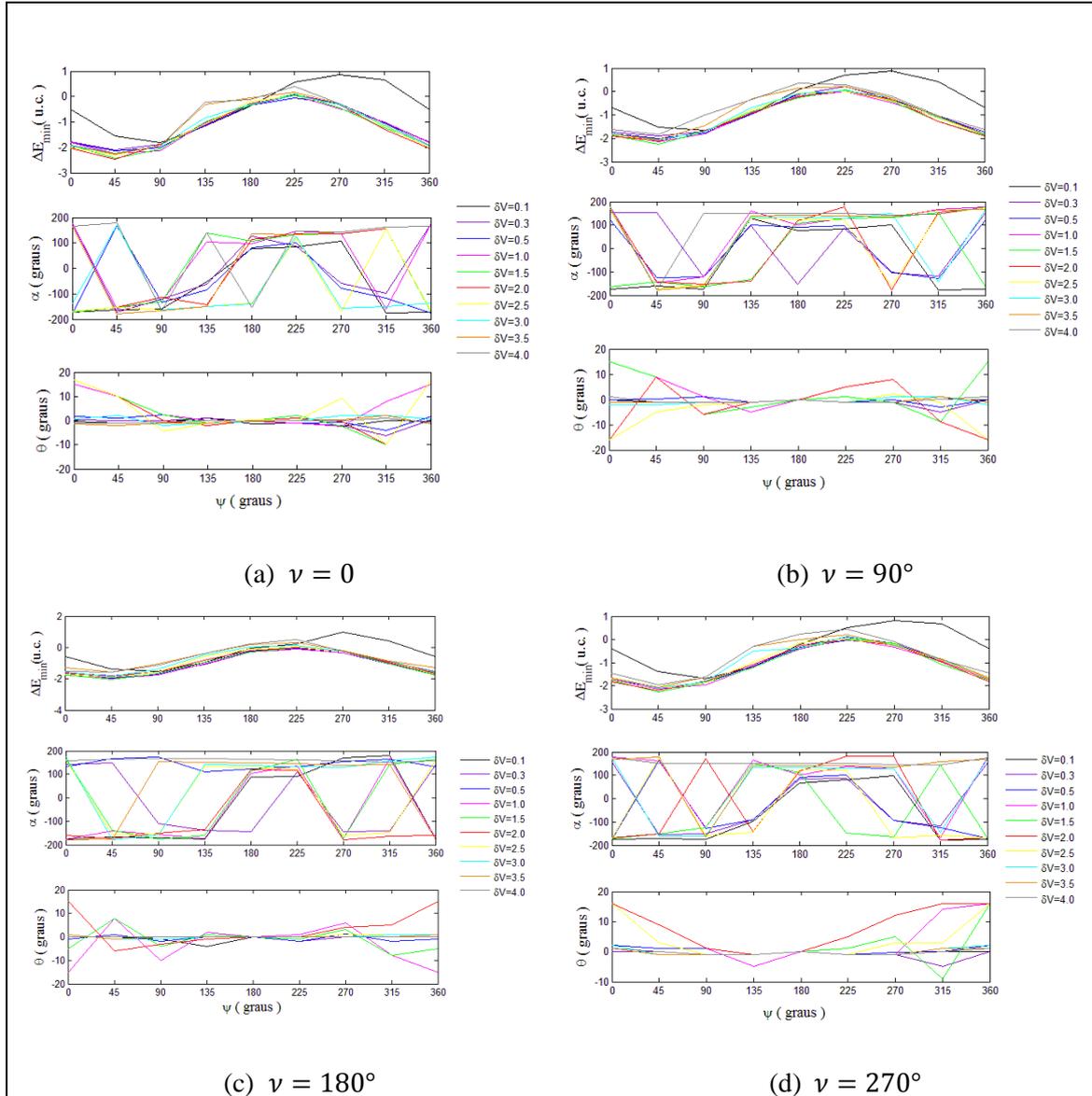
$$\Delta E_{max} = a_{25}\psi^6 + b_{25}\psi^5 + c_{25}\psi^{28} + d_{25}\psi^3 + e_{25}\psi^2 + f_{25}\psi + g_{25} \quad (4.27)$$

$$\Delta E_{max} = a_{26}\psi^6 + b_{26}\psi^5 + c_{26}\psi^{28} + d_{26}\psi^3 + e_{26}\psi^{26} + f_{26}\psi + g_{26} \quad (4.28)$$

$$\Delta E_{max} = a_{27}\psi^6 + b_{27}\psi^5 + c_{27}\psi^{28} + d_{27}\psi^3 + e_{27}\psi^2 + f_{27}\psi + g_{27} \quad (4.29)$$

$$\Delta E_{max} = a_{28}\psi^6 + b_{28}\psi^5 + c_{28}\psi^{28} + d_{28}\psi^3 + e_{28}\psi^2 + f_{28}\psi + g_{28} \quad (4.30)$$

Figura 4.29 – Mínima variação da energia, direção e ponto de aplicação do impulso para $e = 0,1$.



Em relação à mínima variação de energia é possível notar que há condições em que o veículo espacial perdeu energia depois da manobra (ΔE_{min} negativo), e condições em que o ganho de energia foi menor (ΔE_{min} positivo). O impulso aplicado foi retrógrado na maioria dos casos e o ponto de aplicação do impulso oscila em torno do periapsis na maioria dos casos, com algumas exceções.

As equações empíricas que estimam a mínima variação de energia da Figura 4.29, são dadas nas Eqs. 4.31 a 4.34.

$$\Delta E_{min} = a_{29}\psi^8 + b_{29}\psi^7 + c_{29}\psi^6 + d_{29}\psi^5 + e_{29}\psi^4 + f_{29}\psi^3 + g_{29}\psi^2 + h_{29}\psi + i_{29} \quad (4.31)$$

$$\Delta E_{min} = a_{30}\psi^8 + b_{30}\psi^7 + c_{30}\psi^6 + d_{30}\psi^5 + e_{30}\psi^4 + f_{30}\psi^3 + g_{30}\psi^2 + h_{30}\psi + i_{30} \quad (4.32)$$

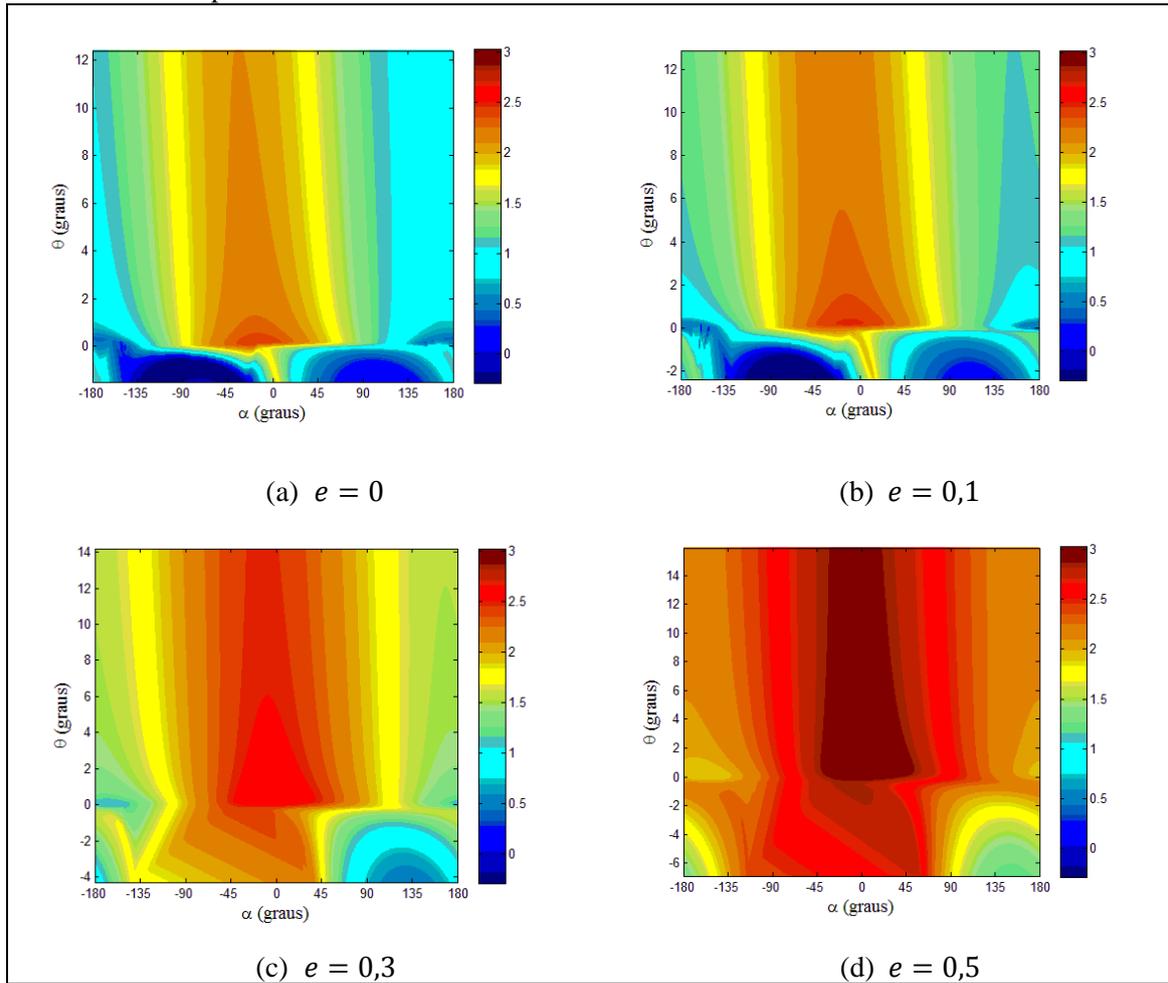
$$\Delta E_{min} = a_{31}\psi^8 + b_{31}\psi^7 + c_{31}\psi^6 + d_{31}\psi^5 + e_{31}\psi^4 + f_{31}\psi^3 + g_{31}\psi^2 + h_{31}\psi + i_{31} \quad (4.33)$$

$$\Delta E_{min} = a_{32}\psi^8 + b_{32}\psi^7 + c_{32}\psi^6 + d_{32}\psi^5 + e_{32}\psi^4 + f_{32}\psi^3 + g_{32}\psi^2 + h_{32}\psi + i_{32} \quad (4.34)$$

Das características de uma órbita elíptica temos que, quanto maior a excentricidade menor a distância entre os corpos primários no periapsis e maior essa distância no apoapsis. A variação da energia para diferentes excentricidades é apresentada. Todas para a Lua no periapsis do planeta, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,3$ u.c.

Como esperado, quanto maior a excentricidade, na Figura 4.30, maior a região com maior magnitude positiva na variação da energia. Isso ocorre porque os corpos primários estão mais próximos, a velocidade do corpo secundário é maior em $\nu = 0^\circ$ e o Swing-By está orientado na região de ganho de energia.

Figura 4.30 - Variação da energia para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$, $\delta V = 0,3$ u.c. e diferentes valores para excentricidade.



A Tabela 4.18 mostra os dados referentes à máxima variação da energia e a Tabela 4.19 referente à mínima variação da energia relativa à Figura 4.28.

Tabela 4.18 – Máxima variação da energia e os dados correspondentes, para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,3$ u.c.

e	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	$\Delta E_{m\acute{a}x}$ (u.c.)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c.)
0	2,36175	-17,0	2,42046	-14,0	0,1	1,73362	0,00558
0,1	2,43840	-13,0	2,49843	-10,0	0,2	1,86742	0,00627
0,3	2,61799	-5,0	2,67920	-2,0	0,3	2,29201	0,00627
0,5	2,98040	4,0	3,03842	6,0	0,6	2,86046	0,00660

Tabela 4.19 – Mínima variação da energia e os dados correspondentes, para $\nu = 0^\circ$, $\psi = 270^\circ$ e $\delta V = 0,3$ u.c.

e	ΔE_{min} (u.c) ($\theta = 0^\circ$)	α ($^\circ$) ($\theta = 0^\circ$)	ΔE_{min} (u.c)	α ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	V_{inf+} (u.c.)	R (u.c)
0	0,00776	-147,0	-0,25107	-91,0	-0,8	1,07197	0,10598
0,1	0,01675	163,0	-0,28477	-58,0	-1,9	1,14772	0,12252
0,3	1,04327	-164,0	0,49085	132,0	-4,3	0,85642	0,11030
0,5	1,91745	-157,0	1,19861	152,0	-6,9	1,25004	0,07902

A partir de uma observação geral dos resultados, temos que a variação da energia é proporcional a magnitude do impulso. Para a maioria das condições há trajetórias resultantes em capturas ou colisões. Aplicar o impulso em um ponto diferente do periapsis da órbita otimiza o ganho ou a perda de energia, conforme o objetivo. A combinação do ponto de aplicação, direção e magnitude do impulso com as dadas condições iniciais podem gerar resultados ótimos, porém não previsíveis a partir do modelo analítico, devido à complexidade da dinâmica envolvida.

5 EFICIÊNCIA DO SWING-BY PROPULSADO

Em 1996, Prado apresentou um trabalho sobre a manobra de Swing-By propulsado para sistemas com órbitas circulares. Neste mesmo trabalho também foi feito um estudo da eficiência do Swing-By com o impulso aplicado no periapsis da órbita, comparado com o Swing-By feito sem impulso e com o impulso aplicado fora da esfera de influência do corpo secundário. Nesta pesquisa faremos um estudo análogo para verificar a eficiência do Swing-By propulsado, mas para sistemas com órbitas elípticas.

A eficiência do Swing-By propulsado é definida como a quantidade de energia extra que é obtida pelo veículo espacial quando o impulso é aplicado no periapsis da órbita, quando comparado com a manobra onde o impulso é aplicado depois do Swing-By, em um ponto distante de M_2 .

Primeiro calculamos a variação da energia ΔE_{imp} da manobra de Swing-By com impulso aplicado no periapsis da órbita. Em seguida calculamos a variação da energia ΔE_{after} da manobra com impulso aplicado fora da esfera de influência do corpo secundário. Essa manobra será dividida em dois passos: um Swing-By puro, sem impulso, com os mesmos parâmetros do Swing-By propulsado e; depois da passagem, fora da esfera de influência do corpo secundário, aplicamos um impulso com a mesma magnitude do impulso aplicado na manobra de Swing-By propulsado.

Na região de ganho de energia $-90^\circ < \psi + \beta < 90^\circ$, o impulso será aplicado na direção $\alpha = 0^\circ$, maximizando a transferência do impulso. Na região de perda de energia $90^\circ < \psi + \beta < 270^\circ$, o impulso será aplicado em $\alpha = 180^\circ$, minimizando a transferência do impulso.

Logo, se $-90^\circ < \psi + \beta < 90^\circ$:

$$\Delta E_{after} = \frac{1}{2}(V_o + \delta V)^2 - \frac{(1 - \mu)}{r} - E_i \quad (5.1)$$

Se $90^\circ < \psi + \beta < 270^\circ$:

$$\Delta E_{after} = \frac{1}{2}(V_o - \delta V)^2 - \frac{(1 - \mu)}{r} - E_i \quad (5.2)$$

Sendo r a distância entre os primários, $E_i = \frac{1}{2}(V_{ix}^2 + V_{iy}^2) - \frac{(1-\mu)}{r}$ a energia antes do encontro próximo, $E_o = E_i + \Delta E$ a energia depois do encontro próximo, para $\Delta E = 2V_{inf} - V_2 \text{sen} \delta \cos(\psi + \beta)$. E, por fim, $V_o = \sqrt{2 \left(E_o + \frac{(1-\mu)}{r} \right)}$.

A eficiência do Swing-By é dada por:

$$|\Delta E_{imp}| - |\Delta E_{after}| \quad (5.3)$$

Se a equação 5.3 for positiva, aplicar o impulso no periapsis da órbita do veículo espacial é mais eficiente que aplicá-lo fora da esfera de influência do corpo secundário. Caso contrário, aplicar o impulso no periapsis não é a melhor escolha.

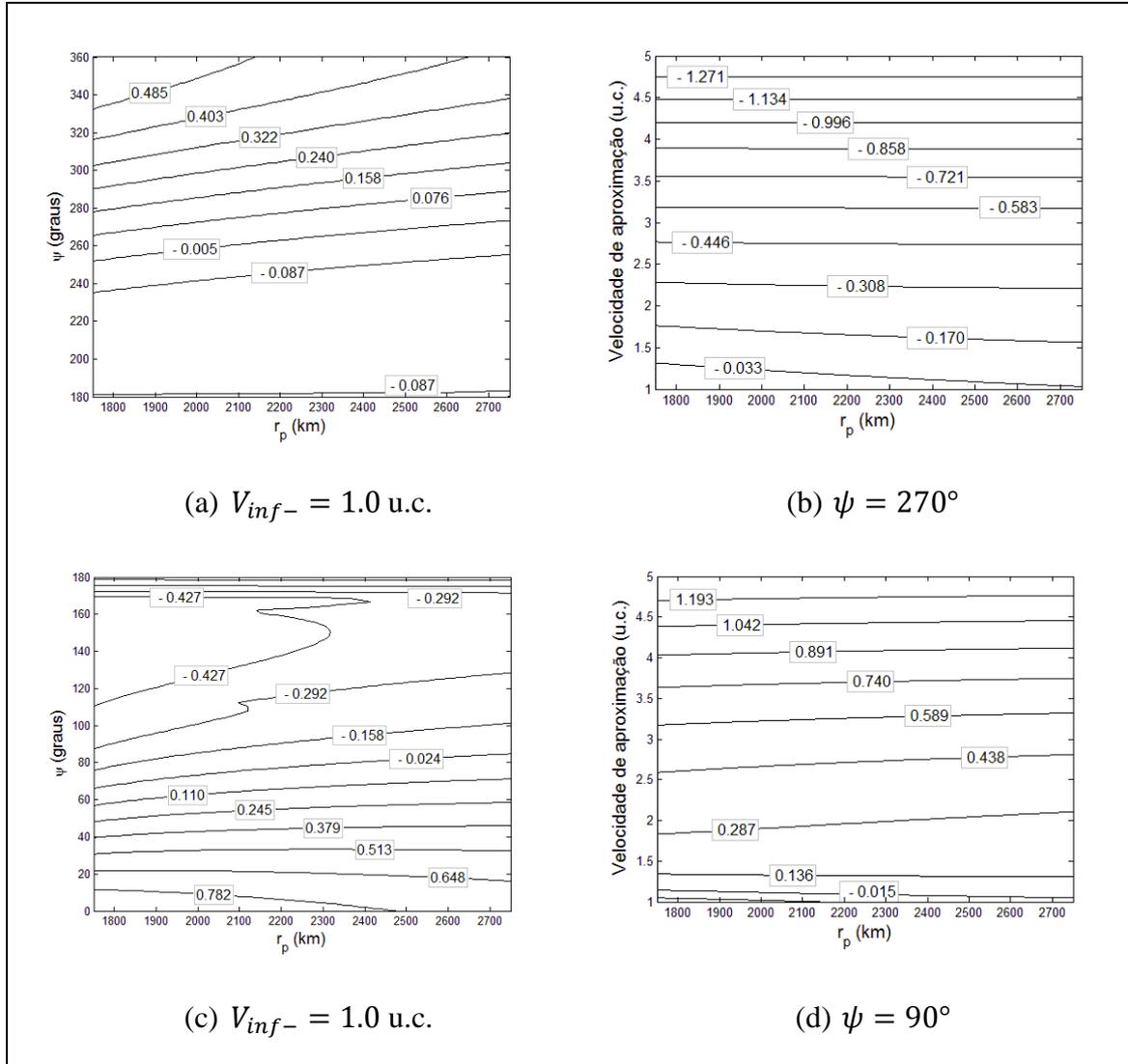
As soluções apresentadas são para um sistema com parâmetro de massa $\mu = 0,01214$, magnitude do impulso $\delta V = 0,2$ u.c. e $\delta V = 2,0$ u.c., excentricidade igual a 0,1 e 0,3 e anomalia verdadeira de M_2 igual a 0° e 180° . Esses valores foram escolhidos para cobrir os casos mais importantes. Note que para $\nu = 0^\circ$ e $\nu = 180^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Logo a região de perda se reduz a $0^\circ < \psi < 180^\circ$ e a região de ganho $180^\circ < \psi < 360^\circ$.

Para todas as figuras deste capítulo, o item (a) apresenta a eficiência do Swing-By propulsado (em unidades canônicas - u.c.) em função do raio do periapsis da órbita do veículo espacial (em km), que varia de 1750 km a 2750 km, e do ângulo de aproximação, que define a posição do periapsis em relação ao corpo secundário. Os itens (b) apresentam a eficiência do Swing-By propulsado (em u.c.) em função do raio do periapsis da órbita do veículo espacial (em km) e da velocidade de aproximação do veículo espacial (em u.c.).

Observe na Figura 5.1(a) que, para valores de ψ acima de aproximadamente 260° , a manobra de Swing-By propulsado com impulso aplicado no periapsis é mais eficiente para as condições iniciais usadas, quando o objetivo é ganhar energia para a segunda órbita depois do encontro próximo. A magnitude da eficiência aumenta com o aumento do ângulo de aproximação. Em relação à velocidade de aproximação, Figura 5.1(b), o Swing-By propulsado é mais eficiente nesta região de ψ , para V_{inf} até aproximadamente 1,3 u.c. Na Figura 5.1(c), o veículo espacial perde mais energia com o Swing-By propulsado, para valores de ψ de até aproximadamente 60° . Neste caso

quanto maior a magnitude do ângulo do periapsis, menor a magnitude da eficiência do Swing-By. A velocidade de aproximação é mais eficiente para valores acima de aproximadamente 1,15 u.c (Figura 5.1(d)).

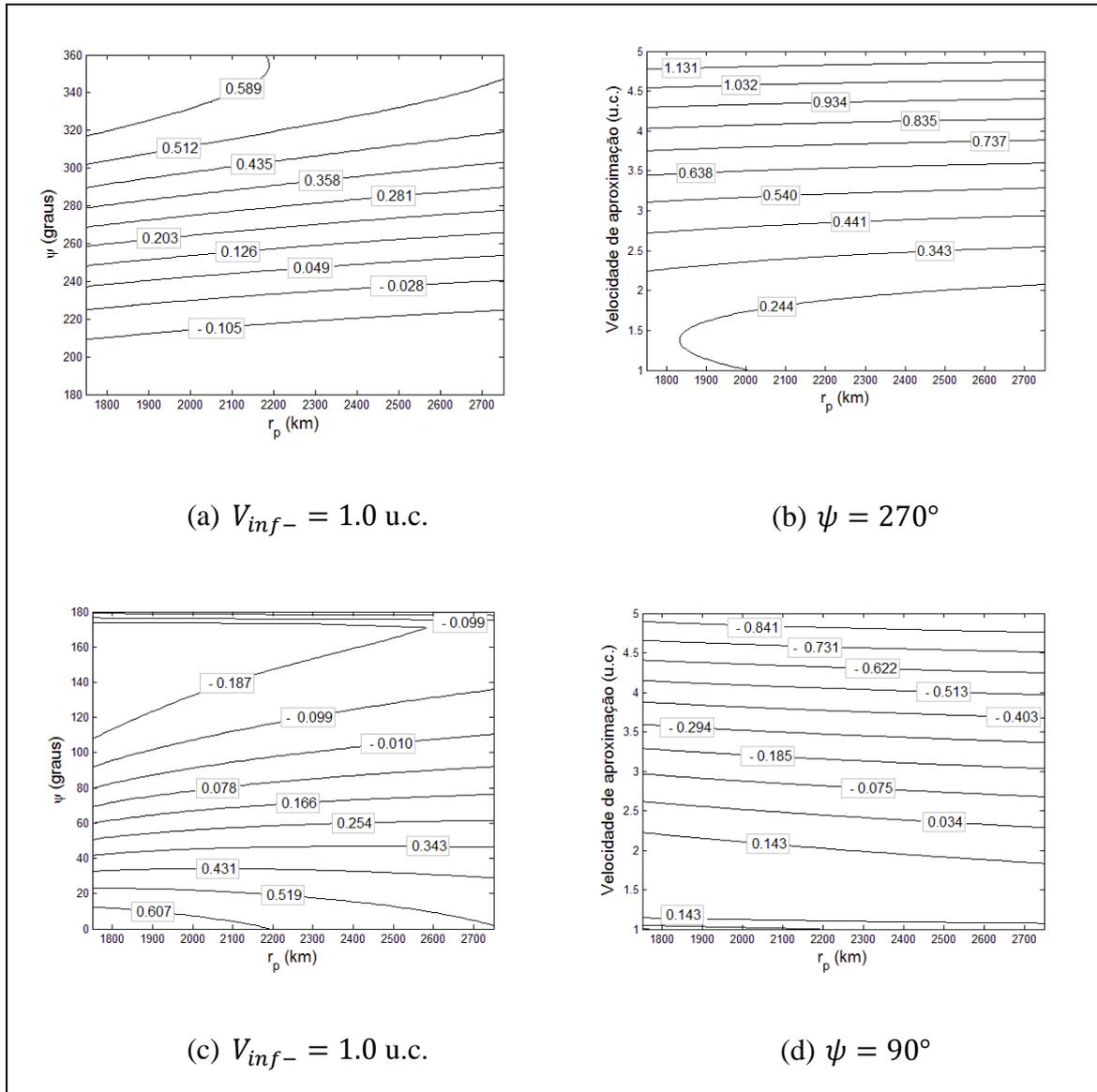
Figura 5.1. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.



Na Figura 5.2 a anomalia verdadeira do corpo secundário é igual a 180° . Neste caso, as melhores condições, quando o foco é o ganho de energia, são para ψ aproximadamente maior que 240° e todos os valores de velocidade de aproximação estudados. Quando o foco é perder energia, o mais eficiente são manobras com ângulos de aproximação de até aproximadamente 80° (Figura 5.2(c)) e velocidade de aproximação de até aproximadamente 2,5 u.c. Note que a região de eficiência positiva da manobra de Swing-By propulsado é maior quando $\nu = 180^\circ$, quando comparado com $\nu = 0^\circ$. Isso ocorre porque a velocidade da lua é maior no seu periapsis e menor no seu apoapsis. A

variação da energia do Swing-By puro é diretamente dependente desta velocidade, logo ela é menor quando $\nu = 180^\circ$. O Swing-By propulsado também é dependente desta velocidade, porém ele tem o impulso para compensar a perda de energia devido à geometria da parte gravitacional da manobra.

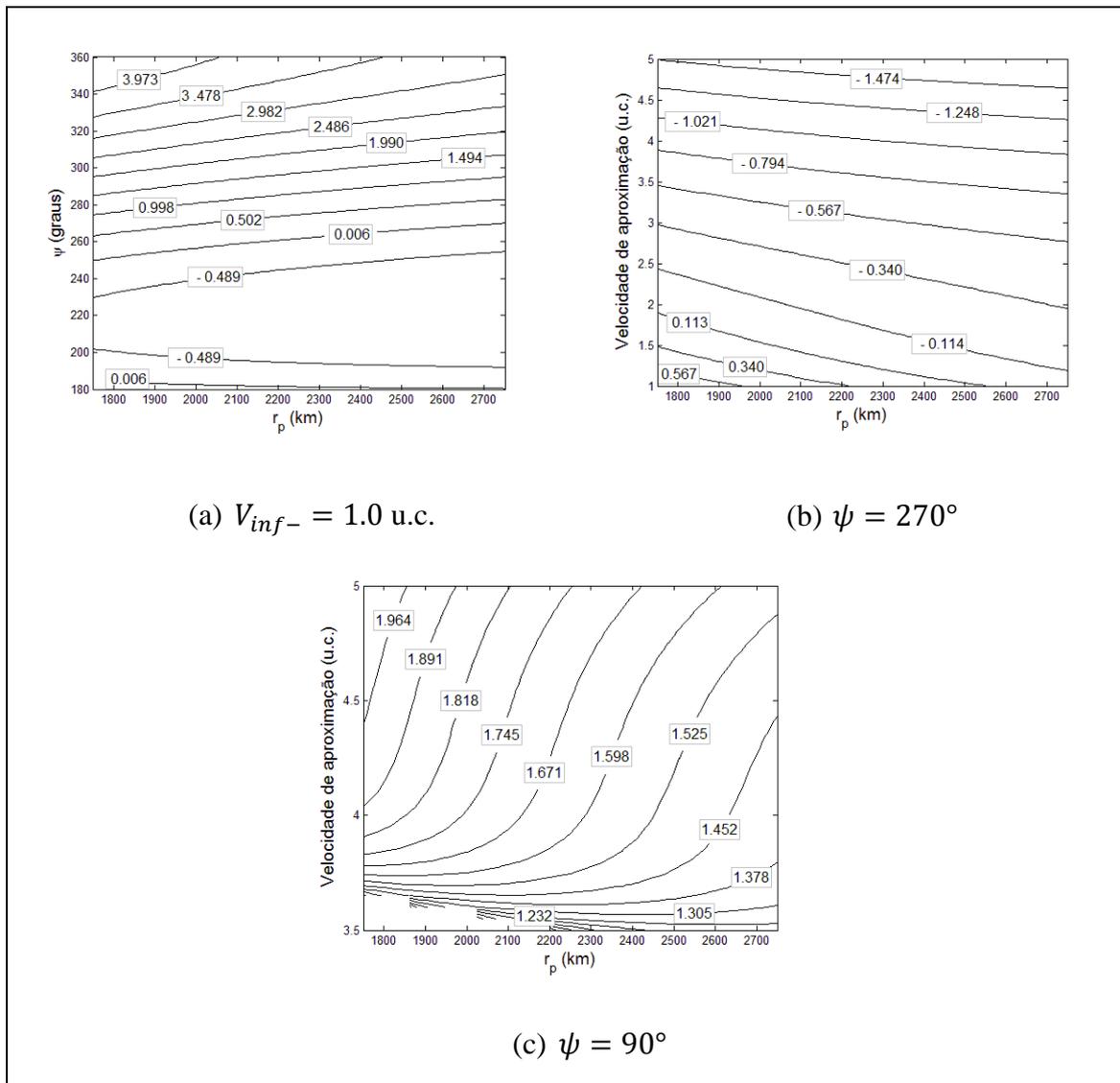
Figura 5.2. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1$, $\nu = 180^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.



A eficiência do Swing-By com impulso de 2,0 u.c. é apresentada na Figura 5.3. Comparando com a Figura 5.1, inicialmente vemos que a magnitude da eficiência do Swing-By aumentou com o aumento da magnitude do impulso. Para o caso de ganho de energia, a região de ψ mais eficiente é similar ao da Figura 5.1(a), para ψ maior que 260° , porém, a região de velocidade de aproximação eficiente aumentou de aproximadamente até 1,3 u.c. para até aproximadamente 2,0 u.c.

Em relação à região de perda de energia, o aumento do impulso aplicado na manobra de Swing-By propulsado para as condições iniciais usadas e $V_{inf-} = 1,0$ u.c. resultou em captura ou colisão do veículo espacial com o corpo secundário. Para este caso, para qualquer valor de impulso acima de 0,2 u.c., independente de r_p e ψ , ocorrem capturas ou colisões. São encontradas soluções para V_{inf-} acima de aproximadamente 3,5 u.c. (veja Figura 5.3(c)).

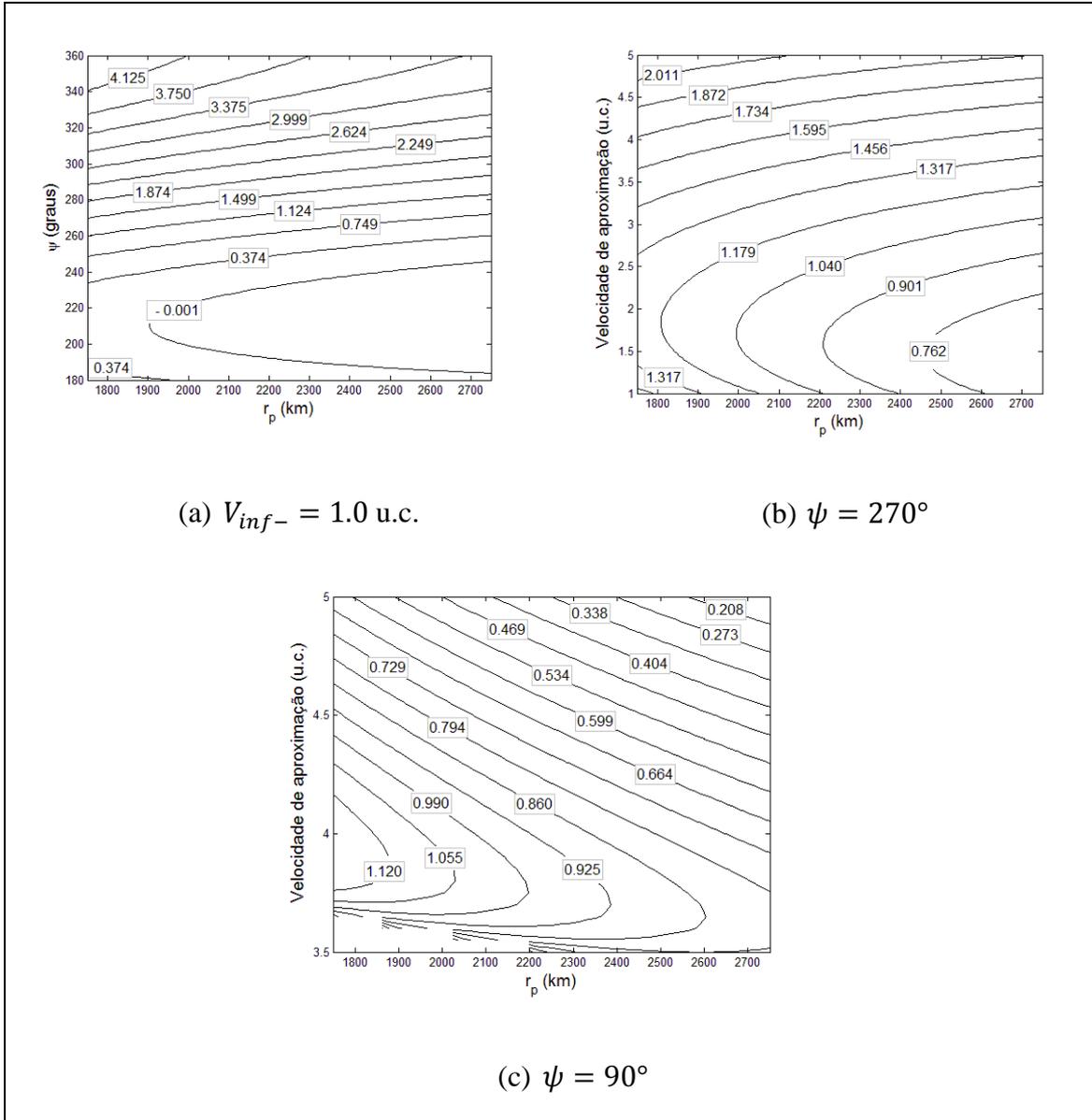
Figura 5.3. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1$, $\nu = 0^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.



As melhores condições para um Swing-By propulsado ser positivamente eficiente, quando comparado com a manobra com impulso aplicado em um ponto distante do corpo secundário, quando o foco é o ganho de energia, são para ψ aproximadamente maiores que 240° e todos os valores de velocidade de aproximação estudados. O impulso maior fez aumentar também a magnitude da eficiência. Assim como na Figura

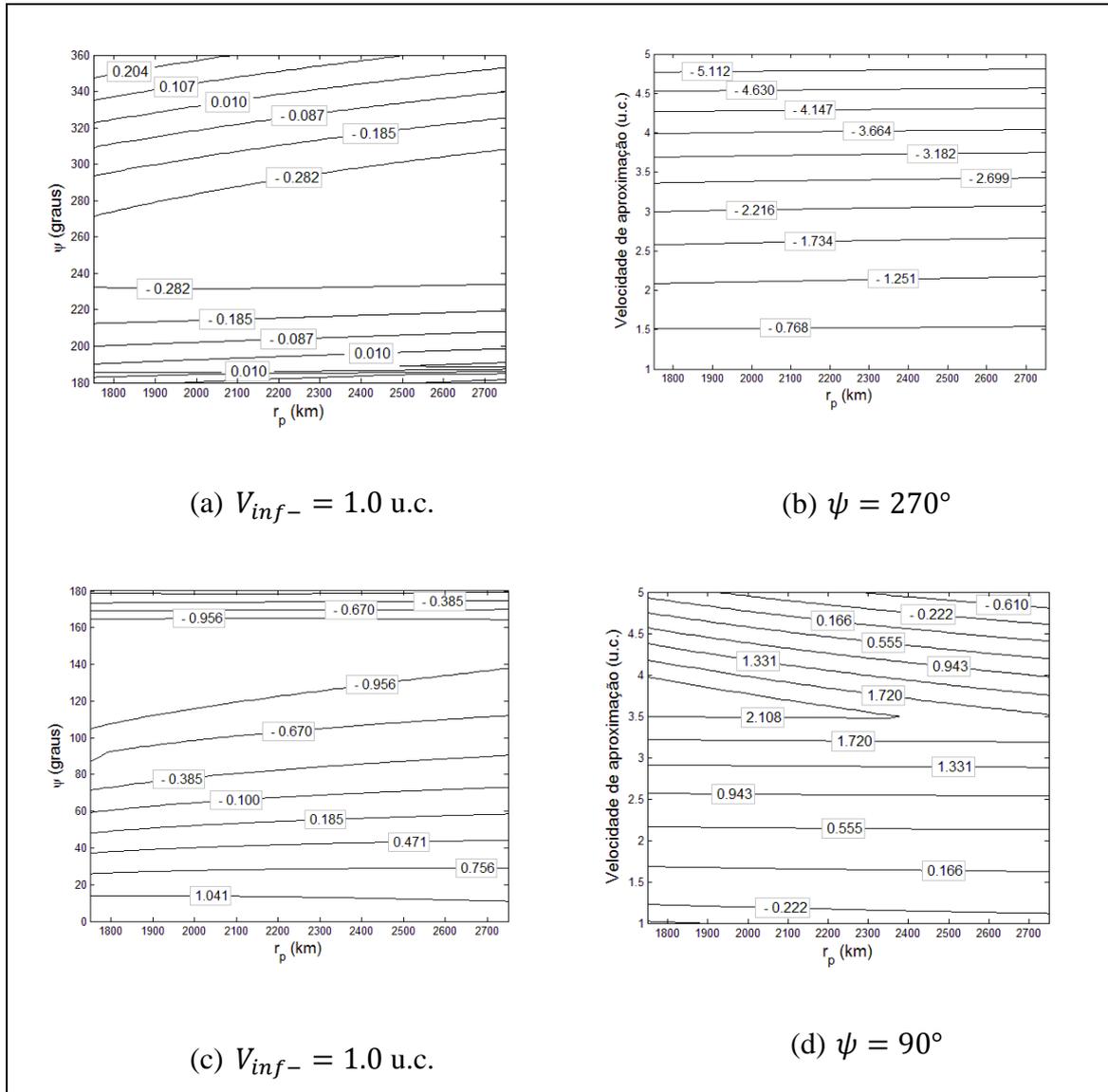
5.3, para a região de perda de energia, a manobra propulsada resulta em captura e colisão quando $V_{inf-} = 1,0$ u.c. A Figura 5.4(c) apresenta a região da velocidade de aproximação com resultados e sua eficiência.

Figura 5.4. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,1$, $\nu = 180^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.



A partir deste ponto, os resultados apresentados têm as mesmas condições iniciais dos casos anteriores, porém para excentricidade igual a 0,3.

Figura 5.5. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3$, $\nu = 0^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.

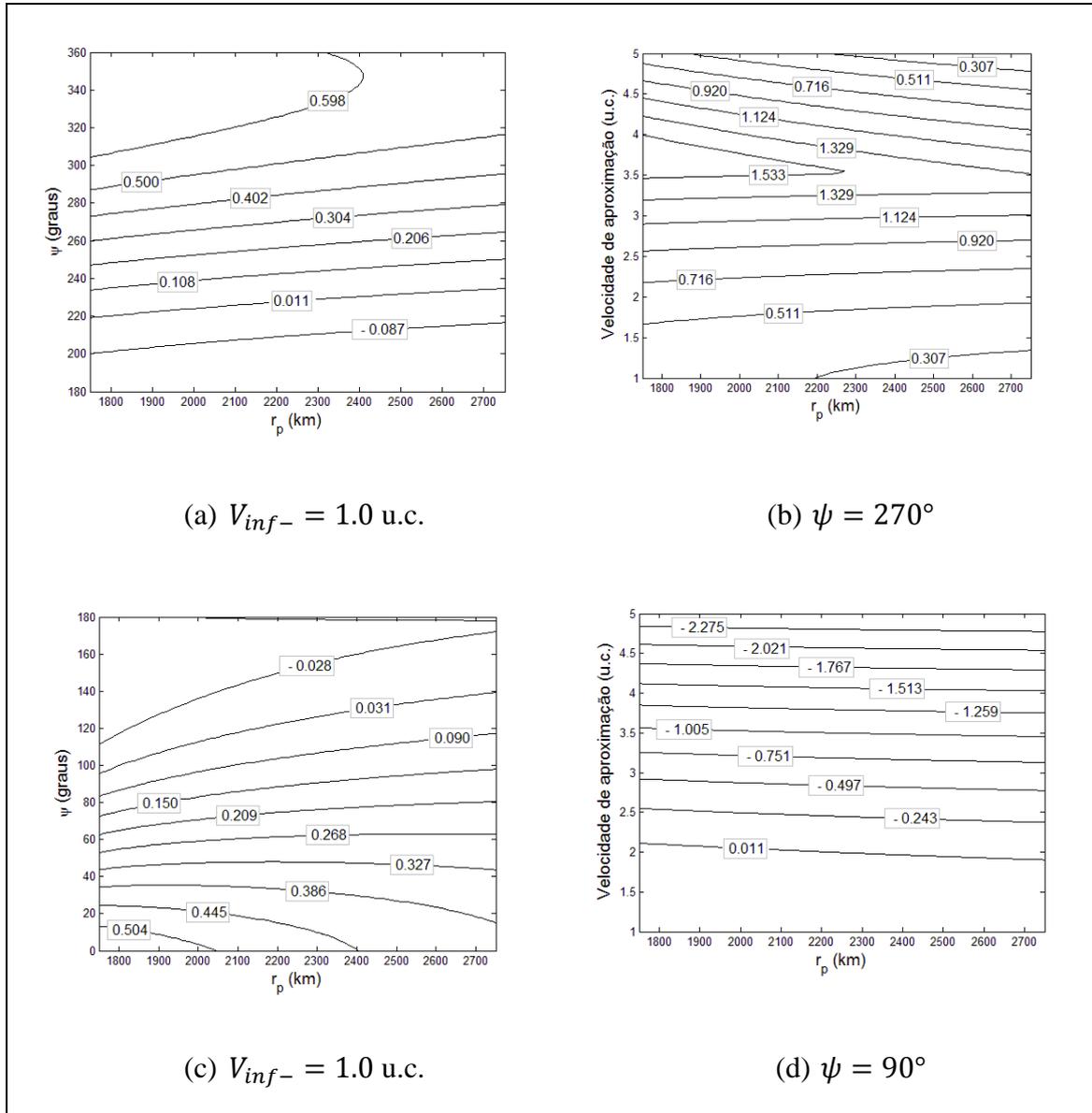


Há uma pequena região com eficiência positiva na Figura 5.5(a), que vai de ψ a partir de aproximadamente 335° e r_p a até aproximadamente 2500 km. Em relação a velocidade de aproximação, para todos os casos apresentados, o Swing-By propulsado é ineficiente. Quando o foco é perder energia, a manobra é mais eficiente para o ângulo de aproximação de aproximadamente até 60° e V_{inf-} entre 1,5 u.c. e 4,75 u.c.

Quando $\nu = 180^\circ$, a região com eficiência positiva é maior, a partir de $\psi = 220^\circ$ e, em relação à velocidade de aproximação, todos os casos tiveram eficiência positiva. Na Figura 5.6(c) a mudança da eficiência (de positivo para negativo) ocorre para o ângulo de aproximação em torno de 120° . Velocidades de aproximação de até

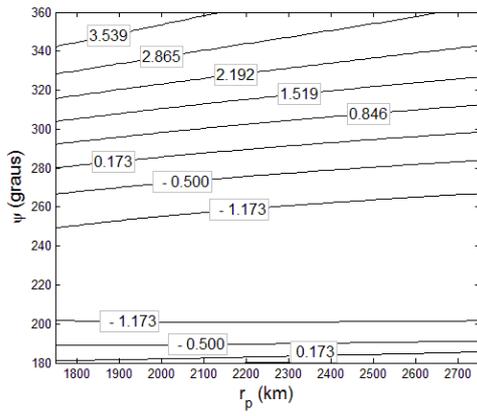
aproximadamente 2,0 u.c. são as recomendadas para a manobra de Swing-By propulsado, no caso de perda de energia.

Figura 5.6. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3$, $\nu = 180^\circ$ e $\delta V = 0,2$ u.c.

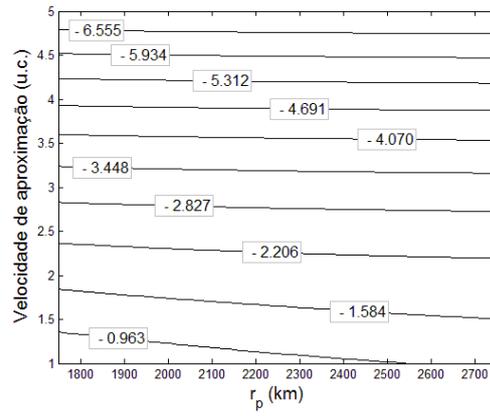


As Figuras 5.7 e 5.8 apresentam a eficiência da manobra propulsada para $e = 0,3$, $\delta V = 2,0$ u.c., $\nu = 0^\circ$ e $\nu = 180^\circ$, respectivamente. Elas têm comportamento similar ao caso com excentricidade 0,1. Para algumas velocidades de aproximação a manobra propulsada resultou em captura ou colisão do veículo espacial.

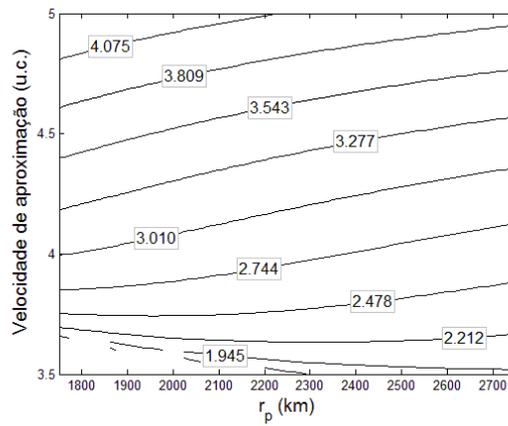
Figura 5.7. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3$, $\nu = 0^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.



(a) $V_{inf-} = 1.0$ u.c.

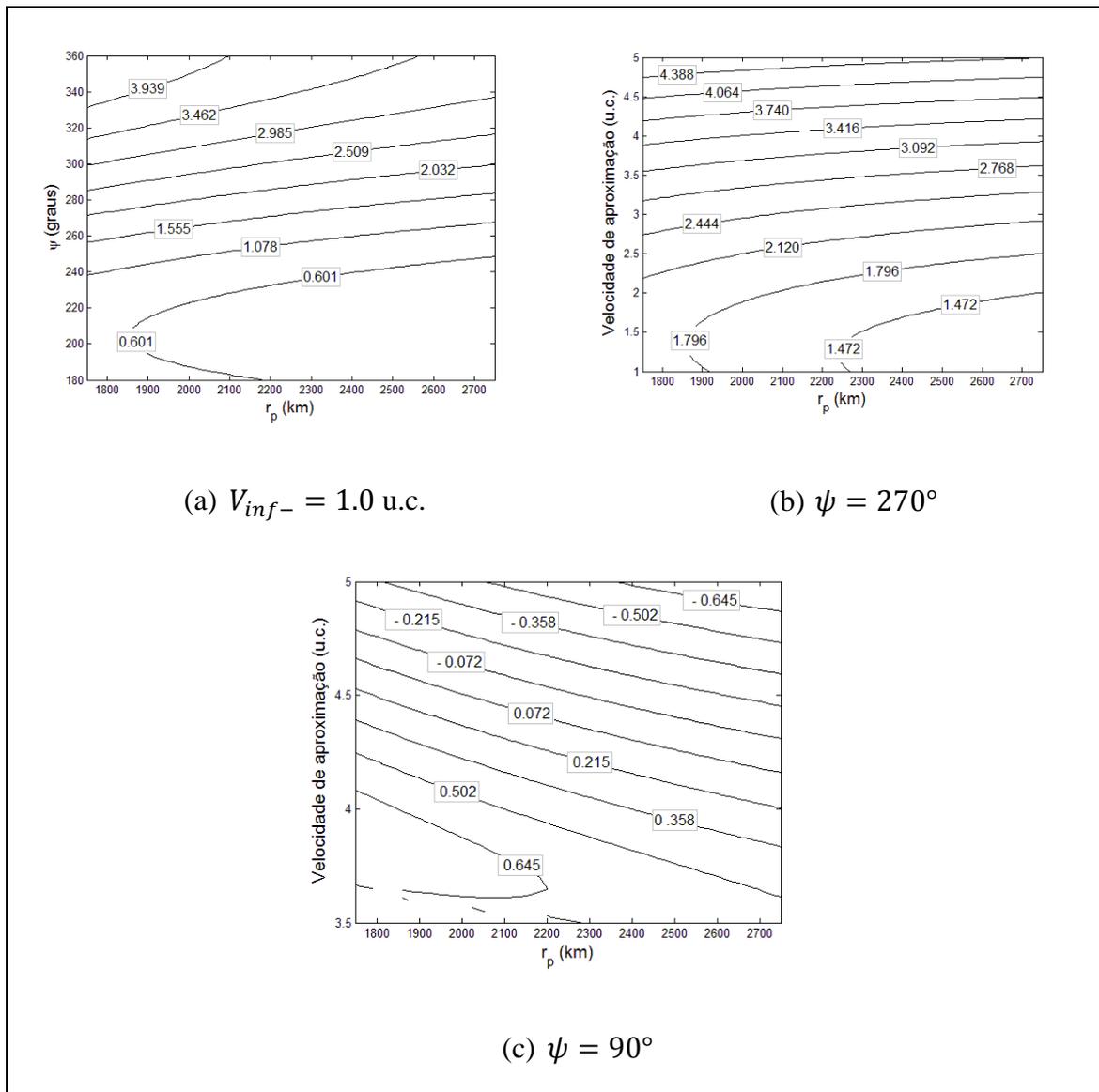


(b) $\psi = 270^\circ$



(c) $\psi = 90^\circ$

Figura 5.8. Eficiência do Swing-By propulsado, para $e = 0,3$, $\nu = 180^\circ$ e $\delta V = 2,0$ u.c.



Este capítulo apresentou as limitações e os ganhos reais da manobra de Swing-By com impulso aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial. A partir de algumas observações gerais sobre a eficiência da manobra, podemos dizer que a posição do corpo secundário na órbita elíptica tem importante influência nos resultados, além do ângulo de aproximação e velocidade de aproximação. A eficiência tem uma menor dependência com o raio do periapsis. Há casos em que a manobra impulsiva é mais eficiente que a manobra pura com impulso aplicado fora da esfera de influência de M_2 e outros casos que não. Os resultados foram apresentados para diferentes condições iniciais, mapeando as melhores condições para um mesmo parâmetro de massa.

6 ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DA MANOBRA DE SWING-BY PROPULSADO NA VARIAÇÃO DA ENERGIA DA MANOBRA

A manobra de “Swing-By propulsado” é uma função dos parâmetros V_{inf-} , r_p e ψ , que definem a órbita inicial do veículo espacial; e dos parâmetros δV e α , que caracterizam o impulso aplicado. Analisar a sensibilidade destes parâmetros significa verificar o quanto a variação da energia se altera a partir de pequenas variações aplicadas a cada parâmetro.

O estudo baseia-se no conceito de “Diferencial”, que parte da ideia de aproximação linear. O erro decorrente dos resultados estimados pela aproximação em relação ao valor real da função também serão apresentados.

A equação analítica da variação da energia para um sistema com órbitas circulares e impulso aplicado no periapsis da órbita foi desenvolvida a partir do trabalho de Prado (1996). Por fim, será quantificada a variação de energia ΔE devido ao erro na atribuição dos parâmetros relacionados à posição da órbita inicial, velocidade e impulso aplicado.

6.1. Método de aproximação linear e diferencial

A aproximação linear é uma forma de avaliar a influência de erros nos parâmetros. Se uma visão detalhada é feita em um ponto sobre o gráfico de uma função, nota-se que o gráfico assemelha-se cada vez mais com sua reta tangente neste ponto. Logo, a reta tangente é o gráfico da função linear:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \quad (6.1)$$

que é a aproximação linear de f em a . Quanto mais próximo x estiver de a maior será a precisão obtida. Aproximação diferencial parte da ideia de aproximação linear e usa a notação de Leibniz dy/dx para representar a derivada de y em relação a x .

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. O diferencial dy , usado para analisar a sensibilidade estimada de uma função à variação dx , é dada por $dy = f'(x)dx$ (STEWART, 2005). Denomina-se dy a variação absoluta estimada de f .

Sendo $f'(x)$ o coeficiente angular da reta tangente ou taxa de variação instantânea de f em x , quanto maior essa taxa, maior é o efeito de uma determinada variação dx . Para

saber o quão preciso é a variação absoluta estimada de f em relação à variação absoluta real de f , o polinômio de Taylor de segundo grau foi usado. Usando o teorema da Desigualdade de Taylor, podemos medir o erro obtido na estimativa da variação absoluta de f . A Desigualdade de Taylor diz que se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, o resto $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$ (STEWART, 2005). Logo, o erro na estimativa, escrito na forma de diferencial, é dado por:

$$Erro = \frac{f''(x)}{2!} dx^2 \quad (6.2)$$

Neste trabalho a função f equivale a ΔE , que é a variação da energia na manobra de Swing-By propulsado. A seção a seguir apresenta a equação analítica da variação da energia em função de cinco diferentes parâmetros: r_p , ψ , V_{inf-} , δV e α . A verificação da sensibilidade destes parâmetros é feita individualmente e, por ser uma função de várias variáveis, a derivada parcial dos parâmetros é calculada.

6.2. Variação da energia (ΔE)

A equação analítica da variação da energia (ΔE) em função dos parâmetros envolvidos na manobra, para um sistema de primários com excentricidade zero, e impulso aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial foi apresentada por Prado (1996).

Se aplicarmos as condições $e = 0$ e, conseqüentemente $\beta = 90^\circ$, na equação 2.13, além de V_2 constante, a equação da variação da energia, para um sistema com órbitas elípticas, se reduzirá a equação da variação da energia para um sistema com órbitas circulares (Equação 6.3), equivalente a de Prado (1996).

Se $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o veículo espacial se move na direção contrária ao corpo secundário, logo já terá passado pelo periapsis da segunda órbita e a anomalia verdadeira f_0 é positiva. Portanto temos $-\cos^{-1}$, na Equação 6.3 onde é apresentado o termo $\pm \cos^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\Delta E = & \delta V^2/2 + \delta V(V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \cos \alpha - V_2 V_{inf} \cos(\delta - \psi) + V_2(\delta V^2 + V_{inf}^2) \\
& + 2\delta V \cos \alpha (V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \sin(\psi) \\
& + \cos^{-1}(-1/(1 + (r_p(\delta V^2 + V_{inf}^2 + 2(V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \delta V \cos \alpha)(2\mu \\
& + V_{inf}^2 r_p + \delta V r_p \cos \alpha (V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2})^2)/(\mu^2(V_{inf}^2 r_p + 2\mu))^{1/2})) \\
& \pm \cos^{-1}((2\delta V r_p \cos \alpha (V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} + V_{inf}^2 r_p + r_p \delta V^2 \cos^2 \alpha \\
& + \mu)/(\mu(1 + (r_p(\delta V^2 + V_{inf}^2 + 2(V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2} \delta V \cos \alpha)(2\mu \\
& + V_{inf}^2 r_p + \delta V r_p \cos \alpha (V_{inf}^2 + 2\mu/r_p)^{1/2})^2)/(\mu^2(V_{inf}^2 r_p + 2\mu))^{1/2})))
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Se $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$, o veículo espacial esta se movendo na direção do corpo secundário e ainda passará pelo periapsis da segunda órbita. Logo, a anomalia verdadeira f_0 é negativa e temos $+\cos^{-1}$ na Equação 6.3, onde é apresentado o termo $\pm \cos^{-1}$. A taxa de variação instantânea de ΔE em relação a cada parâmetro envolvido na manobra e a variação em ΔE causada pelo erro na posição da órbita do veículo espacial, velocidade e impulso aplicado serão apresentados. Para todos os casos serão adotados parâmetros similares ao do sistema Terra-Lua para os exemplos numéricos, sendo $\mu = 0,01214$ e $V_2 = 1,02$ km/s.

6.3. Sensibilidade dos parâmetros referentes à posição inicial da órbita

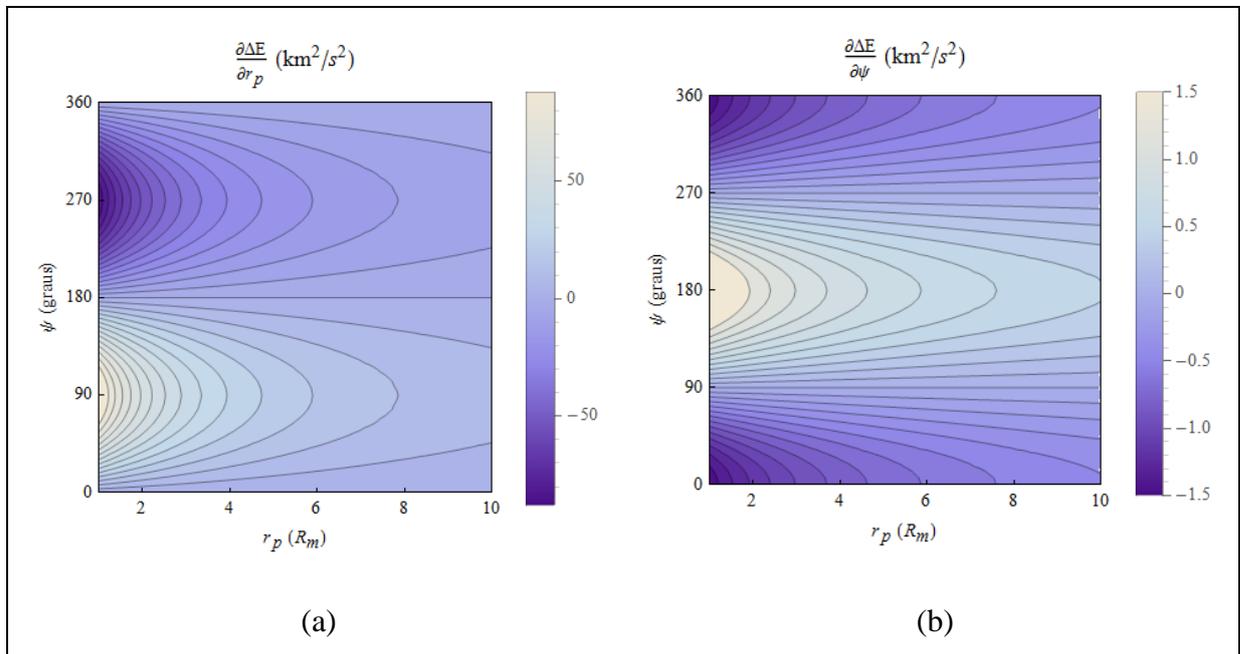
A posição inicial da órbita na manobra de Swing-By é definida pelo raio do periapsis (r_p) e o ângulo de aproximação (ψ). O efeito na variação da energia devido a erros na atribuição destes valores será apresentado. A taxa de variação instantânea da uma ideia geral do efeito que pequenos erros na atribuição de valores para os parâmetros podem causar na energia do veículo espacial durante a manobra. As taxas foram calculadas para valores numéricos específicos para evitar equações muito complexas. Esses valores são: $V_{inf} = 1.0$ km/s, $\delta V = 0$ e $\alpha = 0^\circ$.

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial r_p} = \frac{0.0229 \sin(\psi)}{(0.9612 r_p + 0.01214)^2} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial \psi} = -\frac{0.0238 \cos(\psi)}{0.9612 r_p + 0.01214} \quad (6.5)$$

A Figura 6.1 mostra a taxa de variação instantânea da variação da energia (em km^2/s^2) em relação à r_p e ψ , para r_p variando de 1,0 a 10,0 raios da Lua (R_m), sendo $1,0 R_m \cong 1730 \text{ km}$, e ψ de 0° a 360° .

Figura 6.1 – Taxa de variação instantânea de ΔE em relação à (a) r_p e (b) ψ



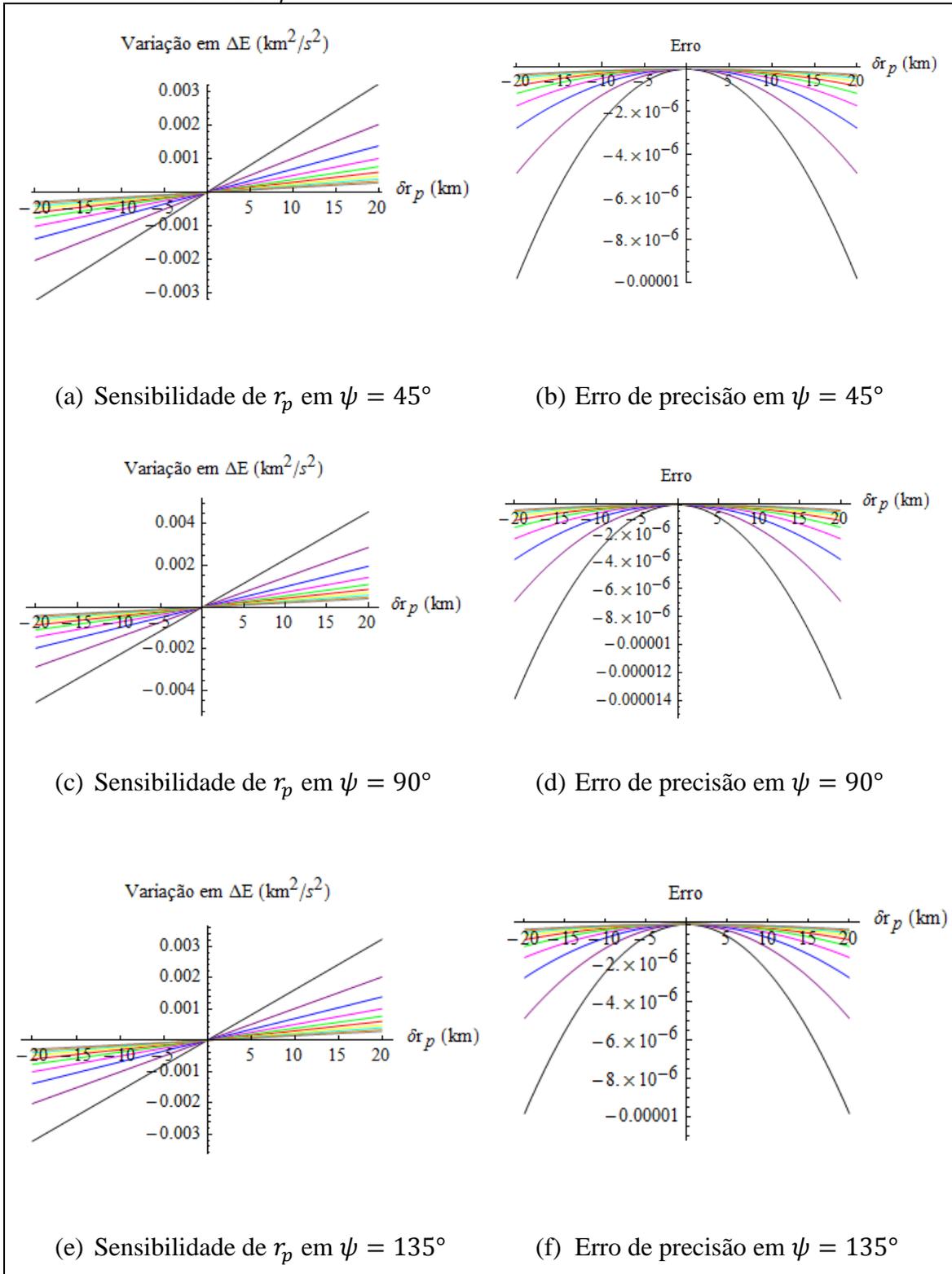
Da Figura 6.1(a) pode-se verificar que a variação da energia é positiva para ψ entre 0° e 180° e negativa para ψ entre 180° e 360° . A magnitude da variação de ΔE é maior quanto menor for a distância entre o periapsis da órbita do veículo espacial e o corpo secundário. Esse comportamento é esperado, considerando que órbitas mais próximas do corpo sofrem maiores efeitos da gravidade. Em relação ao ângulo de aproximação, errar o valor de r_p para mais quando o veículo espacial está passando na frente do corpo ($0^\circ < \psi < 180^\circ$), faz o veículo se afastar do corpo e perder menos energia. Se este erro for para menos, o veículo espacial estará mais próximo do corpo secundário, intensificando o efeito da gravidade, que neste caso trabalha para diminuir a energia do veículo. A situação contrária acontece quando o veículo espacial estiver na região de

ganho ($180^\circ < \psi < 360^\circ$). Para a escala de r_p e ψ adotados ΔE varia de aproximadamente -80 a $80 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

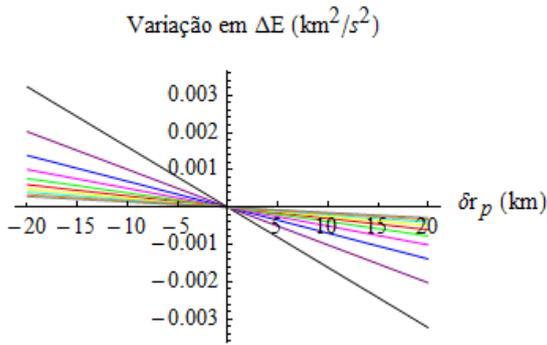
Para a Figura 6.1(b), onde a variação de ΔE é calculada em relação ao ângulo de aproximação ψ , a taxa de variação instantânea de ΔE tem valores positivos para ψ em torno de 180° e valores negativos para ψ em torno de 0° ou 360° . A magnitude da variação de ΔE varia entre aproximadamente $-1,5$ a $1,5 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Observando o comportamento da taxa de variação pode-se notar que, se o erro na atribuição de ψ tender a aproximar o periapsis da órbita do ponto de máxima perda de energia, a variação final da energia diminui. Ela aumenta quando o erro tende a afastar o periapsis deste ponto. Na região de máximo ganho, quanto mais próximo de $\psi = 270^\circ$, maior a variação final da energia; e quanto mais distante deste ponto estiver o periapsis, menor será essa variação. A maior perda de energia devido ao erro ocorre para $\psi = 0^\circ$ e o maior ganho para $\psi = 180^\circ$.

Usando a equação de dy descrita na Seção 6.1, a estimativa da variação de ΔE será apresentada considerando erros de até $\pm 20 \text{ km}$ na atribuição de r_p e erros de até $\pm 5^\circ$ na atribuição de ψ . O erro de precisão dessa estimativa também será apresentado, baseado na equação 6.2. A Figura 6.2 apresenta a sensibilidade do raio do periapsis r_p e o erro de precisão, para valores reais desejados de $r_p = 1,0 R_m$ a $r_p = 10,0 R_m$ e diferentes valores do ângulo de aproximação ψ . As cores representam o valor de r_p desejado, conforme apresentado na legenda, dados em raios da Lua. δr_p é o erro na atribuição de r_p , apresentado em quilômetros. Para cada r_p , o erro varia entre $\pm 20 \text{ km}$ do valor desejado.

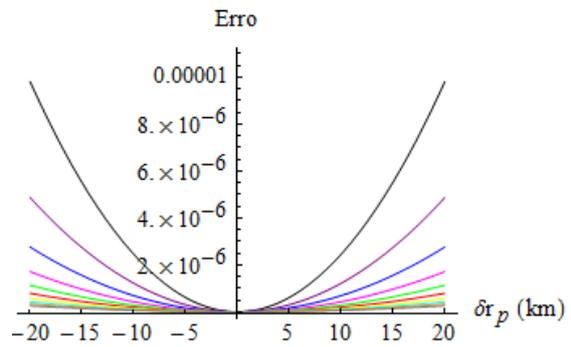
Figura 6.2 – Variação em ΔE para erros de até ± 20 km na atribuição de r_p , para diferentes valores de ψ .



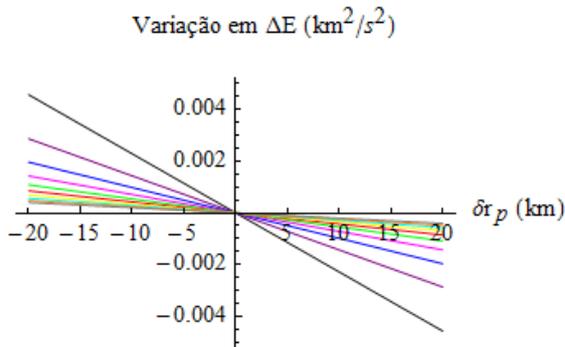
(continua)



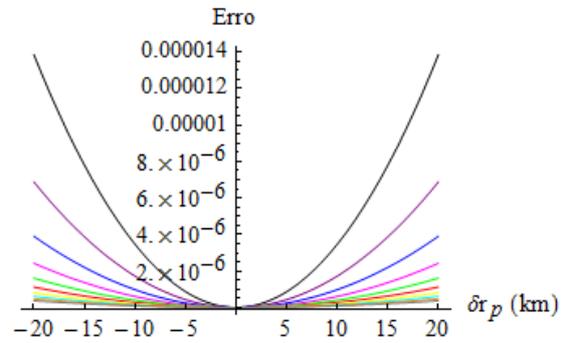
(g) Sensibilidade de r_p em $\psi = 225^\circ$



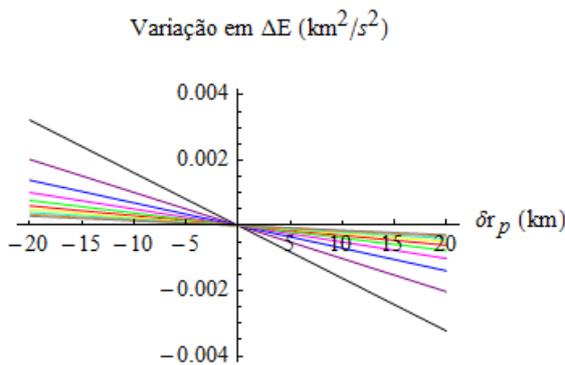
(h) Erro de precisão em $\psi = 225^\circ$



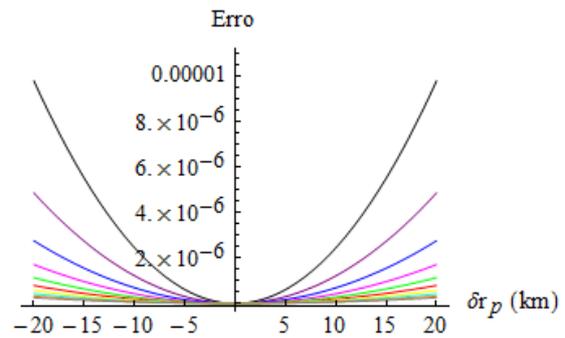
(i) Sensibilidade de r_p em $\psi = 270^\circ$



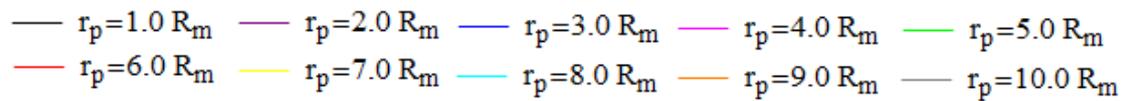
(j) Erro de precisão em $\psi = 270^\circ$



(k) Sensibilidade de r_p em $\psi = 315^\circ$



(l) Erro de precisão em $\psi = 315^\circ$



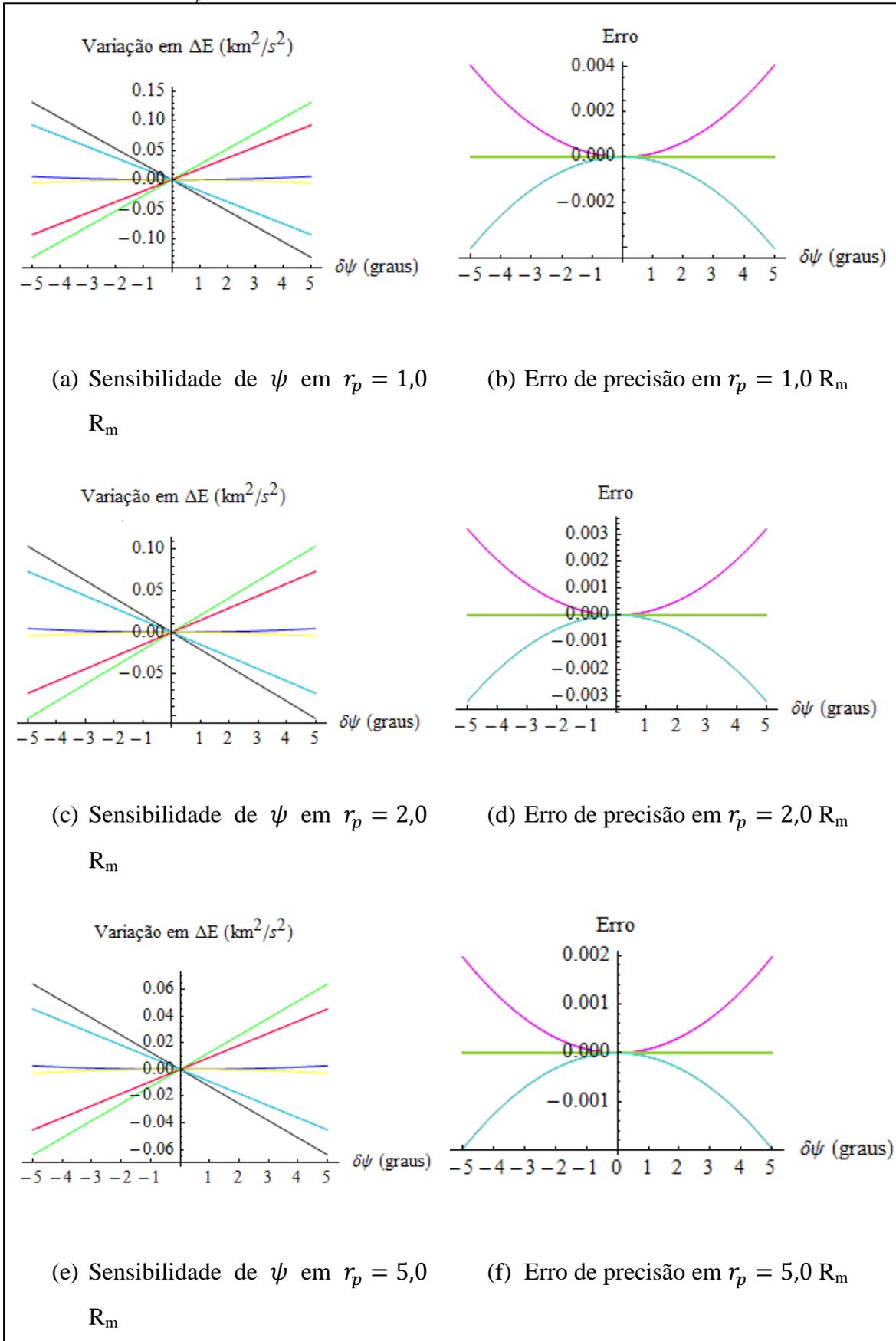
Cada gráfico da coluna da esquerda da figura mostra a variação em ΔE em função de δr_p , para diferentes valores do ângulo de aproximação. A coluna da direita mostra o erro de precisão na estimativa da variação em ΔE devido ao erro δr_p na atribuição do raio do periapsis. Para $\psi = 0^\circ$ e $\psi = 180^\circ$ a variação em ΔE e o erro são iguais à zero. Isto ocorre porque quando o periapsis da órbita ocupa essas posições, a variação da energia por parte da gravidade é nula, independente do valor do raio do periapsis.

Para ψ igual a 45° , 90° e 135° , em que a órbita inicial do veículo espacial está na região de perda de energia devido a gravidade, atribuir valores maiores para o raio do periapsis faz o veículo se afastar do corpo, obtendo assim uma variação positiva na energia. Essa variação é negativa se o erro atribuído a r_p faz com que a órbita esteja mais próxima do corpo secundário, sofrendo um efeito mais forte da gravidade. Para os casos em que ψ está na região de ganho de energia, iguais a 225° , 270° e 315° , diminuir o valor do raio do periapsis devido ao erro faz o veículo se aproximar do corpo e ganhar mais energia devido a gravidade, logo a variação é positiva. Nesta região, se o erro afasta a órbita do corpo, a variação tende a ser negativa.

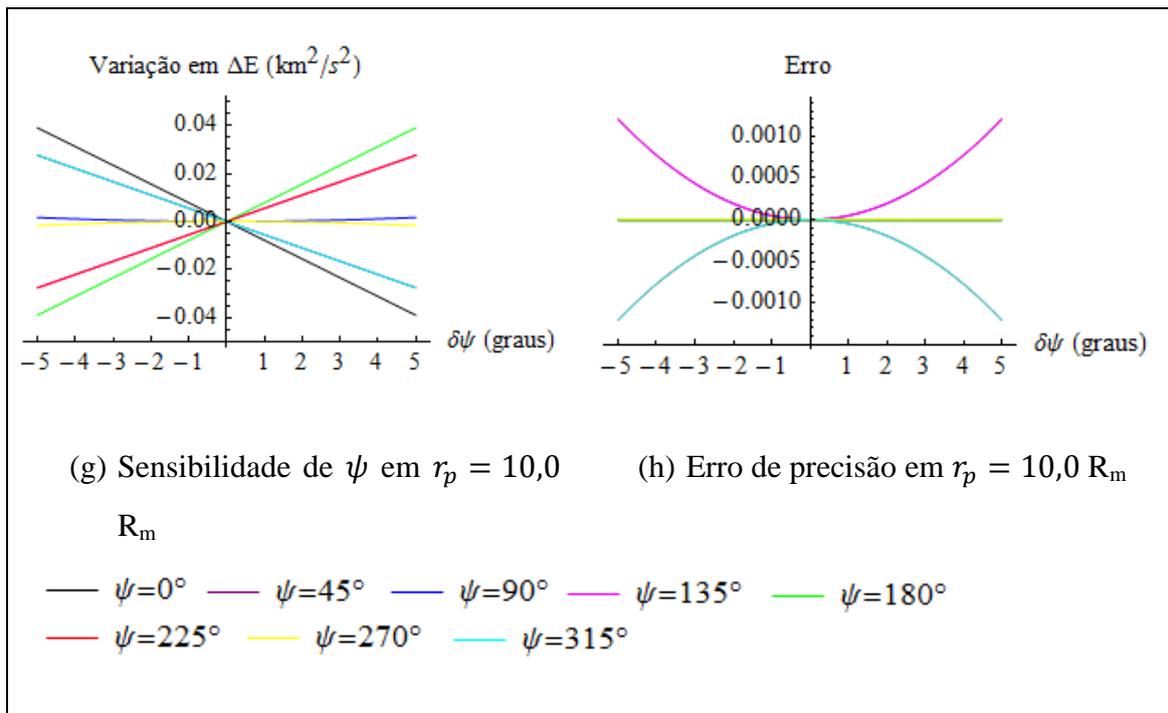
O erro na precisão da estimativa é da ordem de 10^{-6} km^2/s^2 e, em alguns casos, é menor, alcançando a ordem de 10^{-7} km^2/s^2 . Quanto menor a magnitude do erro, maior a precisão. O erro de precisão é maior para valores pequenos de r_p , porque a variação de ± 20 km em $r_p = 1,0 R_m$ tem um efeito maior do que em $r_p = 10,0 R_m$, por exemplo.

A seguir será apresentado o efeito na variação da energia para um erro variando de $\pm 5^\circ$ em ψ e o erro na estimativa desses valores. As soluções serão apresentadas para diferentes valores de raio do periapsis e para ψ de 0° a 315° .

Figura 6.3 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 5^\circ$ na atribuição de ψ , para diferentes valores de r_p .



(continua)



Quando $\psi = 90^\circ$ e $\psi = 270^\circ$, note, a partir da Equação 6.5, que a taxa de variação instantânea de ΔE é zero para qualquer valor de r_p . Isso não significa que não há variação, significa apenas que, para estes valores em particular, a aproximação linear não é o suficiente. Neste caso a variação de ΔE é igual ao termo de segunda ordem do Polinômio de Taylor e o erro de precisão igual ao termo de terceira ordem do Polinômio de Taylor. Para esses ângulos de aproximação a magnitude da variação de ΔE chega até $0,005 \text{ km}^2/\text{s}^2$, quando $\delta\psi$ aproxima-se de $\pm 5^\circ$. O erro de precisão é igual a zero para os dois casos.

Para $\psi = 45^\circ$ e $\psi = 315^\circ$ as curvas são coincidentes. Se o ângulo aplicado for maior que o desejado, para $\psi = 45^\circ$ o periapsis da órbita tende a aproximar-se da região de maior perda de energia e para $\psi = 270^\circ$ tende a afastar-se de região de maior ganho, logo a variação é negativa. Se o ângulo aplicado for menor que o desejado a variação é positiva.

Para $\psi = 135^\circ$ e $\psi = 225^\circ$ as curvas também são coincidentes. A variação em ΔE é positiva se o $\delta\psi$ aplicado é positivo, isso porque, quando $\psi = 135^\circ$, o periapsis da órbita se afasta da região de perda de energia devido à gravidade e, quando $\psi = 225^\circ$, o periapsis tende a ir à direção de maior ganho de energia.

A menor variação em ΔE ocorre quando $\psi = 0^\circ$ e a maior quando $\psi = 180^\circ$, quando comparado com os mesmos valores de $\delta\psi$ e r_p . O erro de precisão nestes casos é zero. O erro para $\psi = 45^\circ$ e $\psi = 135^\circ$ são coincidentes, e $\psi = 225^\circ$ e $\psi = 315^\circ$ também são coincidentes. A magnitude do erro, na maioria dos casos, varia até a ordem de aproximadamente 10^{-3} . Quanto mais afastado a órbita estiver do corpo secundário, menor tende a ser o erro de precisão. Note que essa distância também tem efeito sobre a magnitude da variação em ΔE , que para casos mais próximos da Lua chega a variar até aproximadamente $0,15 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Para o caso mais distante, $r_p = 10,0 R_m$, a variação máxima chega a aproximadamente $0,04 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

Comparando os dois parâmetros da posição, é possível notar que errar na distância do periapsis, considerando todos os outros valores fixos, causa um efeito menor em ΔE do que se o erro for cometido no ângulo de aproximação. Em relação à posição, o ângulo de aproximação ψ é mais sensível a erros.

6.4. Sensibilidade do parâmetro referente à velocidade

A velocidade com que o veículo espacial se aproxima do corpo secundário é chamada velocidade de aproximação (V_{inf}). Quando o veículo espacial passa próximo ao corpo, a gravidade pode incrementar ou diminuir essa velocidade. E, então, o veículo espacial se afasta com a velocidade modificada, agora chamada de velocidade de afastamento ($V_{\text{inf}+}$). Quando há impulso, além da influência na magnitude da velocidade, o impulso também pode modificar a direção do afastamento.

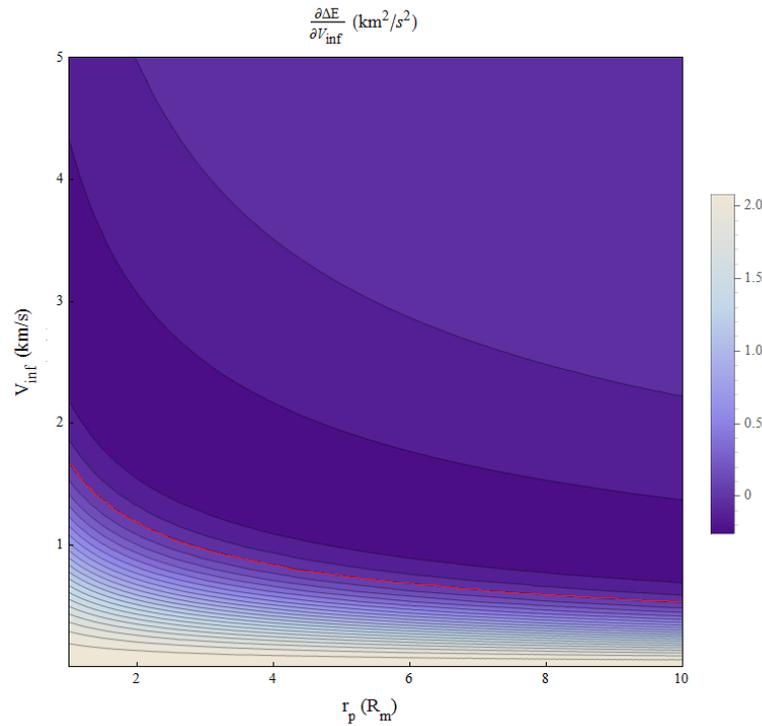
Para análise da sensibilidade da velocidade consideraremos impulso zero. A Equação 6.6 mostra a taxa de variação instantânea de ΔE em relação a velocidade de aproximação, considerando os valores mostrados anteriormente.

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial V_{\text{inf}}} = \frac{\text{sen}(\psi) (0.02526 r_p V_{\text{inf}}^2 - 0.00031)}{(r_p V_{\text{inf}}^2 + 0.01214)^2} \quad (6.6)$$

Quando o impulso é zero e o ângulo de aproximação igual a 0° ou 180° , o efeito da gravidade é nulo, logo a velocidade de aproximação será igual a velocidade de afastamento.

O comportamento da Eq. 6.6 para $\psi = 270^\circ$, os pontos de máximo ganho de energia devido a gravidade, são apresentados.

Figura 6.4 – Taxa de variação instantânea de ΔE em relação à V_{inf} , para $\psi = 270^\circ$.

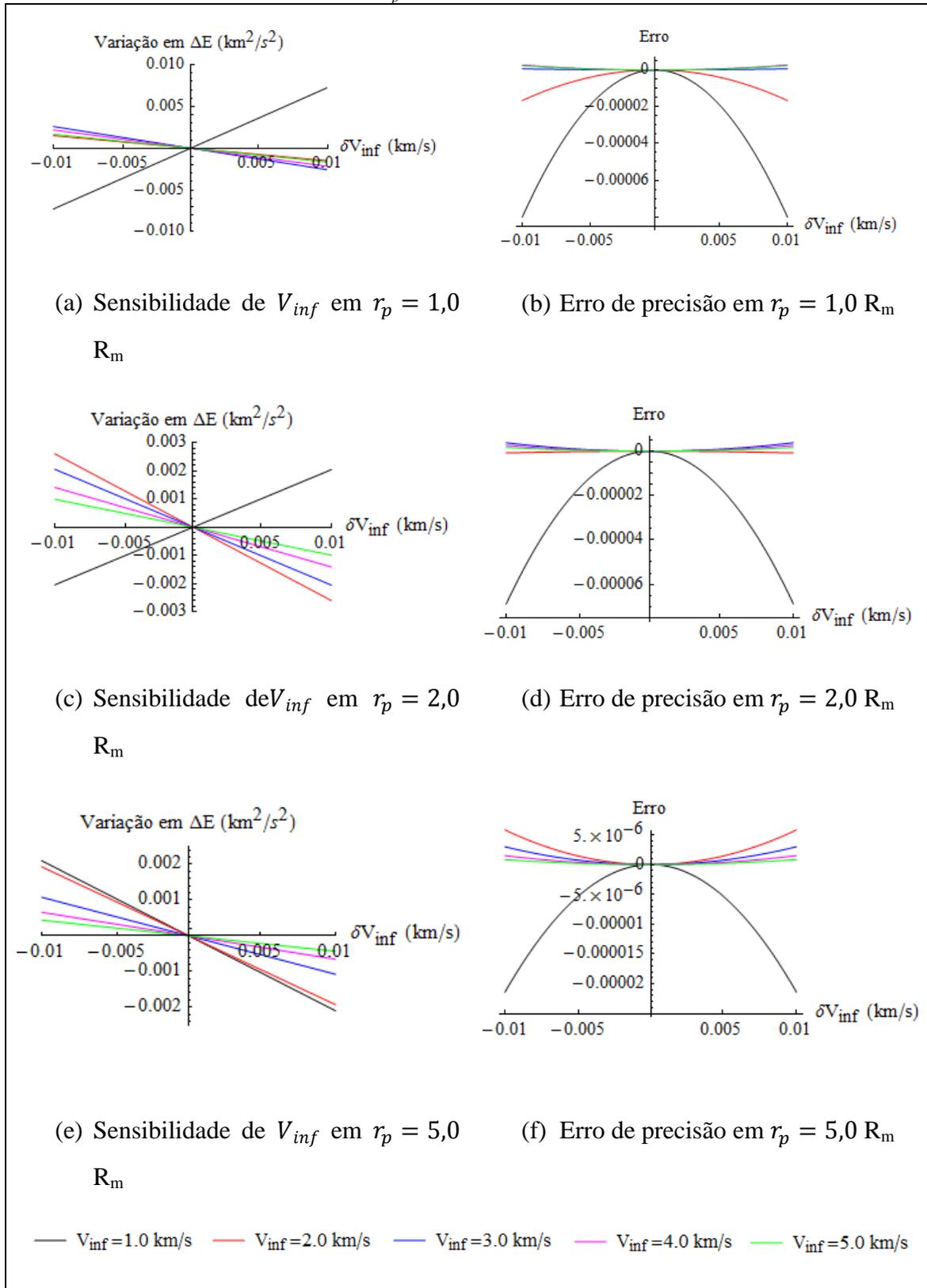


A variação em ΔE é positiva para a velocidade variando aproximadamente de zero a 2,0 km/s, para raio do periapsis igual a 1,0 R_m . A curva limite da variação positiva (curva vermelha referente à $\Delta E = 0$) é decrescente, chegando a aproximadamente 1,0 km/s para valores maiores do raio do periapsis. A variação alcança até pouco mais de 2,0 km^2/s^2 . Para valores de velocidade acima dessa curva limite, a variação em ΔE é negativa, com magnitude máxima próximo de 0,3 km^2/s^2 .

Sabe-se que, quanto maior a velocidade, menor a curvatura na órbita do veículo, e que velocidade igual à zero faz o veículo espacial cair na direção do corpo secundário. Partindo desta ideia, a taxa de variação instantânea de ΔE está coerente. Quanto menor a velocidade, mais energia o veículo espacial ganha, por estar mais próximo do corpo e aproveitar o efeito da gravidade, que neste caso trabalha para aumentar a energia. Velocidades maiores fazem o veículo se afastar da Lua, perdendo energia.

A sensibilidade da velocidade é apresentada na Figura 6.5 para erros de até $\pm 0,01$ km/s, que equivale a aproximadamente 1% da velocidade da Lua em torno do planeta.

Figura 6.5 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 0,01$ km/s na atribuição de V_{inf} , para $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores de r_p .



Para $r_p = 1,0 R_m$ e $V_{inf} = 1,0 \text{ km/s}$, errar na velocidade resulta em um efeito maior na variação da energia. A variação é negativa, se é atribuído um V_{inf} menor que o desejado, e positiva, se atribuído um V_{inf} maior que o desejado. Para os outros valores de velocidade analisados o oposto ocorre. Quanto menor a velocidade, maior a magnitude do ganho ou da perda. Quando $r_p = 5,0 R_m$, o efeito do erro para $V_{inf} = 1,0 \text{ km/s}$ muda. Agora se ganha energia se errar a velocidade para menos e perde-se se errar para mais, assim como para todas as outras velocidades. Essa mudança ocorre para r_p a partir de aproximadamente $3,0 R_m$.

A precisão do método é menor para $V_{inf} = 1,0 \text{ km/s}$, comparado com as outras velocidades, chegando para os valores extremos do erro a até aproximadamente a ordem de $10^{-5} \text{ km}^2/\text{s}^2$.

6.5. Sensibilidade dos parâmetros referentes ao impulso

O impulso modifica a magnitude da velocidade e direção do veículo espacial. Neste caso, será sempre aplicado no periapsis da órbita combinado com a gravidade. O impulso serve para intensificar o efeito da manobra de Swing-By, quando apenas o uso da gravidade não gerar energia suficiente para atender as necessidades da missão.

A influência de possíveis erros na atribuição dos valores da magnitude e direção de aplicação do impulso na variação da energia do veículo espacial na manobra é apresentada. Foram considerados $r_p = 1,1 R_m$, $V_{inf} = 1,0 \text{ km/s}$ e $\psi = 270^\circ$.

A taxa de variação instantânea de ΔE em relação à magnitude do impulso, para α entre 0° e 180° é como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta E_{(\alpha>0)}}{\partial \delta V} = & \left(0.5 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961)^{1/2} \right. & (6.7) \\
& \left((0.327 \delta V ((8.282 - 5.244 \delta V^2) \cos^2 \alpha + \delta V^3 \cos^5 \alpha + (10.252 \delta V - \delta V^3) \cos^3 \alpha + \right. \\
& \quad \left. 5.244 \delta V^2 \cos^4 \alpha - 10.252 \delta V \cos \alpha - 8.282) \right) / \\
& \left((1 - (6785.199 (0.0049 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 0.024 \delta V \cos \alpha + 0.0169)^2) / \right. \\
& \quad \left. (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1) \right)^{1/2} + \\
& \left((-0.663 \delta V^3 - 8.108 \delta V) \cos^2 \alpha - 2.410 \delta V^2 \cos^3 \alpha + (-2.410 \delta V^2 - 5.491) \cos \alpha - \right. \\
& \quad \left. 1.947 \delta V \right) / \\
& \left((1 - 1 / (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.423)^2 + 1) \right)^{1/2} \Big) \\
& \cos(\cos^{-1}(-1 / (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} - \\
& \quad \cos^{-1}((0.407 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.973 \delta V \cos \alpha + 1.391) / \\
& \quad (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} + \psi)) / \\
& (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{3/2} + \\
& ((2.424 \cos \alpha + \delta V) \\
& \quad \text{sen}(\cos^{-1}(-1 / (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} - \\
& \quad \cos^{-1}((0.407 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.973 \delta V \cos \alpha + 1.391) / \\
& \quad (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} + \psi)) / \\
& ((4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961)^{1/2}) + 2.424 \cos \alpha + \delta V
\end{aligned}$$

Quando α está entre -180° e 0° , a taxa é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta E_{(\alpha<0)}}{\partial \delta V} = & \left(0.5 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961)^{1/2} \right. & (6.8) \\
& \left((-0.663 \delta V^3 - 8.108 \delta V) \cos^2 \alpha - 2.410 \delta V^2 \cos^3 \alpha + \right. \\
& \quad \left. (-2.410 \delta V^2 - 5.491) \cos \alpha - 1.947 \delta V \right) / \\
& \left(1 - 1 / (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1) \right)^{1/2} - \\
& \left(0.327 \delta V ((8.282 - 5.244 \delta V^2) \cos^2 \alpha + \delta V^3 \cos^5 \alpha + (10.252 \delta V - \delta V^3) \cos^3 \alpha + \right. \\
& \quad \left. 5.244 \delta V^2 \cos^4 \alpha - 10.252 \delta V \cos \alpha - 8.282) \right) / \\
& \left((1 - (6785.199 (0.0049 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 0.024 \delta V \cos \alpha + 0.0169)^2) / \right. \\
& \quad \left. (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1) \right)^{1/2} \Big) \\
& \cos(\cos^{-1}(-1 / (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} + \\
& \quad \cos^{-1}((0.407 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.973 \delta V \cos \alpha + 1.391) / \\
& \quad (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} + \psi)) / \\
& (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{3/2} + \\
& ((2.424 \cos \alpha + \delta V) \\
& \quad \text{sen}(\cos^{-1}(-1 / (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} + \\
& \quad \cos^{-1}((0.407 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.973 \delta V \cos \alpha + 1.391) / \\
& \quad (0.166 (4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961) (\delta V \cos \alpha + 2.424)^2 + 1)^{1/2} + \psi)) / \\
& ((4.847 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.961)^{1/2}) + 2.424 \cos \alpha + \delta V
\end{aligned}$$

A taxa de variação instantânea de ΔE em relação à direção do impulso, para $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$, é apresentada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta E}{\partial \alpha} (\alpha < 0) = & \delta V \sin \alpha \tag{6.9} \\ & (-2.4235 \sin(\psi + \cos^{-1}(-1 / (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}) + \\ & \cos^{-1}((0.4071 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.9735 \delta V \cos \alpha + 1.3913) / \\ & ((0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}))) / \\ & ((4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612)^{1/2}) + \\ & ((4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612)^{1/2} \\ & ((0.1658 (\delta V \cos \alpha + 2.4235) (7.2705 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 6.8346)) / \\ & ((1 - 1 / (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}) + \\ & (0.1636 \delta V^4 \cos^4 \alpha + (1.3549 \delta V^3 + 1.3546 \delta V) \cos \alpha + (0.0675 \delta V^5 + 0.8577 \delta V^3) \cos^3 \alpha) + \\ & (0.4907 \delta V^4 + 1.6769 \delta V^2) \cos^2 \alpha + 1.3624 \delta V^2) / \\ & ((1 - ((6785.1996 (0.0049 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 0.0239 \delta V \cos \alpha + 0.0169)^2) / \\ & (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}))) \\ & \cos(\psi + \cos^{-1}(-1 / (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}) + \\ & \cos^{-1}((0.4071 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.9735 \delta V \cos \alpha + 1.3913) / \\ & (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}))) / \\ & (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{3/2} - 2.4235 \end{aligned}$$

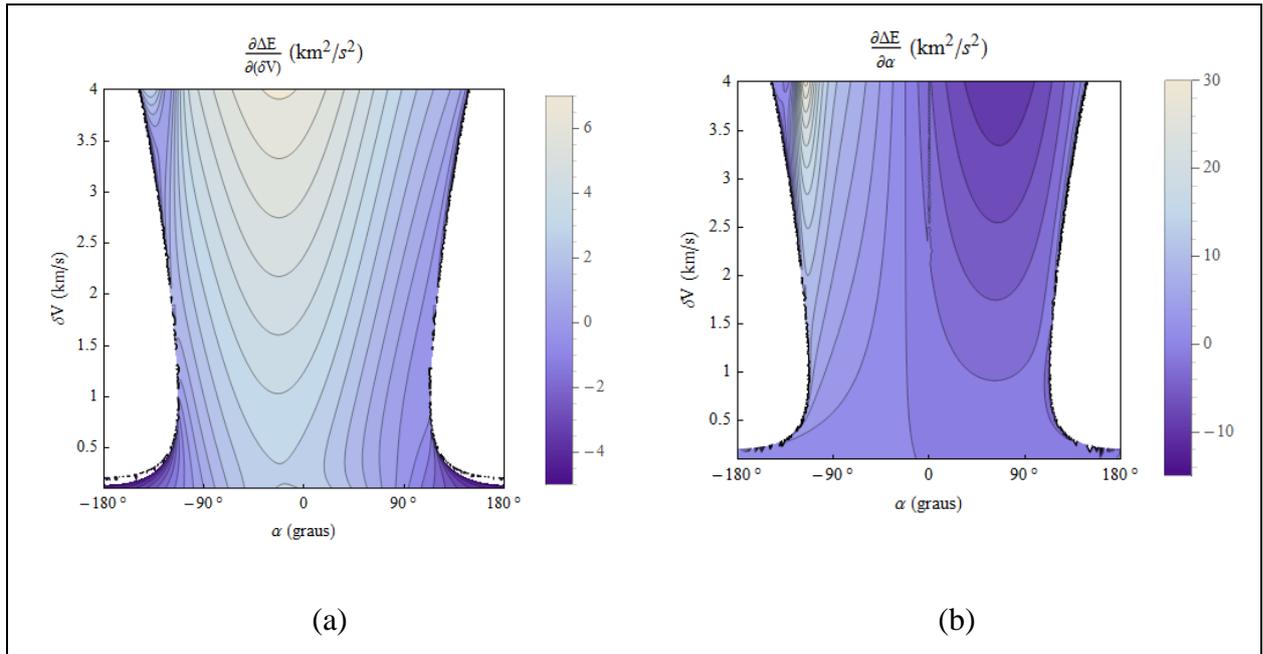
Se $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, a taxa apresenta-se como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta E}{\partial \alpha} (\alpha > 0) = & \delta V \sin \alpha \tag{6.10} \\ & (-2.4235 \sin(\psi + \cos^{-1}(-1 / (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}) - \\ & \cos^{-1}((0.4071 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.9735 \delta V \cos \alpha + 1.3913) / \\ & ((0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}))) / \\ & ((4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612)^{1/2}) + 4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612)^{1/2} \\ & ((0.1658 (\delta V \cos \alpha + 2.4235) (7.2705 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 6.8346)) / \\ & ((1 - 1 / (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}) + \\ & (-0.1636 \delta V^4 \cos^4 \alpha + (-1.3549 \delta V^3 - 1.3546 \delta V) \cos \alpha + (-0.0675 \delta V^5 - 0.8577 \delta V^3) \cos^3 \alpha + \\ & (-0.4907 \delta V^4 - 1.6769 \delta V^2) \cos^2 \alpha - 1.3624 \delta V^2) / \\ & ((1 - ((6785.1996 (0.0049 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 0.0239 \delta V \cos \alpha + 0.0169)^2) / \\ & (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}))) \\ & \cos(\psi + \cos^{-1}(-1 / (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}) - \\ & \cos^{-1}((0.4071 \delta V^2 \cos^2 \alpha + 1.9735 \delta V \cos \alpha + 1.3913) / \\ & (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{1/2}))) / \\ & (0.1658 (4.8470 \delta V \cos \alpha + \delta V^2 + 0.9612) (\delta V \cos \alpha + 2.4235)^2 + 1)^{3/2} - 2.4235 \end{aligned}$$

Os parâmetros constantes das equações são: $\mu = 0.01214$, $r_p = 1,1R_m$ e $V_{inf} = 1,0$ km/s. A magnitude do impulso, na análise da sensibilidade, é dada em km/s.

Os gráficos das equações 6.7 a 6.10 para $\psi = 270^\circ$ mostra como a taxa de variação instantânea da variação da energia se comporta para diferentes valores da magnitude e direção do impulso.

Figura 6.6 – Taxa de variação instantânea de ΔE em relação à (a) δV e (b) α para $\psi = 270^\circ$.

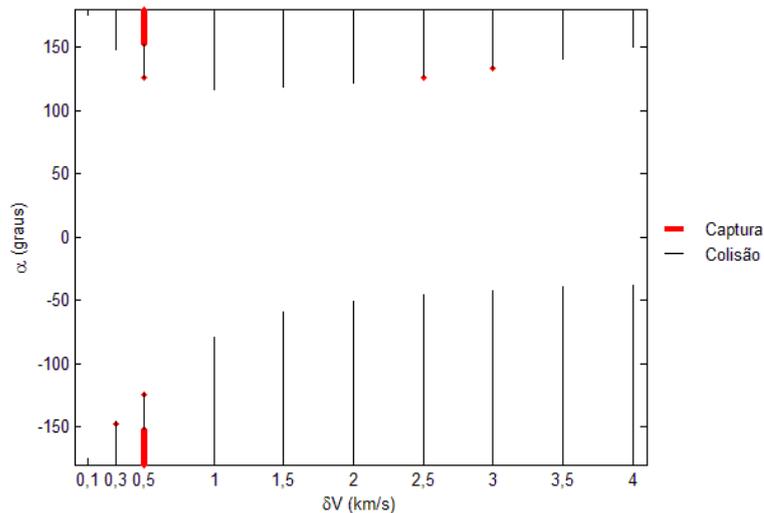


A variação em ΔE em relação à magnitude do impulso (Fig. 6.6(a)) é negativa para valores de α aproximadamente entre -180° e 90° e α aproximadamente entre 90° e 180° . Isto porque, para estes valores do ângulo que define a direção do impulso, há uma componente do impulso oposta ao movimento, desacelerando o veículo, fazendo-o perder mais energia. No caso em que o ângulo é negativo, há região de variação negativa é menor, porque além da componente oposta, ainda há uma componente enviando o veículo na direção do corpo secundário, fazendo-o ganhar mais energia, devido à gravidade. Para todas as outras condições, a variação é positiva e, quanto maior o impulso desejado, maior a variação causada devido a erros.

Note que a direção do impulso é mais sensível a erros que a magnitude do impulso. A magnitude da taxa de variação instantânea é maior para α , variando de aproximadamente -15 a 30 km^2/s^2 , do que para δV , que varia de aproximadamente $-5,0$ km^2/s^2 a $7,0$ km^2/s^2 .

A região em branco nos gráficos para os valores extremos de α representam casos em que o veículo espacial não escapou da região de influência do corpo secundário. A partir da equação analítica da variação da energia (Equação 6.3), somente é possível reconhecer esses casos. Não é possível distinguir se ocorreu uma captura ou colisão. Essa distinção foi obtida a partir do estudo da manobra por integração numérica. A partir da integração numérica verificou-se também que há casos em que o veículo espacial colidiu com o corpo, porém, analiticamente, foi considerada uma trajetória que escapou do corpo. Isso ocorreu porque o estudo analítico não identifica colisões. Um mapa de capturas e colisões, obtido por integração numérica, é apresentado na Figura 6.7, para $r_p = 1,1R_m$ e $\psi = 270^\circ$ (adaptado de Ferreira et al., 2015).

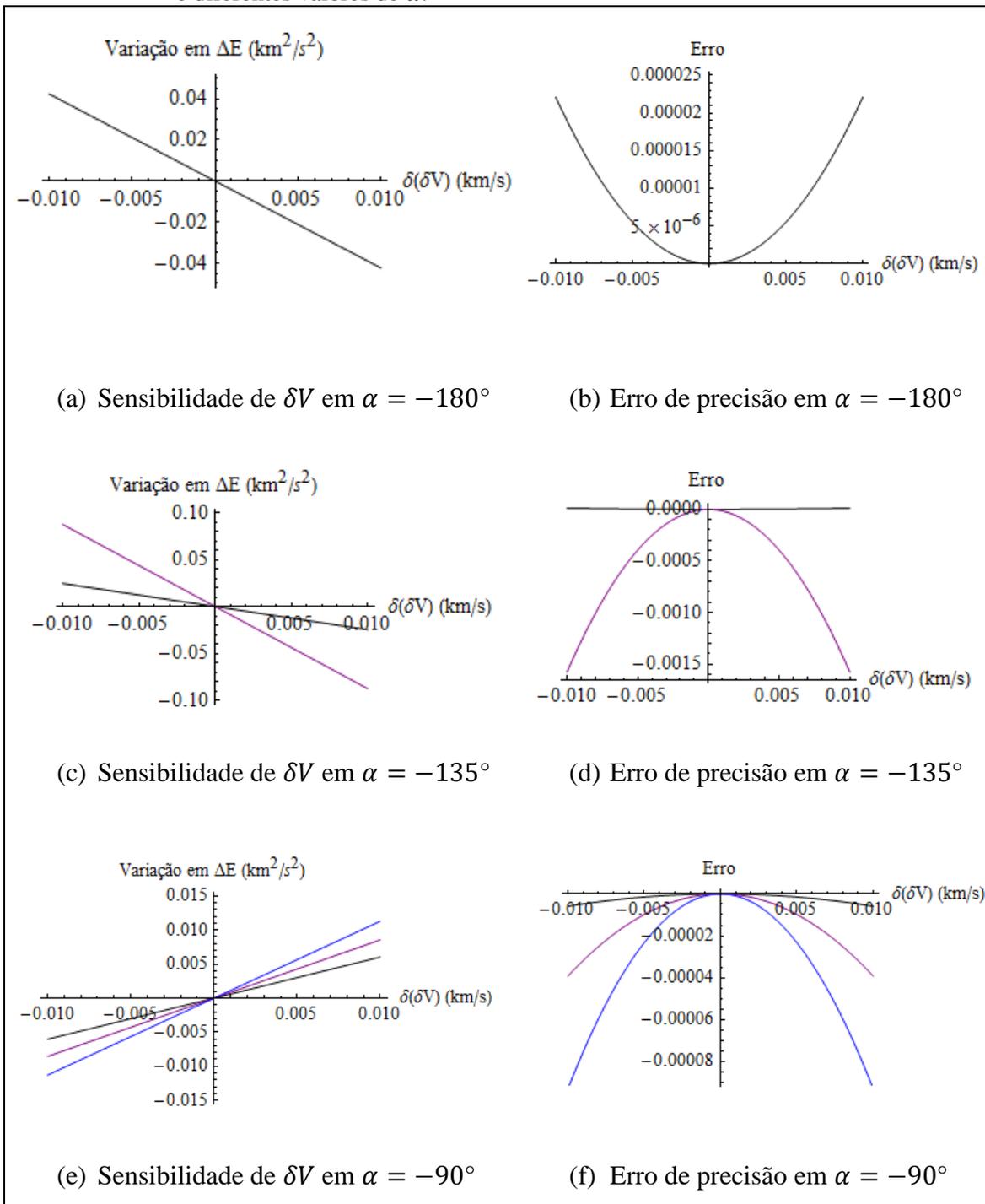
Figura 6.7– Mapa de capturas e colisões para $\psi = 270^\circ$ (adaptado de Ferreira et al., 2015)



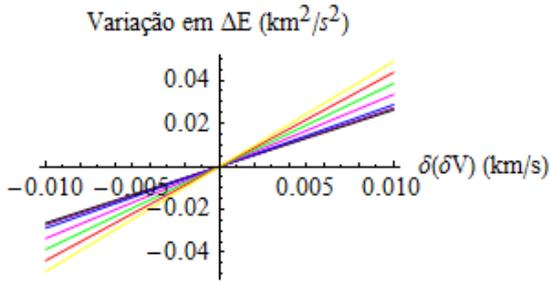
No mapa pode-se ver que ocorreu um número significativamente maior de colisões do que captura. Na maioria dos casos, para valores extremos de α , com maior volume para casos com α negativo.

A sensibilidade da magnitude do impulso, considerando erros de $\pm 0,01$ km/s, que equivale a $\pm 1\%$ da velocidade da Lua em torno do planeta, e o erro de precisão do método usado serão apresentados.

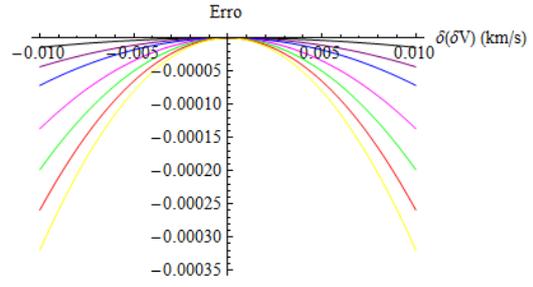
Figura 6.8 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 0,01$ km/s na atribuição de δV , para $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores de α .



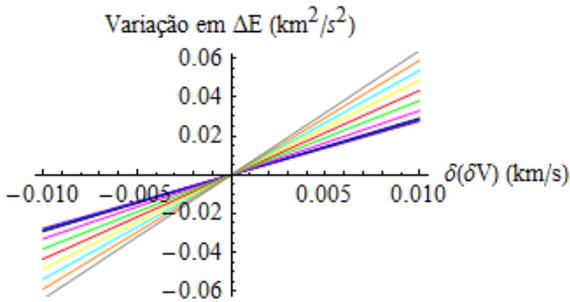
(continua)



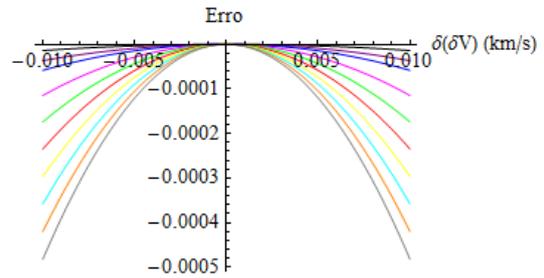
(g) Sensibilidade de δV em $\alpha = -45^\circ$



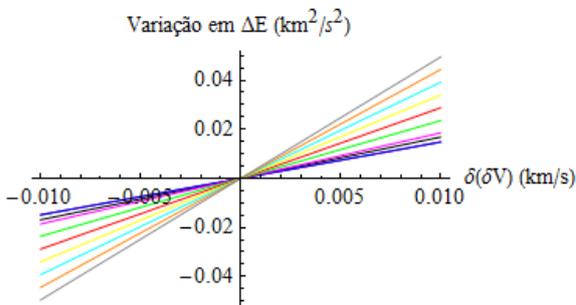
(h) Erro de precisão em $\alpha = -45^\circ$



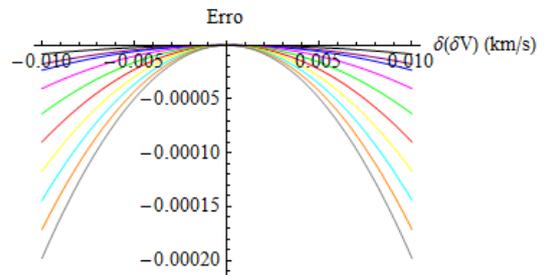
(i) Sensibilidade de δV em $\alpha = 0^\circ$



(j) Erro de precisão em $\alpha = 0^\circ$

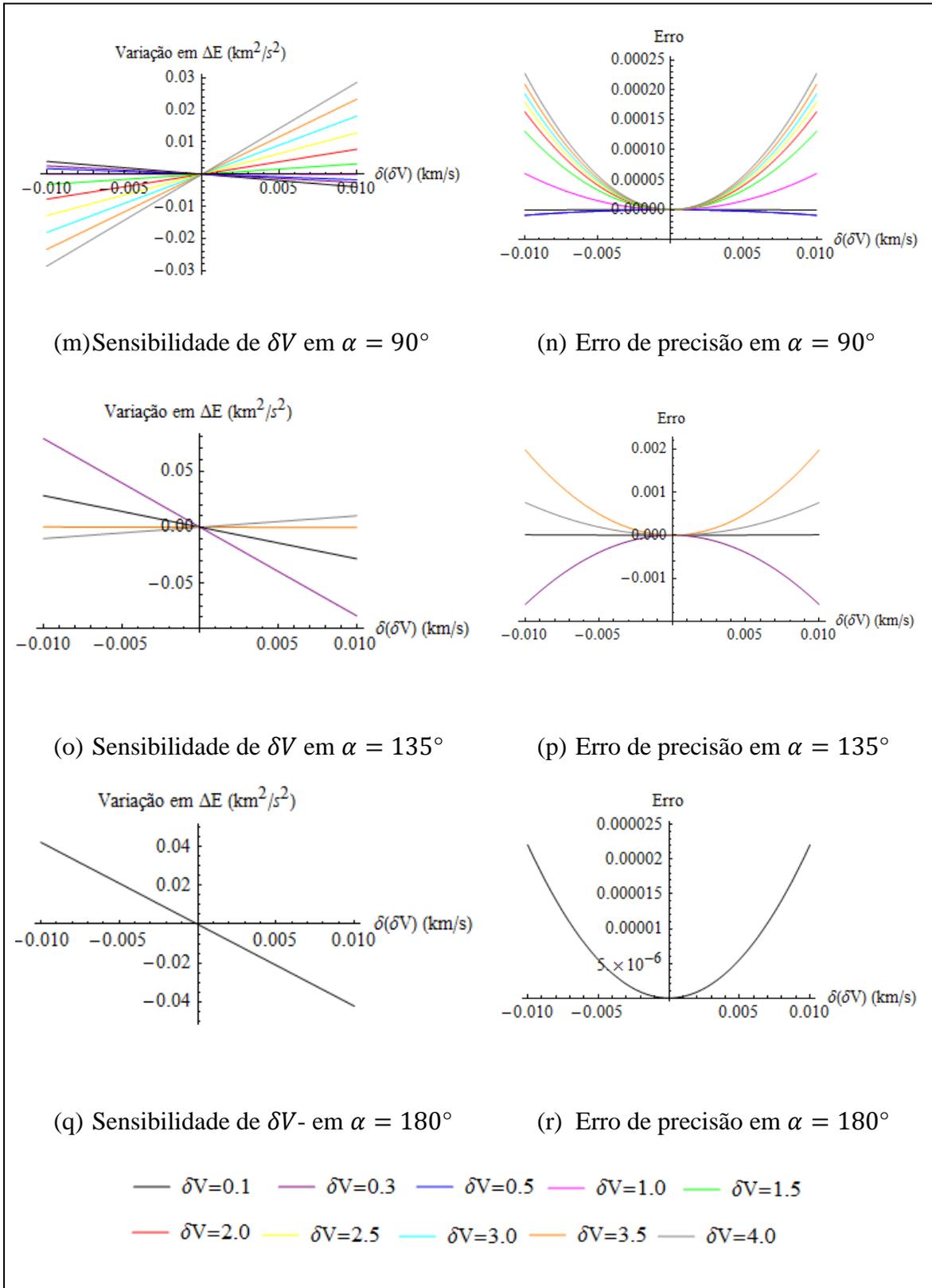


(k) Sensibilidade de δV em $\alpha = 45^\circ$



(l) Erro de precisão em $\alpha = 45^\circ$

(continua)

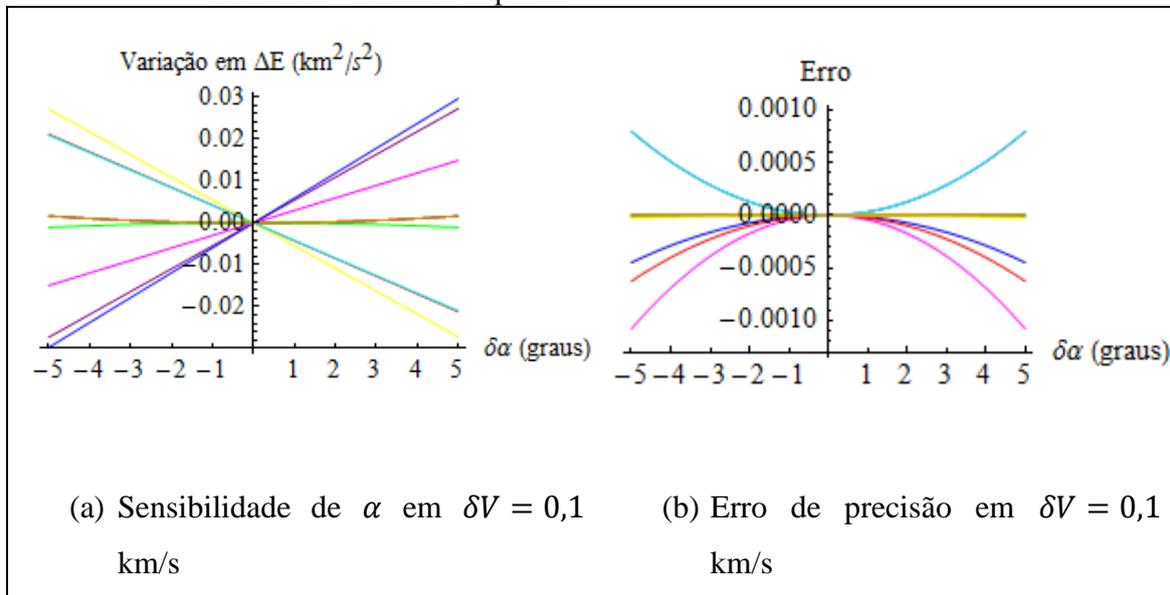


Note que, para $\alpha = -180^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$, que são equivalentes, somente a manobra com impulso de 0,1 km/s não resultou em captura ou colisão. Isso porque o impulso não mudou a geometria suficientemente para gerar este resultado. Nestes casos, errar para mais o impulso desejado resulta em perda de energia, porque o veículo espacial está

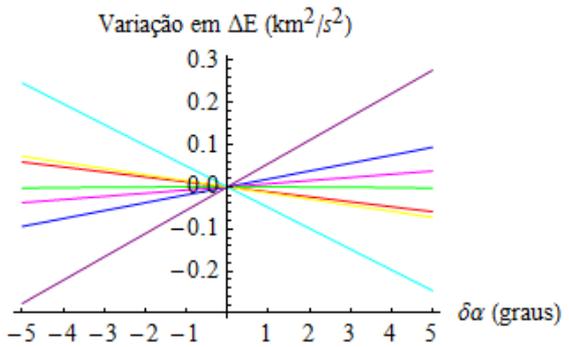
sendo desacelerado, e errar para menos tem uma variação positiva, porque faz desacelerar menos.

Somente para $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 45^\circ$ não houve casos de capturas ou colisões para os impulsos apresentados. Quando $\alpha = 0^\circ$, o impulso está sendo aplicado na direção do movimento do veículo espacial. Aplicar mais impulso do que o desejado aumentará a energia. Quando o erro for para menos, a variação em ΔE é negativa. Para a maioria dos casos a precisão diminui com o aumento do impulso desejado. O efeito de erros de até $\pm 5^\circ$ no valor do ângulo que define a direção do impulso e o erro de precisão do método usado será mostrado a seguir.

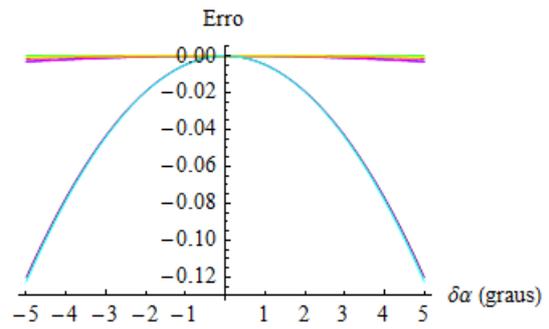
Figura 6.9 – Variação em ΔE para erros de até $\pm 5^\circ$ na atribuição de α , para $\psi = 270^\circ$ e diferentes valores do impulso.



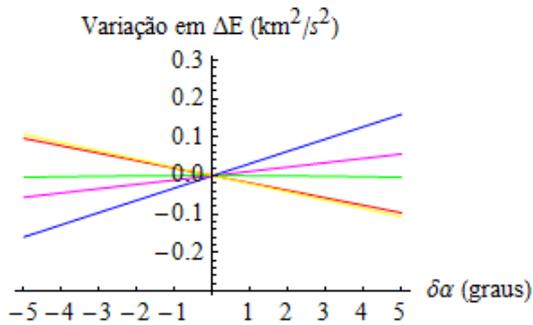
(continua)



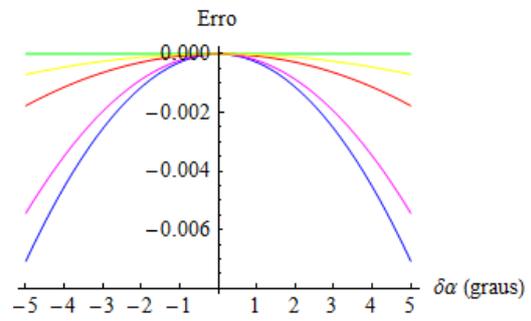
(c) Sensibilidade de α em $\delta V = 0,3$ km/s



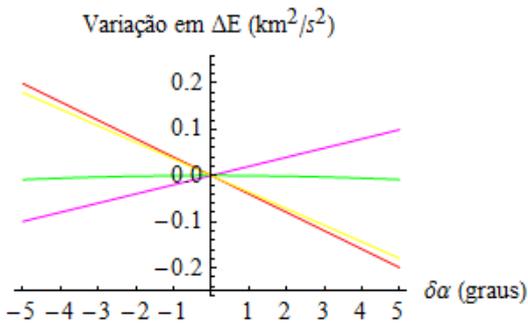
(d) Erro de precisão em $\delta V = 0,3$ km/s



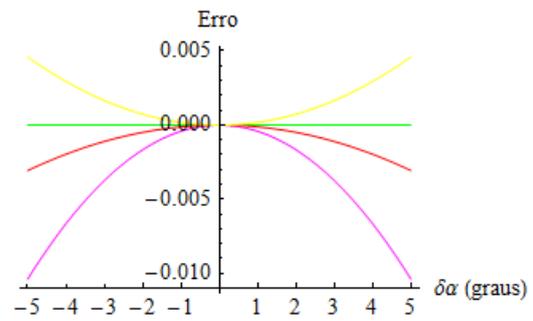
(e) Sensibilidade de α em $\delta V = 0,5$ km/s



(f) Erro de precisão em $\delta V = 0,5$ km/s

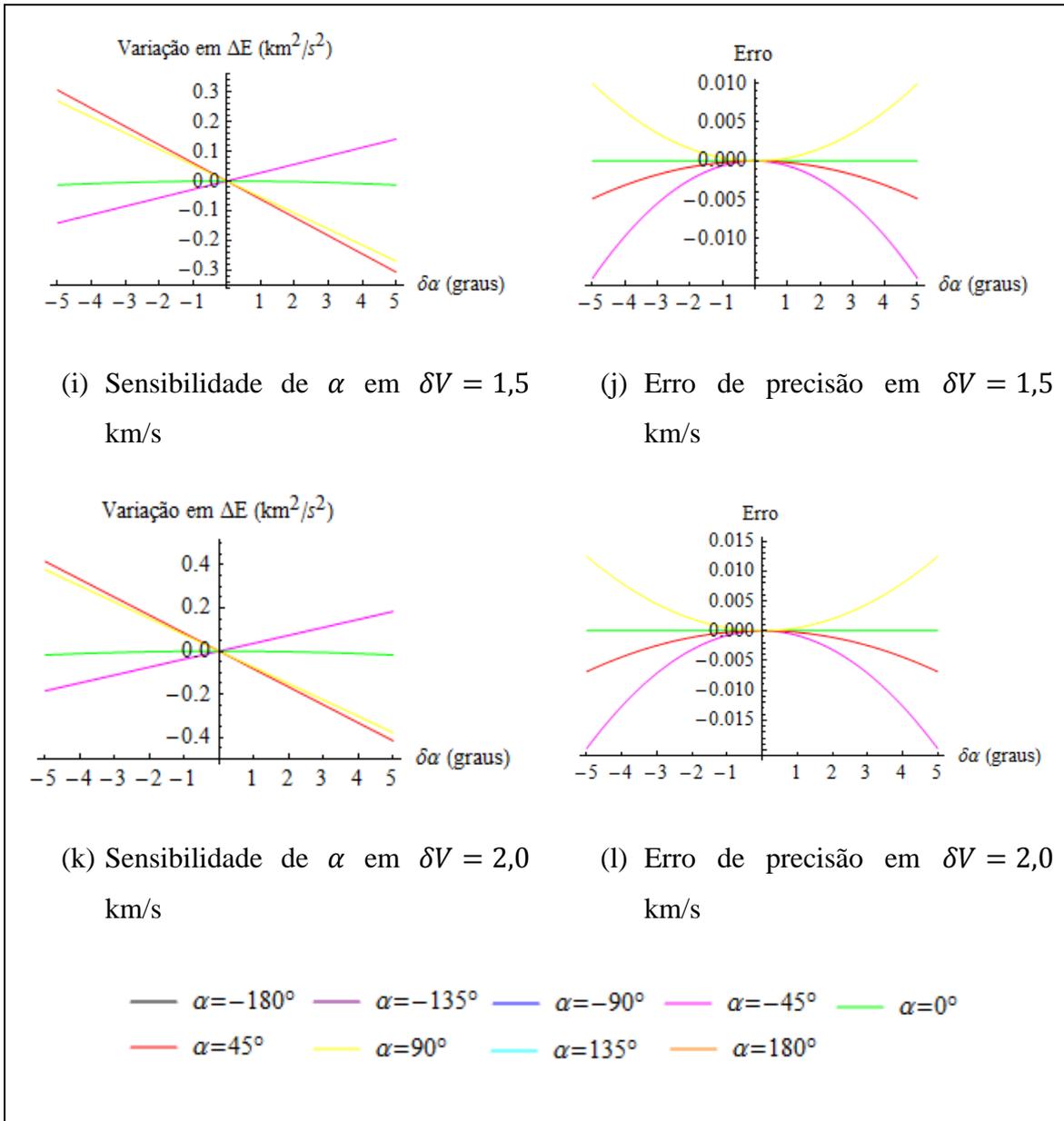


(g) Sensibilidade de α em $\delta V = 1,0$ km/s



(h) Erro de precisão em $\delta V = 1,0$ km/s

(continua)



Para $\alpha = -180^\circ$, $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$, usar aproximação linear não é o suficiente para estimar a sensibilidade de α . Note, a partir das Equações 6.9 e 6.10, que a taxa de variação instantânea de ΔE é zero para qualquer valor de δV . Nestes casos a variação de ΔE é igual ao termo de segunda ordem do Polinômio de Taylor, e o erro de precisão igual ao termo de terceira ordem do Polinômio de Taylor.

Para $\delta V = 0,1$ km/s, a variação em ΔE chega a até aproximadamente $0,0015$ km^2/s^2 para $\delta\alpha$ próximo de 5° e o erro de precisão é zero. Com exceção de $\delta V = 0,1$ km/s, para todos os outros casos e $\alpha = \pm 180^\circ$, resultou em colisão do veículo espacial na

superfície da Lua. Quando $\delta V = 0,3 \text{ km/s}$, $\alpha = \pm 135^\circ$ tem um erro de precisão alto quando comparado com os outros casos estudados, chegando a magnitude de $0,12 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

Quando o α desejado é positivo, errar para mais faz a variação em ΔE ser negativa, pois aumentar a direção de envio do veículo espacial neste caso faz o veículo ir para mais distante do corpo secundário, diminuindo o efeito da gravidade que, neste caso, trabalha para aumentar a energia e então faz ΔE ser menor. Errar para menos envia o veículo para mais próximo do corpo, aumentando a energia.

Quando o α desejado é negativo, errar para mais reforça uma componente na direção do veículo espacial, fazendo-o ganhar energia. Errar para menos faz a componente oposta ao movimento do veículo trabalhar para fazê-lo diminuir a energia, então a variação em ΔE é negativa. A magnitude da variação em ΔE é maior para valores de impulso maiores. Por exemplo, no caso $\delta V = 2,0 \text{ km/s}$, chega até aproximadamente $0,4 \text{ km}^2/\text{s}^2$ para $\alpha = 45^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$.

Note que o efeito sobre ΔE , quando se erra na direção do impulso, é significativamente maior do que errar na magnitude do impulso. Essa diferença, em alguns casos, chega a ser dez vezes maior. Errar na magnitude do impulso faz o veículo ir mais rápido ou mais devagar do que o desejado, mas a geometria tende a se manter a mesma. Errar na direção do impulso modifica a geometria da manobra, resultando em uma nova órbita, diferente da esperada, e então podendo causar uma mudança significativa no resultado desejado.

6.6. Variação total em ΔE devido a erros nos parâmetros

A análise da sensibilidade de cada parâmetro de uma manobra de Swing-By propulsado foi apresentada individualmente. Porém, se o erro ocorrer em mais de um parâmetro, a variação total em ΔE ($\delta \Delta E$) é dada pela soma da variação em ΔE em relação a todos os parâmetros.

$$\delta \Delta E = \frac{\partial \Delta E}{\partial r_p} (\delta r_p) + \frac{\partial \Delta E}{\partial \psi} (\delta \psi) + \frac{\partial \Delta E}{\partial V_{inf-}} (\delta V_{inf-}) + \frac{\partial \Delta E}{\partial \delta V} (\delta(\delta V)) + \frac{\partial \Delta E}{\partial \alpha} (\delta \alpha) \quad (6.11)$$

Erros são possíveis de acontecer, por isso a importância de verificar seus efeitos sobre a manobra e, a partir de então, planejar possíveis soluções.

O estudo mostrou que o ângulo de aproximação da órbita inicial de um veículo espacial (ψ) e o ângulo que define a direção do impulso (α) são os mais sensíveis a erros. Para alguns valores desses ângulos há uma singularidade no método utilizado, sendo necessárias adaptações. Porém, todos os parâmetros têm uma sensibilidade e precisam de atenção.

7 MANOBRAS DE SWING-BY ASSISTIDAS POR CABO

As descrições matemáticas necessárias para desenvolver a manobra de “Swing-By assistida por cabo” ou “Tethered Sling Shot Maneuver (TSSM)” e a análise do equilíbrio, estabilidade e força para a manobra são apresentadas a seguir. Essa manobra pode ter como objetivo lançar o veículo espacial para um ponto distante, e assim provocar a captura ou escape do veículo espacial.

7.1. Tethers

Um tether consiste em dois objetos fixos nas extremidades de um cabo. Neste trabalho consideraremos o cabo ancorado na superfície de um corpo celeste com raio finito, como um planeta, uma lua ou um asteroide; e na outra extremidade será conectado o veículo espacial. O cabo é considerado fino, rígido, inextensível e com massa negligenciável.

Esta é uma alternativa para manobrar veículos espaciais no espaço. Neste caso usaremos o tether para fazer uma manobra de “Swing-By assistida por cabo”. Para executar esta manobra analisaremos, em relação ao tether: as condições de equilíbrio, estabilidade dos pontos de equilíbrio e a força que age na direção do cabo. Em relação à manobra estudaremos o ganho de energia obtido pelo TSSM.

A proposta é construir uma estrutura fixa na lua, com uma rede em uma das extremidades do tether, que receberá o veículo espacial. O veículo espacial apenas será manobrado para alcançar a rede. Presume-se sempre que o dispositivo receptor do veículo espacial está localizado em pontos de equilíbrio quando este chega ao sistema e conecta-se na rede. Por isso o tether precisa estar em um ponto de equilíbrio fisicamente possível e o cabo precisa estar esticado com força de tração agindo nele. O ideal é o equilíbrio linearmente estável, mas adotaremos o equilíbrio instável como uma segunda opção. Esses dados serão obtidos a partir da dinâmica do veículo espacial.

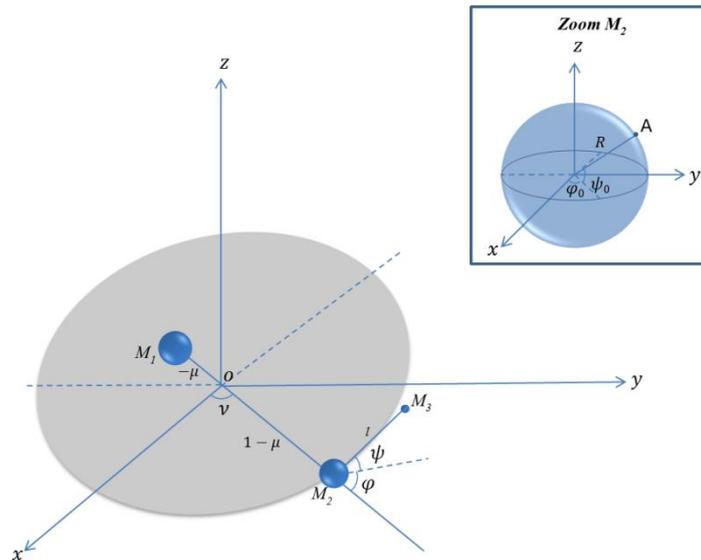
Para análise do tether, consideraremos que o veículo espacial pode se mover no espaço tridimensional, ao redor do centro de massa dos corpos primários, em uma órbita circular ($e = 0$). As posições dos primários são apresentadas nas Equações 3.3 e 3.4, sendo $d = 1$. A posição do veículo espacial, quando este está vinculado ao tether, é dada por x_3 , y_3 e z_3 .

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + R\cos(\psi_0)\cos(\nu + \varphi_0) + l\cos(\psi)\cos(\nu + \varphi) \\ y_3 = y_2 + R\cos(\psi_0)\sin(\nu + \varphi_0) + l\cos(\psi)\sin(\nu + \varphi) \\ z_3 = z_2 + R\sin(\psi_0) + l\sin(\psi) \end{cases} \quad (7.1)$$

Os parâmetros φ_0 e ψ_0 definem o ponto na superfície de M_2 onde o tether será ancorado (ver zoom de M_2 , na Figura 7.1). φ_0 descreve a posição da âncora no equador de M_2 . É o ângulo entre a linha dos primários e o vetor posição da âncora projetada no plano $x - y$. ψ_0 descreve a posição da âncora fora do plano dos primários (eixo z). Este é o ângulo entre o vetor posição da âncora e o plano $x - y$. R é o raio do corpo secundário, l é o tamanho do cabo que compõe o tether. O ponto A é a âncora na superfície do corpo e $z_2 = 0$.

O movimento do veículo espacial no plano $x - y$ é descrito por φ (ângulo entre a linha $M_1 - M_2$ e a projeção do vetor posição do tether no plano) e em z é descrito por ψ (ângulo entre o tether e o plano $x - y$). A Figura 7.1 mostra a geometria do sistema de tether.

Figura 7.1 – Geometria do sistema de tether.



Se fixarmos uma haste na superfície de M_2 e considerar R igual à distância total do raio do corpo mais o tamanho da haste, as leis da mecânica orbital permanecem as mesmas.

As equações do movimento do veículo espacial podem ser escritas usando as Equações de Lagrange, que descrevem o movimento sob a ação de forças com respeito ao centro de massa do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi'} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} \right) = 0 \end{cases}, \quad (7.2)$$

sendo L a Lagrangeana, definida pela diferença entre a energia cinética $T = \frac{1}{2}V_s^2$ e energia potencial, $U_1 = -\frac{(1-\mu)}{r_1}$ (relativo ao corpo M_1) e $U_2 = -\frac{\mu}{r_2}$ (relativo ao corpo M_2), ambas para corpos primários com formas regulares.

$$L = \frac{1}{2}V_s^2 + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (7.3)$$

$V_s = \sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2}$ é a velocidade do veículo espacial obtida a partir da derivada da posição no tempo, $r_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$ é a distância $M_1 - M_3$ e $r_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$ é a distância $M_2 - M_3$ dado pela soma dos vetores que conectam o centro do corpo secundário à âncora e o vetor que conecta a âncora ao veículo espacial.

O estudo também foi aplicado para casos com corpos primários irregulares, assumidos serem elipsoides. O potencial gravitacional (U) destes corpos foi descrito usando os coeficientes da expansão dos harmônicos esféricos em função da dimensão dos corpos. U_n é o potencial gravitacional de M_1 quando $n = 1$ e de M_2 quando $n = 2$, dado pela Equação 7.4.

$$U_n = \frac{\mu_n}{r_n} \left(1 + \left(\frac{R_n}{r_n} \right)^2 (C_{20n}(1 - 1.5 \cos(\delta_n)^2) + 3C_{22n} \cos(\delta_n)^2 \cos(2\gamma_n)) \right), \quad (7.4)$$

sendo $\mu_1 = 1 - \mu$ e $\mu_2 = \mu$, R_n o raio equatorial do corpo, C_{20n} e C_{22n} os coeficientes que representam a irregularidade dos corpos, apresentados em função dos eixos a_n , b_n e c_n do elipsoide, para $a_n \geq b_n \geq c_n$.

$$C_{20n} = \frac{2c_n^2 - (b_n^2 + a_n^2)}{10R_n^2} \quad (7.5)$$

$$C_{22n} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{20R_n^2} \quad (7.6)$$

δ_n e γ_n são a latitude e longitude do veículo espacial em relação ao centro de massa do corpo.

$$\delta_n = \cos^{-1} \left(\frac{-((z_3 - z_n)^2 - (x_3 - x_n)^2 - r_n^2)}{2(x_3 - x_n)r_n} \right) \quad (7.7)$$

$$\gamma_n = \cos^{-1} \left(\frac{-((y_3 - y_n)^2 - (x_3 - x_n)^2 - r_n^2)}{2(x_3 - x_n)r_n} \right) \quad (7.8)$$

7.1.1. Condições de equilíbrio do tether

O dispositivo que receberá o veículo espacial no tether, para a execução da manobra de Swing-By assistida por cabo, precisa estar em um ponto de equilíbrio.

Matematicamente, o ponto de equilíbrio de uma função é o ponto onde suas derivadas são zero, ou seja, não há variação de φ e ψ . Logo, nestes pontos, a força resultante que age no veículo espacial também é igual a zero ($\vec{F}_R = \vec{0}$). Uma partícula posicionada em um ponto de equilíbrio com velocidade inicial igual a zero permanecerá indefinidamente neste ponto.

Para obter as equações que nos dá o equilíbrio, aplicaremos nas equações do movimento, obtidas a partir da Equação 7.2, as condições $\varphi' = \varphi'' = \psi' = \psi'' = 0$ e o tamanho do cabo inextensível $l' = l'' = 0$. As equações gerais de equilíbrio são:

$$\begin{cases} \lambda_1(\varphi_0, \psi_0, \varphi, \psi, l) = 0 \\ \lambda_2(\varphi_0, \psi_0, \varphi, \psi, l) = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

sendo,

$$\lambda_1 = \frac{1}{l \cos \psi} \left((R \cos \psi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varphi) - (1 - \mu) p \operatorname{sen} \varphi) - \frac{(p^3 \mu R \cos \psi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varphi))}{r_2^3} - \frac{(1 - \mu) p^3 (R \cos \psi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varphi) - p \operatorname{sen} \varphi)}{(r_2^2 + p^2 + 2p(l \cos \varphi \cos \psi + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0))^{3/2}} \right), \quad (7.10)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{l} \left(-(((1 - \mu) p + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0) \cos \varphi + (l \cos \psi + R \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \psi_0 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \psi) + \frac{(\mu p^3 R (-\operatorname{sen} \psi_0 \cos \psi + \cos \psi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) \operatorname{sen} \psi))}{r_2^3} - \frac{(1 - \mu) p^3 (R \cos \psi \operatorname{sen} \psi_0 - (p \cos \varphi + R \cos \psi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)) \operatorname{sen} \psi)}{(r_2^2 + p^2 + 2p(l \cos \varphi \cos \psi + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0))^{3/2}} \right),$$

$p = 1$ é a distância $M_1 - M_2$.

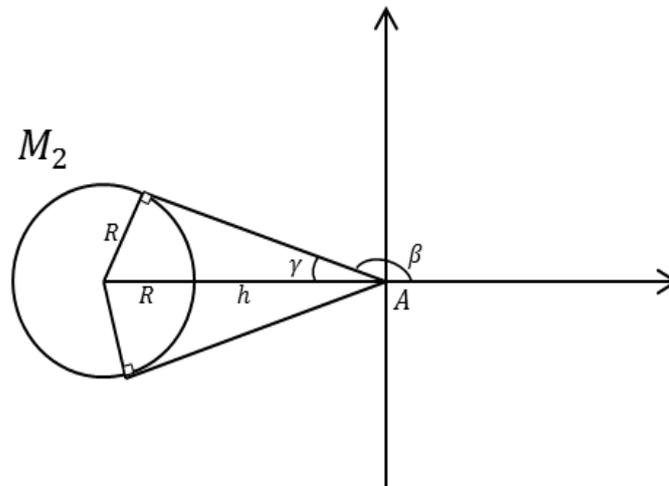
Para evitar singularidades na equação de λ_1 , para o tether fora do plano ($\psi = \pm \frac{\pi}{2}$), novas equações foram obtidas usando mudança de variáveis. Essas equações são apresentadas no Capítulo 8.

Sabendo que \vec{F}_R é igual à zero neste ponto e analisando essas forças, temos: $\vec{F}_{cent} + \vec{F}_{cabo} + \vec{F}_{g1} + \vec{F}_{g2} = \vec{0}$, sendo \vec{F}_{cent} a força centrífuga, \vec{F}_{cabo} a força no cabo (apresentada na subseção 7.1.3), \vec{F}_{g1} a força gravitacional do corpo primário e \vec{F}_{g2} a força gravitacional do corpo secundário. $\vec{F}_{cent} = \omega^2 \vec{r}_3$, sendo $\omega = 1$ a velocidade angular do sistema, com órbita circular, escrita na forma adimensional e \vec{r}_3 o vetor posição do veículo espacial. As forças gravitacionais \vec{F}_{g1} e \vec{F}_{g2} são calculadas a partir da derivada do potencial do corpo em relação à posição do veículo espacial. As combinações φ, ψ e l que satisfazem a Equação 7.9, para o dado φ_0 e ψ_0 , ou a condição $\vec{F}_R = \vec{0}$, definem as soluções de equilíbrio do tether.

Porém, somente serão candidatos a receber o veículo espacial as soluções que respeitem as condições físicas reais, ou seja, aquelas em que estão na região de visada do tether, onde o veículo espacial não se enrola em torno da superfície do corpo.

A região de visada pode ser ampliada se colocarmos uma haste na extremidade do tether que será fixa na superfície do corpo. Isso acontece porque o ângulo β (ângulo entre o eixo horizontal e a linha que conecta o ponto A a linha tangente à lua), mostrado na Fig. 7.2, aumenta com o incremento no tamanho da haste. A região de visada do tether, para a âncora no plano $x - y$, como uma função da longitude da posição da âncora (φ_0), raio da lua (R) e tamanho da haste (h) é $-\beta + \varphi_0 \leq \Theta \leq \beta + \varphi_0$. Nesta equação $\beta = \pi - \gamma$ e $\gamma = \text{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)$. A Figura 7.2 apresenta a descrição para a âncora em $\varphi_0 = 0$. Note que, para $h = 0$, o tether é fixado diretamente na superfície do corpo e $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Figura 7.2 – Descrição da região fisicamente possível do tether.



7.1.2. Estabilidade do ponto equilíbrio

O equilíbrio de um corpo é linearmente estável (CHANDRASEKHAR, 1961; DRAZIN; REID, 1981) quando, aplicados pequenas perturbações neste corpo, ele tende a retornar para a sua posição inicial. Além disso, o equilíbrio linearmente estável requer menos consumo de combustível, se um controle for necessário para retornar o dispositivo para a posição original. O ponto de equilíbrio instável será uma segunda opção por esta razão, mas ele também será considerado, já que de qualquer forma requer um menor controle para a manutenção de um veículo nesse ponto quando comparado a um ponto que não seja de equilíbrio.

Matematicamente, o equilíbrio é linearmente estável quando a função da energia potencial total (U_t) tem um mínimo local (STEWART, 2005). Essa condição é satisfeita se:

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3^2}(a, b, c) > 0 \quad (7.11)$$

$$H(x_3, y_3, z_3) > 0 \quad (7.12)$$

$$H_1(x_3, y_3) > 0, \quad (7.13)$$

sendo x_3, y_3 e z_3 as componentes da posição do veículo espacial no ponto de equilíbrio (a, b, c) , $H(x_3, y_3, z_3)$ o determinante da matriz Hessiana (Função Hessiana) 3×3 e $H_1(x_3, y_3)$ o determinante da matriz Hessiana 2×2 , ambas para a função da energia potencial total.

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial y_3} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial y_3} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3^2} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial z_3} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3 \partial z_3} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial z_3^2} \end{vmatrix}, \quad H_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial y_3} \\ \frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial y_3} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3^2} \end{vmatrix}. \quad (7.14)$$

As segundas derivadas parciais são como segue:

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3^2} = \omega^2 + \frac{\partial F_{cabo_x}}{\partial x_3} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2} \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3^2} = \omega^2 + \frac{\partial F_{cabo_y}}{\partial y_3} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_3^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial z_3^2} = \frac{\partial F_{cabo_z}}{\partial z_3} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial z_3^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial z_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial y_3} = \frac{\partial \left(F_{cabo_y} + \omega^2 y_3 - \frac{\partial U_1}{\partial y_3} - \frac{\partial U_2}{\partial y_3} \right)}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial z_3} = \frac{\partial \left(F_{cabo_z} - \frac{\partial U_1}{\partial z_3} - \frac{\partial U_2}{\partial z_3} \right)}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3 \partial z_3} = \frac{\partial \left(F_{cabo_z} - \frac{\partial U_1}{\partial z_3} - \frac{\partial U_2}{\partial z_3} \right)}{\partial y_3},$$

sendo $\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_3^2}$, $\frac{\partial^2 U_n}{\partial y_3^2}$ e $\frac{\partial^2 U_n}{\partial z_3^2}$, para n igual a 1,2 e t , as derivadas parciais de segunda ordem da função potencial em relação à posição do veículo espacial e $\frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3 \partial z_3}$, $\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_3 \partial z_3}$ e $\frac{\partial^2 U_t}{\partial y_3 \partial z_3}$ as derivadas parciais de segunda ordem mistas. F_{cabo_x} , F_{cabo_y} e F_{cabo_z} são as componentes da força no cabo.

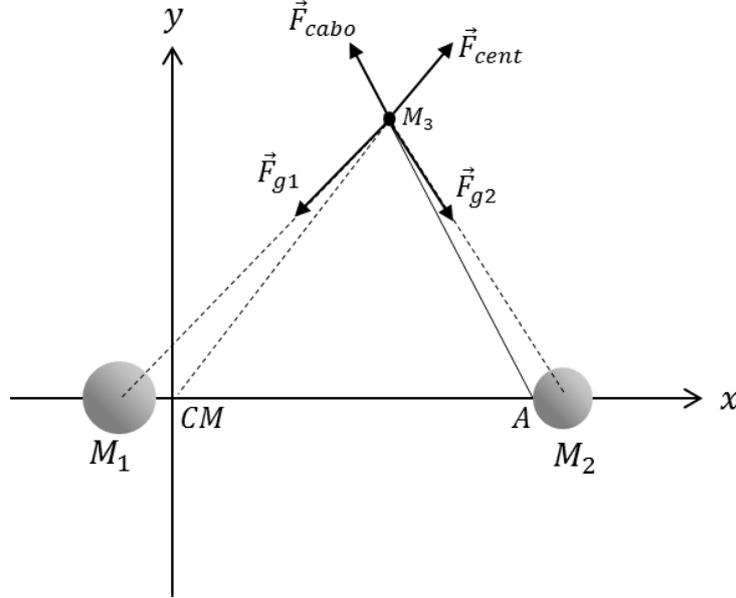
Portanto, o conjunto de variáveis φ , ψ e l , pertencentes às soluções de equilíbrio que satisfazem as condições das Equações 7.11, 7.12 e 7.13, descrevem o equilíbrio linearmente estável. Sempre que citarmos equilíbrio estável estaremos nos referindo ao equilíbrio linearmente estável. Para o caso do veículo espacial se movimentando no espaço bidimensional, $z_3 = 0$, as soluções de equilíbrio linearmente estáveis são aquelas que satisfazem as condições das Equações 7.11 e 7.13.

7.1.3. Tensão no cabo

A tensão no cabo é a força que o veículo espacial exerce no cabo. Ela é calculada a partir das forças centrífuga e gravitacionais envolvidas no sistema. Sua análise auxilia na construção da estrutura do cabo. A escolha do material requerido pela missão é

dependente destas forças. Os detalhes desta tarefa não serão apresentados neste trabalho.

Figura 7.3 – Diagrama das forças envolvidas no sistema.



\vec{F}_{cabo} é a força que o cabo exerce no veículo espacial, cujas componentes são F_{cabo_x} , F_{cabo_y} e F_{cabo_z} dadas na equação 7.16. Sendo x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 e x_3, y_3, z_3 as componentes do vetor posição de M_1, M_2 e M_3 , respectivamente. ω é a velocidade angular do sistema, r_1 a distância $M_1 - M_3$ e r_2 a distância $M_2 - M_3$.

$$\begin{cases} F_{cabo_x} = \omega^2 x_3 - \frac{(1-\mu)(x_3-x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x_3-x_2)}{r_2^3} \\ F_{cabo_y} = \omega^2 y_3 - \frac{(1-\mu)(y_3-y_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(y_3-y_2)}{r_2^3} \\ F_{cabo_z} = -\frac{(1-\mu)(z_3-z_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(z_3-z_2)}{r_2^3} \end{cases} \quad (7.16)$$

A força \vec{F}_{cabo} pode ser escrita também como $\vec{F}_{cabo} = \tau \frac{\vec{SA}}{|\vec{SA}|}$. Sendo $\frac{\vec{SA}}{|\vec{SA}|}$ um versor na direção veículo espacial-âncora. Logo, a magnitude e o sentido da tensão no cabo são determinados por τ , para valores do raio da lua (R), comprimento do tether (l), longitude e latitude da posição da âncora (φ_0, ψ_0) e longitude e latitude da posição do tether (φ, ψ) que garantem a força na direção do cabo.

$$\tau = ((1 - \mu + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0) \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \mu + l \cos \varphi \cos \psi + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0 \right. \\ & \left. - \frac{\mu(l \cos \varphi \cos \psi + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0)}{a'^{3/2}} - \frac{(1 - \mu)(1 + l \cos \varphi \cos \psi + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0)}{(1 + a')^{3/2}} \right) / b'^{1/2} \\ & + (R^2 \cos \psi_0 \sin \varphi_0 \sin \psi_0 (l \cos \psi \sin \varphi + R \cos \psi_0 \sin \varphi_0 \\ & - \frac{\mu(l \cos \psi \sin \varphi + R \cos \psi_0 \sin \varphi_0)}{a'^{3/2}} - \frac{(1 - \mu)(l \cos \psi \sin \varphi + R \cos \psi_0 \sin \varphi_0)}{(1 + a')^{3/2}}) \\ & \left. \left(\frac{-\mu(l \sin \psi + R \sin \psi_0)}{a'^{3/2}} + \frac{(1 - \mu)(l \sin \psi + R \sin \psi_0)}{(1 + a')^{3/2}} \right) \right) / b' \end{aligned}$$

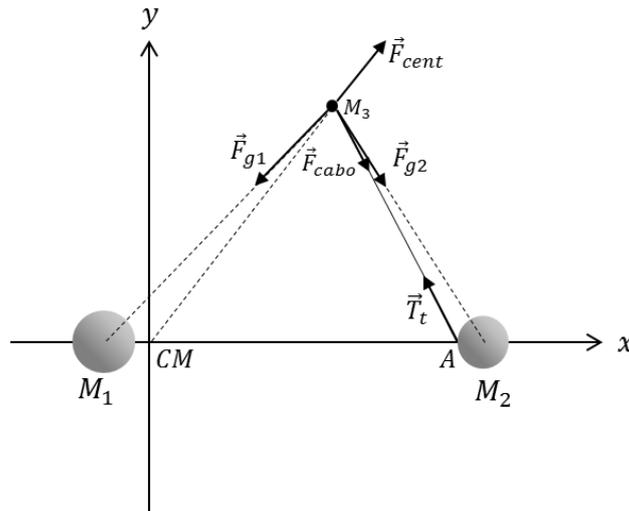
sendo,

$$\begin{aligned} a' = & (l \cos \varphi \cos \psi + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0)^2 + (l \cos \psi \sin \varphi + R \cos \psi_0 \sin \varphi_0)^2 \\ & + (l \sin \psi + R \sin \psi_0)^2 \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$b' = (1 - \mu + R \cos \varphi_0 \cos \psi_0)^2 + R^2 (\cos \psi_0^2 \sin \varphi_0^2 + \sin \psi_0^2)$$

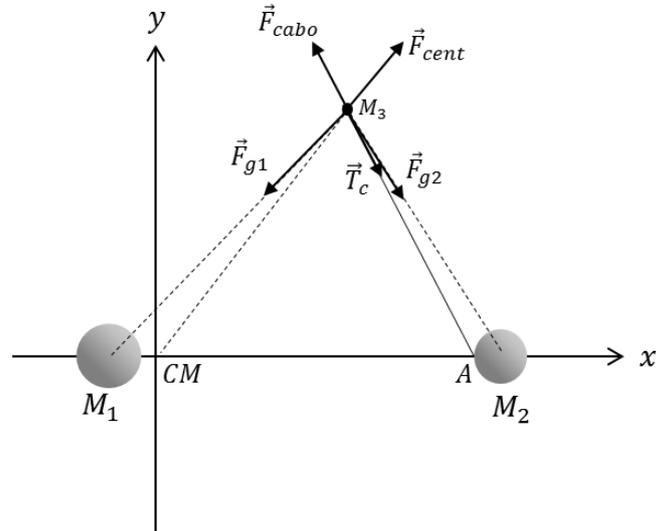
Se $\tau > 0$, a tensão no cabo (\vec{T}_t) é de tração, com magnitude $|\tau|$. Neste caso, o veículo espacial está esticando o cabo.

Figura 7.4 – Diagrama das forças envolvidas no sistema com tração no cabo.



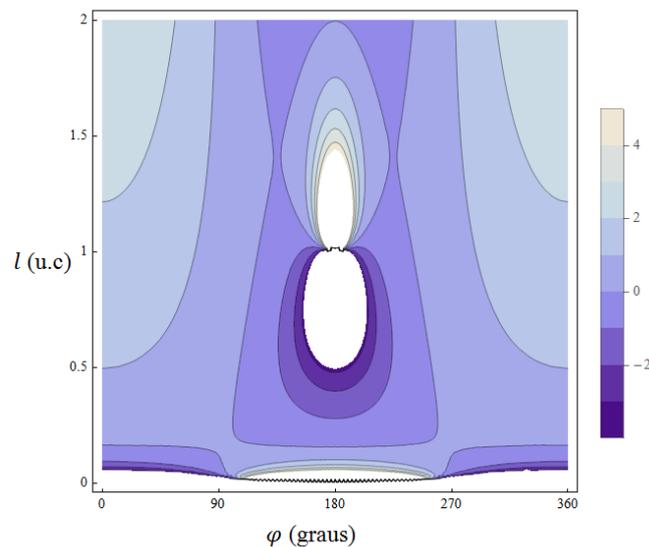
Se $\tau < 0$, a tensão no cabo (\vec{T}_c) é de compressão, com magnitude $|\tau|$. O veículo espacial está pressionando o cabo.

Figura 7.5 – Diagrama das forças envolvidas no sistema com compressão no cabo.



Um mapa dos valores de τ , para o parâmetro de massa $\mu = 0,01214$, $R = 0,0044$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$, é apresentado em função dos valores de φ e l .

Figura 7.6 – Mapa dos valores de τ , para $\mu = 0,01214$, $R = 0,0044$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



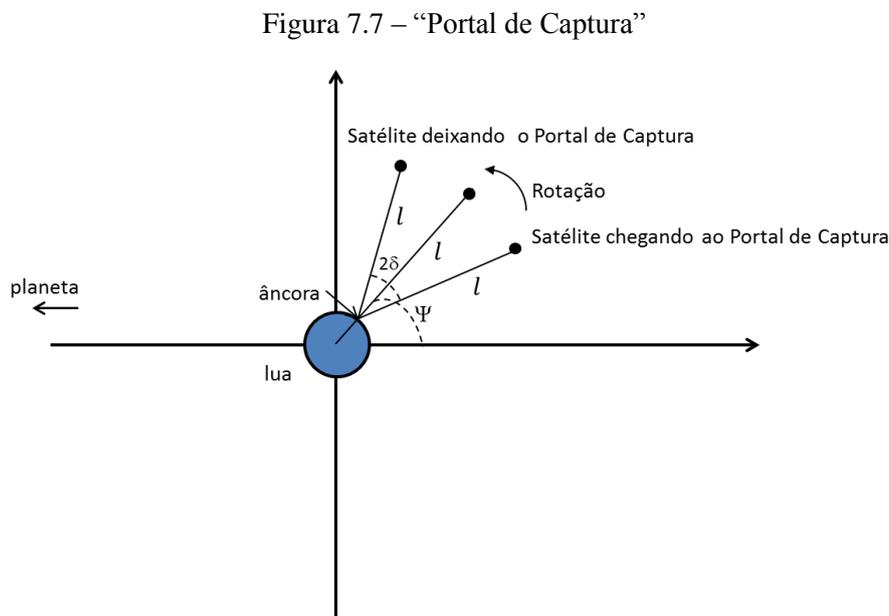
Para outros valores da posição da âncora no plano os mapas são similares ao da Figura 7.6. A principal diferença ocorre na região em que o tamanho do cabo varia de 0 a 0,1 u.c. Para conectar o veículo espacial ao tether, para a execução da manobra de Swing-

By assistida por cabo, além do equilíbrio preferencialmente ser linearmente estável, é necessário que o cabo do tether esteja sob o efeito da força de tração ($\tau > 0$).

7.2. Ganho de energia obtido pelo TSSM

A manobra de “Swing-By assistida por cabo” ou “Tethered Sling Shot Maneuver (TSSM)” faz o veículo espacial rotacionar em torno do corpo em um dado ângulo, fazendo modificações mais significativas na trajetória do veículo espacial quando comparado à manobra de Swing-By puro.

A Figura 7.7 mostra o “Portal de Captura” proposto por Prado (2015).



Os principais resultados são apresentados em gráficos mostrando os efeitos das manobras na trajetória do veículo espacial, em particular indicando as regiões de captura pelo planeta. O eixo horizontal mostra o ângulo de aproximação e o eixo vertical mostra a velocidade de aproximação. A Tabela 7.1 descreve a notação para os efeitos da manobra. Ela mostra como a órbita é antes e após a manobra, em termos de energia (elipse ou hipérbole) e momento angular (direta ou retrógrada).

Tabela 7.1 – Descrição das órbitas.

Depois: Antes:	Elipse Direta	Elipse Retrógrada	Hipérbole Direta	Hipérbole Retrógrada
Elipse Direta	A	E	I	M
Elipse Retrógrada	B	F	J	N
Hipérbole Direta	C	G	K	O
Hipérbole Retrógrada	D	H	L	P

Para uma melhor identificação, cada letra tem uma cor. As notações com fundo cinza são casos de captura e escape.

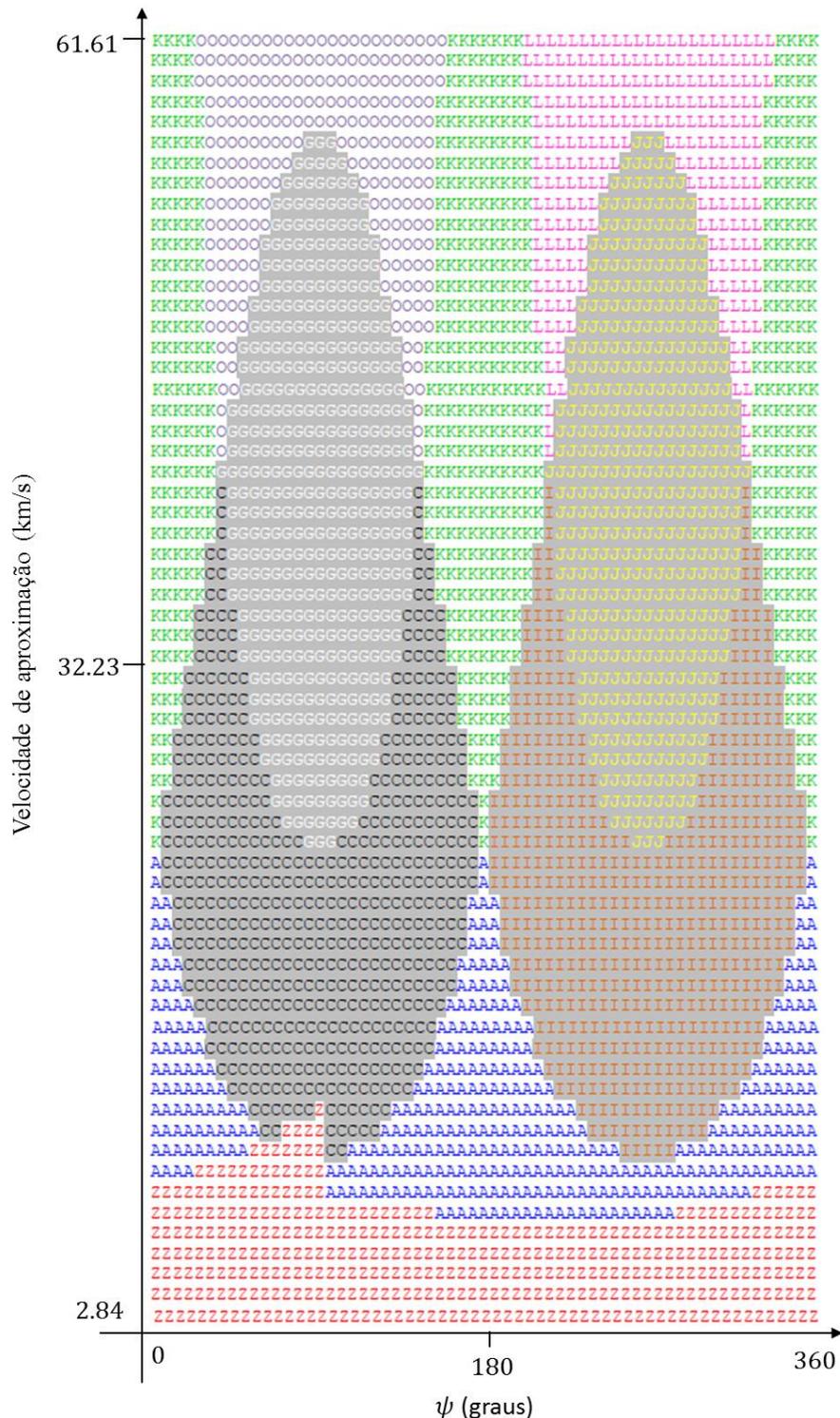
Consideramos o veículo espacial capturado pelo planeta nos casos em que a órbita inicial é uma hipérbole direta ou retrógrada e que, após a manobra, passa a ser uma elipse direta ou retrógrada. Essas trajetórias são representadas pelas letras “C”, “D”, “G” e “H”. Nos casos “A”, “B”, “E” e “F” o veículo já estava em uma órbita fechada em torno do planeta antes da manobra, e depois da manobra ele manteve-se em uma órbita elíptica podendo ou não ter mudado apenas o sentido do movimento (essa mudança ocorre em “B” e “E”). Para as situações com órbitas do tipo “K”, “L”, “O”, e “P”, a órbita antes e depois da manobra é uma hipérbole. Os casos de escape (letras “I”, “J”, “M” e “N”) ocorrem quando o veículo espacial muda de uma órbita fechada (elíptica) em torno do planeta para uma órbita hiperbólica depois da manobra, deixando assim o sistema. A letra “Z” foi usada para representar uma trajetória que manteve o veículo espacial perto da lua durante o tempo total de integração.

Nas figuras ocorrem os casos: “A” – azul, “C” – preta, “G” – branca, “I” – laranja, “J” – amarelo, “K” – verde, “L” – rosa, “O” – roxa e “Z” – vermelha, além dos casos de captura e escape (“C”, “G”, “I” e “J”).

Prado (2015) mostrou os resultados em detalhes para Adrastea (lua de Júpiter) e Daphnis (lua de Saturno). Nesta pesquisa, além dessas duas luas, foram incluídas mais três luas do Sistema Solar no estudo da análise dos pontos de equilíbrio: Thebe (Júpiter), Cordélia (Urano) e Naiad (Netuno).

Thebe é maior que Adrastea, com massa de $4,3 \times 10^{17}$ kg. Sua distância a partir de Júpiter é de 221889 km, e o período de rotação em torno de Júpiter é de 16 h, 11 min 17 s, o que implica em uma velocidade orbital de 23,69 km/s.

Figura 7.8 – Descrição dos efeitos do TSSM na trajetória do veículo espacial, no sistema Júpiter - Thebe, para $l = 100$ km e $\delta = 90^\circ$.

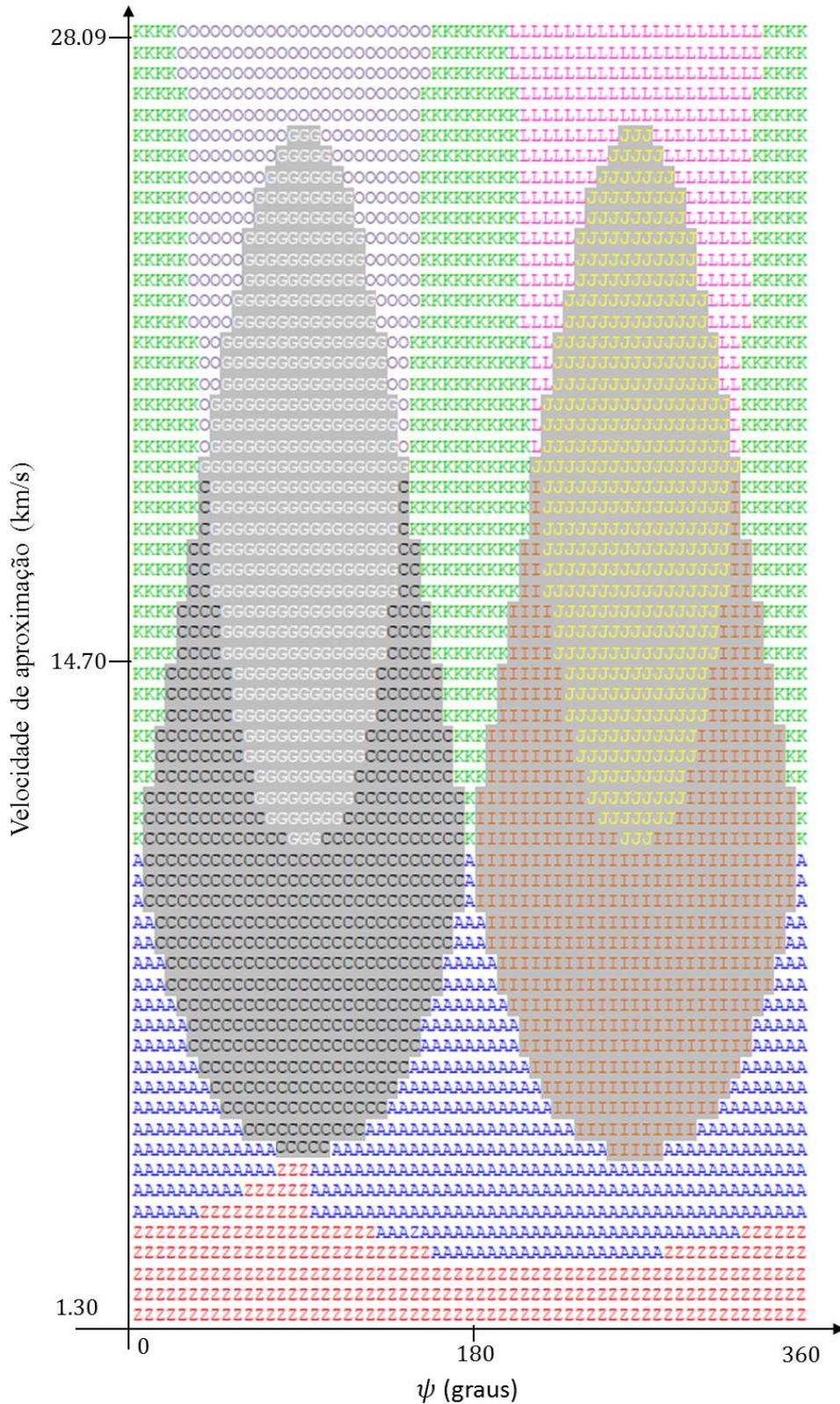


A Figura 7.8 mostra que a manobra com o tether dá uma variação na energia que é suficiente para desenvolver a inserção em torno de Júpiter, desde que ψ esteja entre 0° e 180° e o intervalo da velocidade de aproximação seja de 10,42 km/s a 56,86 km/s, que está coberto pela região de possíveis capturas em torno do planeta. Note que, nos casos de captura, a órbita antes da manobra era sempre uma hipérbole direta e, após a manobra, houve casos de elipse direta e retrógrada (“C” e “G”). Apesar do foco deste estudo ser a captura, observe que para ψ maior que 180° há uma região de casos de escape, para o mesmo intervalo de valores da velocidade de aproximação da captura. Em todos os casos o veículo espacial escapou em uma órbita hiperbólica direta (“I” e “J”). Há também regiões com órbitas elípticas diretas que, depois da manobra, se manteve com a mesma característica (tipo “A”); e regiões com órbitas abertas do tipo “K”, “L” e “O”. Para velocidades de aproximação variando de 2,84 km/s a 12,31 km/s, houve trajetórias que se mantiveram perto de Thebe até o tempo final de integração.

O próximo planeta a ser considerado é Urano. Cordélia, uma lua com massa de $4,4 \times 10^{16}$ kg, é usada. Sua distância de Urano é de 49770 km e o período de rotação é 0,335034 dias. Isso implica em uma velocidade orbital em torno de Urano de 10,80 km/s. Esta lua é maior comparada com as outras, logo a necessidade do tether ser maior para desenvolver a manobra sem o risco de colisão entre o veículo espacial e a lua durante o tempo em que o veículo espacial está fixado ao “Portal de Captura”.

Os resultados da Figura 7.9 mostram que a manobra se comporta de forma similar ao caso de Thebe, porém com valores de velocidade de aproximação diferentes, devido à diferença nas dimensões do sistema. Houve casos de capturas com órbitas do tipo “C” e “G” para valores do ângulo de aproximação entre 0° e 180° e velocidades entre 4,75 km/s e 25,92 km/s. Os casos de captura em uma órbita direta têm velocidades de aproximação até 18,58 km/s. Os casos com órbitas retrógradas iniciam com velocidade de 11,24 km/s. Ocorreram também casos de escape do tipo “I” e “J” para ângulos de aproximação entre 180° e 360° . Os resultados mostram que a captura em Urano também é possível utilizando a técnica aqui proposta.

Figura 7.9 – Descrição dos efeitos do TSSM na trajetória do veículo espacial, no sistema Urano - Cordélia, para $l = 100$ km e $\delta = 90^\circ$.

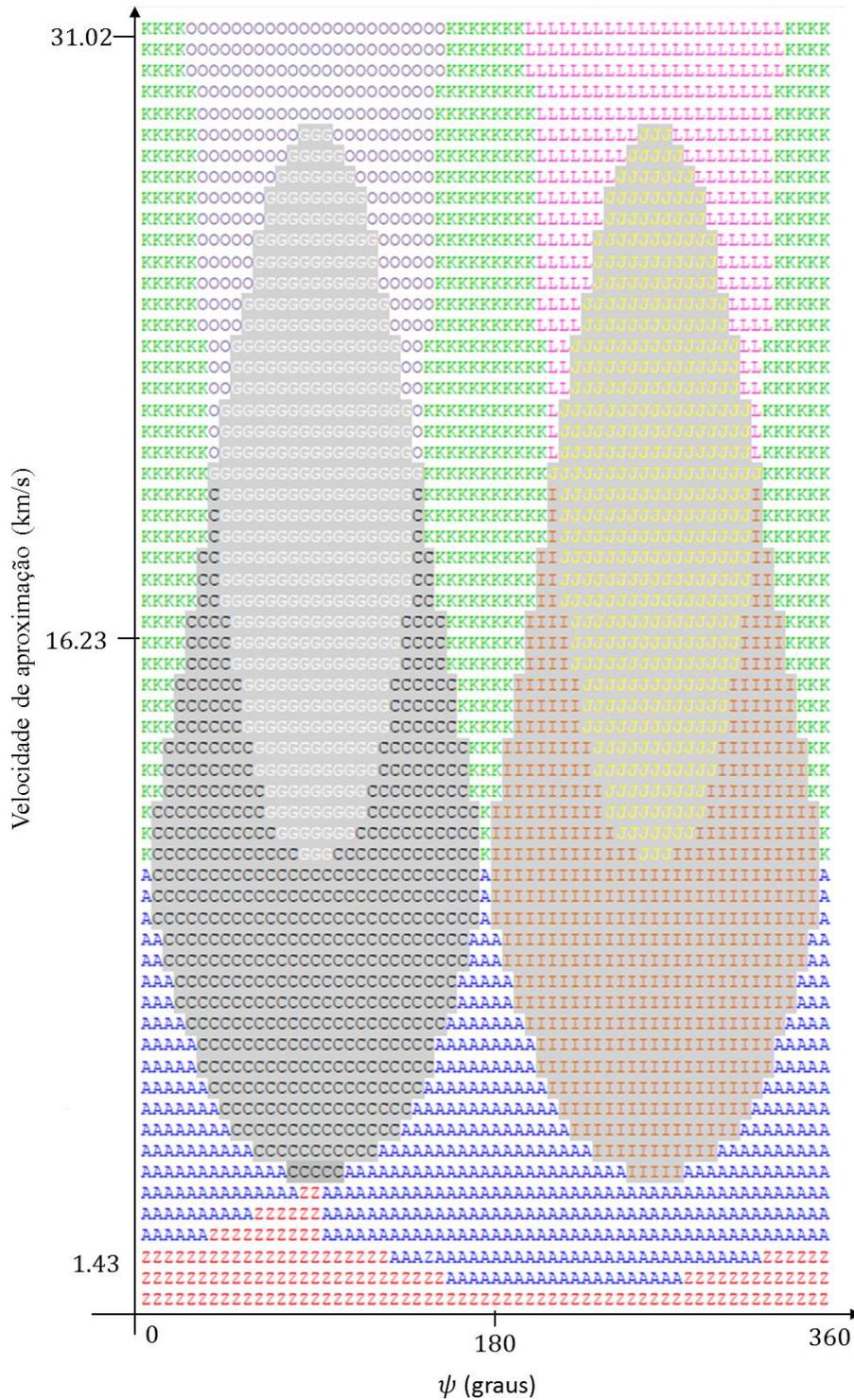


A seguir, manobras para inserir o veículo espacial em torno do último dos planetas gigantes, Netuno, são estudadas. A lua é Naiad, com massa de $1,9 \times 10^{17}$ kg, distância de Netuno de 48227 km, período orbital de 0,294 dias e velocidade orbital de 11,93 km/s.

Os resultados da Figura 7.10 mostram que, para este planeta, o intervalo das velocidades de aproximação é de 1,43 km/s a 31,02 km/s. Os casos em que o veículo espacial ficou capturado em torno de Netuno, com uma órbita direta, após fazer a manobra em torno de Naiad, tem velocidades de aproximação entre 5,25 km/s e 20,52 km/s. Para velocidades de aproximação entre 12,41 km/s e 28,63 km/s o veículo ficou capturado em uma órbita retrógrada. Para este sistema também ocorreram escapes, para ψ maior que 180° e velocidades entre 5,25 km/s a 28,63 km/s. Trajetórias do tipo “Z” ocorreram para velocidades entre 1,43 km/s e 4,77 km/s, para diferentes valores do ângulo de aproximação.

Note que, apesar da diferença nas magnitudes da velocidade de aproximação dos sistemas, o efeito do TSSM na trajetória do veículo espacial tem comportamento parecido em todos os casos apresentados, em relação ao ângulo de aproximação (ψ). Os tipos de órbitas resultantes são os mesmos. Órbitas do tipo “B”, “D”, “E”, “F”, “H”, “M”, “N” e “P” não ocorrem para estes sistemas. Em todos os casos apresentados foi adotado o tamanho do cabo do tether igual a 100 km e o ângulo de curvatura (δ) igual a 90° .

Figura 7.10 – Descrição dos efeitos do TSSM na trajetória do veículo espacial, no sistema Netuno - Naiad, para $l = 100$ km e $\delta = 90^\circ$.



8 TETHERS: SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO, FORÇA E ESTABILIDADE PARA CORPOS REGULARES.

As soluções de equilíbrio, força e estabilidade de um tether ancorado na superfície da lua de um planeta serão apresentadas. São informações necessárias para conectar na outra extremidade do cabo o veículo espacial que fará a manobra de “Swing-By assistida por cabo”.

Prado (2015) mostrou que é possível alcançar a captura de um veículo espacial pelo planeta para uma gama de ângulos de aproximação. É apenas uma questão de encontrar o ângulo correto de curvatura. Assim sendo, não existem muitas restrições na posição dos pontos de equilíbrio e a maioria das soluções pode ser usada. Pequenas correções no percurso podem ajudar o veículo espacial a alcançar a geometria adequada.

Os resultados mostram os pontos de equilíbrio em uma sequência de soluções. Em todos os casos os corpos primários são considerados regulares. Dependendo do sistema, as soluções estão no plano e/ou fora do plano dos primários. São os sistemas: Terra-Lua, Júpiter-Adrastea, Júpiter-Thebe, Saturno-Daphnis, Urano-Cordélia e Netuno-Naiad.

Assumimos que o tether é fixo na superfície do corpo secundário em diferentes pontos. O cabo é assumido ser inextensível, rígido e com massa negligenciável. Os pontos de equilíbrio são apresentados sempre com origem na âncora (ponto onde o tether é fixado na superfície da lua).

As seguintes características serão usadas em todos os gráficos com soluções de equilíbrio: as curvas grossas representam a estabilidade do ponto de equilíbrio e as curvas finas à instabilidade; as curvas vermelhas representam a força de compressão agindo no cabo e a força de tração é representada por todas as outras cores, de acordo com sua magnitude que, para este caso é sempre maior que zero (conforme mostrado na legenda de cada figura); os círculos pretos representam o planeta em $x \sim -1$ e a lua em $x \sim 0$. Os círculos não estão em escala e foram usados para tornar visível a posição dos corpos.

Como o veículo espacial será conectado ao tether, além do equilíbrio ser fisicamente possível, é necessário que o cabo que compõe o tether esteja esticado com força de tração agindo nele. Há algumas regiões onde as soluções são matematicamente possíveis, mas não são fisicamente válidas. Nestes casos o tether pode enrolar em torno

da superfície do corpo. Essas regiões estão pintadas de cinza claro, para indicar que são soluções fisicamente impossíveis (ver resultados a partir da Seção 8.1).

Os sistemas Júpiter-Adrastea, Júpiter-Thebe, Saturno-Daphnis, Urano-Cordélia e Netuno-Naiad foram estudados por terem luas pequenas, velocidade orbital alta e ressonância de spin-órbita 1:1. Para estas soluções apresentamos também a estabilidade do equilíbrio. A solução final encontrada é a mesma, independente do método usado, seja ele baseado nas equações que dão as condições de equilíbrio ou nas equações da força resultante. No caso destas luas usamos a força resultante para a busca dos resultados.

Compondo as curvas que representam as soluções de equilíbrio, pode haver infinitos pontos, por isso não é possível quantificá-los. O mesmo é válido para as regiões de estabilidade e instabilidade pertencentes às estas curvas. Os resultados a seguir mostram os pontos de equilíbrio para todos os sistemas mencionados antes, além do sistema Terra-Lua.

8.1. Sistema Terra-Lua

A excentricidade da órbita da Lua em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua foi assumida ser zero. O parâmetro de massa utilizado é $\mu = 0.01214$, e o raio da Lua é assumido ser $R = 0.004$ u.c.

A âncora, representada pelo ponto A da Figura 7.1, poderá estar no plano dos primários ($\psi_0 = 0$) ou fora do plano ($\psi_0 \neq 0$). O parâmetro φ_0 descreve a posição da âncora no plano. Seis diferentes posições foram adotadas e a análise do equilíbrio nestas situações foi efetuada. São elas: i) $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$; ii) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_0 = 0$; iii) $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$; iv) $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ e $\psi_0 = 0$; v) $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$; e vi) $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$. Nas situações (i) e (iii) a âncora está na linha que conecta os primários. Para (v) e (vi) a âncora está nos polos da Lua. Foram encontradas soluções no plano e fora do plano $x - y$.

O equilíbrio foi obtido a partir da Equação 7.9. Em todos os gráficos com equilíbrio a origem é a posição da âncora e o tamanho do cabo está entre 0,001 e 2 u.c., com mínimo perto de 384 km e máximo perto de 768.800 km. Os resultados mostram as localizações dos pontos de equilíbrio, estabilidade, tamanho do cabo e tensão no cabo (Equação 7.17). Esses resultados são importantes para aplicações práticas, uma vez que se podem

escolher os casos com menores problemas tecnológicos para construir o cabo. Para o sistema Terra-Lua, 1,0 unidade canônica de força equivale a $1,64 \times 10^{22}$ N.

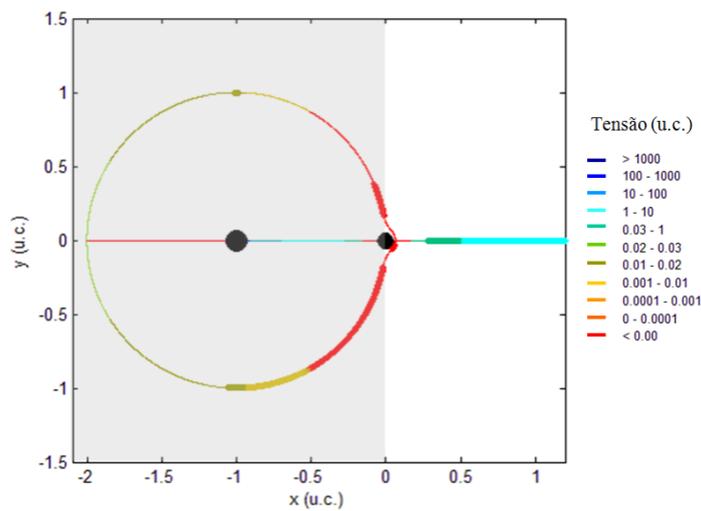
8.1.1. Soluções no plano dos primários

Todos os pontos de equilíbrio no plano Terra-Lua são obtidos para situações onde a âncora também está no plano. A primeira condição estudada foi para a âncora fixa na linha que conecta os primários, para $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$. Atribuindo esses parâmetros à Equação 7.9, obtemos as equações f_1 e f_2 que descrevem as condições de equilíbrio.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{\text{sen}\varphi}{l \cos\psi} \left(-(1-\mu)p + R + \frac{p^3 \mu R}{(l^2 + R^2 + 2 l R \cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} \right. \\ \quad \left. + \frac{(1-\mu) p^3 (p+R)}{(l^2 + (p+R)^2 + 2 l (p+R) \cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} \right) = 0 \\ f_2 = \frac{1}{l} \text{sen}\psi \left(- \left(((1-\mu)p + R) \cos\varphi + l \cos\psi \right) + \frac{p^3 \mu R \cos\varphi}{(l^2 + R^2 + 2 l R \cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} \right. \\ \quad \left. + \frac{(1-\mu) p^3 (p+R) \cos\varphi}{(l^2 + (p+R)^2 + 2 l (p+R) \cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Para $\psi = 0$ há um grupo de soluções no plano. A curva $S_\varphi: f_1(\varphi, 0, l) = 0$ é mostrada na Figura 8.1.

Figura 8.1 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.



Todas as soluções são matematicamente válidas, porém há regiões com restrições físicas. Essas regiões estão pintadas de cinza claras, indicando soluções fisicamente impossíveis. As curvas coloridas e grossas, exceto a vermelha, são casos com equilíbrio estável e força de tração agindo no cabo. As curvas finas representam casos com equilíbrio instável, as vermelhas e grossas são equilíbrio estável, em que o cabo sofre o efeito da força de compressão e as vermelhas e finas são equilíbrio instável e com força de compressão. A legenda da figura mostra intervalos da magnitude da tensão no cabo para todas as soluções.

Existem dois grupos de soluções fisicamente possíveis. O primeiro está sobre o eixo $x > 0$ e $y = 0$, abrange todos os tamanhos do cabo e tem força de tração e compressão agindo. O segundo grupo forma um pequeno semicírculo de soluções, também para $x > 0$, e tem força de compressão agindo no cabo. Para estas condições, as soluções ideais para conectar o veículo espacial ao tether são as soluções colineares à âncora e, neste caso, colineares à linha dos primários, para tamanhos do cabo maiores que 0,28 u.c., por ser equilíbrio fisicamente viável, estável e com força de tração agindo no cabo.

A condição seguinte tem o dispositivo de ancoragem fixo na posição $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_0 = 0$.

Os grupos de soluções foram obtidos a partir das Equações 8.2.

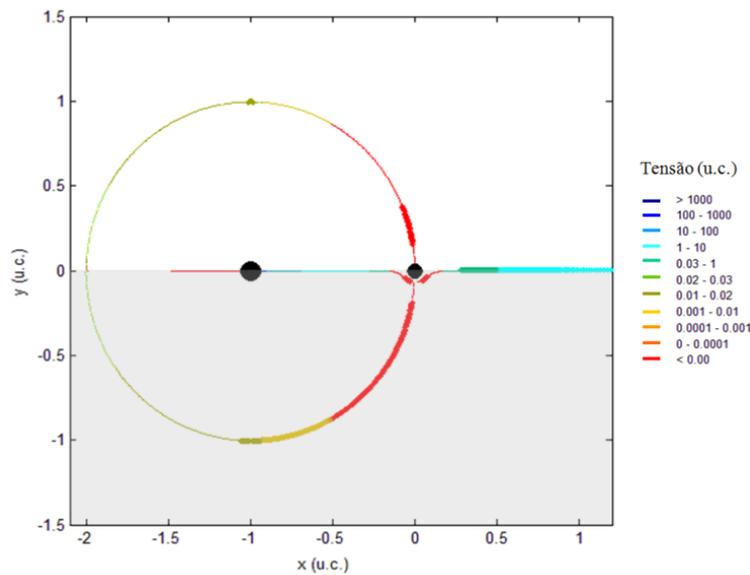
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{l \cos \psi} \left((R \cos \varphi - (1 - \mu) p \operatorname{sen} \varphi) - \frac{p^3 \mu R \cos \varphi}{(l^2 + R^2 + 2 l R \cos \psi \operatorname{sen} \varphi)^{3/2}} - \frac{p^3 (1 - \mu) (R \cos \varphi - p \operatorname{sen} \varphi)}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2 l p \cos \varphi \cos \psi + 2 l R \cos \psi \operatorname{sen} \varphi)^{3/2}} \right) = 0 \\ f_2 = \frac{1}{l} \operatorname{sen} \psi \left(-((1 - \mu) p \cos \varphi + l \cos \psi + R \operatorname{sen} \varphi) + \frac{p^3 \mu R \operatorname{sen} \varphi}{(l^2 + R^2 + 2 l R \cos \psi \operatorname{sen} \varphi)^{3/2}} + \frac{p^3 (1 - \mu) (p \cos \varphi + R \operatorname{sen} \varphi)}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2 l p \cos \varphi \cos \psi + 2 l R \cos \psi \operatorname{sen} \varphi)^{3/2}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (8.2)$$

As soluções planares $S_\varphi: \{(\varphi, \psi, l): \psi = 0, f_1(\varphi, 0, l) = 0\}$ são apresentadas na Figura 8.2. Os resultados fisicamente possíveis são $0 < \varphi < \pi$, ou seja, a parte da curva onde y é positivo. Lembrando que φ é medido a partir do eixo x , no sentido anti-horário.

Note que há força de tração e compressão nos resultados possíveis, sendo eles colineares e não colineares à âncora. As soluções ideais para conectar o veículo espacial

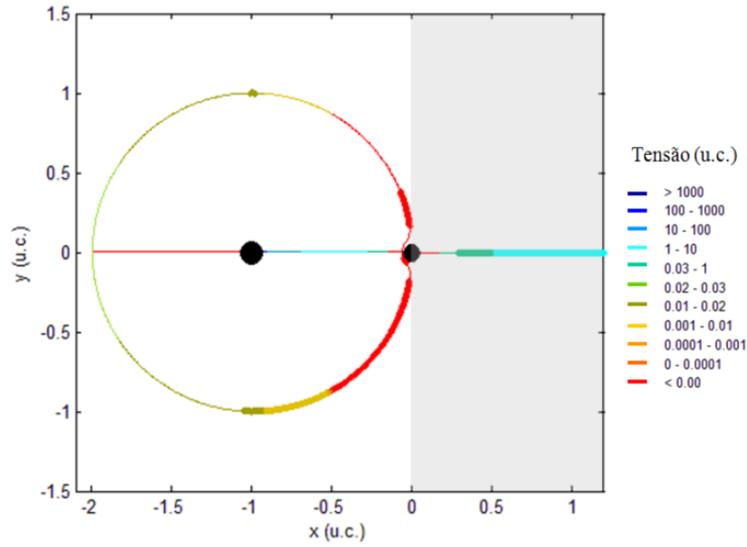
são as com equilíbrio estável, porém as com equilíbrio instável são aceitas como segunda opção. Note que há um pequeno grupo estável nas soluções não colineares quando comparado com o grupo de soluções instáveis. Nas soluções colineares o equilíbrio estável e com força de tração é significativo, e tem magnitude variando de 0,03 u.c. a até 10 u.c. A principal diferença, comparado ao caso anterior, é a existência de soluções duplas (em relação ao ângulo φ) para os pontos de equilíbrio não colineares, visível na curva abaixo da Lua.

Figura 8.2 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = \pi/2$ e $\psi_0 = 0$ para o sistema Terra-Lua.



As soluções da Figura 8.3 foram obtidas a partir de f_1 e f_2 da Equação 4.3. Para a âncora posicionada entre os corpos $M_1 - M_2$, na linha que os conecta, em $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$, a região fisicamente possível abrange o grupo de soluções não colineares $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ e o grupo das soluções colineares com $x < 0$. Porém, as soluções na linha dos primários em que x varia de -2.0 até aproximadamente -0.978 e as soluções com $\varphi = \pi - 0.0166$ até $\varphi = \pi + 0.0166$ não são fisicamente possíveis, porque nestes casos a Terra está entre a âncora e os pontos de equilíbrio.

Figura 8.3 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.



Observe a existência de soluções duplas para os pontos de equilíbrio, visíveis na curva a esquerda da Lua. A primeira família de soluções não colineares tem tamanho do tether em torno de 38.400 km. A família de soluções colineares tem tamanho do tether bem maiores, chegando até 384.400 km.

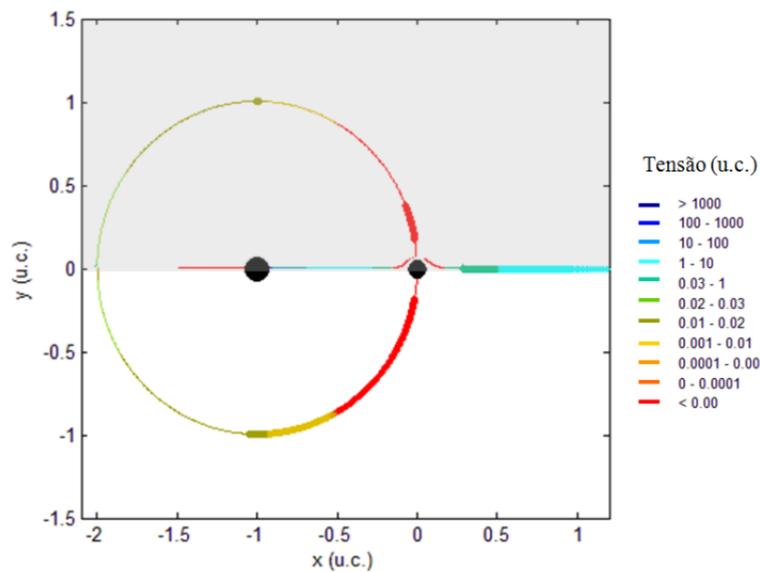
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{\text{sen}\varphi}{l \cos\psi} \left(-(1-\mu)p + R - \frac{p^3(1-\mu)(-p-R)}{l(l^2 + (p-R)^2 - 2l(-p+R)\cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} - \frac{p^3\mu R}{(l^2 + R^2 - 2lR \cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} \right) = 0 \\ f_2 = \frac{1}{l} \text{sen}\psi \left(-((1-\mu)p - R)\cos\varphi + l \cos\psi + \frac{(1-\mu)p^3(p-R)\cos\varphi}{(l^2 + (p-R)^2 - 2l(-p+R)\cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} - \frac{p^3\mu R \cos\varphi}{(l^2 + R^2 - 2lR \cos\varphi \cos\psi)^{3/2}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (8.3)$$

Os pontos de equilíbrio planar, quando a âncora está fixa em $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ e $\psi_0 = 0$ na superfície da Lua, são mostrados na Figura 8.4 e obtidos a partir das Equações 8.4.

(8.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{l \cos \psi} \left(-(R \cos \varphi + (1 - \mu) p \sin \varphi) + \frac{p^3 \mu R \cos \varphi}{(l^2 + R^2 - 2 l R \cos \psi \sin \varphi)^{3/2}} + \frac{p^3 (1 - \mu) (R \cos \varphi + p \sin \varphi)}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2 l p \cos \varphi \cos \psi - 2 l R \cos \psi \sin \varphi)^{3/2}} \right) = 0 \\ f_2 = \frac{1}{l} \sin \psi \left(-((1 - \mu) p \cos \varphi + l \cos \psi - R \sin \varphi) - \frac{p^3 \mu R \sin \varphi}{(l^2 + R^2 - 2 l R \cos \psi \sin \varphi)^{3/2}} - \frac{p^3 (1 - \mu) (p \cos \varphi - R \sin \varphi)}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2 l p \cos \varphi \cos \psi - 2 l R \cos \psi \sin \varphi)^{3/2}} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Figura 8.4 – Curva S_φ é o conjunto de soluções de equilíbrio no plano com $\varphi_0 = 3\pi/2$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.



Há soluções duplas para os pontos de equilíbrio, para pequenos valores do cabo. No geral, há posições de equilíbrio cujo cabo sofre o efeito da força de tração e da força de compressão.

São fisicamente possíveis as soluções pertencentes à região não pintada de cinza, quando φ está entre π e 2π , ou seja, $y < 0$. Entre elas estão soluções colineares à âncora e não colineares, que formam um semicírculo no quadrante inferior. Referentes às soluções com tração, há equilíbrio estável e instável nas soluções fisicamente possíveis não colineares, além dos casos colineares.

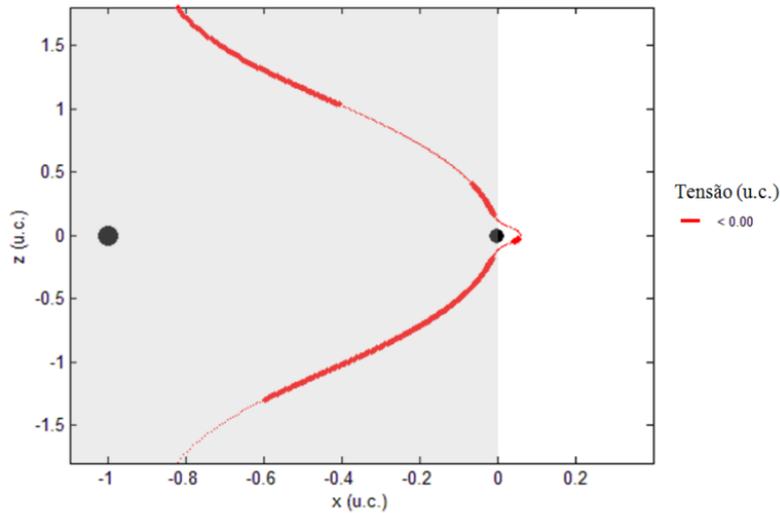
8.1.2. Soluções fora do plano dos primários

Nesta seção serão apresentados os pontos de equilíbrio fora do plano dos primários, no plano $x - z$, e a força que age no cabo relativo a esses pontos. As posições adotadas para a âncora são as mesmas usadas anteriormente, no caso de soluções no plano.

Todas as soluções são matematicamente válidas, porém, assim como ocorre no plano, nas soluções fora do plano também existem regiões com restrições físicas. Essas regiões estão pintadas de cinza claras, indicando que são soluções fisicamente não válidas. A curva vermelha representa força de compressão agindo no cabo. A estabilidade é apresentada pela curva grossa.

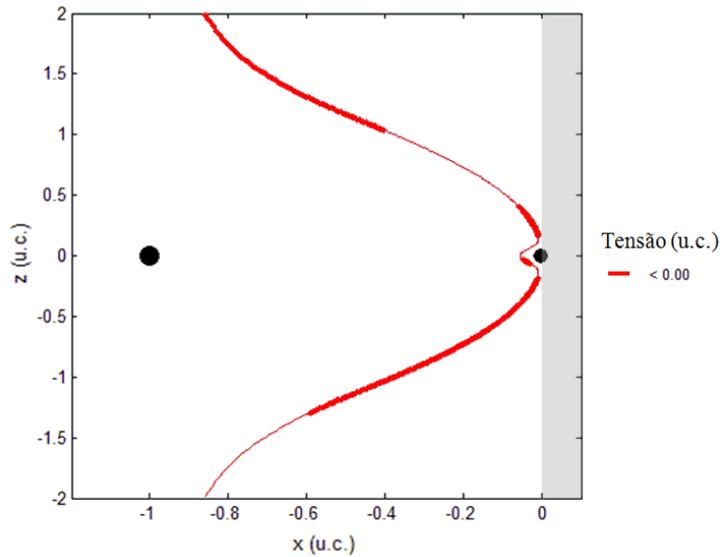
A Figura 8.5 apresenta os resultados para a âncora fixa em $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$. As soluções estão no plano $x - z$, para $\varphi = 0$. As condições de equilíbrio são obtidas a partir das Equações 8.1 e dadas por $S_\psi: \{(\varphi, \psi, l): \varphi = 0, f_2(0, \psi, l) = 0\}$.

Figura 8.5 – Curva S_ψ é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\varphi_0 = 0$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.



Não há soluções de equilíbrio no plano $x - z$ para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\psi \neq 0$, para a âncora fixa em $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_0 = 0$. O conjunto de soluções $S_\psi: \{(\varphi, \psi, l): \varphi = \pi, f_2(0, \psi, l) = 0\}$, dados pelas Equações 8.3, para $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$, são apresentados a seguir, na Figura 8.6. As soluções fisicamente válidas são $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}$, ou seja, $x < 0$.

Figura 8.6 – Curva S_ψ é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\varphi_0 = \pi$ e $\psi_0 = 0$, para o sistema Terra-Lua.



Note a existência de soluções duplas visíveis na curva à esquerda da Lua. A primeira família de soluções de equilíbrio tem tether com tamanho em torno de 38.400 km. A segunda família tem tamanho do tether aproximadamente de 330.000 km.

Não há soluções no plano $x - z$ para $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ e $\psi \neq 0$, para a âncora fixa em $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ e $\psi_0 = 0$. Note que, para as soluções fora do plano dos primários, no plano $x - z$, em todos os casos apresentados, o cabo sofre o efeito somente da força de compressão.

Para as soluções apresentadas a seguir a âncora é fixa fora do plano dos primários, em $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$ e, conseqüentemente, as soluções estão fora do plano. Porém, nestes casos, ocorre uma singularidade nas equações de equilíbrio (Equações 7.10), quando ψ igual a $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Para evitar esta singularidade foram feitas mudanças de variáveis.

A posição de fixação da âncora no sistema $x'y'z'$ é dada por η_0 e θ_0 e é medido a partir do centro da Lua até a âncora. η_0 é o ângulo entre o vetor posição da âncora e o eixo x' e θ_0 é o ângulo entre a projeção do vetor posição da âncora no plano $y'z'$ e o eixo y' . O eixo x' e y' é rotacionado ν graus a partir do eixo x e y (direção anti-horária). η e θ descrevem a posição do vetor âncora-veículo espacial. Logo, a posição do veículo espacial x_3, y_3 e z_3 com as novas variáveis, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + M(-\nu) \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{bmatrix} + M(-\nu) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

sendo $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ a posição da Lua dada na Eq. 2.4, com $z_2 = 0$,

$$M(-\nu) = \begin{bmatrix} \cos(\nu) & -\sin(\nu) & 0 \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a matriz de rotação, } \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos(\eta_0) \\ R\sin(\eta_0)\cos(\theta_0) \\ R\sin(\eta_0)\sin(\theta_0) \end{bmatrix} \text{ o}$$

vetor centro da Lua-âncora e $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\cos(\eta) \\ l\sin(\eta)\cos(\theta) \\ l\sin(\eta)\sin(\theta) \end{bmatrix}$ o vetor âncora-veículo espacial.

As equações do movimento, escritas usando as Equações de Lagrange para este caso tornam-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta'} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \eta} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

E as equações gerais de equilíbrio:

$$\begin{cases} \gamma_1(\eta, \theta_0, \eta, \theta, l) = 0 \\ \gamma_2(\eta_0, \theta_0, \eta, \theta, l) = 0' \end{cases} \quad (8.7)$$

onde

$$\gamma_1 = p^3 / GLM$$

$$\left(-\frac{GM(\text{sen } \eta (\text{l cos } \eta \text{ sen}^2 \theta - (\mu + 1) + R \text{cos } \eta_0)) - R \text{cos } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0)}{p^3} \right. \\ \left. + \frac{(\mu - 1)(\text{sen } \eta (-p + R \text{cos } \eta_0)) + R \text{cos } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0 + R \text{cos } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0}{(l^2 + 2lp \text{cos } \eta + 2R \text{cos } \eta_0 (\text{l cos } \eta + p) + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0 + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0 + p^2 + R^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{R\mu(\text{cos } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0 + \text{cos } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0 + \text{sen } \eta (-\text{cos } \eta_0))}{(l^2 + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0 + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0 + 2lR \text{cos } \eta \text{cos } \eta_0 + R^2)^{3/2}} \right)$$

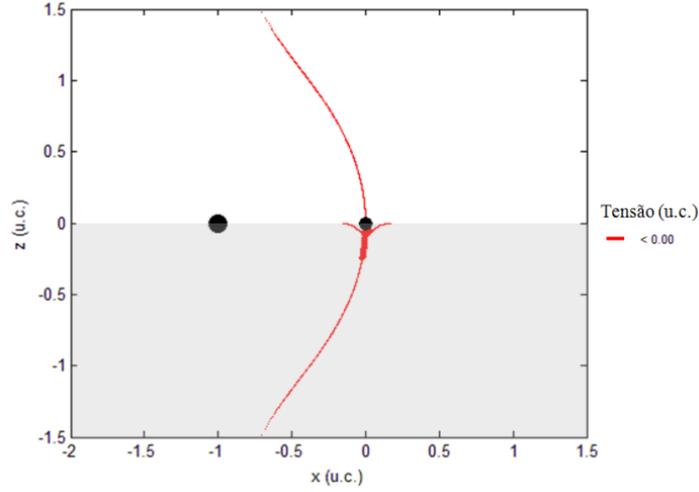
$$\gamma_2 = \frac{p^3}{GLM \text{sen}(\eta)} \left(-\frac{GM \text{sen } \theta (\text{l sen } \eta \text{cos } \theta + R \text{sen } \eta_0 \text{cos } \theta_0)}{p^3} - R \text{sen } \eta_0 \text{sen}(\theta - \theta_0) \right. \\ \left. \left(\frac{\mu - 1}{(l^2 + 2lp \text{cos } \eta + 2R \text{cos } \eta_0 (\text{l cos } \eta + p) + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0 + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0 + p^2 + R^2)^{3/2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu}{(l^2 + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0 + 2lR \text{sen } \eta \text{ sen } \eta_0 \text{cos } \theta \text{cos } \theta_0 + 2lR \text{cos } \eta \text{cos } \eta_0 + R^2)^{3/2}} \right) \right)$$

As regiões pintadas de cinza claro são soluções fisicamente impossíveis. Os círculos pretos, nestes casos em que a âncora está fixa nos polos da Lua, representam o planeta em $x \sim -1$ e $z \sim \pm 0,004$ e a Lua em $x \sim 0$ e $z \sim \pm 0,004$. As equações de equilíbrio particular g_1 e g_2 , obtidas a partir das equações de γ_1 e γ_2 para $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, que é equivalente a $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, são apresentadas e as soluções derivadas dessa equação também (Figura 8.7).

$$g_1 = \frac{p^3}{GLM} \left(-\frac{R\mu \text{cos } \eta \text{sen } \theta}{(l^2 + R^2 + 2lR \text{sen } \eta \text{sen } \theta)^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{(-1 + \mu)(-p \text{sen } \eta + R \text{cos } \eta \text{sen } \theta)}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2lp \text{cos } \eta + 2lR \text{sen } \eta \text{sen } \theta)^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{GM \text{sen } \eta (p(1 - \mu) + \text{l cos } \eta \text{sen}(\theta)^2)}{p^3} \right) \quad (8.9)$$

$$g_2 = \frac{p^3}{GLM \text{sen} \eta} \left(-\frac{GLM \text{cos } \theta \text{sen } \eta \text{sen } \theta}{p^3} \right. \\ \left. + R \text{cos } \theta \left(-\frac{\mu}{(l^2 + R^2 + 2lR \text{sen } \eta \text{sen } \theta)^{3/2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{-1 + \mu}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2lp \text{cos } \eta + 2lR \text{sen } \eta \text{sen } \theta)^{3/2}} \right) \right)$$

Figura 8.7 – Curva S_η é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = \pi/2$, para o sistema Terra-Lua.

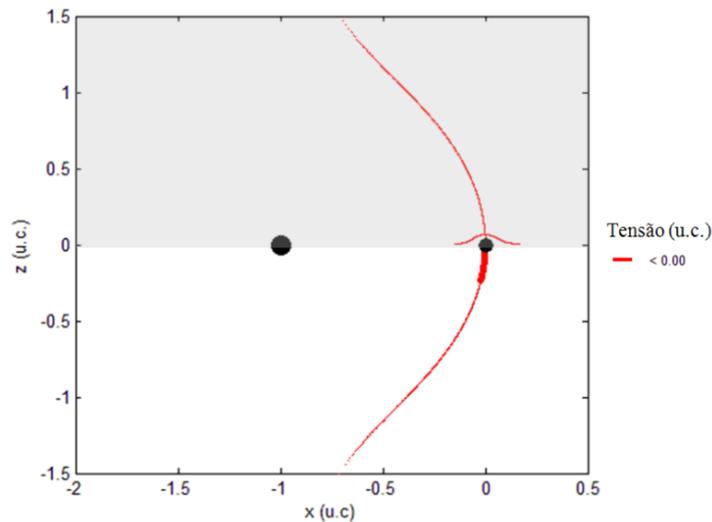


Note que, para a âncora fixa no polo, em $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, as soluções possíveis são para $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $z > 0$. A tensão fora do plano é sempre de compressão. A última posição da âncora estudada para o sistema Terra-Lua, Figura 8.8, foi $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$, cujos dados equivalentes são $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$. Dados obtidos a partir das equações 8.10.

$$g_1 = \frac{p^3}{GLM} \left(\frac{R\mu \cos \eta \operatorname{sen} \theta}{(l^2 + R^2 - 2lR \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \theta)^{3/2}} + \frac{(-1 + \mu)(-p \operatorname{sen} \eta - R \cos \eta \operatorname{sen} \theta)}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2lp \cos \eta - 2lR \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \theta)^{3/2}} - \frac{GM \operatorname{sen} \eta (p(1 - \mu) + l \cos \eta \operatorname{sen}(\theta)^2)}{p^3} \right) \quad (8.10)$$

$$g_2 = \frac{p^3}{GLM \operatorname{sen} \eta} \left(- \frac{GLM \cos \theta \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \theta}{p^3} - R \cos \theta \left(- \frac{\mu}{(l^2 + R^2 - 2lR \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \theta)^{3/2}} + \frac{-1 + \mu}{(l^2 + p^2 + R^2 + 2lp \cos \eta - 2lR \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \theta)^{3/2}} \right) \right)$$

Figura 8.8 – Curva S_1 é o conjunto de soluções de equilíbrio fora do plano com $\forall \varphi_0$ e $\psi_0 = 3\pi/2$, para o sistema Terra-Lua.



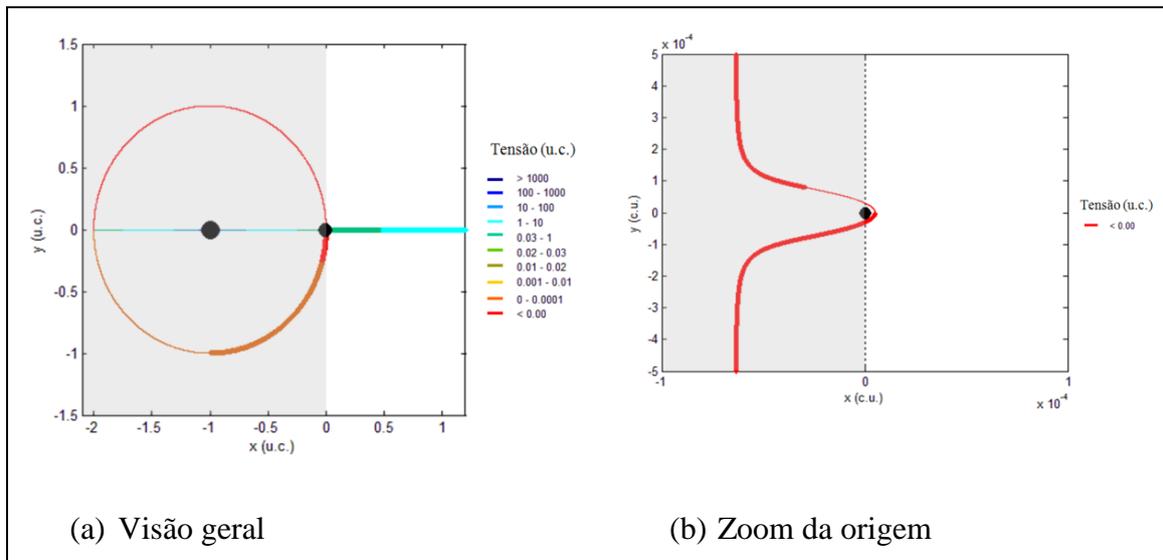
As soluções válidas são para $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $z < 0$. Note que a tensão é de compressão.

8.2. Sistema Júpiter-Adrastea

Adrastea (THOMAS et al., 1998; EVANS et al., 2002; BURNS et al., 2004) é a segunda lua mais próxima de Júpiter. Ela está a 129.000 km de distância do planeta e tem um raio equatorial de $8,2 \pm 2,0$ km, com uma massa de $2,0 \times 10^{15}$ kg. O período orbital é de 0,298 dias. As soluções de equilíbrio para o tether ancorado em diferentes pontos no plano da superfície de Adrastea serão apresentadas. Em todas as situações há soluções colineares a âncora, localizados ao longo do eixo x .

Em todos os resultados as cores representam a magnitude da tensão no ponto. Tensão menor que zero é força de compressão (curva vermelha) e tensão maior que zero indica força de tração. Para este sistema 1,0 unidade canônica de força equivale a $1,458 \times 10^{28}$ N. Curva grossa representa soluções de equilíbrio estável e curva fina são soluções de equilíbrio instável. A área pintada de cinza são soluções fisicamente inviáveis. Para este sistema o equilíbrio foi analisado por meio da força resultante que age no veículo fixo na extremidade do tether. A posição da ancora é dada em coordenadas cartesianas descritas por x_A e y_A .

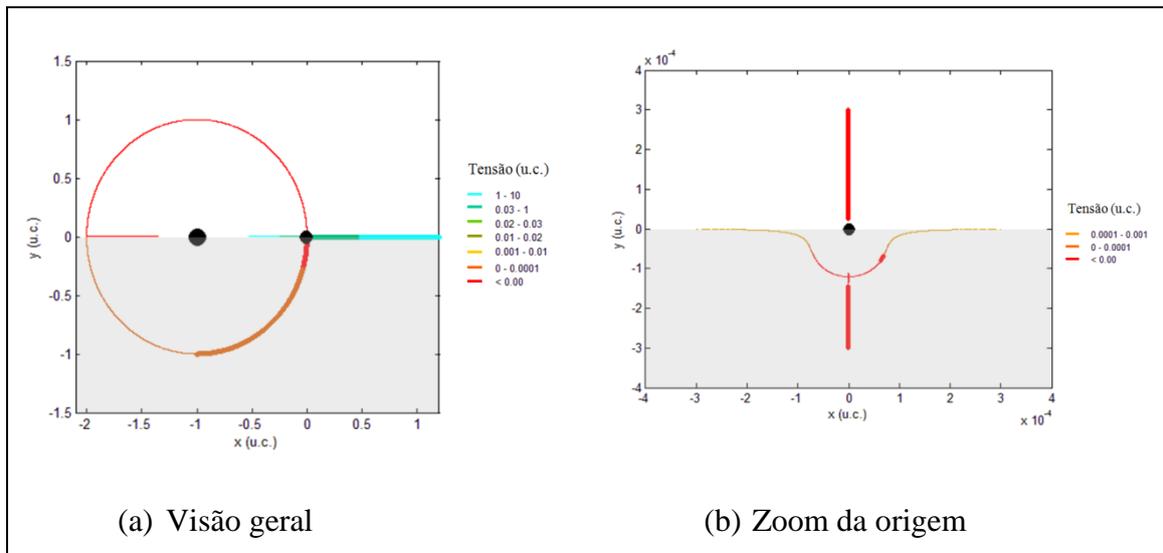
Figura 8.9 – Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.



A Figura 8.9 mostra os resultados quando a âncora está fixada a direita do centro da lua, na linha que conecta Júpiter e Adrastea. Há duas famílias de soluções fisicamente possíveis, mas apenas uma é viável para conectar o veículo espacial ao tether. A primeira família é um pequeno conjunto de soluções de equilíbrio pertencente ao grupo de soluções não colineares (Ver Figura 8.9(b)). São casos de pontos de equilíbrio estáveis e instáveis, todos eles com uma força de compressão, para um tamanho de cabo da ordem de metros. Estas são soluções possíveis, mas não são soluções ideais para conectar o veículo ao tether. A segunda família são soluções colineares a direita do ponto de ancoragem, existente para todos os tamanhos do cabo. Nestes casos há força de tração agindo no cabo e equilíbrio estável. Esses são pontos excelentes para localizar o dispositivo, porque é possível escolher um tamanho para que o cabo que não seja demasiado grande para tornar a sua construção uma tarefa complexa e nem muito pequeno, de tal modo que exista uma forte limitação no ângulo de curvatura. A geometria também é favorável à manobra, com o veículo espacial localizado do lado oposto do planeta com respeito à lua.

Com relação à Figura 8.9(a), φ é o ângulo entre o eixo x e a posição do ponto de equilíbrio. A figura 8.10 mostra a localização do equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$. Isto significa que a âncora está acima do centro da lua (em $y \neq 0$).

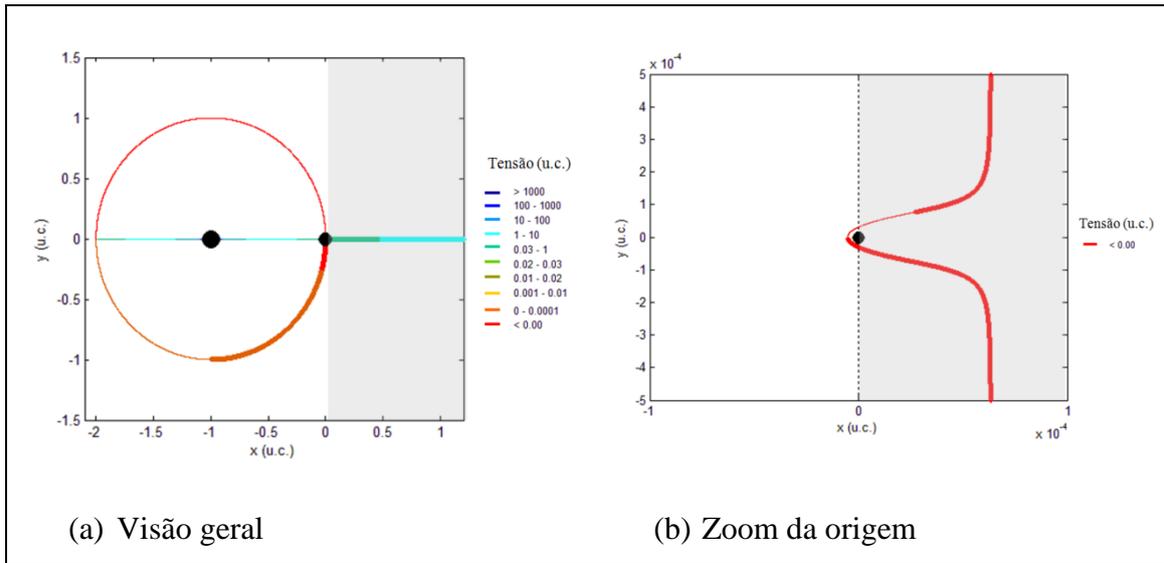
Figura 8.10 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.



As soluções fisicamente possíveis na Figura 8.10 são todas para $y \geq 0$, ou seja, $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$. Foram incluídos os casos com força de tração e compressão e com equilíbrio estável e instável. As soluções de interesse são as colineares a âncora, com força de tração no cabo da ordem de 0.03 u.c. a até 10 u.c. O grupo estável ($x > 0$), representado pelas curvas grossas verdes e azuis claro, é o ideal para o estudo. As soluções colineares, verde e azul claro, com curva fina, são também soluções viáveis, mas é uma segunda opção devido a instabilidade.

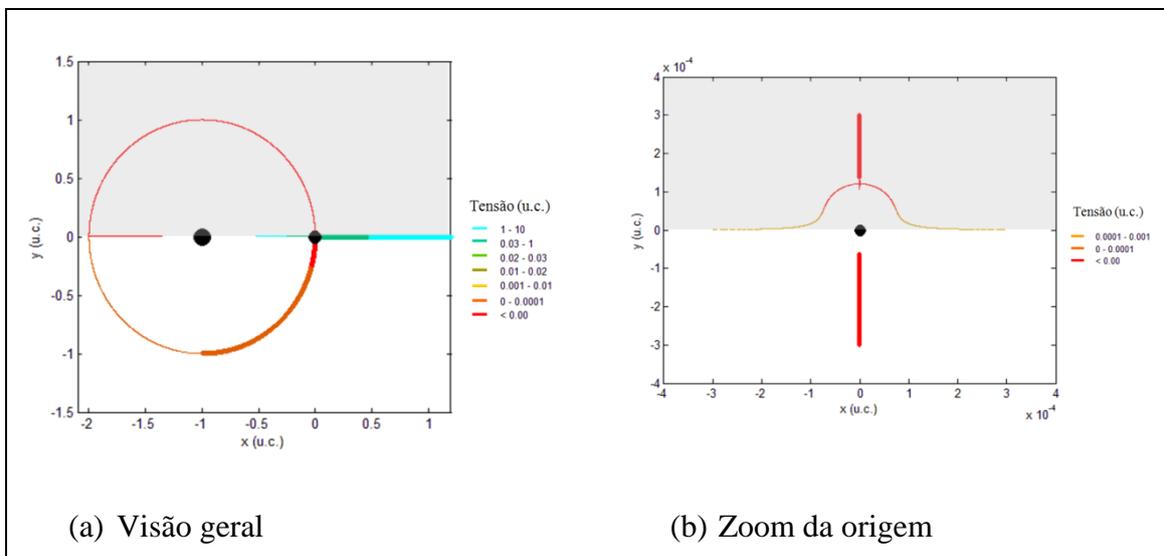
A Figura 8.11 mostra as soluções para as situações onde o tether está ancorado no ponto $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$. Esta posição da âncora está entre o centro de Adrastea e o centro de Júpiter. As soluções possíveis estão em $x < 0$. Há um grupo colinear ao planeta-lua e um grupo não colinear. As soluções colineares a esquerda do planeta também são fisicamente impossíveis. Não há como posicionar o tether nestas posições, considerando que o planeta está entre o ponto de equilíbrio e a âncora.

Figura 8.11 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.



No grupo de soluções viáveis há um subgrupo inviável para a proposta de conectar o veículo espacial ao tether, quando $y > 0$, e um pequeno conjunto em $y < 0$, devido à força de compressão, impedindo esta conexão. As soluções ideais pertencem ao grupo não colinear, onde há um conjunto de soluções estáveis (curva grossa). Um corpo em equilíbrio estável tende a retornar à sua posição original após sofrer pequenas perturbações. Estas são as melhores soluções. Soluções instáveis requerem controle para retornar às suas posições originais, tornando-se segunda opção. A Figura 8.12 apresenta as soluções para o tether ancorado abaixo do centro da lua em y , em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$.

Figura 8.12 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Júpiter-Adrastea.

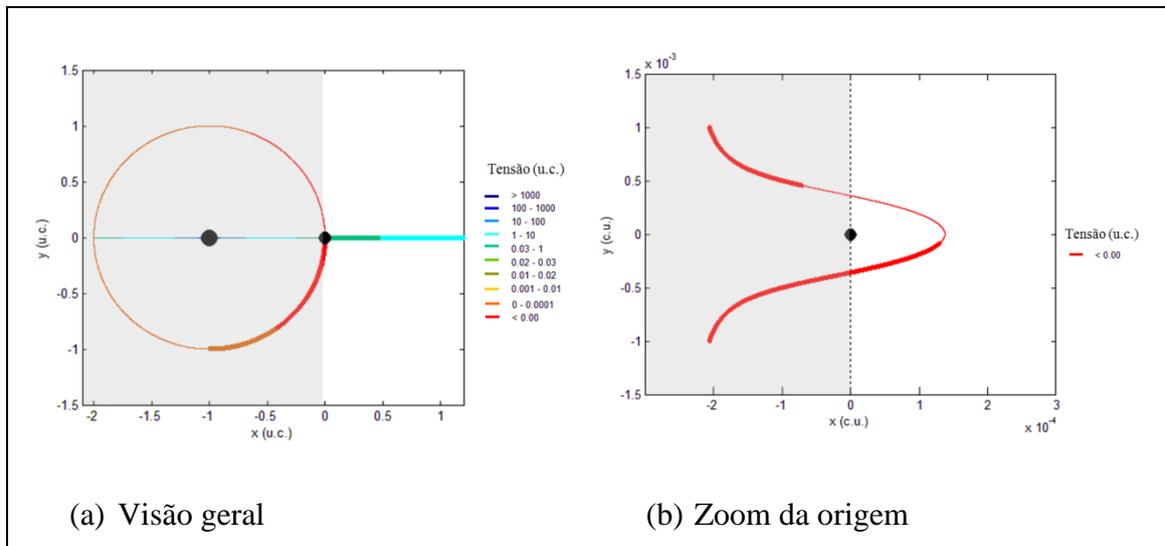


A Figura 8.12 mostra que as melhores soluções para conectar o veículo espacial são as colineares (para $x > 0$) e os pontos estáveis localizados no círculo da Figura 8.12(a). Elas são estáveis, fisicamente válidas e tem tração no cabo. A curva fina com tração, fisicamente possível, pertencente ao grupo colinear e não colinear, é uma segunda opção na escolha, devido à instabilidade. A Figura 8.12(b) mostra a existência de pontos úteis de equilíbrio na linha vertical com valor negativo para y , mas eles não são viáveis devido à força de compressão no cabo.

8.3. Sistema Júpiter-Thebe

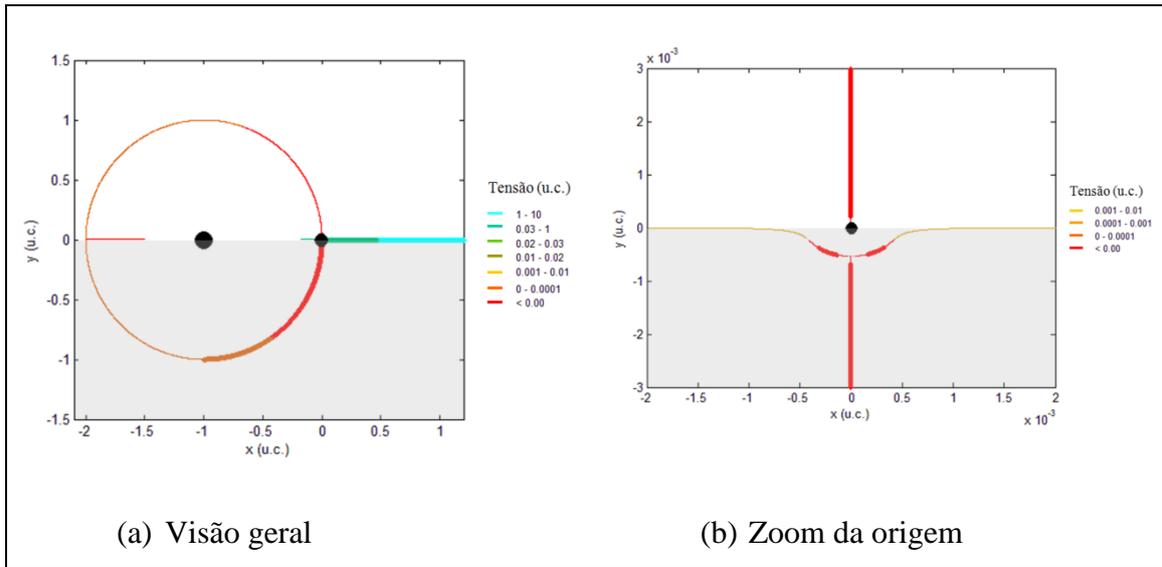
Thebe (THOMAS et al., 1998; COOPER et al., 2006) é um satélite natural de Júpiter. O raio equatorial é de 49 km e está a 222.000 km de distância do planeta. A massa é igual a 4.3×10^{17} kg. Thebe completa uma volta em torno de Júpiter em pouco mais de 16 horas. Em relação a tensão no cabo, 1,0 unidade canônica equivale a $5,0 \times 10^{27}$ N. A Figura 8.13 mostra as soluções para $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$.

Figura 8.13 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Júpiter-Thebe.



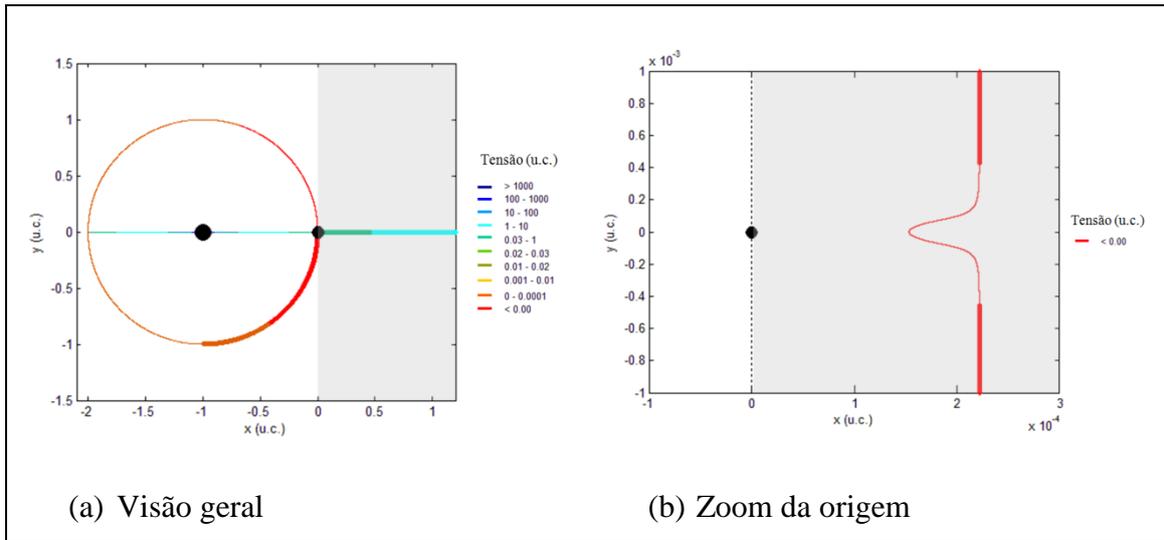
A Figura 8.13 mostra o equilíbrio. A região viável para alocar o dispositivo que receberá o veículo são todas as soluções colineares para $x > 0$. Há um pequeno conjunto de soluções com tração e equilíbrio estável no grupo não colinear, entretanto elas estão na região pintada de cinza, onde o equilíbrio não é fisicamente possível. A Figura 8.14 apresenta as soluções para $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$. A âncora está acima, em y , do centro da lua.

Figura 8.14 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Júpiter-Thebe.



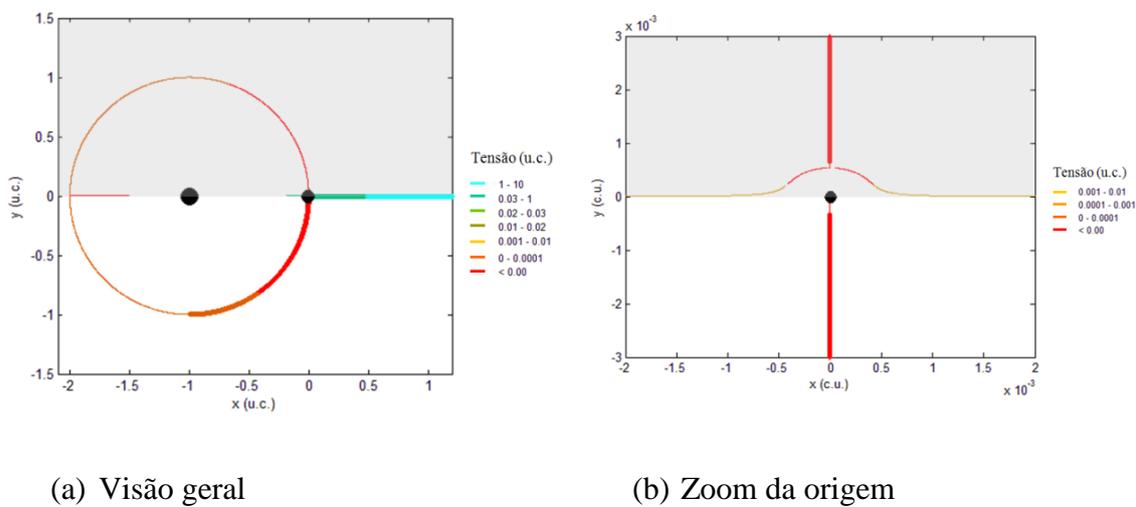
Na Figura 8.14 a região do gráfico em branco são soluções de equilíbrio fisicamente possíveis. Pertencentes a esse grupo existem soluções com as forças de tração e compressão no cabo e equilíbrio estável e instável. As melhores posições para receber o veículo espacial são os pontos com tração e equilíbrio estável, que são colineares a âncora em $x > 0$. O equilíbrio com força de tração pertencente ao grupo não colinear são soluções possíveis, mas são segundas opções devido à instabilidade. As soluções na Figura 8.14(b), para $y > 0$, fazem parte do grupo não colinear da Figura 8.14(a) e elas são descartadas por terem força de compressão agindo no cabo. A Figura 8.15 apresenta as soluções para a âncora alocada à esquerda do centro de Thebe, entre Thebe e Júpiter, em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$.

Figura 8.15 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Júpiter-Thebe.



O grupo de soluções com força de tração, estável e fisicamente possível é pequeno, está entre aproximadamente $x = -1$ e $x = -0,4$ e $y = -1$ e $y = 0,5$. Entretanto, como segundas opções, existem soluções pertencentes aos grupos colineares (entre Thebe e Júpiter) e não colineares que são instáveis e são válidas. A Figura 8.15(b) mostra que há um pequeno conjunto de soluções no grupo não colinear que são fisicamente inviáveis. O equilíbrio para $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$ é apresentado. A âncora está abaixo do centro da lua, em y .

Figura 8.16 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Júpiter-Thebe.



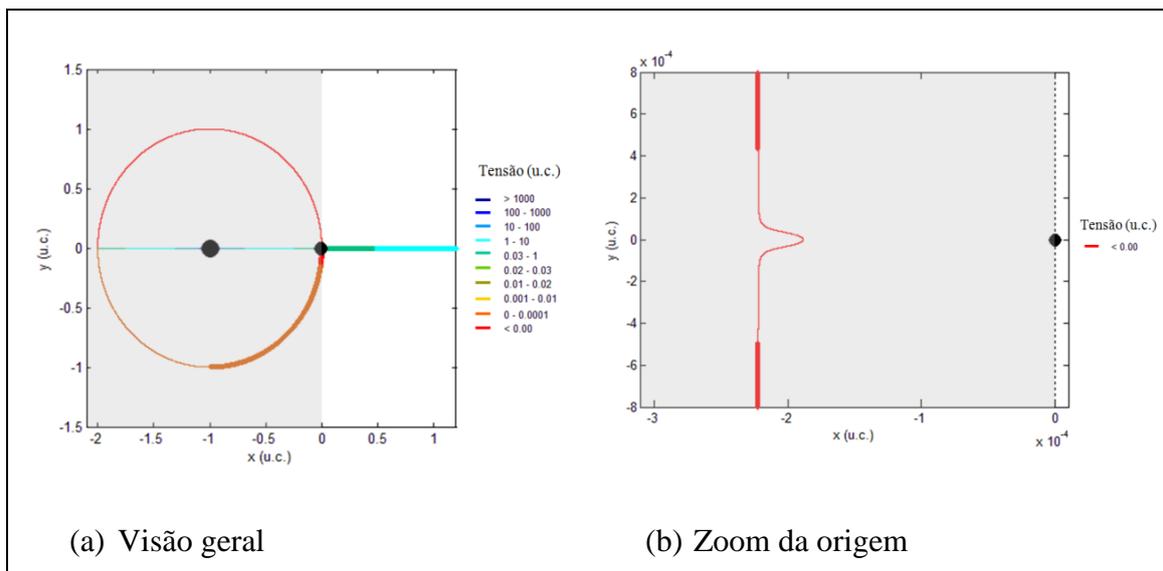
Há um conjunto de soluções com tração e equilíbrio estável que são viáveis e estão colineares a âncora e outro conjunto não colineares. Existem também soluções em

ambos os grupos com tração, mas instáveis, que podem ser exploradas como uma segunda opção. O Sistema Júpiter-Thebe foi estudado para diferentes posições da âncora fixa na superfície de Thebe. Note que há soluções ótimas, com equilíbrio estável e tração no cabo, satisfazendo os critérios necessários para conectar o veículo espacial ao tether, tornando possível a execução da manobra de Swing-By assistida por cabo.

8.4. Sistema Saturno-Daphnis

Daphnis (JACOBSON et al., 2008; THOMAS, 2010) é um satélite interno de Saturno, com raio de $3,8 \pm 0,8$ km. Ele está a aproximadamente 136.505,5 km do planeta e sua massa é de $7,7 \pm 1,5 \times 10^{13}$ kg. Neste sistema, 1,0 u.c. da tensão equivale a $1,16 \times 10^{27}$ N. O equilíbrio para $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$ é apresentado.

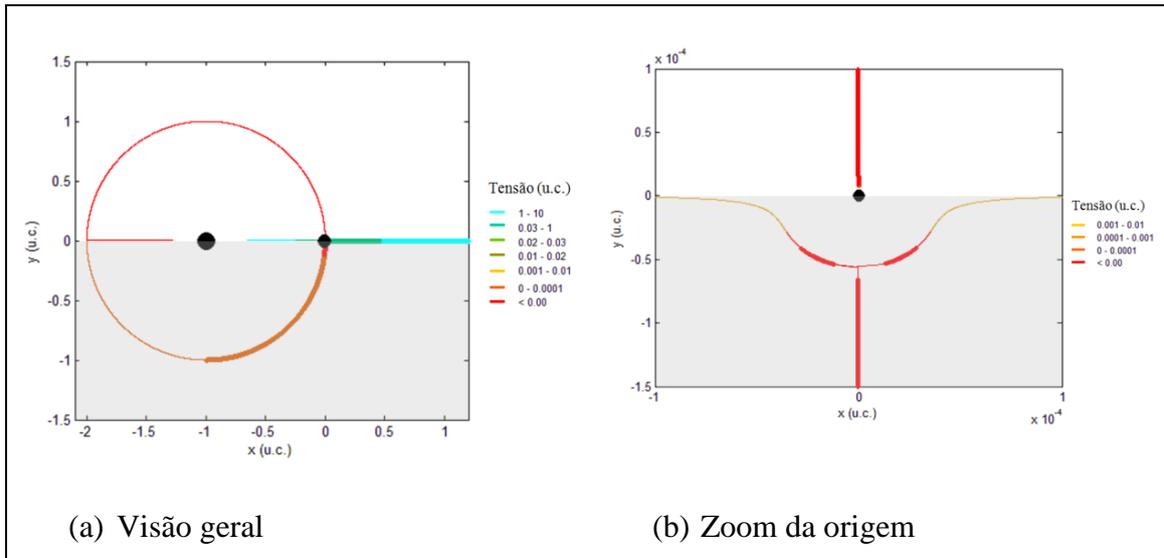
Figura 8.17 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Saturno-Daphnis.



As soluções colineares ao eixo x são aceitáveis para $x > 0$, sendo o equilíbrio estável e com tração agindo no cabo. Neste grupo há soluções para todos os tamanhos do cabo estudado.

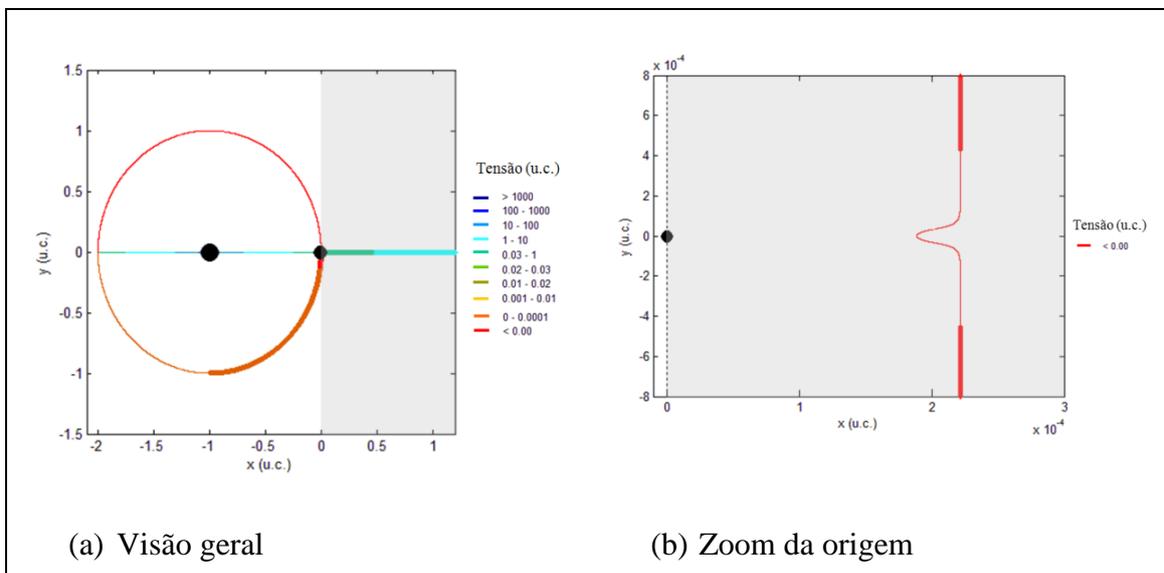
A Figura 8.18 apresenta as soluções de equilíbrio para a âncora localizada acima do centro de Daphnis, em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$. Todas as soluções com $y \geq 0$ são fisicamente possíveis, estáveis e com força de tração atuando no cabo. Estas são soluções aceitáveis para a finalidade do presente trabalho.

Figura 8.18 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Saturno-Daphnis.



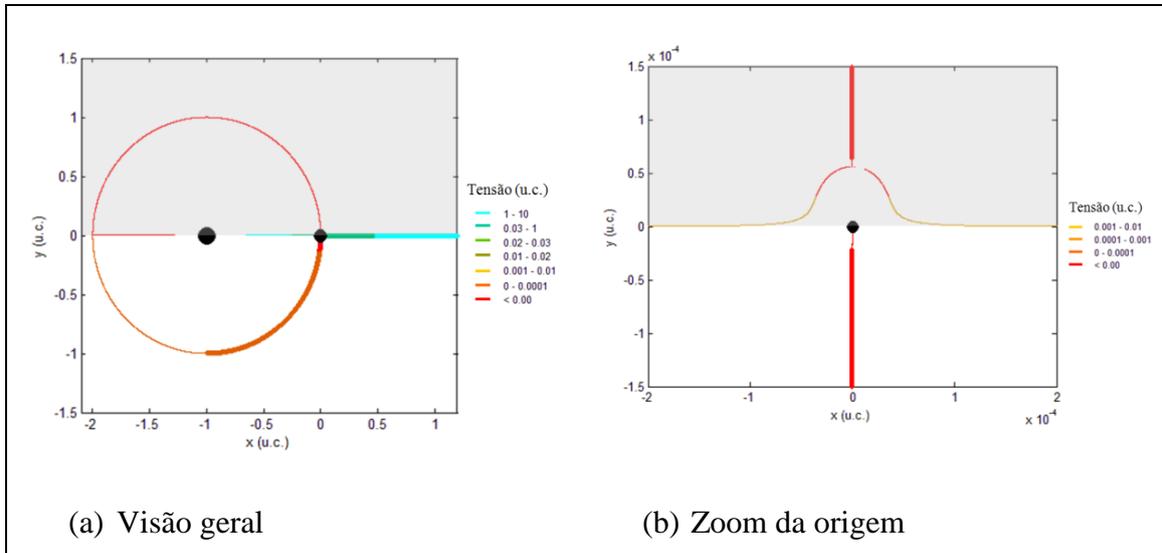
A Figura 8.19 mostra as soluções de equilíbrio para $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$. Neste caso a âncora está entre o centro da lua e do planeta. Todas as soluções com $x > 0$ não são fisicamente possíveis. No grupo de soluções não colineares há um subconjunto com equilíbrio estável e força de tração, que são condições recomendadas para alocar o dispositivo que receberá o veículo espacial. As curvas finas com tensão positiva são aceitas como segundas opções, exceto as soluções da linha à esquerda do planeta, que são soluções fisicamente inviáveis. A curva vermelha e fina é descartada, porque a força que atua sobre o cabo é de compressão, que não cumpre os requisitos para abrigar o veículo espacial ao tether.

Figura 8.19 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Saturno-Daphnis.



A Figura 8.20 mostra as soluções para a âncora fixada em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$.

Figura 8.20 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Saturno-Daphnis.

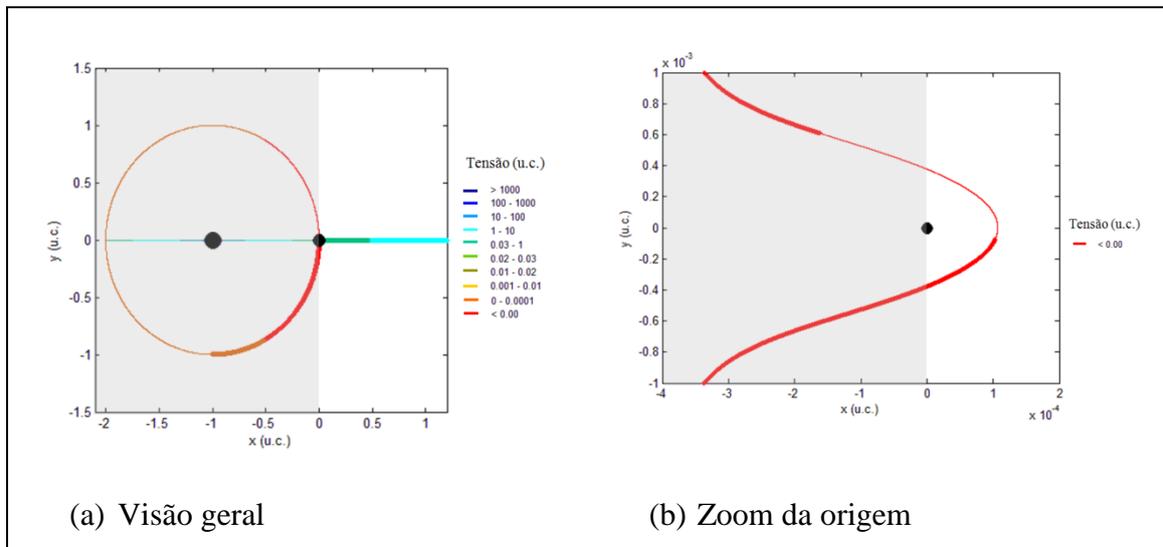


Neste caso há dois grupos de soluções ideais com equilíbrio estável. O primeiro é de soluções colineares a âncora, para $x > 0$. O segundo pertence ao grupo de soluções não colineares, para x aproximadamente entre -1 e 0 u.c.

8.5. Sistema Urano-Cordélia

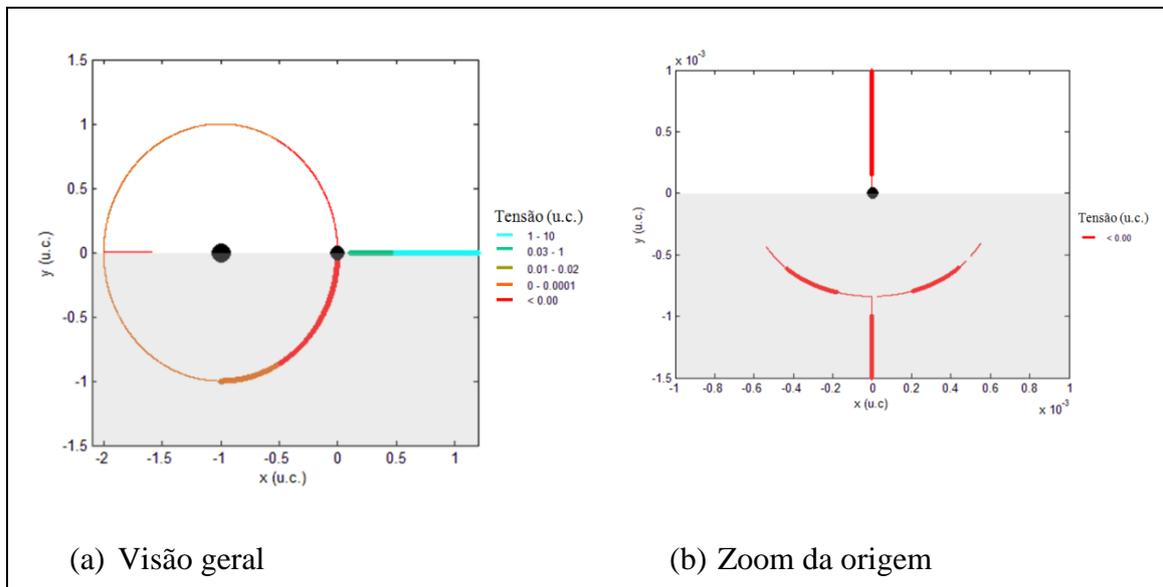
Cordélia (JACOBSON, 1998; KARKOSCHKA, 2001) é a lua mais próxima de Urano, e está a aproximadamente 49.751,7 km de distância. Seu raio é de $20,1 \pm 3,0$ km e sua massa é $4,4 \times 10^{16}$ kg. A Figura 8.21 mostra o equilíbrio correspondente a $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o tether ancorado a direita do centro da lua. Neste caso as soluções fisicamente possíveis são todas com $x > 0$. Eles também são aceitáveis para conectar o veículo espacial ao tether, por ser ponto de equilíbrio estável e força de tração. Para Urano - Cordélia, 1,0 u.c. da tensão equivale a $2,03 \times 10^{26}$ N.

Figura 8.21 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Urano-Cordélia.



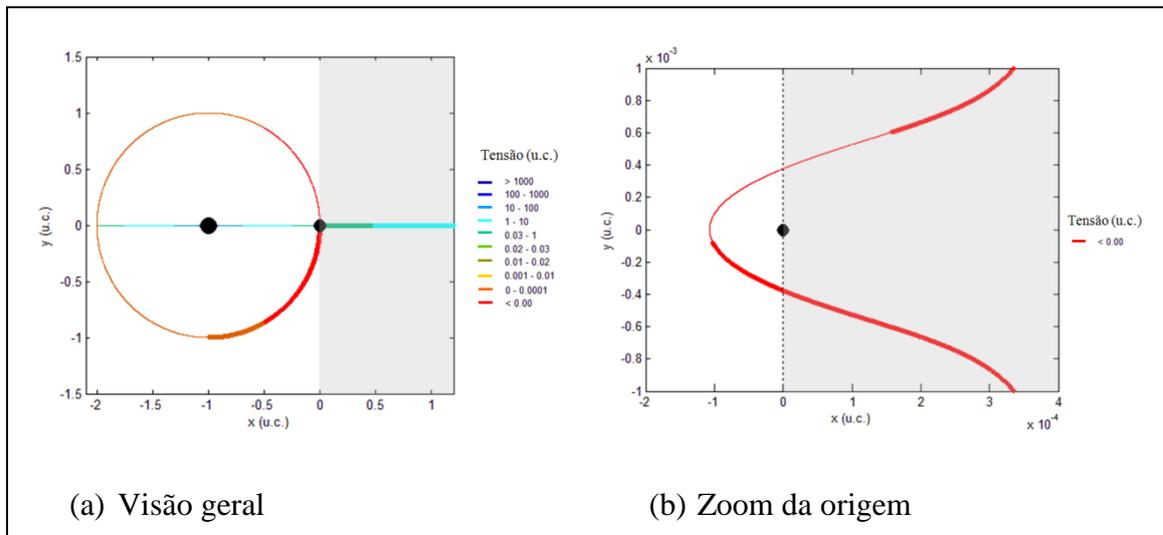
Nas soluções de equilíbrio apresentadas a seguir há um conjunto de soluções ideais colineares a âncora e um conjunto de soluções aceitáveis como segunda opção, por serem pontos de equilíbrio instável, no grupo não colinear. O zoom na origem mostra um pequeno grupo de soluções com tração e equilíbrio instável que estão na região fisicamente possível. A âncora para este caso está em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$.

Figura 8.22- Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Urano-Cordélia.



As soluções de equilíbrio para $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$ são apresentadas a seguir na Fig. 8.23.

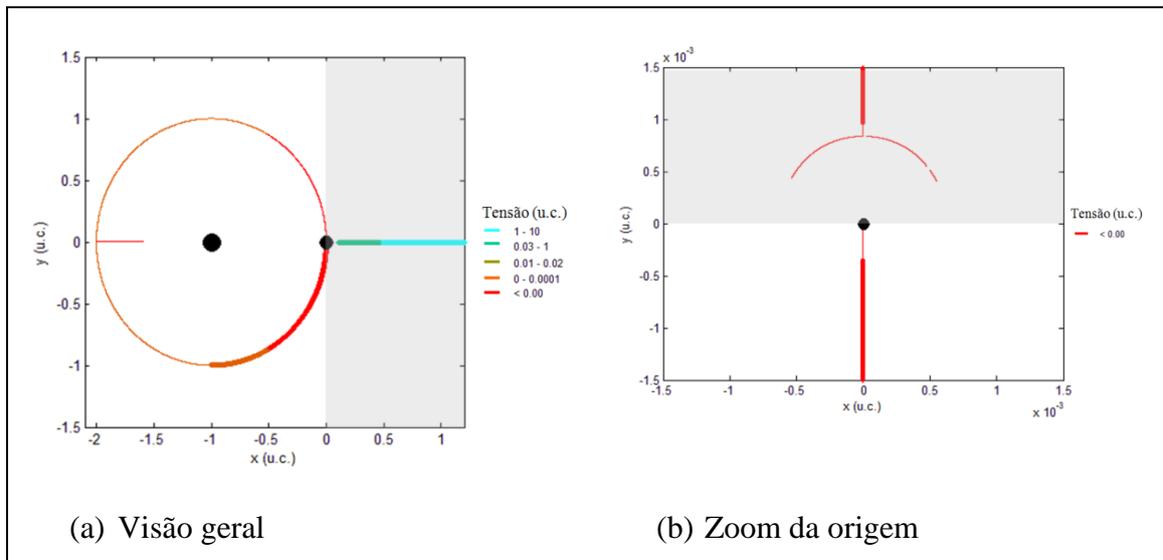
Figura 8.23 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$, para o sistema Urano-Cordélia.



Os melhores resultados são para os pontos estáveis com força de tração localizados no círculo da Figura 8.23(a). A região com equilíbrio instável no círculo e as soluções colineares entre o planeta e a lua são também aceitáveis. Os pontos colineares a esquerda do planeta são descartados por não serem possíveis e os pontos de equilíbrio perto da âncora na Figura 8.23(b) também são descartados por gerarem força de compressão no cabo.

O equilíbrio e a força para a âncora em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$ é apresentado a seguir. A âncora está abaixo do centro de Cordélia, em relação à y . Há soluções de equilíbrio estável com força de tração esticando o cabo, pertencente ao círculo (Figura 8.24(a)) e colineares, a direita da âncora.

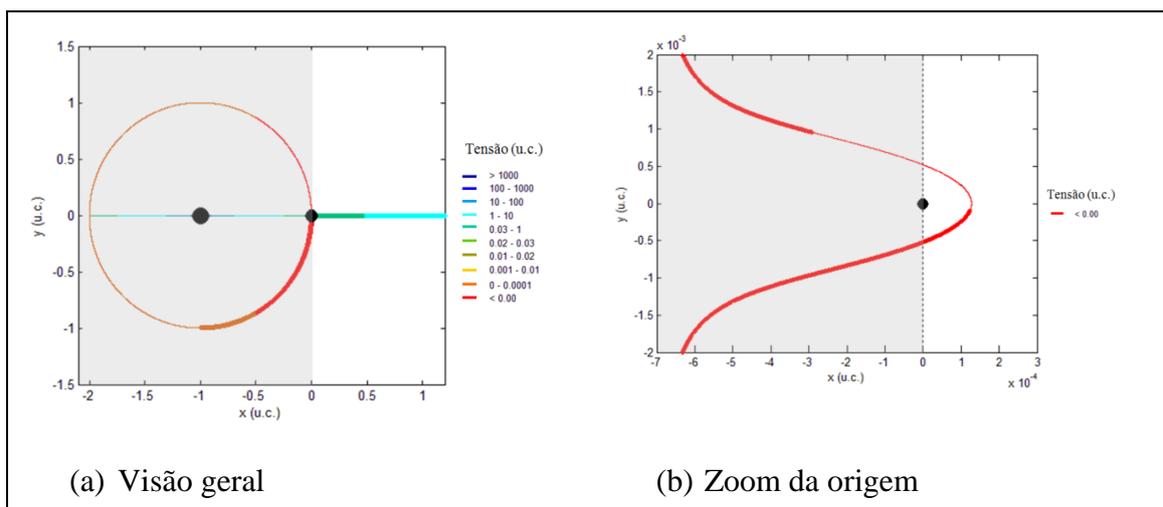
Figura 8.24 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Urano-Cordélia.



8.6. Sistema Netuno-Naiad

Naiad (KARKOSCHKA, 2003; JACOBSON, 2004) é a lua mais próxima de Netuno. Está a 48.227 km de distância do planeta. O raio equatorial é de $33,0 \pm 3,0$ km e a massa $1,9483 \times 10^{17}$ kg. Em relação à magnitude da força de tração, 1,0 u.c. equivale a aproximadamente $3,09 \times 10^{24}$ N. As soluções de equilíbrio para a âncora fixada em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$ são apresentadas a seguir.

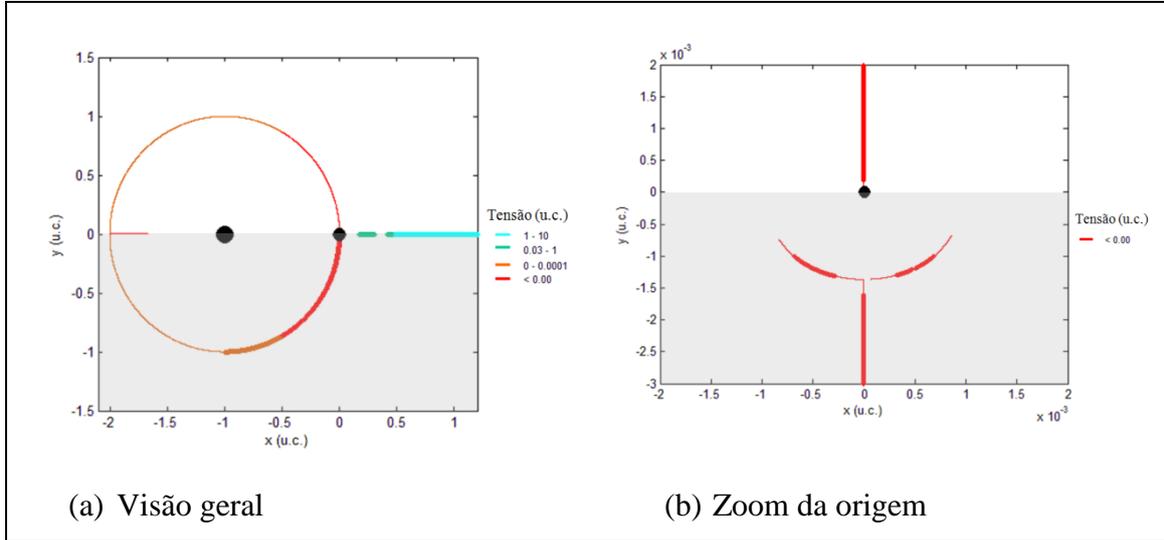
Figura 8.25 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu + R, 0)$, para o sistema Netuno-Naiad.



Há um círculo de soluções e um grupo colinear. Entretanto, destes, apenas o grupo colinear a direita da âncora atende aos critérios para alocar o dispositivo que receberá o veículo espacial. Soluções com compressão são descartadas porque elas pressionam o

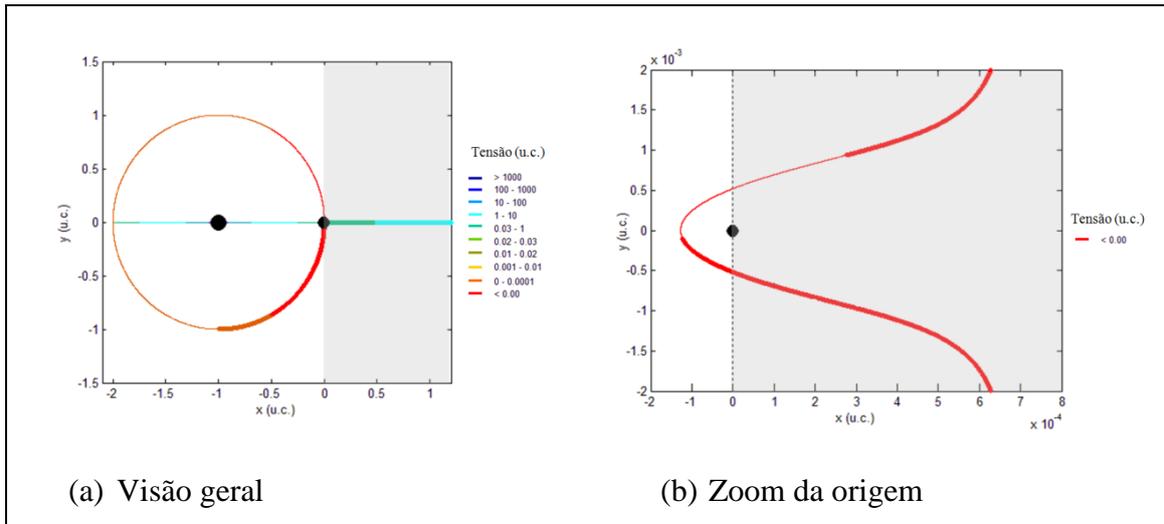
cabo. Seguem os pontos de equilíbrio para o caso $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, mostrados na Fig. 8.26.

Figura 8.26 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, R)$, para o sistema Netuno-Naiad.



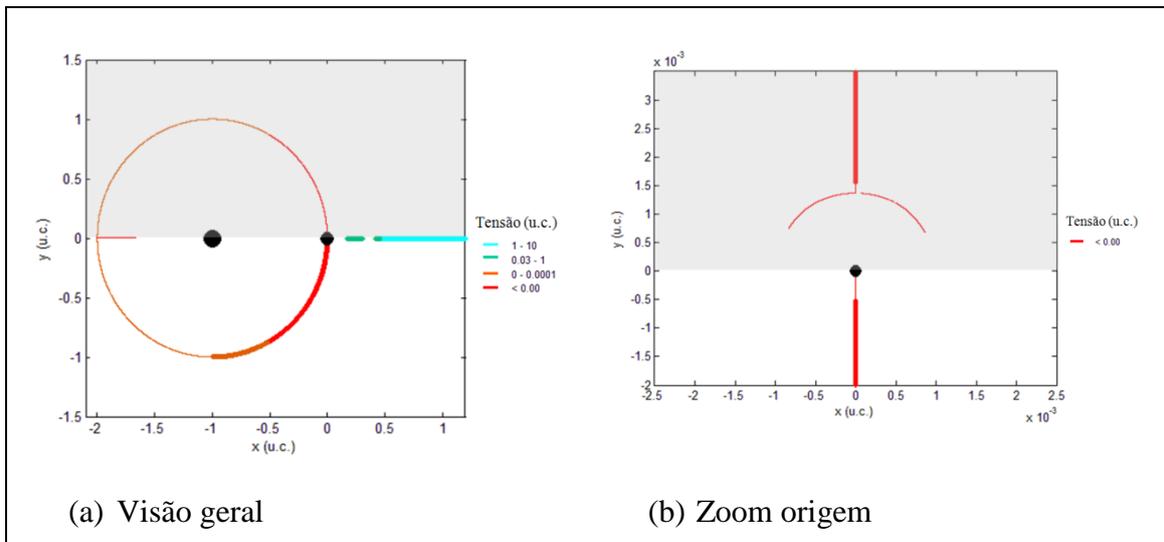
As soluções colineares, para $x > 0$, são estáveis, fisicamente possíveis e tem tração esticando o cabo (Figura 8.26(a)). A curva laranja e fina no círculo mostra a existência de pontos de equilíbrio com tração, mas elas são uma segunda opção por causa da instabilidade. O grupo de equilíbrio fisicamente possível com tração no cabo e estabilidade é pequeno comparado aos casos de equilíbrio instáveis, no caso com âncora em $(x_A, y_A) = (1 - \mu - R, 0)$. Há também um grupo de soluções instáveis entre Netuno e Naiad, que servem como segunda escolha. O grupo colinear instável a esquerda do planeta é descartado por ser uma região onde não é possível alocar o tether.

Figura 8.27 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, 0)$, para o sistema Netuno-Naiad.



A seguir temos o equilíbrio e a força para a âncora posicionada em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, mostrados na Fig. 8.28.

Figura 8.28 - Soluções de equilíbrio para a âncora fixa em $(x_A, y_A) = (1 - \mu, -R)$, para o sistema Netuno-Naiad.



Há pontos de equilíbrio estáveis e instáveis e casos com tração e compressão agindo no cabo que são fisicamente possíveis, mas apenas casos com tração atendem a proposta deste trabalho. A prioridade é para os casos estáveis e, depois, os instáveis.

Note que, em todos os sistemas estudados, para a âncora alocada na mesma posição da superfície, os comportamentos dos pontos de equilíbrio são similares. A principal diferença de comportamento no equilíbrio para as diferentes posições da âncora ocorre

para pequenos valores do cabo. Esses valores variam de acordo com cada sistema, mas é aproximadamente da ordem do tamanho do raio de cada lua (R).

Há soluções que atendem aos requisitos propostos no presente trabalho para conectar o veículo espacial ao tether em todos os casos apresentados, ou seja, equilíbrio fisicamente possível, estável e com força de tração esticando o cabo.

9 TETHERS: SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO, FORÇA E ESTABILIDADE PARA CORPOS IRREGULARES.

Alguns estudos de manobras de “Swing-By assistida por cabo” ou “Tethered Sling Shot Maneuver (TSSM)” em sistemas de asteroides, com o objetivo de lançar um veículo espacial para planetas exteriores, são encontrados na literatura (PENZO; MAYER, 1986; PUIG-SUAI et al., 1995; LANOIX, 1996; LANOIX; MISRA, 2000; PRADO, 2016). Prado (2016) propôs o uso da manobra de “Swing-By assistida por cabo” em um sistema de asteroides, para enviar veículos espaciais para planetas exteriores ou mesmo para fora do Sistema Solar, usando uma estrutura fixa no asteroide. A ideia é construir um “Portal de Escape”. O conceito é o mesmo usado anteriormente para um “Portal de Captura”, porém agora o cabo é considerado fixo na superfície de um asteroide e a rotação do tether é realizada para ganhar energia suficiente para lançar o veículo espacial para um ponto distante, provocando o escape do sistema.

É suposto que o tether já estará fixo na superfície do corpo, com a extremidade do dispositivo de ancoragem do veículo espacial em um ponto de equilíbrio, quando o veículo alcançá-lo para a manobra. Como explicado nos casos anteriores, o ideal são pontos de equilíbrio estáveis e com força de tração esticando o cabo. Os pontos de equilíbrio instáveis serão considerados como uma segunda opção.

As soluções de equilíbrio, estabilidade e força de um tether ancorado na superfície de um asteroide com formas irregulares, assumidos serem elipsoides, serão apresentadas. A irregularidade dos corpos é descrita pelos coeficientes de expansão dos harmônicos esféricos. Estes coeficientes são funções das dimensões dos corpos.

O estudo foi aplicado aos sistemas de asteroides binários síncronos (3169) Ostro e (90) Antiope. Os corpos do sistema orbitam um ao outro com excentricidade zero. Um binário síncrono tem a rotação dos corpos em torno de seu próprio eixo com velocidade angular igual a do seu movimento orbital. Os asteroides mostram sempre a mesma face um para o outro. A variação dos parâmetros φ_0 e ψ_0 permite obter diferentes posições para a âncora fixada na superfície, incluindo pontos fora do plano dos primários.

Para analisar o efeito da irregularidade nos corpos nos pontos de equilíbrio, apresentamos também soluções considerando os asteroides binários como corpos esféricos. A partir da Figura 9.2 as curvas vermelhas representam os pontos de

equilíbrio cuja força de compressão age no cabo e todas as outras curvas, com tensão maior que zero, representam a força de tração. A espessura das curvas representa a estabilidade do equilíbrio. Curvas grossas são pontos de equilíbrio estáveis e curvas finas pontos instáveis. A posição da âncora é a origem dos gráficos, onde o tether é fixado na superfície do asteroide. Consideramos fisicamente possíveis soluções em que o cabo não se envolve na superfície do corpo. A região cinza representa as soluções fisicamente impossíveis. Os retângulos pretos mostram a região ocupada pela superfície dos corpos, que se destacam devido à pequena distância entre eles. Pontos de equilíbrio dentro desta região também são fisicamente impossíveis.

9.1. (3169) Ostro

O Sistema (3169) Ostro é um binário síncrono com forma aproximada de um elipsoide oblato. Está localizado no cinturão principal de asteroides (DESCAMPS et al., 2007a). A massa total é de $1,86 \times 10^{14}$ kg. A distância entre os corpos é 5,2 km (Johnston, 2015) e μ_2 é suposto ser 0,3. A Tabela 9.1 mostra as informações dos semieixos dos corpos. O semieixo maior (a) é 1,891750 U.A., a excentricidade (e) é 0,6672, a inclinação (i) $24,9043^\circ$, a longitude do nodo ascendente (Ω) é $96,3912^\circ$ e o argumento do periélio (ω) é $32,6583^\circ$ (JPL, 2016a). São apresentadas soluções no plano e fora do plano dos primários.

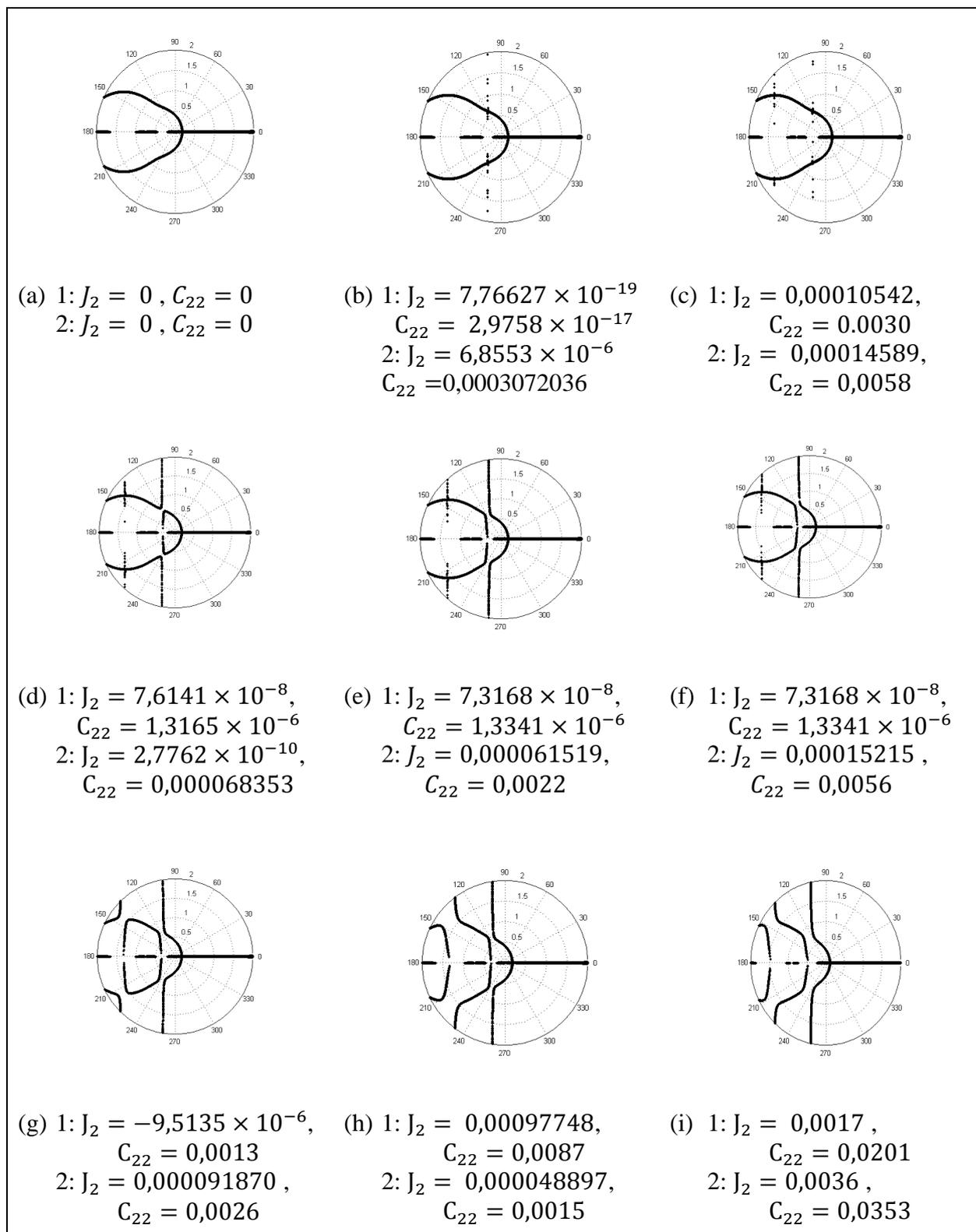
Tabela 9.1 – Semieixo do corpo primário e secundário (em km) para (3169) Ostro (DESCAMPS et al., 2007a).

a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
2,2	1,7	1,6	2,4	1,3	1,2

9.1.1. Soluções no plano dos primários

Os pontos de equilíbrio para o sistema (3169) Ostro, inicialmente assumindo corpos primários esféricos, e então considerando deformações nestes corpos, até eles alcançarem a forma irregular real, são apresentados. A sequência foi feita em nove passos, sendo o que último usou os corpos com a forma irregular real, de acordo com a Tabela 9.1. Os coeficientes $J_2 = -C_{20}$ e C_{22} , que descrevem as irregularidades dos corpos, para cada passo a partir de (a) até (i) da Figura 9.1 é mostrado, sendo 1 e 2 na legenda os corpos primário e secundário, respectivamente. O objetivo é mostrar o efeito que a deformação dos corpos causa nos pontos de equilíbrio.

Figura 9.1 – Pontos de equilíbrio para o sistema (3169) Ostro, considerando os asteroides com a forma esférica (a), evoluindo a deformidade dos corpos até a forma irregular real (i), com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.

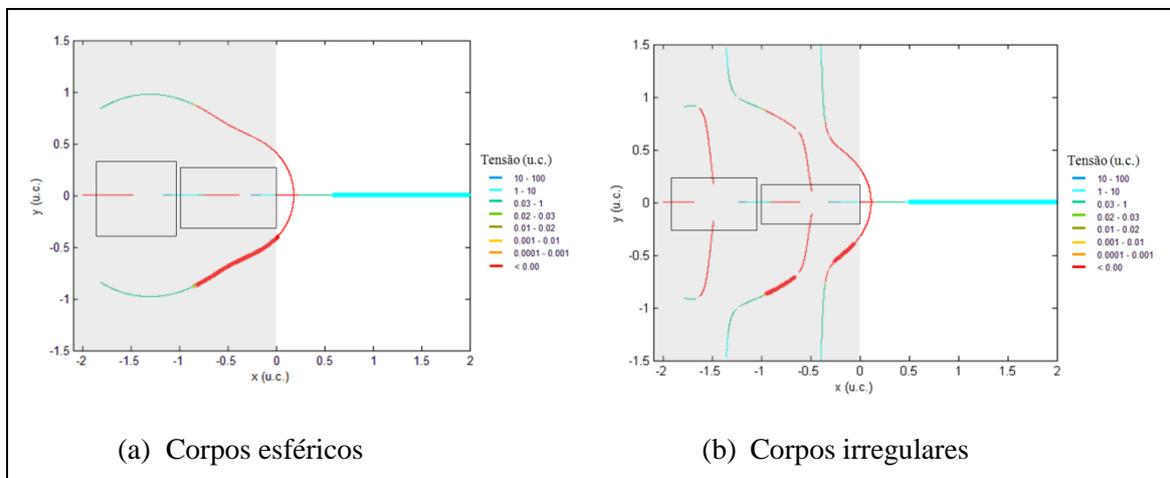


Note que a principal transformação ocorre nos pontos não colineares. No passo (a) existe uma única família de soluções não colineares. Com a mudança dos valores de J_2 e

C_{22} , há o surgimento de pontos de equilíbrio em novas posições. A partir do passo (d), as soluções existentes começam a mudar, transformando a curva inicial em (a). No passo (g), a transformação ocorre para os pontos com tamanho do cabo de um pouco mais de 1,0 u.c. até o limite de 2,0 u.c. No passo (h), as soluções estão próximas da forma final e já existem três famílias de soluções não colineares. No passo (i) a localização dos pontos de equilíbrio é quase a forma final para o (3169) Ostro. Observe que, neste caso, a âncora está ao lado direito do centro do corpo secundário. As transformações dos pontos de equilíbrio ocorrem na região de soluções fisicamente impossíveis. O pequeno grupo de soluções não colineares fisicamente possíveis tem poucas modificações.

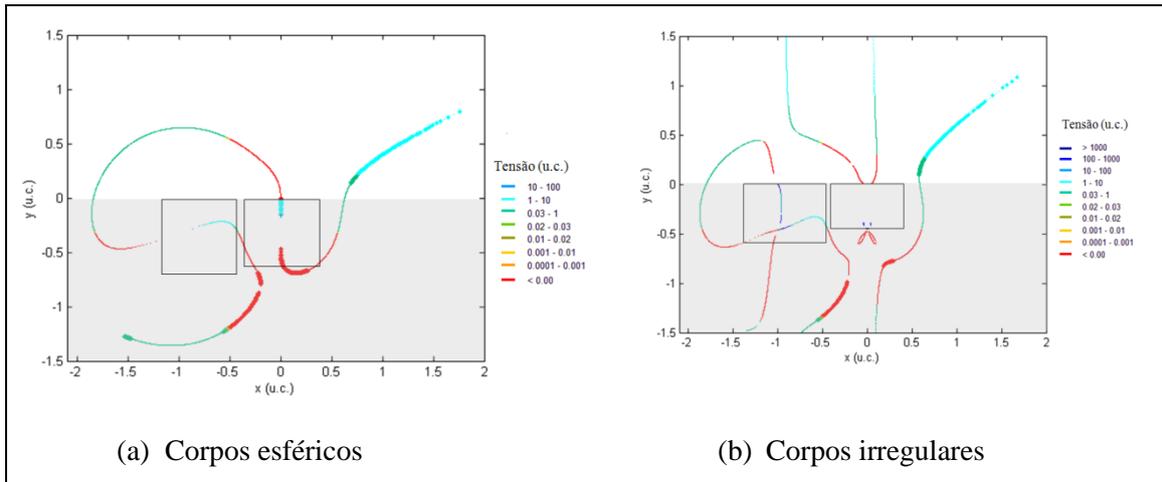
As Figuras 9.2, 9.3, 9.4 e 9.5 mostram as soluções de equilíbrio planares ($\psi = 0$), considerando diferentes posições da âncora no plano orbital dos primários ($\psi_0 = 0$). φ varia de 0 a 2π . Considere φ o ângulo entre o eixo x e a posição do ponto de equilíbrio. Em relação à tensão no cabo, para este sistema, 1,0 u.c. equivale a aproximadamente $6,95 \times 10^{10}$ N.

Figura 9.2 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



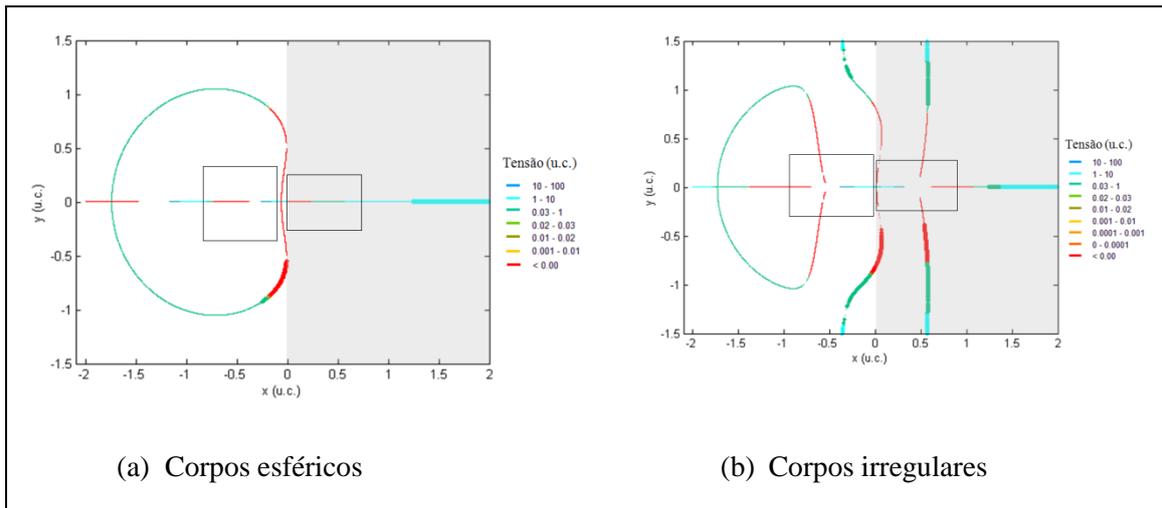
Na Figura 9.2 as soluções fisicamente possíveis estão no intervalo $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, ou seja, todas as soluções com $x > 0$. Na Figura 9.3 estas soluções estão no intervalo $0 \leq \varphi \leq \pi$, equivalente a $y > 0$. Observe que, neste caso, não há soluções colineares ao eixo da âncora, independente da forma do corpo.

Figura 9.3 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



O equilíbrio e a força para a âncora fixa em $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$ são estudados. As soluções são diferentes conforme a irregularidade do corpo em relação ao caso esférico, formando três famílias de soluções não colineares. Destas, uma família faz parte do grupo fisicamente impossível, a família do meio na Figura 9.4(b), que tem pontos pertencentes à região impossível e outros não. Há um grupo de pontos de equilíbrio estáveis com tração na família de soluções fisicamente possíveis. As soluções colineares ao eixo x também sofrem mudanças no caso irregular, quando comparadas ao caso esférico.

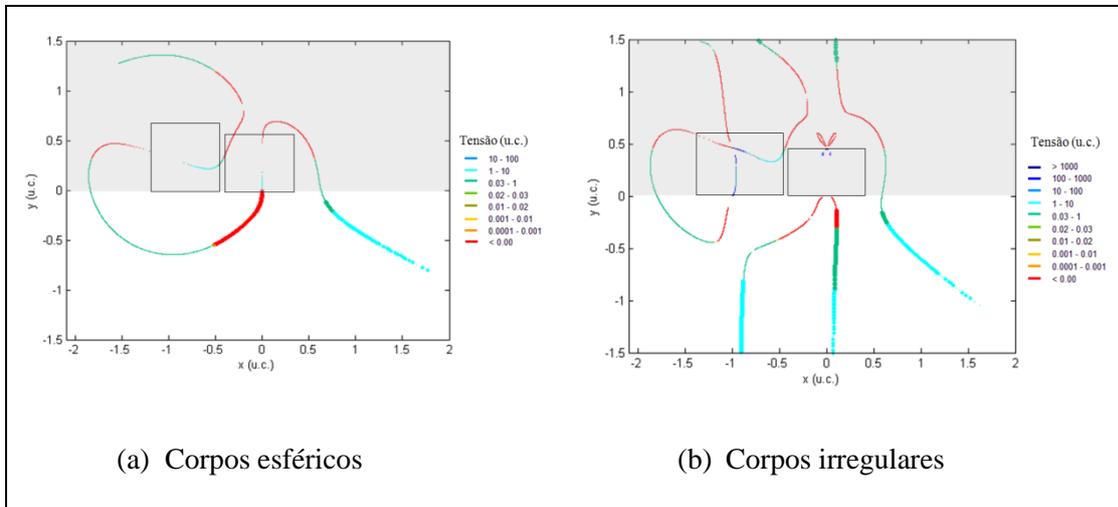
Figura 9.4 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



As soluções fisicamente possíveis estão no intervalo $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, toda região de $x < 0$.

Os pontos de equilíbrio e a força para a âncora fixa em $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$ são estudados.

Figura 9.5 - Soluções de equilíbrio para (3169) Ostro considerando o asteroide como um corpo (a) esférico e (b) irregular, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.

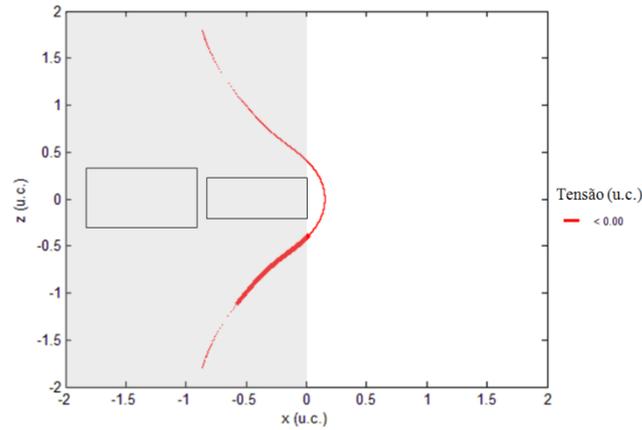


A região em branco, com $y < 0$, são soluções viáveis. Note que há grupos de soluções estáveis com tração para o caso irregular.

9.1.2. Soluções fora do plano dos primários

A seguir são apresentados as soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides, com $0 \leq \psi \leq 2\pi$, para diferentes pontos da âncora na superfície do corpo, no plano dos primários ($\psi_0 = 0$). Note que não há soluções de equilíbrio para corpos irregulares neste caso. As soluções para $\varphi = 0$ estão no plano $x - z$. As soluções possíveis são para $x > 0$, mas estas não são soluções ideais, pois não há tração esticando o cabo.

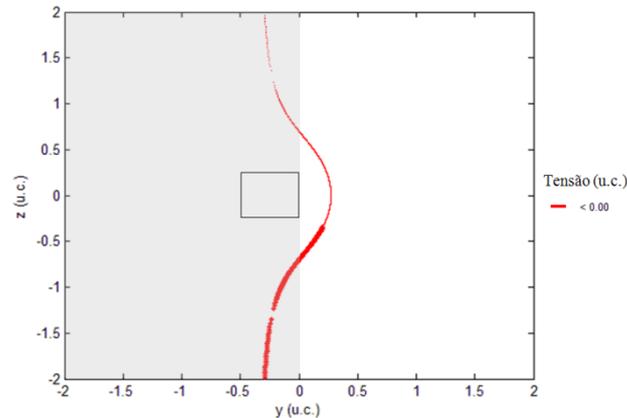
Figura 9.6 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 0$.



Seguem as soluções para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ no plano $x - z$. As soluções possíveis são $y > 0$.

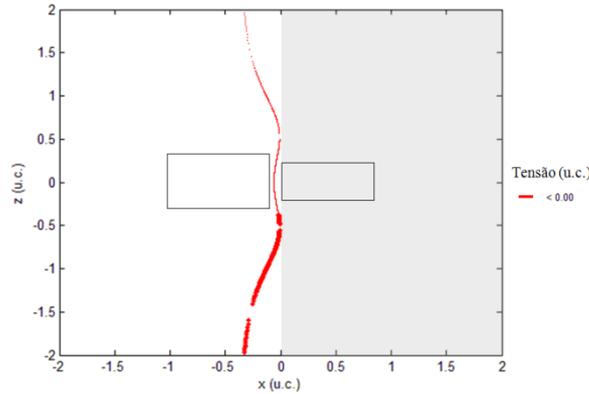
Apenas compressão age no cabo.

Figura 9.7 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi/2$.



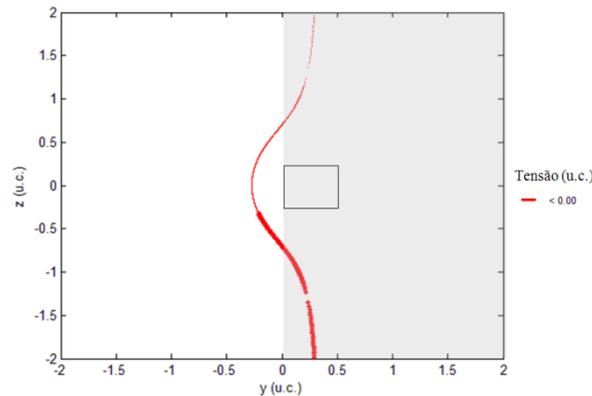
A Figura 9.8 mostra as soluções para $\varphi = \pi$, que no plano cartesiano pertencem ao plano $x - z$. As soluções viáveis estão em $x < 0$. Apenas força de compressão age no cabo.

Figura 9.8 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi$.



As soluções para $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ estão no plano cartesiano $y - z$. As soluções fisicamente possíveis são para $y < 0$. Há equilíbrio estável e instável. Somente força de compressão age no cabo.

Figura 9.9 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 3\pi/2$.



A seguir o equilíbrio fora do plano dos primários, com a âncora fixa também fora do plano, em $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$ é mostrado. As Figuras 9.10(a) e 9.11(a) são as soluções para $\varphi = 0$ no plano $x - z$. As soluções apresentadas nas Figuras 9.10(b) e 9.11(b) são para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, no plano $y - z$. Para estas condições não há soluções para os corpos irregulares. As Figuras 9.10(c) e 9.11(c) são soluções no plano da âncora, que estão fora do plano dos primários, logo $\psi = 0$. Neste caso há equilíbrio para os corpos irregulares na Figura 9.11. As soluções fisicamente válidas ocorrem para $z \geq 0$, na Figura 9.10, e $z \leq 0$, na Figura 9.11.

Figura 9.10 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0, \psi_0 = \pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$, (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.

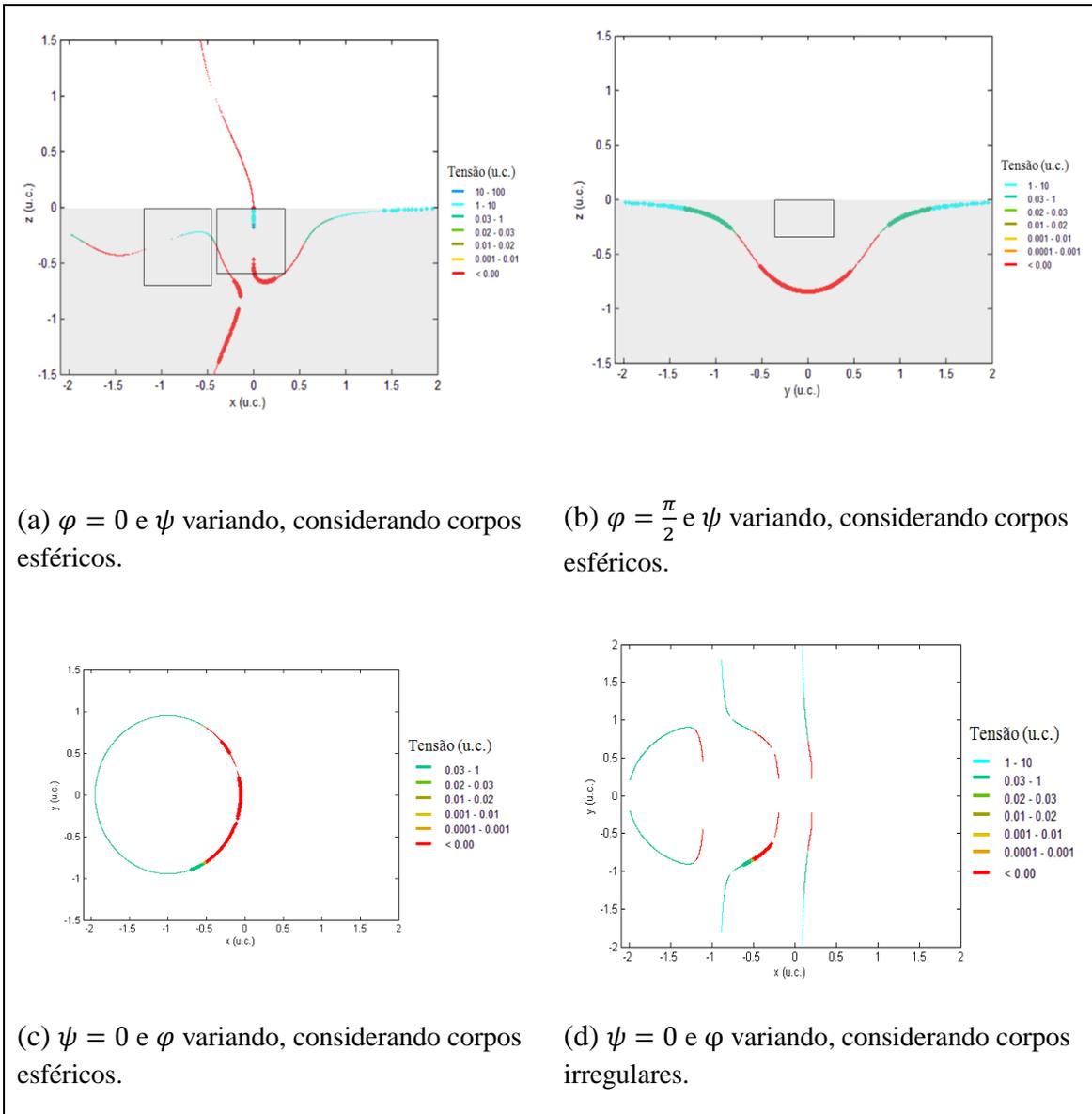
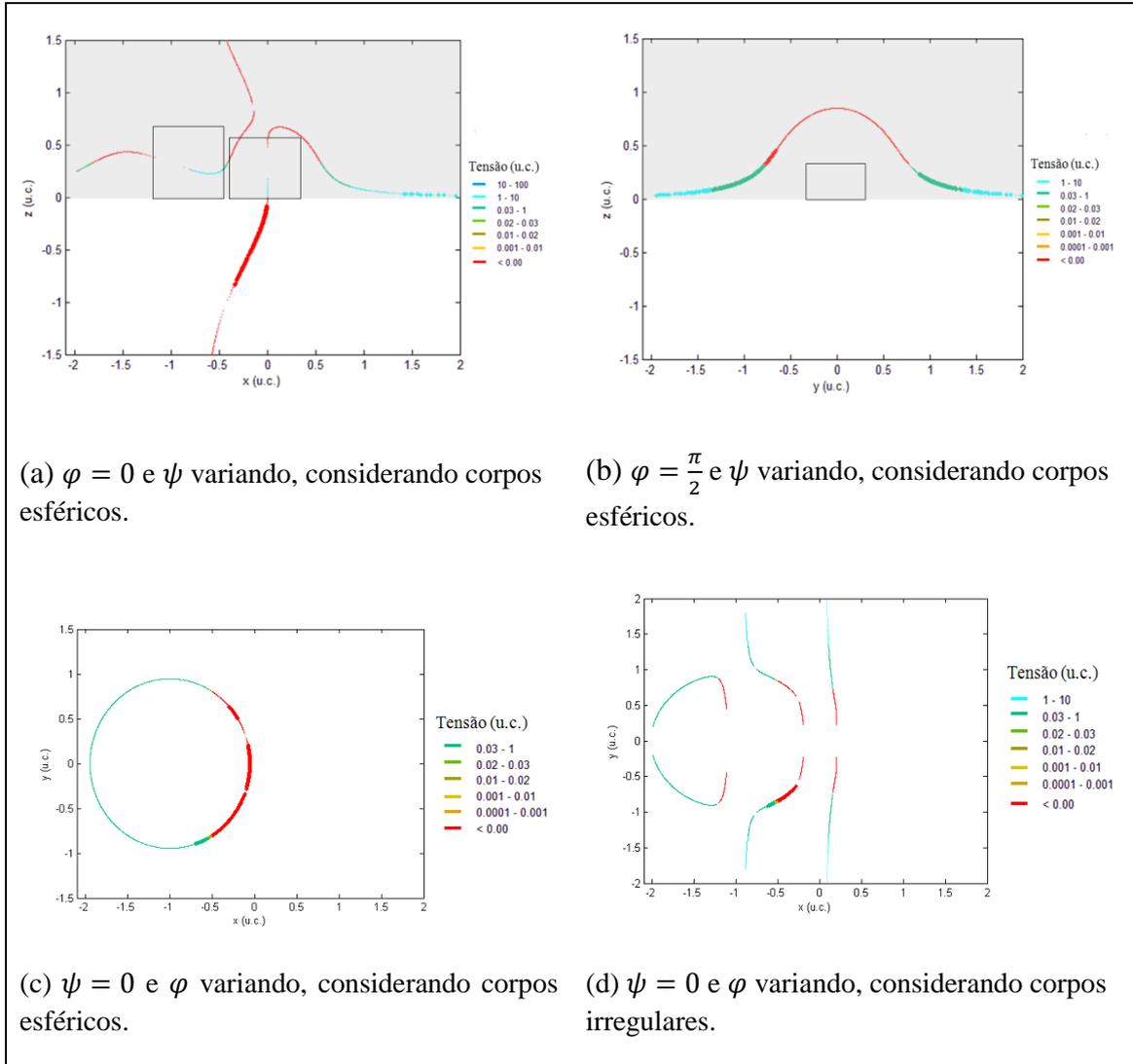


Figura 9.11 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (3169) Ostro, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0, \psi_0 = 3\pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.



Note que há equilíbrio estável e instável nas condições para a âncora fora do plano. A análise dos resultados mostra alguns aspectos interessantes. É observado que, no caso $\varphi_0 = 0, \psi_0 = 0$ e $\psi = 0$, duas famílias de soluções aparecem na região fisicamente impossível. Na região de soluções possíveis, a única modificação nos resultados é uma aproximação da curva de soluções para o centro de referência do sistema, o que significa que o tamanho do cabo do tether é pequeno. No caso $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \psi_0 = 0$ e $\psi = 0$, há novas famílias de soluções em ambas as regiões, mostrando que a irregularidade dos corpos pode ser usada para construir tethers em diferentes posições e com diferentes tamanhos.

Na situação onde $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$, duas novas famílias aparecem, uma fisicamente possível e outra não. Além disso, a família original existente no modelo esférico é modificada, com o aumento do comprimento do tether. Os mesmos comentários se aplicam ao caso $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.

Quando $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = 0$ e $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, não há soluções de equilíbrio fora do plano dos primários para asteroides com formas não esféricas. O mesmo ocorre quando $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = \pi$ e $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Para todas as condições da âncora no plano dos primários, as soluções de equilíbrio fora deste plano são estáveis ou instáveis com força de compressão agindo no cabo.

Quando $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$ a âncora não está no plano dos primários, mas sim fixada nos polos do corpo secundário. Os casos onde $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$ e $\varphi = 0$ têm um grupo de soluções possíveis para corpos com forma esférica. As soluções são perdidas com a mudança no formato dos corpos primários. Para $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$ e $\psi = 0$ há soluções no plano da âncora, para asteroides com formas esféricas e irregulares.

9.2. (90) Antíope

É um sistema de asteroides duplo oblato, também localizado no cinturão principal de asteroides, com ressonância 1:1. A separação dos corpos é de 171 km e a massa total é de $8,28 \times 10^{17}$ kg (DESCAMPS et al., 2007b). Assumimos o parâmetro de massa (μ_2) ser 0,7. A Tabela 9.2 mostra a medida dos eixos de cada corpo. O semieixo maior (a) é 3,148898878 U.A., a excentricidade (e) é 0,1653, a inclinação (i) $2,2071^\circ$, a longitude do nodo ascendente (Ω) é $69,9737^\circ$ e o argumento do periélio (ω) é $244,8784^\circ$ (JPL, 2016b).

Tabela 9.2 – Semieixo do corpo primário e secundário (em km) para (90) Antíope (DESCAMPS et al., 2007b).

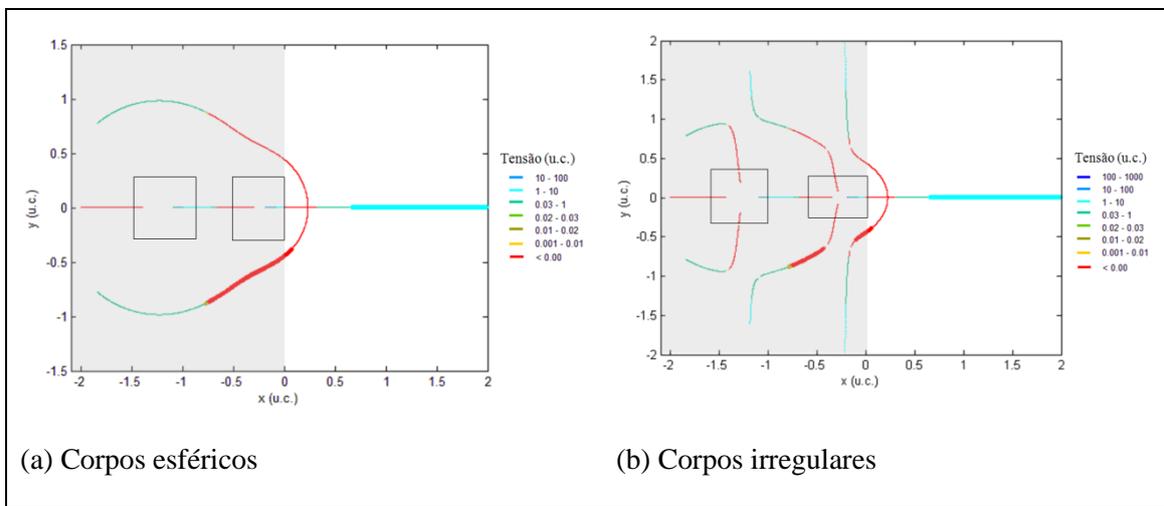
a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
46,5	43,5	41,8	44,7	41,4	39,8

Serão apresentadas as soluções de equilíbrio no plano e fora do plano dos primários, a estabilidade e a tensão no cabo relativo a cada ponto de equilíbrio. Em relação à tensão, 1,0 u.c. equivale a aproximadamente $1,58 \times 10^{15}$ N.

9.2.1. Soluções no plano dos primários

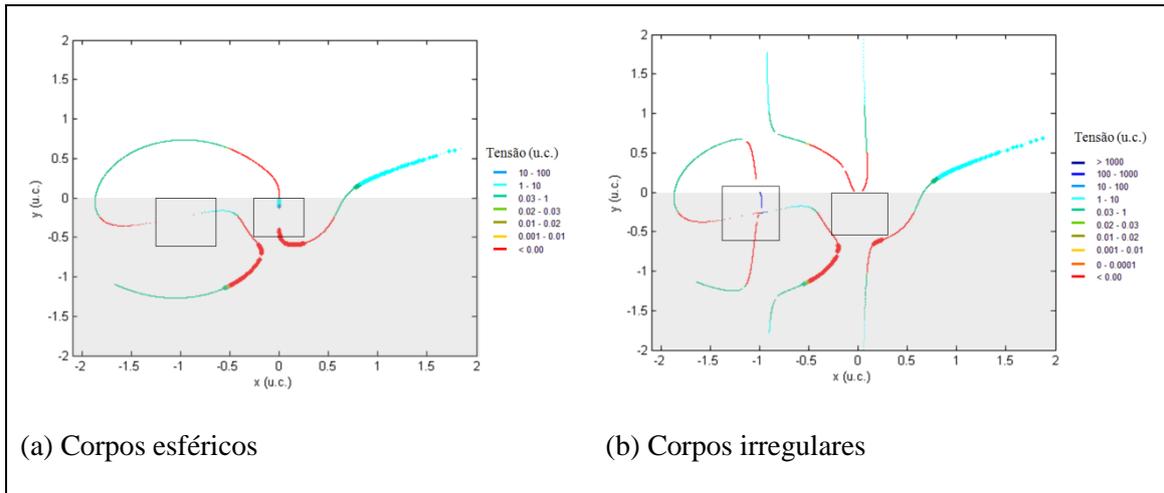
O caso $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$, tem três famílias de soluções, sendo que duas delas aparecem na região fisicamente impossível. Na região de soluções possíveis, o comportamento é similar, tanto no caso esférico quanto no irregular.

Figura 9.12 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



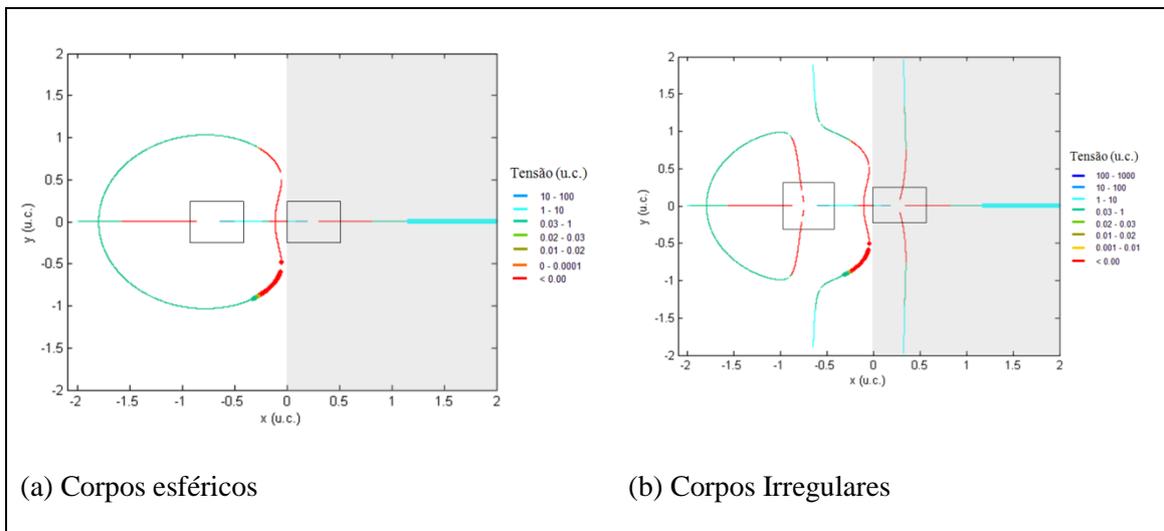
No grupo de soluções colineares há um subgrupo ideal, com força de tração e equilíbrio estável. Nestes casos a tensão varia de 1 u.c a 10 u.c. Para quando $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$, há novas famílias de soluções em ambas as regiões, mostrando que a irregularidade dos corpos pode ser usada para construir tethers em diferentes posições e com diferentes tamanhos.

Figura 9.13 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



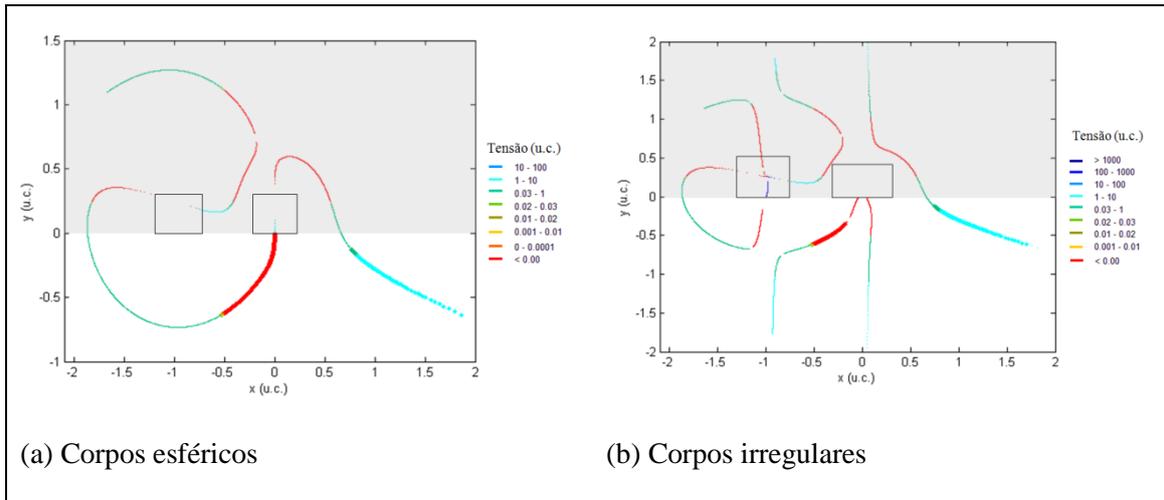
Na situação onde $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$ aparecem duas novas famílias de soluções, uma fisicamente possível e outra não. A família original existente no modelo esférico é modificada.

Figura 9.14 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



Para o caso $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$ existe uma mudança significativa nas soluções de equilíbrio, surgindo novas famílias e não há soluções colineares.

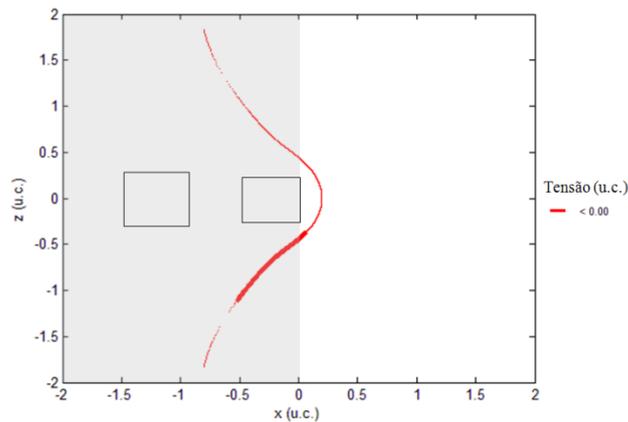
Figura 9.15 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos (a) esféricos e (b) irregulares, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\psi = 0$.



9.2.2. Soluções fora do plano dos primários

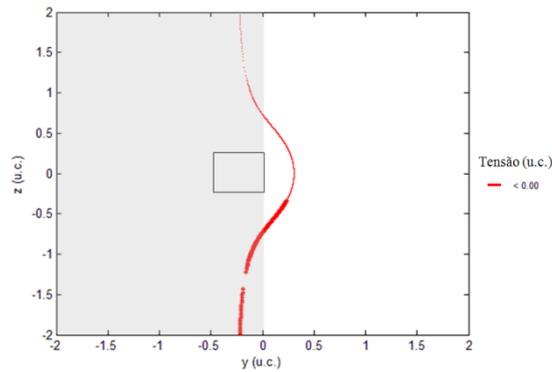
As soluções de equilíbrio fora do plano dos primários para o veículo espacial considerado, entre $0 \leq \psi \leq 2\pi$, para diferentes posições da âncora no plano ($\psi_0 = 0$), são apresentadas. Quando $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = 0$ e $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ não há soluções de equilíbrio fora do plano dos primários para asteroides com formas irregulares. O mesmo ocorre quando $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = \pi$ e $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Somente compressão age no cabo.

Figura 9.16 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 0$.



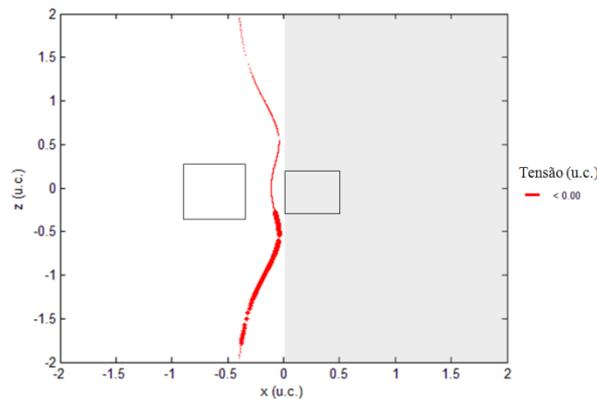
A seguir são mostradas as soluções de equilíbrio para $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Há equilíbrio estável e instável, com força de compressão.

Figura 9.17 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi/2$.



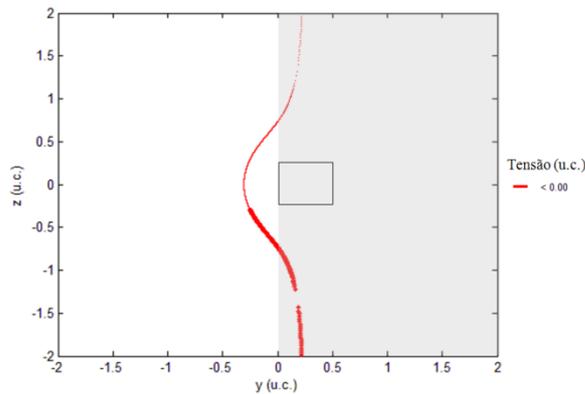
As soluções para $\varphi = \pi$ estão no plano cartesiano $x - z$. As soluções fisicamente possíveis são para $x < 0$. Há equilíbrio estável e instável. Somente força de compressão age no cabo.

Figura 9.18 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = \pi$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = \pi$.



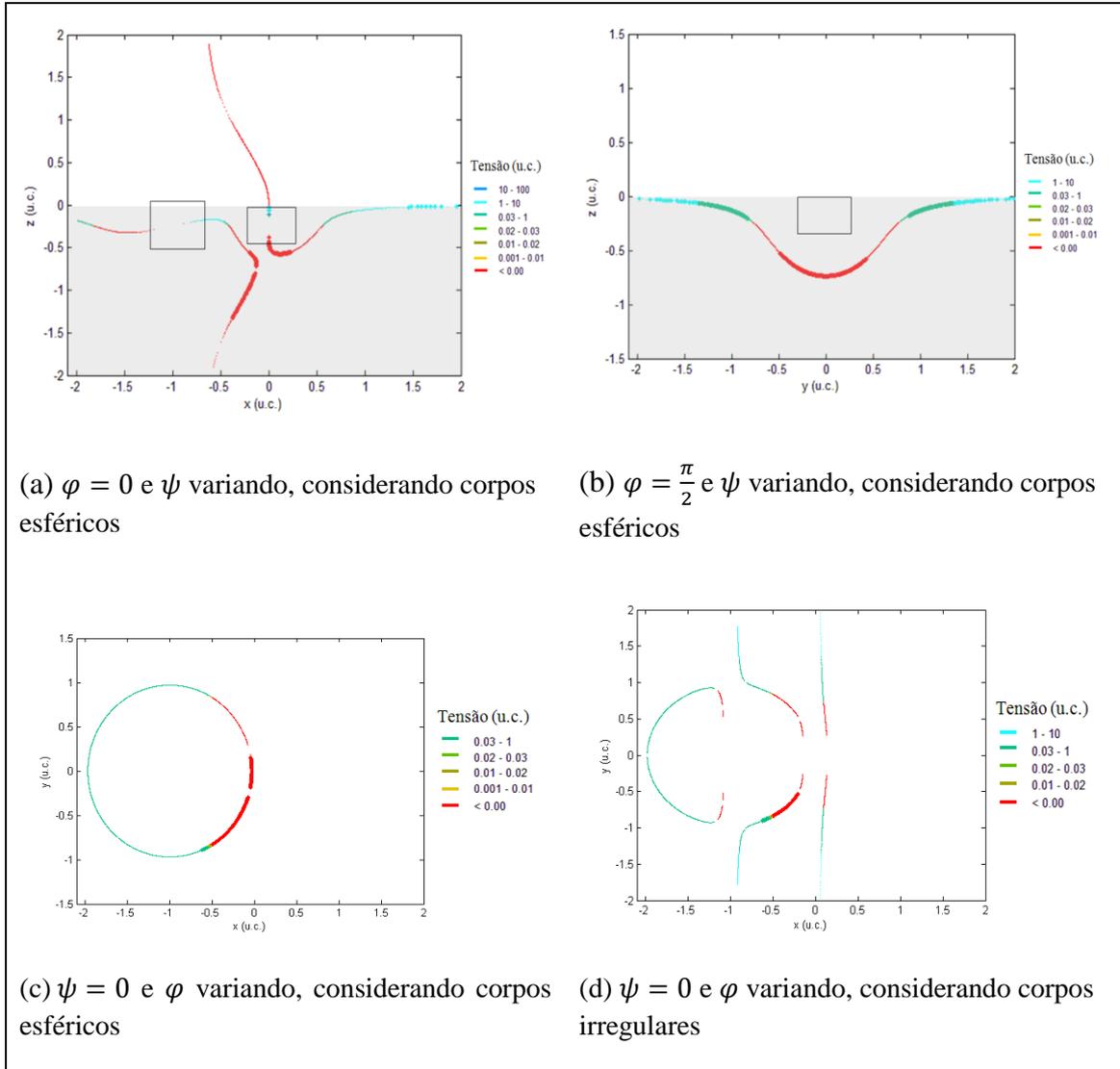
Para $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ as soluções estão no plano cartesiano $y - z$. As soluções fisicamente possíveis são para $y < 0$. Há equilíbrio estável e instável. Somente força de compressão age no cabo.

Figura 9.19 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos, com $\varphi_0 = 3\pi/2$, $\psi_0 = 0$ e $\varphi = 3\pi/2$.



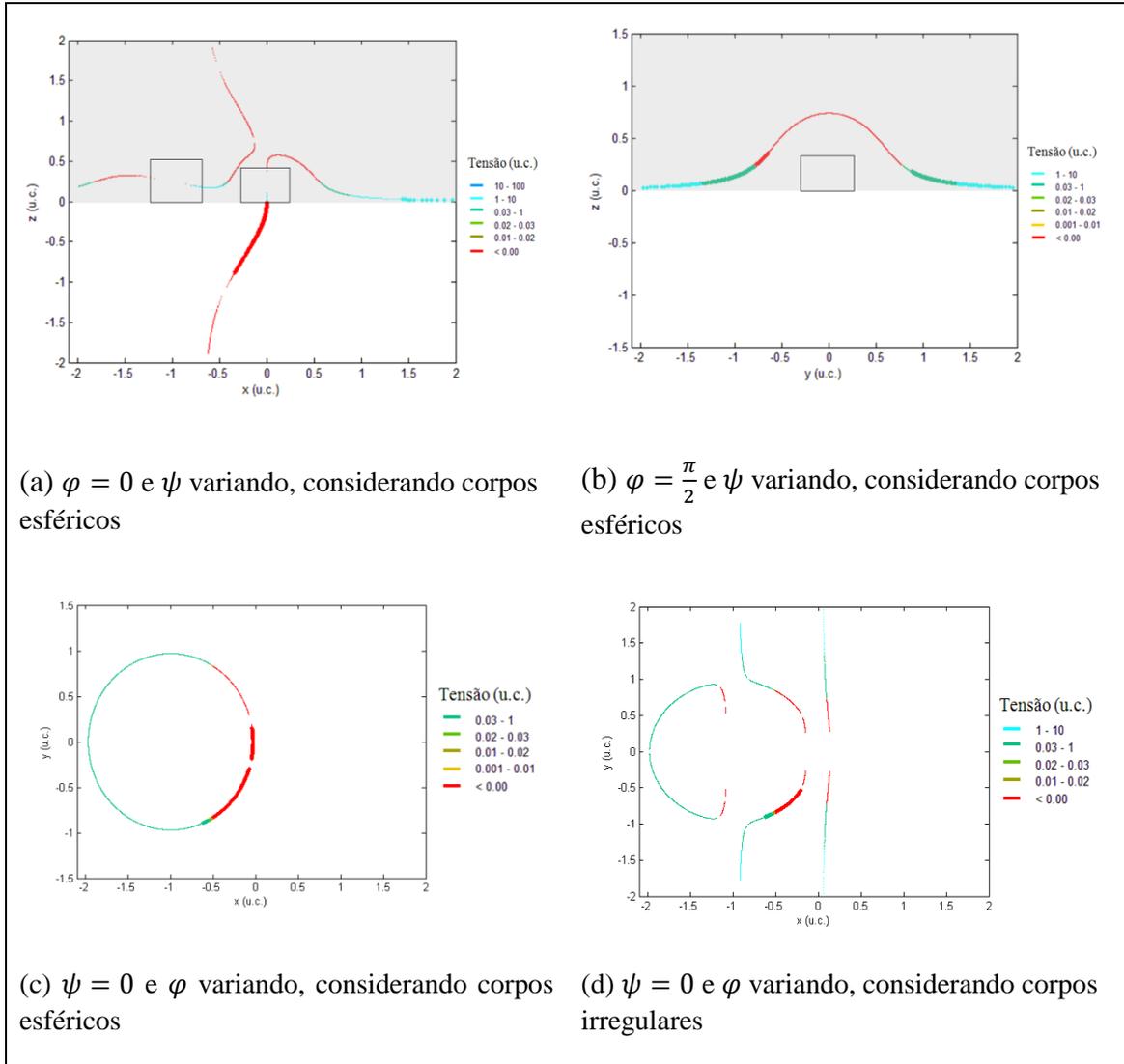
A seguir são apresentados os pontos de equilíbrio considerando $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ e $\psi = 0$ para a âncora fixa fora do plano dos primários ($\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ and $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$). Neste caso só há soluções para corpos não esféricos para pontos no plano da âncora (Figura 9.20(d)). Não há soluções colineares ao eixo x da âncora neste plano. Todas as soluções são fisicamente possíveis e há um pequeno grupo com tração e equilíbrio estável.

Figura 9.20 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ e (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.



O equilíbrio para $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ e $\psi = 0$ para a âncora fixa fora do plano dos primários ($\forall \varphi_0$, $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$) é também considerado. Como no caso anterior, neste caso também só há soluções para corpos não esféricos para pontos no plano da âncora. Não há soluções colineares ao eixo x da âncora. Todas as soluções são fisicamente viáveis e há soluções com equilíbrio estável e tensão maior que zero.

Figura 9.21 - Soluções de equilíbrio fora do plano dos asteroides para (90) Antíope, para corpos esféricos e irregulares, com $\forall \varphi_0, \psi_0 = 3\pi/2$ e (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ e (c) $\psi = 0$ para corpos esféricos e (d) $\psi = 0$ para corpos irregulares.



No geral, nota-se que a irregularidade do corpo causa mudança nos pontos de equilíbrio em relação ao caso esférico, criando novas famílias de soluções. Esse comportamento é esperado, pois o mesmo ocorre em sistemas que não usam tethers, conforme mostram os trabalhos de Bellerose e Scheeres (2007), Douskos (2011), Arredondo et al. (2012), Woo (2014) e Santos (2017). Esses trabalhos mostram que a não esfericidade do corpo pode fazer surgir pontos de equilíbrio adicionais em torno do sistema. Em alguns deles a análise da estabilidade também é efetuada (BELLEROSE; SCHEERES, 2007; DOUSKOS, 2011; ARREDONDO ET AL., 2012).

Na presente pesquisa, quando a análise é feita fora do plano dos primários e com a âncora pertencente a este plano, não há soluções de equilíbrio para casos irregulares.

Para a âncora posicionada nos polos do corpo secundário, todas as famílias de soluções encontradas no plano da âncora são fisicamente possíveis e há equilíbrio em torno dos corpos irregulares.

10 LIMITAÇÕES PRÁTICAS DO TRABALHO

Sobre o Swing-By propulsado, ele tem o objetivo de colaborar com a missão espacial quando a energia obtida a partir da manobra de Swing-By puro não for o suficiente para atender suas necessidades. Esta é uma manobra aplicável na prática, considerando que o Swing-By, como citado anteriormente, já foi usado em missões espaciais com resultados positivos.

Para o estudo desta manobra foi adotado um sistema com parâmetros similares aos do sistema Terra-Lua e diferentes condições iniciais. Entre essas condições estão os valores da excentricidade, que varia de 0,1 a 0,5, e a magnitude do impulso, que varia de 0,1 a 4,0 km/s. Alguns destes valores podem ser considerados altos para o sistema adotado ou para os sistemas conhecidos, porém o principal objetivo é analisar o efeito destes parâmetros nos resultados, para fins acadêmicos, podendo ou não ser aplicável à prática.

Em relação à manobra de “Swing-By assistida por cabo”, a proposta de ter uma estrutura fixa no corpo, para que o veículo espacial aproxime-se e conecte-se a outra extremidade do tether, também apresenta limitações práticas. Uma missão anterior é necessária para executar a parte da ancoragem da estrutura na lua. Para sistemas distantes este problema é maior, pois além das limitações tecnológicas, há o problema com o tempo de duração das missões, que nestes casos são longos. Porém, uma vez efetuada esta tarefa, a durabilidade da estrutura seria muito grande. Em um futuro cenário de missões frequentes, essa aplicação pode se tornar viável. Além disso, é muito provável que futuras missões interplanetárias sejam efetuadas com constelações de pequenos satélites injetados em órbitas diferentes, pois isso, como já é feito na Terra, permite uma cobertura muito maior do planeta e redundâncias em casos de falhas. Em um cenário assim, um veículo maior deve carregar um conjunto de pequenos veículos, que seriam injetados em órbitas diferentes e em tempos um pouco diferentes. Uma opção, nesse cenário, poderia ser a separação da nave maior um pouco antes da chegada ao planeta. Essa nave poderia construir o sistema a base de tether, que seria logo depois utilizado pelos veículos menores. De qualquer forma, o objetivo do presente trabalho é mostrar um potencial oferecido pela natureza, que pode ou não vir a ser explorado no futuro, com as inovações tecnológicas que deverão surgir.

O estudo dos pontos de equilíbrio para diferentes sistemas foi apresentado no capítulo 8 e, nos casos Saturno-Daphnis e Urano-Cordélia, além da distância, outro problema que

torna inviável a aplicação prática é a localização das luas, que estão entre os anéis dos planetas. O estudo destes sistemas é exclusivamente devido as suas dimensões e servem de exemplo para sistemas com parâmetros similares. Além disso, os cálculos dos pontos de equilíbrio são também úteis na construção de estruturas chamadas de elevadores espaciais (BUROV; RICARD, 2005; BUROV; KOSENKO, 2007; BUROV et al., 2011; BUROV; KOSENKO, 2014; BUROV et al., 2014a; BUROV et al., 2014b), que servem para efetuar o transporte de equipamentos.

Foram apresentados resultados, para fins de estudos, considerando o tamanho do cabo que compõe o tether até 2,0 u.c., o que significa duas vezes a distância entre os corpos. Para as situações com tamanho do cabo pequeno as aplicações práticas podem ser possíveis.

No geral, os resultados apresentados que não são aplicáveis à prática tem o objetivo de estudos para fins acadêmicos.

11 CONCLUSÕES

Foi apresentado um estudo sobre manobras orbitais para um veículo espacial envolvendo propulsão impulsiva e passagens por um corpo celeste intermediário. Nesse sentido, duas manobras foram estudadas: i) “Swing-By propulsado” e ii) manobras de “Swing-By assistidas por cabo”. Ambas as manobras tem como principal objetivo modificar a trajetória do veículo espacial de acordo com a missão, gastando o mínimo possível de combustível, ou mesmo sem consumo de combustível em alguns casos. Esse gasto mínimo pode ser vantajoso para otimizar a trajetória, nas situações onde apenas o Swing-By puro, baseado apenas em gravidade, não é o suficiente para alcançar o objetivo da missão.

No caso das manobras de “Swing-By propulsado”, foi considerado que os corpos primários do sistema estão em órbitas elípticas em torno de um centro de massa comum. Foi apresentado um estudo analítico usando a aproximação “patched-conics”, e um estudo numérico usando o “Problema Restrito Elíptico de Três Corpos”.

Foi mostrado e quantificado que a inclusão da excentricidade dos primários torna o problema mais próximo do real. O principal efeito físico da excentricidade é a variação na energia do veículo espacial de acordo com a posição do corpo secundário. O ganho e a perda de energia obtidos a partir da parte gravitacional da manobra são dependentes de V_2 , a velocidade de M_2 em relação ao centro de massa do sistema. Neste caso ela varia de acordo com a posição de M_2 , enquanto que no caso circular essa velocidade é constante.

A variação da energia pode ser otimizada de acordo com a necessidade da missão e o melhor ponto e direção para aplicação do impulso podem ser encontrados em função da magnitude do impulso disponível para o veículo espacial. Além da excentricidade, o estudo mediu o efeito desses outros parâmetros relacionados à manobra.

Os resultados mostraram que aplicar o impulso na vizinhança do periapsis e na direção não tangencial a órbita otimiza a manobra. O maior ganho de energia vem da melhor combinação das modificações feita pelo impulso na geometria da trajetória, que muda o ângulo de aproximação e a distância do periapsis.

Manobras com pequenos valores para a magnitude do impulso tem resultados mais previsíveis analiticamente, quando o impulso é aplicado no periapsis da órbita, seguindo o modelo “patched conics” para manobras de “Swing-By puro”. Com o aumento da magnitude do impulso e a mudança do ponto de aplicação do impulso para a vizinhança do periapsis, apenas estudos usando algoritmos numéricos podem resolver o problema, justificando assim o presente trabalho.

A eficiência do Swing-By propulsado, para quando o impulso é aplicado no periapsis da órbita do veículo espacial, comparada com a manobra de Swing-By puro e com o impulso aplicado fora da esfera de influência do corpo secundário, foi apresentado. A análise foi feita em função do parâmetro de impacto (r_p), orientação da manobra de Swing-By (ψ) e velocidade de aproximação (V_{inf-}). Os resultados mapearam regiões em que o Swing-By propulsado é eficiente e outras que não, para um parâmetro de massa similar ao do sistema Terra-Lua.

A sensibilidade dos parâmetros na manobra de Swing-By propulsado também foi estudada. O objetivo foi mostrar o comportamento da manobra mediante a ocorrência de possíveis erros na atribuição dos parâmetros relacionados à posição da órbita, velocidade e impulso aplicado na manobra. Os resultados mostraram que o ângulo de aproximação da órbita inicial de um veículo espacial (ψ) e o ângulo que define a direção do impulso (α) são os mais sensíveis a erros. Os erros relacionados ao estudo devido ao método utilizado também foi apresentado.

A manobra de “Swing-By assistida por cabo” é outra forma de otimizar a energia do veículo espacial, de acordo com a necessidade da missão, sem consumo de combustível. O tether é usado como uma forma de catapulta, para lançar o veículo conforme desejado, seja para ser capturado pelo planeta, enviá-lo para uma nova órbita ou escapar do sistema.

A análise dos pontos de equilíbrio foi feita para diferentes sistemas de planeta-lua com corpos regulares e para outros dois sistemas de asteroides binários com corpos irregulares, considerados como elipsoides. Diferentes posições da âncora na superfície da lua foram analisadas, incluindo pontos fora do plano dos primários.

Os resultados mostraram as posições de equilíbrio, bem como o tamanho do cabo e a força no tether nestes pontos. Soluções com tração e compressão no cabo foram

encontradas. A posição onde o tamanho do tether é mínimo foi indicada. Este é um importante parâmetro para o planejamento da missão.

Para os asteroides binários os resultados mostraram as posições dos pontos de equilíbrios e o efeito da irregularidade dos corpos. Em geral, algumas novas famílias de soluções apareceram e as famílias existentes foram modificadas pela irregularidade dos corpos, quando comparadas com o caso esférico. Não há soluções de equilíbrio fora do plano dos primários para estes casos quando a âncora está fixa na superfície do corpo em um ponto do plano dos primários. Quando a âncora é fixada nos polos do corpo, há soluções fisicamente possíveis no plano da âncora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAUJO, R. A. N.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A.; VIEIRA MARTINS, R. Sphere of influence and Gravitational Capture radius: a dynamical approach. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 391, n. 2, p. 675-684, 2008.
- ARMELLIN, R.; LAVAGNA, M.; STARKEY, R. P.; LEWIS M. J. Aerogravity Assist Maneuvers: Coupled Trajectory and Vehicle Shape Optimization. **Journal Spacecraft and Rockets**, v. 44, p. 1051-1059, 2007.
- ARREDONDO, J. A.; GUO, J.; STOICA, C.; TAMAYO, C. On the restricted three body problem with oblate primaries. **Astrophysics and Space Science**, v. 341, n. 2, p. 315-322, 2012.
- ARTSUTANOV, Y. N. Railway 'Moon-Earth'. **Technika Molodishi**, v. 4, p. 21, 1979 (In Russian).
- BARGER, V.; OLSSON, M. **Classical Mechanics: a modern perspective**. New York: McGraw-Hill, 1973.
- BELETSKY, V. V.; LEVIN, E. M. Dynamics of Space Tether System. Advances in the Astronautical. **Sciences**, v. 83, American Astronautical Society, Springfield, VA, 1993.
- BELLEROSE, J.; SCHEERES, D. J. Stability of equilibrium points in the restricted full three-body problem. **Acta Astronautica**, v. 60, n. 3, p. 141-152, 2007.
- BLITZER L. Equilibrium and stability of a pendulum in an orbiting spaceship. **American Journal of Physics**, v. 47, n. 3, p. 241-246, 1979.
- BONFIGLIO, E. P.; LONGUSKI, J. M.; VINH, N. X. Automated design of aerogravity-assist trajectories. **Journal Spacecraft and Rockets**, v. 37, p. 768-775, 2000.
- BRASIL, P.I.O.; PRADO, A.F.B.A.; DEIENNO, R.; YOKOYAMA, T. Study of the gravitational capture of a spacecraft by Jupiter. **Advanced in Space Research**, v. 55, p. 668-681, 2015.
- BROUCKE, R.A. Stability of Periodic Orbits in the Elliptic, Restricted Three-Body Problem. **AIAA Journal**, v. 7, p. 1003-1009, 1969.
- BROUCKE, R.A. The Celestial mechanics of gravity assist. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, 1988, Minneapolis, MN, **Proceedings...** Minneapolis: AIAA, 1988. (AIAA paper 88-4220).
- BURNS, J. A.; SIMONELLI, D. P.; SHOWALTER, M. R.; HAMILTON, D. P.; PORCO, C. C.; THROOP, H.; ESPOSITO, L. W. Jupiter's Ring-Moon System. **Jupiter. The Planet, Satellites and Magnetosphere**, v. 1, p. 241-262, 2004.
- BUROV, A. A.; GUERMAN, A. D.; KOSENKO, I. I. **Dynamics of tethered system**

connected to moon surface. 2014. Disponível em:
<http://dycoss.iaaweb.org/?q=iaaweb.org/iaa/Scientific%20Activity/conf/dycoss14/IAA-AAS-DyCoSS2-14-09-03.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2017.

BUROV, A.A.; KONONOV, O.I.; GUERMAN, A.D. Relative equilibria of a Moon - tethered spacecraft. **Advances in the Astronautical Sciences**, v.136, p. 2553-2562, 2011.

BUROV, A.A.; KOSENKO, I.I. Libration motions of an extended lunar elevator. **Mechanics of Solids**. Izvestia RAN, n. 5, 2014.

BUROV, A.A.; KOSENKO, I.I. On relative equilibria of an orbital station in regions near the triangular libration points. **Doklady Physics**, v. 52, n.9, p. 507-509, 2007.

BUROV A. A.; KOSENKO I. I.; GUERMAN A. D. Dynamics of Moon Elevator. In: 65th INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS, 2014, Toronto. **Proceedings...** Paris: International Astronautical Federation Paris, France, 2014.

BUROV, A.A.; RICARD, N. On lunar elevator. In: ACADEMIC CONFERENCE ON COSMONAUTICS, 29., 2005, Moscow. **Proceedings...** Moscow, 2005.

BUROV A.A.; TROGER H. The relative equilibria of an orbital pendulum suspended on a tether. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 64, n.5, p. 723-72, 2000.

BYRNES, D.V. ; D'AMARIO, L.A. A combined Halley flyby Galileo mission, In: AIAA/AAS ASTRODYNAMICS CONFERENCE, 1982, San Diego, CA, Aug. **Proceedings...**San Diego: AIAA/AAS, 1982. (AIAA paper 82-1462).

CARTMELL, M. P.; MCKENZIE, D. J. A review of space tether research. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 44, n. 1, p. 1-21, 2008.

CHANDRASEKHAR, S. **Hydrodynamic and hydromagnetic stability**. Oxford: Clarendon, 1961. International Series of Monographs on Physics

COOPER, N. J.; MURRAY, C. D.; PORCO, C. C.; SPITALE, J. N. Cassini ISS astrometric observations of the inner jovian satellites, Amalthea and Thebe. **Icarus**, v. 181, n. 1, p. 223–234., 2006.

D'AMARIO, L.A.; BYRNES, D.V.; STANFORD, R.H. A new method for optimizing multiple-flyby trajectories. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 4, p. 591-596, 1981.

D'AMARIO, L.A.; BYRNES, D.V.; STANFORD, R.H. Interplanetary trajectory optimization with application to Galileo, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 5, p. 465-471, 1982.

DESCAMPS, P.; MARCHIS, F.; MICHALOWSKI, T.; COLAS, F.; BERTHIER, J.; VACHIER, F.; TENG-CHUEN-YU, J.P.; PEYROT, A.; PAYET, B.; DORSEUIL, J.;

- LÉONIE, Y.; DIJOUX, T.; BERROUACHDI, H.; CHION HOCK, C.; BENARD, F. Nature of the small main belt asteroid 3169 Ostro. **Icarus**, v. 189, p. 362- 369, 2007a.
- DESCAMPS, P.; MARCHIS, F.; MICHALOWSKI, T.; VACHIER, F.; COLAS, F.; BERTHIER, J.; ASSAFIN, M.; DUNCKEL, P. B.; POLINSKA, M.; PSYCH, W.; HESTROFFER, D.; MILLER, K. P. M.; VIEIRA-MATINS, R.; BIRLAN, M.; TENG-CHUEN, J.P.; PEYROT, A.; PAYET, B.; DORSEUIL, J.; LÉONIE, Y.; DIJOUX, T. Figure of the double Asteroid 90 Antiope from adaptive optics and light curve observations. **Icarus**, v. 187, n. 2, 482-499, 2007b.
- DOUSKOS, C. N. Equilibrium points of the restricted three-body problem with equal prolate and radiating primaries, and their stability. **Astrophysics and Space Science**, v. 333, n. 1, p. 79-87, 2011.
- DOWLING, R. L.; KOSMANN, W. J.; MINOVITCH, M. A.; RIDENOURE, R. W. The origin of gravity-propelled interplanetary space travel. In: CONGRESS OF THE INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL FEDERATION, 41., 1990, Dresden, GDR. **Proceedings...** Dresden: IAA, Oct. 6-12, 1990.
- DOWLING, R.L.; KOSMANN, W.J.; MINOVITCH, M.A.; RIDENOURE, R.W. Gravity Propulsion Research at UCLA and JPL 1962-1964, In: 41st CONGRESS OF THE INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL FEDERATION, Dresden, GDR, 6-12 Oct. 1991.
- DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic stability**. Cambridge University Press, Cambridge ,1981.
- EVANS, M. W.; PORCO, C. C.; HAMILTON, D. P. The Orbits of Metis and Adrastea: The Origin and Significance of their Inclinations. **Bulletin of the American Astronomical Society**, v. 34, p. 883, 2002.
- FERREIRA, A.F.S.; PRADO, A.F.B.A.; WINTER, O.C. A numerical study of powered Swing-By around the Moon. **Advanced in Space Research**, v. 56, p. 252-272, 2015.
- FERREIRA, A.F.S.; PRADO, A.F.B.A.; WINTER, O. C. Swing-By propulsado aplicado ao sistema de Haumea. **Proceedings...** Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 4, n. 1, 2016. 2016.
- FLANDRO, G. Fast Reconnaissance Missions to the Outer Solar System Utilizing Energy Derived from the Gravitational Field of Jupiter. **Acta Astronautica**, v. 12, n. 4, 1966.
- GOMES, V.M.; PRADO, A.F.B.A. A Study of the Impact of the Initial Energy in a Close Approach of a Cloud of Particles. **WSEAS Transactions on Mathematics**, v. 9, n. 10, p. 811-820, 2010.
- GOMES, V.M.; PINEROS, J.O.M.; PRADO, A.F.B.A; Golebiewska, J. Atmospheric close approaches with the Earth considering drag and lift forces. **Computational and Applied Mathematics**, v. 1, 1-17, 2015.

GRARD, R. Mercury: The Messenger and BepiColombo missions. A concerted approach to the exploration of the planet. **Advanced in Space Research**, v. 38, p. 563, 2006.

GUERMAN A. D. Equilibria of multibody chain in orbit plane. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 26, n. 6, p. 942 – 948, 2003.

GUERMAN, A.D. Spatial equilibria of multibody chain in a circular orbit. **Acta Astronautica**, v. 58, n. 1, p. 1 – 14, 2006.

JACOBSON, R. A. The Orbits of the Inner Uranian Satellites From Hubble Space Telescope and Voyager 2 Observations. **The Astronomical Journal**, v. 115, n. 3, p. 1195–1199, 1998.

JACOBSON, R. A.; OWEN, W. M. JR. The orbits of the inner Neptunian satellites from Voyager, Earthbased, and Hubble Space Telescope observations. **Astronomical Journal**, v. 128, n. 3, p. 1412–1417, 2004.

JACOBSON, R. A.; SPITALE, J.; ET AL. Revised orbits of Saturn's small inner satellites. **Astronomical Journal**, v. 135, n. 1, p. 261–263, 2008.

JEHN, R. Companys, V., Corral, C., Y´arnoz, D.G. & Sánchez, N., Navigating BepiColombo during the weak-stability capture at Mercury. **Advanced in Space Research**, v. 42, p. 1364-1369, 2008.

JET PROPULSION LABORATORY (JPL). **Small-body database browser: 3169** Ostro (1981) LA. California: Nasa, 2016a. Available in: <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=3169>. Site Manager: Ryan S. Park. Accessed: 20 September 2016.

JET PROPULSION LABORATORY (JPL). **Small-Body Database Browser: 90** Antiope. California: Nasa, 2016b. Available in: <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=90>. Site Manager: Ryan S. Park. Accessed: 20 September 2016.

JOHNS HOPKINS UNIVERSITY APPLIED PHYSICS LABORATORY LLC. **About/ the Mission to Mercury – Mission Design** - Launch and Cruise. Developed by JHU/APL, 1999-2016. Available in: <http://messenger.jhuapl.edu/About/Mission-Design.html#launch-and-cruise>. Accessed: 20 September 2016.

JOHNSTON, R. **Asteroids with satellites database**--Johnston's Archive - (3169) Ostro. 2014 Disponível em: <http://www.johnstonsarchive.net/astro/astmoons/am-03169.html>. Accessed: 22 September 2015.

KARKOSCHKA, E. Voyager's eleventh discovery of a satellite of Uranus and photometry and the first size measurements of nine satellites. **Icarus**, v. 151, n. 1, p. 69–77, 2001.

KARKOSCHKA, E. Sizes, shapes, and albedos of the inner satellites of Neptune. **Icarus**, v. 162, n. 2, p. 400–407, 2003.

LANOIX, E. L. M. Tether sling shot assists: a novel approach to travelling in the solar system. In: CANADIAN AERONAUTICS AND SPACE INSTITUTE CONFERENCE ON ASTRONAUTICS, 9., Ottawa, Canada, 1996. **Proceedings...** Ottawa : Canadian Aeronautics and Space Institute , 1996. p. 62-71.

LANOIX, E. L. M.; MISRA, A. K. Near-Earth asteroid missions using tether sling shot assist. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 37, n. 4, p. 475-480, 2000. (doi: 10.2514/2.3588).

LAVAGNA, M.; FINZI, A. E. Equilibrium analysis of a large multi-hinged space system. **Acta Astronautica**, v. 53, n. 1, p. 9-20, 2003.

LAVAGNA, M.; POVOLERI, A.; FINZI, A. E. Interplanetary mission design with aero-assisted maneuvers multi-objective evolutive optimization. **Acta Astronautica**, v. 57, p. 498-509, 2005.

LEVIN E.M. **Lunar Tether transport**. Star Technology and Research, Inc , 2005.

LEWIS, M. J.; MCRONALD A. D. Design of hypersonic waveriders for aeroassisted interplanetary trajectories. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 29, p. 653-660, 1992.

LOHAR, F. A.; MISRA A. K.; MATEESCU, D. Optimal aero-gravity assist with heliocentric plane change. **Acta Astronautica**, v. 38, p. 445-456, 1996.

LYNAM, A.E.; KLOSTER, K.W.; LONGUSKI, J.M. Multiple-satellite-aided capture trajectories at Jupiter using the Laplace resonance. **Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy**, v. 109, p. 59-84, 2011.

MCCONAGHY, T.T.; DEBBAN, T.J.; PETROPOULOS, A.E.; LONGUSKI, J.M. Design and optimization of low-thrust gravity trajectories with gravity assist, **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 40, p. 380-387, 2003.

MCNUTT JR., R.L.; SOLOMON, S.C.; GRARD, R.; NOVARA, M.; MUKAI, T. An international program for mercury exploration: synergy of Messenger and Bepicolombo. **Advanced in Space Research**, v. 33, p. 2126–2132, 2004.

MCNUTT JR., R.L.; SOLOMON, S.C.; GOLD, R.E.; LEARY, J.C. The messenger mission to mercury: development history and early mission status. **Advanced in Space Research**, v. 38, p. 564–571, 2006.

MINOVICH, M. A. **A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories**. Pasadena: JPL , Aug. 23, 1961. 47 p. (JPL Tec. Memo 312-130).

MURRAY C. D.; DERMOTT S. F. **Solar System Dynamics**, 1.st ed. Cambridge University Press, 1999.

NASA. **LCROSS – Lunar Crater Observation and Sensing Satellite – LCROSS Overview**. Page Editor: Robert Garner, 2010. Available in: https://www.nasa.gov/mission_pages/LCROSS/overview/index.html. Accessed: 20 September 2016.

NOCK, K.T.; UPHOLF, C.W. Satellite aided orbit capture. In: AMERICAN ASTRONAUTICAL SOCIETY AND AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS, ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE, 1979, Provincetown, Mass. **Proceedings...** AAS/AIAA, 1979. (paper 79-165).

OKUTSU, M.; YAM, C.H.; LONGUSKI, J.M. **Low-thrust trajectories to Jupiter via gravity assists from Venus, Earth and Mars.** AIAA, 2006. (Paper 2006-6745).

PEARSON, J. Lunar Anchored Satellite Test. In: AIAA/AAS ASTRODYNAMICS CONFERENCE, 1978, Palo Alto, CA. **Proceedings...** AIAA, 1978. (AIAA 78-1427).

PEARSON, J. Anchored Lunar Satellites for Cislunar Transportation and Communication. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 27, n. 1, p. 39-62, 1979.

PEARSON, J.; LEVIN, E.; OLDSON, J.; WYKES, H. The Lunar Space Elevator. In: INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS, 55., Vancouver, Canada. **Proceedings...** 2004. (IAC-04-IAA.3.8.3.07)

PEARSON, J.; LEVIN E.; OLDSON J.; WYKES, H. **Lunar space elevators for cislunar space development.** Mount Pleasant, SC: Star Inc, May 2005. Phase I Final Technical Report.

PENZO, P. A.; MAYER, H. L. Tethers and asteroids for artificial gravity assist in the solar system. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 23, n. 1, p. 79- 82, 1986. (doi: 10.2514/3.25086)

PRADO, A.F.B.A. Powered Swing-By. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 19, p. 1142-1147, 1996.

PRADO, A.F.B.A. Close-approach trajectories in the elliptic restricted problem **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 20, p. 797-802, 1997.

PRADO, A.F.B.A. Using tethered gravity assisted maneuvers for planetary capture. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 38, n. 9, p. 1852-1856, 2015. (doi/abs/10.2514/1.G001009).

PRADO, A. F. B. A. Tethered gravity assisted maneuvers in close approach asteroids to accelerate a spacecraft. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 156, p. 3853-3872, 2015. (AAS paper 15-66, 2016).

PRADO, A. F. B. A.; KUGA, H. K. (Ed.). **Fundamentos de tecnologia espacial.** São José dos Campos: INPE, 2001. 220 p. ISBN 85-17-00004-8.

PRADO, A. F. B. A.; RIOS NETO, A. **Um Estudo Bibliográfico sobre o Problema de Transferências de Órbitas.** Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, v. 15, n.1, p. 65-78, 1993.

PUIG-SUARI, J.; LONGUSKI, J. M.; TRAGESSE, S. G. A Tether sling for lunar and interplanetary exploration. **Acta Astronautica**, v. 36, n. 6, 1995, p. 291-295. (doi:10.1016/0094-5765(95)00110-7).

SANCHEZ, D. M.; HOWELL, K.C.; PRADO, A.F.B.A. On the dynamics of a spacecraft in the irregular Haumea-Hi'iaka binary. In: SPACE FLIGHT MECHANICS MEETING, 26., 2016, Napa. **Proceedings...** AAS/AIAA, 2016.

SANTOS, L. B. T. Pontos Lagrangianos: Aplicação para o asteroide 2001SN₂₆₃. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologias Espaciais – Ênfase em Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). São José dos Campos, 2017.

SARYCHEV V.A. Equilibria of a double pendulum in a circular orbit. **Acta Astronautica**, v. 44, n. 1, p. 63–65, 1999.

SILVA, A.F.; PRADO, A.F.B.A.; WINTER, O.C. Optimal impulsive control in a powered Swing-By. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL (GNC) CONFERENCE, 2013, Boston. **Proceedings...** 2013a. ISBN 9781624102240.

SILVA, A.F.; PRADO, A.F.B.A.; WINTER, O.C. Powered Swing-By maneuvers around the moon. **Journal of Physics: Conferences and Series**, v. 465, n. 1, p. 012001, 2013b.

SIMS, J. A.; LONGUSKI, J. M.; PATEL, M. R. Aerogravity-assist trajectories to the outer planets , **Acta Astronautica**, v. 35, p. 297-306, 1995.

SIMS, J. A.; LONGUSKI, J. M.; PATEL, M. R. Aerogravity-assist trajectories to the outer planets and the effect of drag. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 37, p. 49-55, 2000.

STEWART, J. **Cálculo** - Volume II. 5. ed. Editora Pioneira Thomson Learning, 2005.

SZEBEHELY, V. **Theory of orbits**, New York: Academic Press, 1967.

THOMPSON, W. B.; STERN, M. O. A Skyhook from Phobos to Mars. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TETHERS IN SPACE, 4., 1995, Washington, DC. **Proceedings...**Washington: Nasa, 1995. p. 1737-1745.

THOMAS, P. C.; BURNS, J. A.; ROSSIER, L.; SIMONELLI, D.; VEVERKA, J.; CHAPMAN, C. R.; KLAASEN, K.; JOHNSON, T. V.; BELTON, M. J. S. Galileo Solid State Imaging Team. The Small Inner Satellites of Jupiter, **Icarus**, v. 135, n. 1, p. 360–371, 1998.

THOMAS, P. C. Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. **Icarus**, v. 208, n. 1, p. 395–401, 2010.

TROGER, H.; ALPATOV, A. P.; BELETSKY, V. V.; DRANOVSKII, V. I.; KHOROSHILOV, V. S.; PIROZHENKO, A. V.; ZAKRZHEVSKII, A. E. **Dynamics of tethered space systems**. CRC Press, 2010.

WOO, P. Dynamics of a spacecrafts in the vicinity of a binary asteroid system. 2014. f.172. Tese (Doutorado em Filosofia) – McGill University. Montreal, Quebec, 2014.

APÊNDICE A – COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES EMPÍRICAS

As equações A.1 até A.86 descrevem os coeficientes das equações empíricas, que estimam a máxima variação de energia da manobra de Swing-By propulsado com impulso no periapsis, em função da magnitude do impulso (δV), para excentricidades iguais a 0,1, 0,3 e 0,5 e anomalia verdadeira igual a 0° , 90° , 180° e 270° , respectivamente.

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_1 = 1.542 \times 10^{-14} \delta V^6 - 2.029 \times 10^{-13} \delta V^5 + 1.029 \times 10^{-12} \delta V^4 - 2.509 \times 10^{-12} \delta V^3 + 2.937 \times 10^{-12} \delta V^2 - 1.246 \times 10^{-12} \delta V + 7.423 \times 10^{-14} \quad \text{A.1}$$

$$b_1 = -1.533 \times 10^{-11} \delta V^6 + 2.018 \times 10^{-10} \delta V^5 - 1.024 \times 10^{-9} \delta V^4 + 2.497 \times 10^{-9} \delta V^3 - 2.926 \times 10^{-9} \delta V^2 + 1.235 \times 10^{-9} \delta V - 5.647 \times 10^{-11} \quad \text{A.2}$$

$$c_1 = 5.409 \times 10^{-9} \delta V^6 - 7.122 \times 10^{-8} \delta V^5 + 3.616 \times 10^{-7} \delta V^4 - 8.823 \times 10^{-7} \delta V^3 + 1.036 \times 10^{-6} \delta V^2 - 4.377 \times 10^{-7} \delta V + 1.029 \times 10^{-8} \quad \text{A.3}$$

$$d_1 = -7.866 \times 10^{-7} \delta V^6 + 1.036 \times 10^{-5} \delta V^5 - 5.265 \times 10^{-5} \delta V^4 + 1.257 \times 10^{-4} \delta V^3 - 1.521 \times 10^{-4} \delta V^2 + 6.547 \times 10^{-5} \delta V + 4.507 \times 10^{-7} \quad \text{A.4}$$

$$e_1 = 3.946 \times 10^{-5} \delta V^6 - 5.201 \times 10^{-4} \delta V^5 + 0.0026 \delta V^4 - 0.0065 \delta V^3 + 0.0078 \delta V^2 - 0.0036 \delta V - 3.897 \times 10^{-5} \quad \text{A.5}$$

$$f_1 = -3.465 \times 10^{-4} \delta V^6 + 0.0045 \delta V^5 - 0.0227 \delta V^4 + 0.0548 \delta V^3 - 0.0651 \delta V^2 + 0.0256 \delta V - 0.0246 \quad \text{A.6}$$

$$g_1 = 0.3045 \delta V^2 + 3.8728 \delta V + 0.2048 \quad \text{A.7}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_2 = 2.866 \times 10^{-15} \delta V^6 - 4.568 \times 10^{-14} \delta V^5 + 2.741 \times 10^{-13} \delta V^4 - 7.644 \times 10^{-13} \delta V^3 + 9.749 \times 10^{-13} \delta V^2 - 3.556 \times 10^{-13} \delta V + 8.014 \times 10^{-15} \quad \text{A.8}$$

$$b_2 = -7.337 \times 10^{-13} \delta V^6 + 2.051 \times 10^{-11} \delta V^5 - 1.599 \times 10^{-10} \delta V^4 + 5.187 \times 10^{-10} \delta V^3 - 7.29 \times 10^{-10} \delta V^2 + 2.499 \times 10^{-10} \delta V + 1.528 \times 10^{-11} \quad \text{A.9}$$

$$c_2 = -1.002 \times 10^{-9} \delta V^6 + 7.514 \times 10^{-9} \delta V^5 - 9.661 \times 10^{-9} \delta V^4 - 4.245 \times 10^{-8} \delta V^3 + 1.149 \times 10^{-7} \delta V^2 - 3.254 \times 10^{-8} \delta V - 1.814 \times 10^{-8} \quad \text{A.10}$$

$$d_2 = 5.138 \times 10^{-7} \delta V^6 - 5.377 \times 10^{-6} \delta V^5 + 2.048 \times 10^{-5} \delta V^4 - 3.409 \times 10^{-5} \delta V^3 + 2.323 \times 10^{-5} \delta V^2 - 9.953 \times 10^{-6} \delta V + 5.440 \times 10^{-6} \quad \text{A.11}$$

$$e_2 = -7.750 \times 10^{-5} \delta V^6 + 8.700 \times 10^{-4} \delta V^5 - 0.0037 \delta V^4 + 0.0073 \delta V^3 - 0.0067 \delta V^2 + 0.00256 \delta V - 4.222 \times 10^{-4} \quad \text{A.12}$$

$$f_2 = 0.003 \delta V^6 - 0.0352 \delta V^5 + 0.1563 \delta V^4 - 0.3299 \delta V^3 + 0.3326 \delta V^2 - 0.1401 \delta V - 0.0116 \quad \text{A.13}$$

$$g_2 = 0.3854 \delta V^2 + 4.0909 \delta V + 0.0479 \quad \text{A.14}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_3 = 6.377 \times 10^{-15} \delta V^6 - 8.168 \times 10^{-14} \delta V^5 + 4.0 \times 10^{-13} \delta V^4 - 9.294 \times 10^{-13} \delta V^3 + 1.016 \times 10^{-12} \delta V^2 - 3.167 \times 10^{-13} \delta V + 1.248 \times 10^{-14} \quad \text{A.15}$$

$$b_3 = -6.098 \times 10^{-12} \delta V^6 + 7.807 \times 10^{-11} \delta V^5 - 3.822 \times 10^{-10} \delta V^4 + 8.880 \times 10^{-10} \delta V^3 - 9.709 \times 10^{-10} \delta V^2 + 2.905 \times 10^{-10} \delta V + 2.489 \times 10^{-10} \quad \text{A.16}$$

$$c_3 = 2.010 \times 10^{-9} \delta V^6 - 2.572 \times 10^{-8} \delta V^5 + 1.259 \times 10^{-7} \delta V^4 - 2.927 \times 10^{-7} \delta V^3 + 3.213 \times 10^{-7} \delta V^2 - 9.284 \times 10^{-8} \delta V - 9.192 \times 10^{-9} \quad \text{A.17}$$

$$d_3 = -2.514 \times 10^{-7} \delta V^6 + 3.215 \times 10^{-6} \delta V^5 - 1.574 \times 10^{-5} \delta V^4 + 3.673 \times 10^{-5} \delta V^3 - 4.09 \times 10^{-5} \delta V^2 + 1.2 \times 10^{-5} \delta V + 3.05 \times 10^{-6} \quad \text{A.18}$$

$$e_3 = 6.714 \times 10^{-6} \delta V^6 - 8.525 \times 10^{-5} \delta V^5 + 4.166 \times 10^{-4} \delta V^4 - 9.879 \times 10^{-4} \delta V^3 + 0.0012 \delta V^2 - 4.559 \times 10^{-4} \delta V - 1.818 \times 10^{-4} \quad \text{A.19}$$

$$f_3 = 2.525 \times 10^{-4} \delta V^6 - 0.0033 \delta V^5 + 0.0171 \delta V^4 - 0.0416 \delta V^3 + 0.0474 \delta V^2 - 0.0255 \delta V - 0.0182 \quad \text{A.20}$$

$$g_3 = 0.5159 \delta V^2 + 4.2676 \delta V + 0.2072 \quad \text{A.21}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_4 = -7.150 \times 10^{-14} \delta V^9 + 1.203 \times 10^{-12} \delta V^8 - 8.412 \times 10^{-12} \delta V^7 + 3.173 \times 10^{-11} \delta V^6 - 6.999 \times 10^{-11} \delta V^5 + 9.195 \times 10^{-11} \delta V^4 - 7.065 \times 10^{-11} \delta V^3 + 3.037 \times 10^{-11} \delta V^2 - 6.387 \times 10^{-12} \delta V + 3.897 \times 10^{-13} \quad \text{A.22}$$

$$b_4 = 7.382 \times 10^{-11} \delta V^9 - 1.240 \times 10^{-9} \delta V^8 + 8.654 \times 10^{-9} \delta V^7 - 3.255 \times 10^{-8} \delta V^6 + 7.152 \times 10^{-8} \delta V^5 - 9.343 \times 10^{-8} \delta V^4 + 7.122 \times 10^{-8} \delta V^3 - 3.032 \times 10^{-8} \delta V^2 + 6.318 \times 10^{-9} \delta V - 3.687 \times 10^{-10} \quad \text{A.23}$$

$$c_4 = -2.792 \times 10^{-8} \delta V^9 + 4.677 \times 10^{-7} \delta V^8 - 3.254 \times 10^{-6} \delta V^7 + 1.219 \times 10^{-5} \delta V^6 - 2.661 \times 10^{-5} \delta V^5 + 3.445 \times 10^{-5} \delta V^4 - 2.592 \times 10^{-5} \delta V^3 + 1.085 \times 10^{-5} \delta V^2 - 2.227 \times 10^{-6} \delta V + 1.1997 \times 10^{-7} \quad \text{A.24}$$

$$d_4 = 4.704 \times 10^{-6} \delta V^9 - 7.851 \times 10^{-5} \delta V^8 + 5.435 \times 10^{-4} \delta V^7 - 0.002 \delta V^6 + 0.0044 \delta V^5 - 0.0056 \delta V^4 + 0.0041 \delta V^3 - 0.0017 \delta V^2 + 3.304 \times 10^{-4} \delta V - 1.549 \times 10^{-5} \quad \text{A.25}$$

$$e_4 = -3.425 \times 10^{-4} \delta V^9 + 0.0057 \delta V^8 - 0.039 \delta V^7 + 0.1431 \delta V^6 - 0.3035 \delta V^5 + 0.3754 \delta V^4 - 0.2628 \delta V^3 + 0.0991 \delta V^2 - 0.0185 \delta V + 7.82 \times 10^{-4} \quad \text{A.26}$$

$$f_4 = 0.0084\delta V^9 - 0.1391\delta V^8 + 0.9446\delta V^7 - 3.4147\delta V^6 + 7.0668\delta V^5 - 8.3834\delta V^4 + 5.4349\delta V^3 - 1.7738\delta V^2 + 0.2616\delta V - 0.0336 \quad A.27$$

$$g_4 = 0.3967\delta V^2 + 4.0317\delta V + 0.3569 \quad A.28$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_5 = 1.463 \times 10^{-15}\delta V^6 - 3.342 \times 10^{-14}\delta V^5 + 2.675 \times 10^{-13}\delta V^4 - 9.872 \times 10^{-13}\delta V^3 + 1.725 \times 10^{-12}\delta V^2 - 1.061 \times 10^{-12}\delta V + 6.706 \times 10^{-14} \quad A.29$$

$$b_5 = -1.458 \times 10^{-12}\delta V^6 + 3.362 \times 10^{-11}\delta V^5 - 2.706 \times 10^{-10}\delta V^4 + 1.003 \times 10^{-9}\delta V^3 - 1.762 \times 10^{-9}\delta V^2 + 1.087 \times 10^{-9}\delta V - 5.056 \times 10^{-11} \quad A.30$$

$$c_5 = 5.190 \times 10^{-10}\delta V^6 - 1.213 \times 10^{-8}\delta V^5 + 9.836 \times 10^{-8}\delta V^4 - 3.671 \times 10^{-7}\delta V^3 + 6.505 \times 10^{-7}\delta V^2 - 4.064 \times 10^{-7}\delta V + 9.059 \times 10^{-9} \quad A.31$$

$$d_5 = -7.6972 \times 10^{-8}\delta V^6 + 1.842 \times 10^{-6}\delta V^5 - 1.515 \times 10^{-5}\delta V^4 + 5.726 \times 10^{-5}\delta V^3 - 1.031 \times 10^{-4}\delta V^2 + 6.685 \times 10^{-5}\delta V + 2.016 \times 10^{-7} \quad A.32$$

$$e_5 = 3.857 \times 10^{-6}\delta V^6 - 1.006 \times 10^{-4}\delta V^5 + 8.648 \times 10^{-4}\delta V^4 - 0.0034\delta V^3 + 0.0063\delta V^2 - 0.0045\delta V + 8.657 \times 10^{-5} \quad A.33$$

$$f_5 = 9.435 \times 10^{-6}\delta V^6 + 6.857 \times 10^{-4}\delta V^5 - 0.0093\delta V^4 + 0.0442\delta V^3 - 0.0929\delta V^2 + 0.0693\delta V - 0.0361 \quad A.34$$

$$g_5 = 0.1341\delta V^2 + 3.4459\delta V + 0.1868 \quad A.35$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_6 = 1.7123 \times 10^{-15} \delta V^6 - 2.2397 \times 10^{-14} \delta V^5 + 1.1348 \times 10^{-13} \delta V^4 - 2.7995 \times 10^{-13} \delta V^3 + 3.4389 \times 10^{-13} \delta V^2 - 8.592 \times 10^{-14} \delta V - 2.366 \times 10^{-14} \quad \text{A.36}$$

$$b_6 = -2.8643 \times 10^{-13} \delta V^6 + 3.7582 \times 10^{-12} \delta V^5 - 1.9896 \times 10^{-11} \delta V^4 + 5.5867 \times 10^{-11} \delta V^3 - 9.0174 \times 10^{-11} \delta V^2 - 2.4034 \times 10^{-11} \delta V + 4.7669 \times 10^{-11} \quad \text{A.37}$$

$$c_6 = -7.3464 \times 10^{-10} \delta V^6 + 9.5931 \times 10^{-9} \delta V^5 - 4.7759 \times 10^{-8} \delta V^4 + 1.1121 \times 10^{-7} \delta V^3 - 1.156 \times 10^{-7} \delta V^2 + 6.8967 \times 10^{-8} \delta V - 2.9508 \times 10^{-8} \quad \text{A.38}$$

$$d_6 = 3.4986 \times 10^{-7} \delta V^6 - 4.5702 \times 10^{-6} \delta V^5 + 2.2872 \times 10^{-5} \delta V^4 - 5.4218 \times 10^{-5} \delta V^3 + 5.9547 \times 10^{-5} \delta V^2 - 2.6738 \times 10^{-5} \delta V + 6.8839 \times 10^{-6} \quad \text{A.39}$$

$$e_6 = 3.6917 \times 10^{-5} \delta V^7 - 5.6666 \times 10^{-4} \delta V^6 + 0.0035 \delta V^5 - 0.0112 \delta V^4 + 0.0193 \delta V^3 - 0.0169 \delta V^2 + 0.0060 \delta V - 6.2494 \times 10^{-4} \quad \text{A.40}$$

$$f_6 = -0.0015 \delta V^7 + 0.0235 \delta V^6 - 0.1452 \delta V^5 + 0.4617 \delta V^4 - 0.7968 \delta V^3 + 0.7105 \delta V^2 - 0.2722 \delta V - 0.0044 \quad \text{A.41}$$

$$g_6 = 0.3138 \delta V^2 + 3.8892 \delta V - 0.2725 \quad \text{A.42}$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_7 = -5.0186 \times 10^{-14} \delta V^9 + 9.459 \times 10^{-13} \delta V^8 - 7.3033 \times 10^{-12} \delta V^7 + 2.9836 \times 10^{-11} \delta V^6 - 6.9663 \times 10^{-11} \delta V^5 + 9.4213 \times 10^{-11} \delta V^4 - 7.2125 \times 10^{-11} \delta V^3 + 2.9379 \times 10^{-11} \delta V^2 - 5.4651 \times 10^{-12} \delta V + 3.2219 \times 10^{-13} \quad \text{A.43}$$

$$b_7 = 5.2806 \times 10^{-11} \delta V^9 - 9.9528 \times 10^{-10} \delta V^8 + 7.6846 \times 10^{-9} \delta V^7 - 3.1394 \times 10^{-8} \delta V^6 + 7.3304 \times 10^{-8} \delta V^5 - 9.9146 \times 10^{-8} \delta V^4 + 7.592 \times 10^{-8} \delta V^3 - 3.0939 \times 10^{-8} \delta V^2 + 5.7596 \times 10^{-9} \delta V - 3.2936 \times 10^{-10} \quad \text{A.44}$$

$$c_7 = -2.0501 \times 10^{-8} \delta V^9 + 3.864 \times 10^{-7} \delta V^8 - 2.9835 \times 10^{-6} \delta V^7 + 1.2188 \times 10^{-5} \delta V^6 - 2.8459 \times 10^{-5} \delta V^5 + 3.8491 \times 10^{-5} \delta V^4 - 2.9474 \times 10^{-5} \delta V^3 + 1.2016 \times 10^{-5} \delta V^2 - 2.2424 \times 10^{-6} \delta V + 1.2265 \times 10^{-7} \quad \text{A.45}$$

$$d_7 = 3.5845 \times 10^{-6} \delta V^9 - 6.7572 \times 10^{-5} \delta V^8 + 5.2176 \times 10^{-4} \delta V^7 - 0.0021 \delta V^6 + 0.00498 \delta V^5 - 0.0067 \delta V^4 + 0.0051 \delta V^3 - 0.0021 \delta V^2 + 3.9371 \times 10^{-4} \delta V - 2.057 \times 10^{-5} \quad \text{A.46}$$

$$e_7 = -2.7396 \times 10^{-4} \delta V^9 + 0.0052 \delta V^8 - 0.0399 \delta V^7 + 0.1629 \delta V^6 - 0.38 \delta V^5 + 0.5129 \delta V^4 - 0.3915 \delta V^3 + 0.1591 \delta V^2 - 0.0301 \delta V + 0.0016 \quad \text{A.47}$$

$$f_7 = 0.0071 \delta V^9 - 0.1336 \delta V^8 + 1.0319 \delta V^7 - 4.2111 \delta V^6 + 9.8043 \delta V^5 - 13.1878 \delta V^4 + 10.006 \delta V^3 - 4.0243 \delta V^2 + 0.7492 \delta V - 0.0611 \quad \text{A.48}$$

$$g_7 = 0.7787 \delta V^2 + 4.5815 \delta V + 0.2144 \quad \text{A.49}$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_8 = -1.9051 \times 10^{-14} \delta V^7 + 2.919 \times 10^{-13} \delta V^6 - 1.8054 \times 10^{-12} \delta V^5 + 5.756 \times 10^{-12} \delta V^4 - 9.9709 \times 10^{-12} \delta V^3 + 8.9527 \times 10^{-12} \delta V^2 - 3.33103 \times 10^{-12} \delta V + 2.4659 \times 10^{-13} \quad \text{A.50}$$

$$b_8 = 1.9373 \times 10^{-11} \delta V^7 - 2.9709 \times 10^{-10} \delta V^6 + 1.8395 \times 10^{-9} \delta V^5 - 5.8723 \times 10^{-9} \delta V^4 + 1.0188 \times 10^{-8} \delta V^3 - 9.1654 \times 10^{-9} \delta V^2 + 3.3834 \times 10^{-9} \delta V - 2.3719 \times 10^{-10} \quad \text{A.51}$$

$$c_8 = -7.0685 \times 10^{-9} \delta V^7 + 1.0857 \times 10^{-7} \delta V^6 - 6.7343 \times 10^{-7} \delta V^5 + 2.1546 \times 10^{-6} \delta V^4 - 3.7484 \times 10^{-6} \delta V^3 + 3.3836 \times 10^{-6} \delta V^2 - 1.2503 \times 10^{-6} \delta V + 7.84 \times 10^{-8} \quad \text{A.52}$$

$$d_8 = 1.0907 \times 10^{-6} \delta V^7 - 1.6803 \times 10^{-5} \delta V^6 + 1.0461 \times 10^{-4} \delta V^5 - 3.3612 \times 10^{-4} \delta V^4 + 5.8785 \times 10^{-4} \delta V^3 - 5.3432 \times 10^{-4} \delta V^2 + 1.9924 \times 10^{-4} \delta V - 1.0361 \times 10^{-5} \quad \text{A.53}$$

$$e_8 = -6.3228 \times 10^{-5} \delta V^7 + 9.8105 \times 10^{-4} \delta V^6 - 0.0062 \delta V^5 + 0.0199 \delta V^4 - 0.0354 \delta V^3 + 0.0327 \delta V^2 - 0.0126 \delta V + 5.9846 \times 10^{-4} \quad \text{A.54}$$

$$f_8 = 9.8997 \times 10^{-4} \delta V^7 - 0.0156 \delta V^6 + 0.0998 \delta V^5 - 0.3304 \delta V^4 + 0.5975 \delta V^3 - 0.5648 \delta V^2 + 0.225 \delta V - 0.0375 \quad \text{A.55}$$

$$g_8 = 0.3234 \delta V^2 + 3.7823 \delta V + 0.6667 \quad \text{A.56}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_9 = -5.6321 \times 10^{-15} \delta V^6 + 7.1529 \times 10^{-14} \delta V^5 - 3.2342 \times 10^{-13} \delta V^4 + 5.5488 \times 10^{-13} \delta V^3 - 1.8355 \times 10^{-14} \delta V^2 - 5.2608 \times 10^{-13} \delta V - 9.0631 \times 10^{-15} \quad \text{A.57}$$

$$b_9 = 4.8895 \times 10^{-12} \delta V^6 - 6.3957 \times 10^{-11} \delta V^5 + 2.9846 \times 10^{-10} \delta V^4 - 5.3172 \times 10^{-10} \delta V^3 + 3.3093 \times 10^{-11} \delta V^2 + 5.0684 \times 10^{-10} \delta V + 3.6620 \times 10^{-11} \quad \text{A.58}$$

$$c_9 = -1.3016 \times 10^{-9} \delta V^6 + 1.8285 \times 10^{-8} \delta V^5 - 9.1410 \times 10^{-8} \delta V^4 + 1.7522 \times 10^{-7} \delta V^3 - 1.9612 \times 10^{-8} \delta V^2 - 1.7249 \times 10^{-7} \delta V - 2.8547 \times 10^{-8} \quad \text{A.59}$$

$$d_9 = 6.6447 \times 10^{-8} \delta V^6 - 1.4183 \times 10^{-6} \delta V^5 + 9.2712 \times 10^{-6} \delta V^4 - 2.1912 \times 10^{-5} \delta V^3 + 5.1354 \times 10^{-6} \delta V^2 + 2.4116 \times 10^{-5} \delta V + 7.4426 \times 10^{-6} \quad \text{A.60}$$

$$e_9 = 1.3561 \times 10^{-5} \delta V^6 - 9.8347 \times 10^{-5} \delta V^5 + 7.5237 \times 10^{-5} \delta V^4 + 6.5983 \times 10^{-4} \delta V^3 - 6.5834 \times 10^{-4} \delta V^2 - 0.00118 \delta V - 4.4608 \times 10^{-4} \quad \text{A.61}$$

$$f_9 = 0.00378 \delta V^7 - 0.05268 \delta V^6 + 0.29248 \delta V^5 - 0.8038 \delta V^4 + 1.1222 \delta V^3 - 0.7468 \delta V^2 + 0.20978 \delta V - 0.0502 \quad \text{A.62}$$

$$g_9 = 0.00828 \delta V^2 + 2.9689 \delta V + 0.1628 \quad \text{A.63}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_{10} = 3.0769 \times 10^{-18} \delta V^9 - 5.7624 \times 10^{-17} \delta V^8 + 4.5635 \times 10^{-16} \delta V^7 - 1.9839 \times 10^{-15} \delta V^6 + 5.1304 \times 10^{-15} \delta V^5 - 7.9553 \times 10^{-15} \delta V^4 + 7.0156 \times 10^{-15} \delta V^3 - 3.0249 \times 10^{-15} \delta V^2 + 4.325 \times 10^{-16} \delta V + 1.6579 \times 10^{-15} \quad \text{A.64}$$

$$b_{10} = -4.6 \times 10^{-15} \delta V^9 + 8.6146 \times 10^{-14} \delta V^8 - 6.8216 \times 10^{-13} \delta V^7 + 2.9655 \times 10^{-12} \delta V^6 - 7.6691 \times 10^{-12} \delta V^5 + 1.1894 \times 10^{-11} \delta V^4 - 1.0495 \times 10^{-11} \delta V^3 + 4.5308 \times 10^{-12} \delta V^2 - 6.5095 \times 10^{-13} \delta V - 2.3110 \times 10^{-12} \quad \text{A.65}$$

$$c_{10} = 2.829 \times 10^{-12} \delta V^9 - 5.297 \times 10^{-11} \delta V^8 + 4.1941 \times 10^{-10} \delta V^7 - 1.8232 \times 10^{-9} \delta V^6 + 4.7152 \times 10^{-9} \delta V^5 - 7.3149 \times 10^{-10} \delta V^4 + 6.4589 \times 10^{-9} \delta V^3 - 2.7934 \times 10^{-9} \delta V^2 + 4.0402 \times 10^{-10} \delta V + 1.3101 \times 10^{-9} \quad \text{A.66}$$

$$d_{10} = -9.2072 \times 10^{-10} \delta V^9 + 1.7236 \times 10^{-8} \delta V^8 - 1.3645 \times 10^{-7} \delta V^7 + 5.9313 \times 10^{-7} \delta V^6 - 1.5341 \times 10^{-6} \delta V^5 + 2.3808 \times 10^{-6} \delta V^4 - 2.1043 \times 10^{-6} \delta V^3 + 9.2137 \times 10^{-7} \delta V^2 - 1.3319 \times 10^{-7} \delta V - 3.8846 \times 10^{-7} \quad \text{A.67}$$

$$e_{10} = 1.6948 \times 10^{-7} \delta V^9 - 3.172 \times 10^{-6} \delta V^8 + 2.5107 \times 10^{-5} \delta V^7 - 1.0912 \times 10^{-4} \delta V^6 + 2.8226 \times 10^{-4} \delta V^5 - 4.3883 \times 10^{-4} \delta V^4 + 3.879 \times 10^{-4} \delta V^3 - 1.6879 \times 10^{-4} \delta V^2 + 2.4954 \times 10^{-5} \delta V + 6.4464 \times 10^{-5} \quad \text{A.68}$$

$$f_{10} = -1.7377 \times 10^{-7} \delta V^5 + 3.2511 \times 10^{-4} \delta V^8 - 0.0026 \delta V^7 + 0.0111 \delta V^6 - 0.0289 \delta V^5 + 0.0449 \delta V^4 - 0.0399 \delta V^3 + 0.0174 \delta V^2 - 0.0026 \delta V - 0.0059 \quad \text{A.69}$$

$$g_{10} = 8.9749 \times 10^{-4} \delta V^5 - 0.0168 \delta V^8 + 0.1328 \delta V^7 - 0.5769 \delta V^6 + 1.4926 \delta V^5 - 2.3213 \delta V^4 + 2.0636 \delta V^3 - 0.9086 \delta V^2 + 0.1394 \delta V + 0.2757 \quad \text{A.70}$$

$$h_{10} = -0.0174 \delta V^9 + 0.3245 \delta V^8 - 2.5659 \delta V^7 + 11.147 \delta V^6 - 28.8489 \delta V^5 + 44.064 \delta V^4 - 40.0222 \delta V^3 + 17.7474 \delta V^2 - 2.8039 \delta V - 4.9378 \quad \text{A.71}$$

$$i_{10} = 0.1783 \delta V^2 + 3.4988 \delta V - 0.6957 \quad \text{A.72}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_{11} = -1.9447 \times 10^{-15} \delta V^2 + 7.4748 \times 10^{-14} \delta V - 5.2927 \times 10^{-16} \quad \text{A.73}$$

$$b_{11} = 2.0515 \times 10^{-12} \delta V^2 - 8.1127 \times 10^{-11} \delta V + 9.3642 \times 10^{-12} \quad \text{A.74}$$

$$c_{11} = -6.5930 \times 10^{-10} + 2.982 \times 10^{-8} \delta V - 8.5157 \times 10^{-9} \quad \text{A.75}$$

$$d_{11} = 3.1735 \times 10^{-8} \delta V^2 - 3.8226 \times 10^{-6} \delta V + 2.3686 \times 10^{-6} \quad \text{A.76}$$

$$e_{11} = -3.2242 \times 10^{-6} \delta V^5 + 3.8516 \times 10^{-5} \delta V^4 - 1.7358 \times 10^{-4} \delta V^3 + 3.6556 \times 10^{-4} \delta V^2 - 2.4719 \times 10^{-4} \delta V - 8.2588 \times 10^{-5} \quad \text{A.77}$$

$$f_{11} = 7.035 \times 10^{-6} \delta V^5 - 1.2454 \times 10^{-4} \delta V^4 + 8.5875 \times 10^{-4} \delta V^3 - 0.003 \delta V^2 + 0.0013 \delta V - 0.0144 \quad \text{A.78}$$

$$g_{11} = 1.0612 \delta V^2 + 4.9421 \delta V + 0.1817 \quad \text{A.79}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_{12} = -2.4751 \times 10^{-14} \delta V^8 + 4.2192 \times 10^{-13} \delta V^7 - 2.9622 \times 10^{-12} \delta V^6 + 1.0999 \times 10^{-11} \delta V^5 - 2.2971 \times 10^{-11} \delta V^4 + 2.6257 \times 10^{-11} \delta V^3 - 1.4377 \times 10^{-11} \delta V^2 + 2.6822 \times 10^{-12} \delta V - 1.5192 \times 10^{-13} \quad \text{A.80}$$

$$b_{12} = 2.4465 \times 10^{-11} \delta V^8 - 4.1969 \times 10^{-10} \delta V^7 + 2.9664 \times 10^{-9} \delta V^6 - 1.1091 \times 10^{-8} \delta V^5 + 2.3326 \times 10^{-8} \delta V^4 - 2.6835 \times 10^{-8} \delta V^3 + 1.4757 \times 10^{-8} \delta V^2 - 2.7554 \times 10^{-9} \delta V + 1.7468 \times 10^{-10} \quad \text{A.81}$$

$$c_{12} = -8.4721 \times 10^{-9} \delta V^8 + 1.4699 \times 10^{-7} \delta V^7 - 1.0512 \times 10^{-6} \delta V^6 + 3.978 \times 10^{-6} \delta V^5 - 8.4663 \times 10^{-6} \delta V^4 + 9.846 \times 10^{-6} \delta V^3 - 5.4546 \times 10^{-6} \delta V^2 + 1.0168 \times 10^{-6} \delta V - 7.6536 \times 10^{-8} \quad \text{A.82}$$

$$d_{12} = 1.1667 \times 10^{-6} \delta V^8 - 2.0757 \times 10^{-7} \delta V^7 + 1.5225 \times 10^{-4} \delta V^6 - 5.9065 \times 10^{-4} \delta V^5 + 0.0013 \delta V^4 - 0.0015 \delta V^3 + 8.5908 \times 10^{-4} \delta V^2 - 1.5854 \times 10^{-4} \delta V + 1.5026 \times 10^{-5} \quad \text{A.83}$$

$$e_{12} = -2.4038 \times 10^{-4} \delta V^9 + 0.0041 \delta V^8 - 0.0289 \delta V^7 + 0.1089 \delta V^6 - 0.2369 \delta V^5 + 0.2982 \delta V^4 - 0.2086 \delta V^3 + 0.0779 \delta V^2 - 0.0167 \delta V + 5.2717 \times 10^{-4} \quad \text{A.84}$$

$$f_{12} = 0.0079 \delta V^9 - 0.1368 \delta V^8 + 0.9799 \delta V^7 - 3.7784 \delta V^6 + 8.4771 \delta V^5 - 11.1701 \delta V^4 + 8.3529 \delta V^3 - 3.3458 \delta V^2 + 0.6947 \delta V - 0.0616 \quad \text{A.85}$$

$$g_{12} = 0.1902 \delta V^2 + 3.3303 \delta V + 1.026 \quad \text{A.86}$$

As equações A.87 até A.183 descrevem os coeficientes das equações empíricas, que estimam a mínima variação de energia da manobra de Swing-By propulsado com impulso no periapsis, em função da magnitude do impulso (δV), para excentricidades iguais a 0,1, 0,3 e 0,5 e anomalia verdadeira igual a 0° , 90° , 180° e 270° , respectivamente.

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_{13} = -3.12747 \times 10^{-16} \delta V^9 + 5.15568 \times 10^{-15} \delta V^8 - 3.54838 \times 10^{-14} \delta V^7 + 1.32743 \times 10^{-13} \delta V^6 - 2.94485 \times 10^{-13} \delta V^5 + 3.96444 \times 10^{-13} \delta V^4 - 3.17985 \times 10^{-13} \delta V^3 + 1.42833 \times 10^{-13} \delta V^2 - 3.06129 \times 10^{-14} \delta V + 1.76384 \times 10^{-15} \quad \text{A.87}$$

$$b_{13} = 3.57578 \times 10^{-13} \delta V^9 - 5.83125 \times 10^{-12} \delta V^8 + 3.96196 \times 10^{-11} \delta V^7 - 1.45997 \times 10^{-10} \delta V^6 + 3.18359 \times 10^{-10} \delta V^5 - 4.20527 \times 10^{-10} \delta V^4 + 3.30716 \times 10^{-10} \delta V^3 - 1.46106 \times 10^{-10} \delta V^2 + 3.1196 \times 10^{-11} \delta V - 1.73776 \times 10^{-12} \quad \text{A.88}$$

$$c_{13} = -1.59714 \times 10^{-10} \delta V^9 + 2.57171 \times 10^{-9} \delta V^8 - 1.7208 \times 10^{-8} \delta V^7 + 6.22705 \times 10^{-8} \delta V^6 - 1.32957 \times 10^{-7} \delta V^5 + 1.715 \times 10^{-7} \delta V^4 - 1.31429 \times 10^{-7} \delta V^3 + 5.66928 \times 10^{-8} \delta V^2 - 1.2018 \times 10^{-8} \delta V + 6.46264 \times 10^{-10} \quad \text{A.89}$$

$$d_{13} = 3.54666 \times 10^{-8} \delta V^9 - 5.6364 \times 10^{-7} \delta V^8 + 3.71239 \times 10^{-6} \delta V^7 - 0.0000131857 \delta V^6 + 0.0000275546 \delta V^5 - 0.0000346888 \delta V^4 + 0.0000258595 \delta V^3 - 0.0000108358 \delta V^2 + 2.27401 \times 10^{-6} \delta V - 1.21228 \times 10^{-7} \quad \text{A.90}$$

$$e_{13} = -4.07796 \times 10^{-6} \delta V^9 + 0.0000641605 \delta V^8 - 0.000417865 \delta V^7 + 0.0014667 \delta V^6 - 0.0030303 \delta V^5 + 0.00377588 \delta V^4 - 0.00278265 \delta V^3 + 0.00114468 \delta V^2 - 0.000238354 \delta V + 0.0000131192 \quad \text{A.91}$$

$$f_{13} = 0.000219916 \delta V^9 - 0.00345287 \delta V^8 + 0.0225016 \delta V^7 - 0.0794329 \delta V^6 + 0.166368 \delta V^5 - 0.211941 \delta V^4 + 0.159729 \delta V^3 - 0.0655972 \delta V^2 + 0.013196 \delta V - 0.000555743 \quad \text{A.92}$$

$$g_{13} = -0.00416258 \delta V^9 + 0.0666367 \delta V^8 - 0.44605 \delta V^7 + 1.63032 \delta V^6 - 3.54954 \delta V^5 + 4.64496 \delta V^4 - 3.40109 \delta V^3 + 1.12885 \delta V^2 - 0.0930644 \delta V - 0.0308713 \quad \text{A.93}$$

$$h_{13} = -0.00416258 \delta V^9 + 0.0666367 \delta V^8 - 0.44605 \delta V^7 + 1.63032 \delta V^6 - 3.54954 \delta V^5 + 4.64496 \delta V^4 - 3.40109 \delta V^3 + 1.12885 \delta V^2 - 0.0930644 \delta V - 0.0308713 \quad \text{A.94}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_{14} = -4.2514 \times 10^{-17} \delta V^9 + 4.79066 \times 10^{-16} \delta V^8 - 1.24708 \times 10^{-15} \delta V^7 - 5.66354 \times 10^{-15} \delta V^6 + 4.3107 \times 10^{-14} \delta V^5 - 1.10676 \times 10^{-13} \delta V^4 + 1.36301 \times 10^{-13} \delta V^3 - 7.51498 \times 10^{-14} \delta V^2 + 1.25495 \times 10^{-14} \delta V - 8.22233 \times 10^{-16} \quad \text{A.95}$$

$$b_{14} = 6.2931 \times 10^{-15} \delta V^9 + 2.5204 \times 10^{-13} \delta V^8 - 4.91169 \times 10^{-12} \delta V^7 + 3.38228 \times 10^{-11} \delta V^6 - 1.19164 \times 10^{-10} \delta V^5 + 2.34225 \times 10^{-10} \delta V^4 - 2.53234 \times 10^{-10} \delta V^3 + 1.3332 \times 10^{-10} \delta V^2 - 2.44833 \times 10^{-11} \delta V + 1.60186 \times 10^{-12} \quad \text{A.96}$$

$$c_{14} = 2.18722 \times 10^{-11} \delta V^9 - 5.73275 \times 10^{-10} \delta V^8 + 5.796 \times 10^{-9} \delta V^7 - 3.04297 \times 10^{-8} \delta V^6 + 9.17819 \times 10^{-8} \delta V^5 - 1.63106 \times 10^{-7} \delta V^4 + 1.65253 \times 10^{-7} \delta V^3 - 8.46908 \times 10^{-8} \delta V^2 + 1.63054 \times 10^{-8} \delta V - 1.05442 \times 10^{-9} \quad \text{A.97}$$

$$d_{14} = -1.1956 \times 10^{-8} \delta V^9 + 2.57556 \times 10^{-7} \delta V^8 - 2.28672 \times 10^{-6} \delta V^7 + 0.0000109232 \delta V^6 - 0.000030631 \delta V^5 + 0.0000514013 \delta V^4 - 0.0000499297 \delta V^3 + 0.0000250893 \delta V^2 - 4.95621 \times 10^{-6} \delta V + 3.14021 \times 10^{-7} \quad \text{A.98}$$

$$e_{14} = 2.47541 \times 10^{-6} \delta V^9 - 0.0000493559 \delta V^8 + 0.000410677 \delta V^7 - 0.00185456 \delta V^6 + 0.00494874 \delta V^5 - 0.00795148 \delta V^4 + 0.007461 \delta V^3 - 0.0036818 \delta V^2 + 0.000737665 \delta V - 0.0000459753 \quad \text{A.99}$$

$$f_{14} = -0.000232569 \delta V^9 + 0.00440458 \delta V^8 - 0.0349216 \delta V^7 + 0.150616 \delta V^6 - 0.384625 \delta V^5 + 0.593251 \delta V^4 - 0.53821 \delta V^3 + 0.261164 \delta V^2 - 0.0532327 \delta V + 0.00348656 \quad \text{A.100}$$

$$g_{14} = 0.007855 \delta V^9 - 0.143666 \delta V^8 + 1.10046 \delta V^7 - 4.58847 \delta V^6 + 11.347 \delta V^5 - 17.0296 \delta V^4 + 15.2224 \delta V^3 - 7.49761 \delta V^2 + 1.65518 \delta V - 0.133494 \quad \text{A.101}$$

$$h_{14} = 0.0906868 \delta V^9 - 1.50771 \delta V^8 + 10.3098 \delta V^7 - 37.223 \delta V^6 + 75.2055 \delta V^5 - 80.9396 \delta V^4 + 34.1632 \delta V^3 + 9.52643 \delta V^2 - 11.0657 \delta V + 0.312932 \quad \text{A.102}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_{15} = -6.87732 \times 10^{-16} \delta V^9 + 1.20508 \times 10^{-14} \delta V^8 - 8.82672 \times 10^{-14} \delta V^7 + 3.50042 \times 10^{-13} \delta V^6 - 8.12757 \times 10^{-13} \delta V^5 + 1.11464 \times 10^{-12} \delta V^4 - 8.67607 \times 10^{-13} \delta V^3 + 3.50902 \times 10^{-13} \delta V^2 - 6.4212 \times 10^{-14} \delta V + 3.58563 \times 10^{-15} \quad \text{A.103}$$

$$b_{15} = 8.10384 \times 10^{-13} \delta V^9 - 1.42161 \times 10^{-11} \delta V^8 + 1.04258 \times 10^{-10} \delta V^7 - 4.13989 \times 10^{-10} \delta V^6 + 9.6226 \times 10^{-10} \delta V^5 - 1.32025 \times 10^{-9} \delta V^4 + 1.02683 \times 10^{-9} \delta V^3 - 4.14332 \times 10^{-10} \delta V^2 + 7.57041 \times 10^{-11} \delta V - 4.20504 \times 10^{-12} \quad \text{A.104}$$

$$c_{15} = -3.73697 \times 10^{-10} \delta V^9 + 6.56723 \times 10^{-9} \delta V^8 - 4.82601 \times 10^{-8} \delta V^7 + 1.92037 \times 10^{-7} \delta V^6 - 4.47232 \times 10^{-7} \delta V^5 + 6.14406 \times 10^{-7} \delta V^4 - 4.77803 \times 10^{-7} \delta V^3 + 1.92412 \times 10^{-7} \delta V^2 - 3.51085 \times 10^{-8} \delta V + 1.94931 \times 10^{-9} \quad \text{A.105}$$

$$d_{15} = 8.60442 \times 10^{-8} \delta V^9 - 1.51625 \times 10^{-6} \delta V^8 + 0.0000111772 \delta V^7 - 0.0000446267 \delta V^6 + 0.00010428 \delta V^5 - 0.000143665 \delta V^4 + 0.000111893 \delta V^3 - 0.0000450422 \delta V^2 + 8.21982 \times 10^{-6} \delta V - 4.60656 \times 10^{-7} \quad \text{A.106}$$

$$e_{15} = -0.0000104828 \delta V^9 + 0.000185413 \delta V^8 - 0.00137265 \delta V^7 + 0.00550658 \delta V^6 - 0.0129315 \delta V^5 + 0.017901 \delta V^4 - 0.0139967 \delta V^3 + 0.00564754 \delta V^2 - 0.00103305 \delta V + 0.000058677 \quad \text{A.107}$$

$$f_{15} = 0.000654655 \delta V^9 - 0.0116163 \delta V^8 + 0.0863185 \delta V^7 - 0.347731 \delta V^6 + 0.820264 \delta V^5 - 1.14045 \delta V^4 + 0.894698 \delta V^3 - 0.361093 \delta V^2 + 0.0656731 \delta V - 0.00358578 \quad \text{A.108}$$

$$g_{15} = -0.0179545 \delta V^9 + 0.317461 \delta V^8 - 2.34939 \delta V^7 + 9.42017 \delta V^6 - 22.0974 \delta V^5 + 30.4917 \delta V^4 - 23.6091 \delta V^3 + 9.24337 \delta V^2 - 1.55413 \delta V + 0.058971 \quad \text{A.109}$$

$$h_{15} = 0.062192 \delta V^9 - 1.03614 \delta V^8 + 7.0782 \delta V^7 - 25.3505 \delta V^6 + 49.9055 \delta V^5 - 49.3238 \delta V^4 + 11.7716 \delta V^3 + 17.8207 \delta V^2 - 12.3791 \delta V + 0.484904 \quad \text{A.110}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_{16} = -1.01118 \times 10^{-16} \delta V^9 + 2.26772 \times 10^{-15} \delta V^8 - 2.07653 \times 10^{-14} \delta V^7 + 1.01503 \times 10^{-13} \delta V^6 - 2.89153 \times 10^{-13} \delta V^5 + 4.90344 \times 10^{-13} \delta V^4 - 4.83947 \times 10^{-13} \delta V^3 + 2.58355 \times 10^{-13} \delta V^2 - 6.20504 \times 10^{-14} \delta V + 4.02941 \times 10^{-15} \quad \text{A.111}$$

$$b_{16} = 6.68319 \times 10^{-14} \delta V^9 - 1.84308 \times 10^{-12} \delta V^8 + 1.91306 \times 10^{-11} \delta V^7 - 1.01761 \times 10^{-10} \delta V^6 + 3.08137 \times 10^{-10} \delta V^5 - 5.4726 \times 10^{-10} \delta V^4 + 5.59994 \times 10^{-10} \delta V^3 - 3.07697 \times 10^{-10} \delta V^2 + 7.56818 \times 10^{-11} \delta V - 4.939 \times 10^{-12} \quad \text{A.112}$$

$$c_{16} = 3.1099 \times 10^{-12} \delta V^9 + 3.10641 \times 10^{-10} \delta V^8 - 5.33494 \times 10^{-9} \delta V^7 + 3.51939 \times 10^{-8} \delta V^6 - 1.20418 \times 10^{-7} \delta V^5 + 2.31481 \times 10^{-7} \delta V^4 - 2.50277 \times 10^{-7} \delta V^3 + 1.4308 \times 10^{-7} \delta V^2 - 3.62495 \times 10^{-8} \delta V + 2.39222 \times 10^{-9} \quad \text{A.113}$$

$$d_{16} = -1.17797 \times 10^{-8} \delta V^9 + 1.05388 \times 10^{-7} \delta V^8 + 7.48599 \times 10^{-8} \delta V^7 - 4.17325 \times 10^{-6} \delta V^6 + 0.0000203077 \delta V^5 - 0.0000458128 \delta V^4 + 0.0000542661 \delta V^3 - 0.0000328411 \delta V^2 + 8.64011 \times 10^{-6} \delta V - 5.82516 \times 10^{-7} \quad \text{A.114}$$

$$e_{16} = 3.28426 \times 10^{-6} \delta V^9 - 0.00004271 \delta V^8 + 0.000188342 \delta V^7 - 0.00017792 \delta V^6 - 0.00113589 \delta V^5 + 0.00414313 \delta V^4 - 0.00584355 \delta V^3 + 0.00385797 \delta V^2 - 0.00106638 \delta V + 0.0000739747 \quad \text{A.115}$$

$$f_{16} = -0.000343136 \delta V^9 + 0.00493869 \delta V^8 - 0.0271443 \delta V^7 + 0.0663936 \delta V^6 - 0.0424526 \delta V^5 - 0.125623 \delta V^4 + 0.279123 \delta V^3 - 0.212745 \delta V^2 + 0.0625995 \delta V - 0.00430513 \quad \text{A.116}$$

$$g_{16} = 0.0112527 \delta V^9 - 0.169172 \delta V^8 + 1.00264 \delta V^7 - 2.89557 \delta V^6 + 3.82032 \delta V^5 - 0.574017 \delta V^4 - 3.92229 \delta V^3 + 3.77818 \delta V^2 - 1.14403 \delta V + 0.0536502 \quad \text{A.117}$$

$$h_{16} = 0.07681 \delta V^9 - 1.26134 \delta V^8 + 8.45408 \delta V^7 - 29.4649 \delta V^6 + 55.4342 \delta V^5 - 49.2384 \delta V^4 + 2.48998 \delta V^3 + 28.0748 \delta V^2 - 16.4552 \delta V + 0.961315 \quad \text{A.118}$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_{17} = 7.03256 \times 10^{-16} \delta V^9 - 1.22354 \times 10^{-14} \delta V^8 + 8.89643 \times 10^{-14} \delta V^7 - 3.50497 \times 10^{-13} \delta V^6 + 8.10653 \times 10^{-13} \delta V^5 - 1.11375 \times 10^{-12} \delta V^4 + 8.75094 \times 10^{-13} \delta V^3 - 3.5496 \times 10^{-13} \delta V^2 + 6.02498 \times 10^{-14} \delta V - 3.7873 \times 10^{-15} \quad \text{A.119}$$

$$b_{17} = -8.55863 \times 10^{-13} \delta V^9 + 1.48835 \times 10^{-11} \delta V^8 - 1.08149 \times 10^{-10} \delta V^7 + 4.25676 \times 10^{-10} \delta V^6 - 9.83082 \times 10^{-10} \delta V^5 + 1.34752 \times 10^{-9} \delta V^4 - 1.05489 \times 10^{-9} \delta V^3 + 4.25305 \times 10^{-10} \delta V^2 - 7.13252 \times 10^{-11} \delta V + 4.521 \times 10^{-12} \quad \text{A.120}$$

$$c_{17} = 4.10599 \times 10^{-10} \delta V^9 - 7.13839 \times 10^{-9} \delta V^8 + 5.18458 \times 10^{-8} \delta V^7 - 2.03897 \times 10^{-7} \delta V^6 + 4.70201 \times 10^{-7} \delta V^5 - 6.42883 \times 10^{-7} \delta V^4 + 5.01191 \times 10^{-7} \delta V^3 - 2.007 \times 10^{-7} \delta V^2 + 3.32239 \times 10^{-8} \delta V - 2.11015 \times 10^{-9} \quad \text{A.121}$$

$$d_{17} = -9.83056 \times 10^{-8} \delta V^9 + 1.70946 \times 10^{-6} \delta V^8 - 0.0000124163 \delta V^7 + 0.0000488132 \delta V^6 - 0.000112444 \delta V^5 + 0.000153379 \delta V^4 - 0.000119069 \delta V^3 + 0.0000473528 \delta V^2 - 7.74077 \times 10^{-6} \delta V + 4.86446 \times 10^{-7} \quad \text{A.122}$$

$$e_{17} = 0.0000121674 \delta V^9 - 0.000211879 \delta V^8 + 0.00154094 \delta V^7 - 0.00606373 \delta V^6 + 0.0139702 \delta V^5 - 0.0190324 \delta V^4 + 0.0147276 \delta V^3 - 0.00582615 \delta V^2 + 0.000944348 \delta V - 0.0000582957 \quad \text{A.123}$$

$$f_{17} = -0.000716505 \delta V^9 + 0.0125312 \delta V^8 - 0.0915467 \delta V^7 + 0.361815 \delta V^6 - 0.836743 \delta V^5 + 1.14304 \delta V^4 - 0.886011 \delta V^3 + 0.351653 \delta V^2 - 0.0577511 \delta V + 0.00375891 \quad \text{A.124}$$

$$g_{17} = 0.0153425 \delta V^9 - 0.271864 \delta V^8 + 2.01456 \delta V^7 - 8.0853 \delta V^6 + 19.0137 \delta V^5 - 26.4804 \delta V^4 + 21.0811 \delta V^3 - 8.80764 \delta V^2 + 1.64722 \delta V - 0.144007 \quad \text{A.125}$$

$$h_{17} = -0.0876774 \delta V^9 + 1.56845 \delta V^8 - 11.8314 \delta V^7 + 49.0044 \delta V^6 - 121.641 \delta V^5 + 185.704 \delta V^4 - 173.131 \delta V^3 + 95.6933 \delta V^2 - 28.8538 \delta V + 1.62932 \quad \text{A.126}$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_{18} = -1.48252 \times 10^{-16} \delta V^9 + 2.54827 \times 10^{-15} \delta V^8 - 1.87852 \times 10^{-14} \delta V^7 + 7.77791 \times 10^{-14} \delta V^6 - 1.97509 \times 10^{-13} \delta V^5 + 3.12243 \times 10^{-13} \delta V^4 - 2.96154 \times 10^{-13} \delta V^3 + 1.54245 \times 10^{-13} \delta V^2 - 3.69312 \times 10^{-14} \delta V + 1.97747 \times 10^{-15} \quad \text{A.127}$$

$$b_{18} = 1.56857 \times 10^{-13} \delta V^9 - 2.69287 \times 10^{-12} \delta V^8 + 1.99329 \times 10^{-11} \delta V^7 - 8.34181 \times 10^{-11} \delta V^6 + 2.15401 \times 10^{-10} \delta V^5 - 3.47421 \times 10^{-10} \delta V^4 + 3.35984 \times 10^{-10} \delta V^3 - 1.77773 \times 10^{-10} \delta V^2 + 4.30888 \times 10^{-11} \delta V - 2.28154 \times 10^{-12} \quad \text{A.128}$$

$$c_{18} = -6.10116 \times 10^{-11} \delta V^9 + 1.04716 \times 10^{-9} \delta V^8 - 7.82373 \times 10^{-9} \delta V^7 + 3.34168 \times 10^{-8} \delta V^6 - 8.88612 \times 10^{-8} \delta V^5 + 1.48098 \times 10^{-7} \delta V^4 - 1.47541 \times 10^{-7} \delta V^3 + 7.98312 \times 10^{-8} \delta V^2 - 1.96509 \times 10^{-8} \delta V + 1.04095 \times 10^{-9} \quad \text{A.129}$$

$$d_{18} = 1.00332 \times 10^{-8} \delta V^9 - 1.72863 \times 10^{-7} \delta V^8 + 1.32586 \times 10^{-6} \delta V^7 - 5.94737 \times 10^{-6} \delta V^6 + 0.0000168365 \delta V^5 - 0.0000298621 \delta V^4 + 0.0000313032 \delta V^3 - 0.0000175382 \delta V^2 + 4.41084 \times 10^{-6} \delta V - 2.38057 \times 10^{-7} \quad \text{A.130}$$

$$e_{18} = -3.98611 \times 10^{-7} \delta V^9 + 7.1698 \times 10^{-6} \delta V^8 - 0.0000649774 \delta V^7 + 0.000367531 \delta V^6 - 0.0012941 \delta V^5 + 0.00270884 \delta V^4 - 0.0031698 \delta V^3 + 0.00189462 \delta V^2 - 0.000493244 \delta V + 0.0000270122 \quad \text{A.131}$$

$$f_{18} = -0.0000621496 \delta V^9 + 0.00101584 \delta V^8 - 0.0061653 \delta V^7 + 0.0155179 \delta V^6 - 0.00391317 \delta V^5 - 0.0575942 \delta V^4 + 0.111061 \delta V^3 - 0.0797578 \delta V^2 + 0.0222106 \delta V - 0.000970063 \quad \text{A.132}$$

$$g_{18} = 0.00494282 \delta V^9 - 0.082331 \delta V^8 + 0.554344 \delta V^7 - 1.92264 \delta V^6 + 3.61458 \delta V^5 - 3.53532 \delta V^4 + 1.56839 \delta V^3 - 0.257842 \delta V^2 + 0.0451081 \delta V - 0.0375846 \quad \text{A.133}$$

$$h_{18} = -0.0140542 \delta V^9 + 0.239237 \delta V^8 - 1.77774 \delta V^7 + 7.75216 \delta V^6 - 22.3639 \delta V^5 + 44.2532 \delta V^4 - 57.8474 \delta V^3 + 44.9427 \delta V^2 - 16.8872 \delta V + 0.366852 \quad \text{A.134}$$

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_{19} = -2.56766 \times 10^{-16} \delta V^9 + 5.11106 \times 10^{-15} \delta V^8 - 4.31471 \times 10^{-14} \delta V^7 + 2.00527 \times 10^{-13} \delta V^6 - 5.56826 \times 10^{-13} \delta V^5 + 9.37217 \times 10^{-13} \delta V^4 - 9.24752 \times 10^{-13} \delta V^3 + 4.87481 \times 10^{-13} \delta V^2 - 1.1091 \times 10^{-13} \delta V + 6.97633 \times 10^{-15} \quad \text{A.135}$$

$$b_{19} = 3.8409 \times 10^{-13} \delta V^9 - 7.51991 \times 10^{-12} \delta V^8 + 6.24371 \times 10^{-11} \delta V^7 - 2.85543 \times 10^{-10} \delta V^6 + 7.81138 \times 10^{-10} \delta V^5 - 1.29772 \times 10^{-9} \delta V^4 + 1.26749 \times 10^{-9} \delta V^3 - 6.64323 \times 10^{-10} \delta V^2 + 1.51469 \times 10^{-10} \delta V - 9.54953 \times 10^{-12} \quad \text{A.136}$$

$$c_{19} = -2.2563 \times 10^{-10} \delta V^9 + 4.35508 \times 10^{-9} \delta V^8 - 3.56302 \times 10^{-8} \delta V^7 + 1.60552 \times 10^{-7} \delta V^6 - 4.32994 \times 10^{-7} \delta V^5 + 7.10109 \times 10^{-7} \delta V^4 - 6.86295 \times 10^{-7} \delta V^3 + 3.57378 \times 10^{-7} \delta V^2 - 8.15776 \times 10^{-8} \delta V + 5.16117 \times 10^{-9} \quad \text{A.137}$$

$$d_{19} = 6.61375 \times 10^{-8} \delta V^9 - 1.26045 \times 10^{-6} \delta V^8 + 0.0000101731 \delta V^7 - 0.0000452016 \delta V^6 + 0.000120211 \delta V^5 - 0.000194564 \delta V^4 + 0.000185927 \delta V^3 - 0.000096082 \delta V^2 + 0.0000219289 \delta V - 1.39393 \times 10^{-6}$$

A.138

$$e_{19} = -0.0000101206 \delta V^9 + 0.000190566 \delta V^8 - 0.00151797 \delta V^7 + 0.00665093 \delta V^6 - 0.0174349 \delta V^5 + 0.0278229 \delta V^4 - 0.0262498 \delta V^3 + 0.013436 \delta V^2 - 0.00305983 \delta V + 0.000195121$$

A.139

$$f_{19} = 0.000762331 \delta V^9 - 0.0141745 \delta V^8 + 0.11134 \delta V^7 - 0.480462 \delta V^6 + 1.23929 \delta V^5 - 1.94514 \delta V^4 + 1.80591 \delta V^3 - 0.911787 \delta V^2 + 0.206202 \delta V - 0.0130059$$

A.140

$$g_{19} = -0.0223147 \delta V^9 + 0.408543 \delta V^8 - 3.15336 \delta V^7 + 13.3421 \delta V^6 - 33.6672 \delta V^5 + 51.5819 \delta V^4 - 46.6553 \delta V^3 + 22.9228 \delta V^2 - 5.05185 \delta V + 0.298355$$

A.141

$$h_{19} = 0.0451632 \delta V^9 - 0.740524 \delta V^8 + 4.93805 \delta V^7 - 16.9726 \delta V^6 + 30.7377 \delta V^5 - 23.6686 \delta V^4 - 6.77276 \delta V^3 + 23.1132 \delta V^2 - 11.8822 \delta V + 0.356307$$

A.142

Equações referentes à $e = 0,3$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_{20} = -1.17336 \times 10^{-15} \delta V^9 + 2.04123 \times 10^{-14} \delta V^8 - 1.49729 \times 10^{-13} \delta V^7 + 6.03588 \times 10^{-13} \delta V^6 - 1.45947 \times 10^{-12} \delta V^5 + 2.16338 \times 10^{-12} \delta V^4 - 1.92011 \times 10^{-12} \delta V^3 + 9.44108 \times 10^{-13} \delta V^2 - 2.14268 \times 10^{-13} \delta V + 1.37663 \times 10^{-14}$$

A.143

$$b_{20} = 1.43291 \times 10^{-12} \delta V^9 - 2.48756 \times 10^{-11} \delta V^8 + 1.82114 \times 10^{-10} \delta V^7 - 7.3298 \times 10^{-10} \delta V^6 + 1.77062 \times 10^{-9} \delta V^5 - 2.62428 \times 10^{-9} \delta V^4 + 2.33119 \times 10^{-9} \delta V^3 - 1.14856 \times 10^{-9} \delta V^2 + 2.61643 \times 10^{-10} \delta V - 1.68018 \times 10^{-11}$$

A.144

$$c_{20} = -6.88506 \times 10^{-10} \delta V^9 + 1.19231 \times 10^{-8} \delta V^8 - 8.70922 \times 10^{-8} \delta V^7 + 3.49917 \times 10^{-7} \delta V^6 - 8.44472 \times 10^{-7} \delta V^5 + 1.25174 \times 10^{-6} \delta V^4 - 1.11331 \times 10^{-6} \delta V^3 + 5.49845 \times 10^{-7} \delta V^2 - 1.25778 \times 10^{-7} \delta V + 8.08322 \times 10^{-9}$$

A.145

$$d_{20} = 1.64765 \times 10^{-7} \delta V^9 - 2.84544 \times 10^{-6} \delta V^8 + 0.0000207351 \delta V^7 - 0.0000831716 \delta V^6 + 0.000200614 \delta V^5 - 0.00029761 \delta V^4 + 0.000265262 \delta V^3 - 0.000131427 \delta V^2 + 0.0000302101 \delta V - 1.94836 \times 10^{-6}$$

A.146

$$e_{20} = -0.0000203577 \delta V^9 + 0.000350648 \delta V^8 - 0.00255031 \delta V^7 + 0.0102224 \delta V^6 - 0.0246804 \delta V^5 + 0.0367158 \delta V^4 - 0.0328641 \delta V^3 + 0.0163625 \delta V^2 - 0.00378375 \delta V + 0.000245574$$

A.147

$$f_{20} = 0.00119088 \delta V^9 - 0.0204851 \delta V^8 + 0.149026 \delta V^7 - 0.598804 \delta V^6 + 1.45319 \delta V^5 - 2.17843 \delta V^4 + 1.96719 \delta V^3 - 0.987087 \delta V^2 + 0.229751 \delta V - 0.0148549$$

A.148

$$g_{20} = -0.0235031 \delta V^9 + 0.405959 \delta V^8 - 2.97684 \delta V^7 + 12.1116 \delta V^6 - 29.8885 \delta V^5 + 45.6525 \delta V^4 - 41.8852 \delta V^3 + 21.1362 \delta V^2 - 4.86807 \delta V + 0.284891 \quad \text{A.149}$$

$$h_{20} = -0.0273264 \delta V^9 + 0.498364 \delta V^8 - 3.93104 \delta V^7 + 17.6872 \delta V^6 - 50.2404 \delta V^5 + 93.334 \delta V^4 - 111.901 \delta V^3 + 80.5855 \delta V^2 - 29.0719 \delta V + 2.11632 \quad \text{A.150}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_{21} = 4.02039 \times 10^{-19} \delta V^9 + 7.67847 \times 10^{-17} \delta V^8 - 9.23717 \times 10^{-16} \delta V^7 + 3.43645 \times 10^{-15} \delta V^6 - 1.43621 \times 10^{-15} \delta V^5 - 1.93805 \times 10^{-14} \delta V^4 + 4.50118 \times 10^{-14} \delta V^3 - 3.43694 \times 10^{-14} \delta V^2 + 6.73735 \times 10^{-15} \delta V - 5.43072 \times 10^{-16} \quad \text{A.151}$$

$$b_{21} = -3.78304 \times 10^{-14} \delta V^9 + 5.41816 \times 10^{-13} \delta V^8 - 3.41887 \times 10^{-12} \delta V^7 + 1.36005 \times 10^{-11} \delta V^6 - 3.97228 \times 10^{-11} \delta V^5 + 8.2076 \times 10^{-11} \delta V^4 - 1.02728 \times 10^{-10} \delta V^3 + 6.21474 \times 10^{-11} \delta V^2 - 1.1503 \times 10^{-11} \delta V + 8.51382 \times 10^{-13} \quad \text{A.152}$$

$$c_{21} = 3.84529 \times 10^{-11} \delta V^9 - 6.01202 \times 10^{-10} \delta V^8 + 4.04642 \times 10^{-9} \delta V^7 - 1.57902 \times 10^{-8} \delta V^6 + 4.02614 \times 10^{-8} \delta V^5 - 6.86419 \times 10^{-8} \delta V^4 + 7.26685 \times 10^{-8} \delta V^3 - 3.94068 \times 10^{-8} \delta V^2 + 6.98944 \times 10^{-9} \delta V - 4.71048 \times 10^{-10} \quad \text{A.153}$$

$$d_{21} = -1.49223 \times 10^{-8} \delta V^9 + 2.38727 \times 10^{-7} \delta V^8 - 1.62628 \times 10^{-6} \delta V^7 + 6.26251 \times 10^{-6} \delta V^6 - 0.0000151851 \delta V^5 + 0.0000238683 \delta V^4 - 0.0000231267 \delta V^3 + 0.0000116757 \delta V^2 - 1.98874 \times 10^{-6} \delta V + 1.16466 \times 10^{-7} \quad \text{A.154}$$

$$e_{21} = 2.75608 \times 10^{-6} \delta V^9 - 0.0000444467 \delta V^8 + 0.000303087 \delta V^7 - 0.00115201 \delta V^6 + 0.00270054 \delta V^5 - 0.00401886 \delta V^4 + 0.00364739 \delta V^3 - 0.00173472 \delta V^2 + 0.000283184 \delta V - 0.0000139944 \quad \text{A.155}$$

$$f_{21} = -0.000240218 \delta V^9 + 0.0038816 \delta V^8 - 0.0263664 \delta V^7 + 0.0987548 \delta V^6 - 0.224453 \delta V^5 + 0.317928 \delta V^4 - 0.271017 \delta V^3 + 0.121177 \delta V^2 - 0.0189773 \delta V + 0.00109344 \quad \text{A.156}$$

$$g_{21} = 0.00751268 \delta V^9 - 0.120555 \delta V^8 + 0.80689 \delta V^7 - 2.93901 \delta V^6 + 6.3684 \delta V^5 - 8.38487 \delta V^4 + 6.48838 \delta V^3 - 2.62757 \delta V^2 + 0.410787 \delta V - 0.067847 \quad \text{A.157}$$

$$h_{21} = 0.0424043 \delta V^9 - 0.775957 \delta V^8 + 6.03176 \delta V^7 - 25.9669 \delta V^6 + 67.4884 \delta V^5 - 107.543 \delta V^4 + 100.205 \delta V^3 - 46.0453 \delta V^2 + 4.64275 \delta V - 0.476821 \quad \text{A.158}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_{22} = -3.33329 \times 10^{-18} \delta V^9 + 6.12127 \times 10^{-17} \delta V^8 - 4.74631 \times 10^{-16} \delta V^7 + 2.01572 \times 10^{-15} \delta V^6 - 5.07815 \times 10^{-15} \delta V^5 + 7.66158 \times 10^{-15} \delta V^4 - 6.62595 \times 10^{-15} \delta V^3 + 2.94198 \times 10^{-15} \delta V^2 - 5.57626 \times 10^{-16} \delta V + 1.71863 \times 10^{-15} \quad \text{A.159}$$

$$b_{22} = 4.55674 \times 10^{-15} \delta V^9 - 8.37542 \times 10^{-14} \delta V^8 + 6.50105 \times 10^{-13} \delta V^7 - 2.76391 \times 10^{-12} \delta V^6 + 6.96853 \times 10^{-12} \delta V^5 - 1.05144 \times 10^{-11} \delta V^4 + 9.0804 \times 10^{-12} \delta V^3 - 4.0134 \times 10^{-12} \delta V^2 + 7.52677 \times 10^{-13} \delta V - 2.3978 \times 10^{-12} \quad \text{A.160}$$

$$c_{22} = -2.52897 \times 10^{-12} \delta V^9 + 4.65421 \times 10^{-11} \delta V^8 - 3.61804 \times 10^{-10} \delta V^7 + 1.54051 \times 10^{-9} \delta V^6 - 3.88848 \times 10^{-9} \delta V^5 + 5.86849 \times 10^{-9} \delta V^4 - 5.06033 \times 10^{-9} \delta V^3 + 2.22481 \times 10^{-9} \delta V^2 - 4.12081 \times 10^{-10} \delta V + 1.3611 \times 10^{-9} \quad \text{A.161}$$

$$d_{22} = 7.30689 \times 10^{-10} \delta V^9 - 1.34749 \times 10^{-8} \delta V^8 + 1.04999 \times 10^{-7} \delta V^7 - 4.48147 \times 10^{-7} \delta V^6 + 1.13339 \times 10^{-6} \delta V^5 - 1.71192 \times 10^{-6} \delta V^4 + 1.47423 \times 10^{-6} \delta V^3 - 6.4452 \times 10^{-7} \delta V^2 + 1.17731 \times 10^{-7} \delta V - 4.04332 \times 10^{-7} \quad \text{A.162}$$

$$e_{22} = -1.16866 \times 10^{-7} \delta V^9 + 2.16303 \times 10^{-6} \delta V^8 - 0.0000169246 \delta V^7 + 0.0000725398 \delta V^6 - 0.000184124 \delta V^5 + 0.000278726 \delta V^4 - 0.000239945 \delta V^3 + 0.000104364 \delta V^2 - 0.0000187929 \delta V + 0.0000672757 \quad \text{A.163}$$

$$f_{22} = 0.0000101067 \delta V^9 - 0.000188356 \delta V^8 + 0.00148513 \delta V^7 - 0.00641489 \delta V^6 + 0.0163966 \delta V^5 - 0.0249498 \delta V^4 + 0.0215248 \delta V^3 - 0.00933523 \delta V^2 + 0.00166081 \delta V - 0.00620502 \quad \text{A.164}$$

$$g_{22} = -0.000425015 \delta V^9 + 0.00802618 \delta V^8 - 0.0641883 \delta V^7 + 0.281211 \delta V^6 - 0.728161 \delta V^5 + 1.11992 \delta V^4 - 0.973637 \delta V^3 + 0.424131 \delta V^2 - 0.0755835 \delta V + 0.290111 \quad \text{A.165}$$

$$h_{22} = 0.00774035 \delta V^9 - 0.147188 \delta V^8 + 1.18554 \delta V^7 - 5.23042 \delta V^6 + 13.6373 \delta V^5 - 21.1371 \delta V^4 + 18.6021 \delta V^3 - 8.33567 \delta V^2 + 1.60295 \delta V - 5.23158 \quad \text{A.166}$$

$$i_{22} = -0.159999 \delta V^9 + 2.74888 \delta V^8 - 19.6905 \delta V^7 + 76.3205 \delta V^6 - 173.958 \delta V^5 + 237.904 \delta V^4 - 192.384 \delta V^3 + 88.8881 \delta V^2 - 22.0488 \delta V + 0.269053 \quad \text{A.167}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_{23} = -2.7527 \times 10^{-16} \delta V^9 + 4.93839 \times 10^{-15} \delta V^8 - 3.74497 \times 10^{-14} \delta V^7 + 1.56565 \times 10^{-13} \delta V^6 - 3.94779 \times 10^{-13} \delta V^5 + 6.17424 \times 10^{-13} \delta V^4 - 5.92071 \times 10^{-13} \delta V^3 + 3.26661 \times 10^{-13} \delta V^2 - 8.55989 \times 10^{-14} \delta V + 5.76846 \times 10^{-15} \quad \text{A.168}$$

$$b_{23} = 4.01483 \times 10^{-13} \delta V^9 - 7.16512 \times 10^{-12} \delta V^8 + 5.39568 \times 10^{-11} \delta V^7 - 2.23499 \times 10^{-10} \delta V^6 + 5.56848 \times 10^{-10} \delta V^5 - 8.58013 \times 10^{-10} \delta V^4 + 8.08816 \times 10^{-10} \delta V^3 - 4.38989 \times 10^{-10} \delta V^2 + 1.13913 \times 10^{-10} \delta V - 7.65783 \times 10^{-12} \quad \text{A.169}$$

$$c_{23} = -2.26703 \times 10^{-10} \delta V^9 + 4.02438 \times 10^{-9} \delta V^8 - 3.00906 \times 10^{-8} \delta V^7 + 1.23472 \times 10^{-7} \delta V^6 - 3.03893 \times 10^{-7} \delta V^5 + 4.61171 \times 10^{-7} \delta V^4 - 4.27273 \times 10^{-7} \delta V^3 + 2.28273 \times 10^{-7} \delta V^2 - 5.87815 \times 10^{-8} \delta V + 3.95198 \times 10^{-9} \quad \text{A.170}$$

$$d_{23} = 6.20909 \times 10^{-8} \delta V^9 - 1.09583 \times 10^{-6} \delta V^8 + 8.12995 \times 10^{-6} \delta V^7 - 0.0000330157 \delta V^6 + 0.0000801664 \delta V^5 - 0.000119625 \delta V^4 + 0.000108782 \delta V^3 - 0.0000572225 \delta V^2 + 0.0000146722 \delta V - 9.90001 \times 10^{-7} \quad \text{A.171}$$

$$e_{23} = -8.36492 \times 10^{-6} \delta V^9 + 0.000146598 \delta V^8 - 0.00107727 \delta V^7 + 0.0043187 \delta V^6 - 0.0103094 \delta V^5 + 0.0150619 \delta V^4 - 0.0133908 \delta V^3 + 0.00693463 \delta V^2 - 0.00178293 \delta V + 0.000121085 \quad \text{A.172}$$

$$f_{23} = 0.000484231 \delta V^9 - 0.00839974 \delta V^8 + 0.0608358 \delta V^7 - 0.238988 \delta V^6 + 0.554987 \delta V^5 - 0.783101 \delta V^4 + 0.671753 \delta V^3 - 0.34187 \delta V^2 + 0.0898764 \delta V - 0.006085 \quad \text{A.173}$$

$$g_{23} = -0.00781591 \delta V^9 + 0.13257 \delta V^8 - 0.927263 \delta V^7 + 3.45297 \delta V^6 - 7.39639 \delta V^5 + 9.29654 \delta V^4 - 6.96716 \delta V^3 + 3.34088 \delta V^2 - 0.986715 \delta V + 0.0567907 \quad \text{A.174}$$

$$h_{23} = -0.0258348 \delta V^9 + 0.416477 \delta V^8 - 2.88953 \delta V^7 + 11.5015 \delta V^6 - 29.3891 \delta V^5 + 50.1984 \delta V^4 - 56.355 \delta V^3 + 38.3254 \delta V^2 - 12.962 \delta V + 0.325922 \quad \text{A.175}$$

Equações referentes à $e = 0,5$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_{24} = -6.0301 \times 10^{-16} \delta V^9 + 1.08495 \times 10^{-14} \delta V^8 - 8.21493 \times 10^{-14} \delta V^7 + 3.40206 \times 10^{-13} \delta V^6 - 8.37517 \times 10^{-13} \delta V^5 + 1.2447 \times 10^{-12} \delta V^4 - 1.07983 \times 10^{-12} \delta V^3 + 4.97712 \times 10^{-13} \delta V^2 - 9.89607 \times 10^{-14} \delta V + 6.31701 \times 10^{-15} \quad \text{A.176}$$

$$b_{24} = 7.22618 \times 10^{-13} \delta V^9 - 1.30298 \times 10^{-11} \delta V^8 + 9.88889 \times 10^{-11} \delta V^7 - 4.10574 \times 10^{-10} \delta V^6 + 1.01356 \times 10^{-9} \delta V^5 - 1.5109 \times 10^{-9} \delta V^4 + 1.31513 \times 10^{-9} \delta V^3 - 6.08774 \times 10^{-10} \delta V^2 + 1.22052 \times 10^{-10} \delta V - 7.78992 \times 10^{-12} \quad \text{A.177}$$

$$c_{24} = -3.38804 \times 10^{-10} \delta V^9 + 6.13128 \times 10^{-9} \delta V^8 - 4.67152 \times 10^{-8} \delta V^7 + 1.94776 \times 10^{-7} \delta V^6 - 4.83027 \times 10^{-7} \delta V^5 + 7.23526 \times 10^{-7} \delta V^4 - 6.32959 \times 10^{-7} \delta V^3 + 2.94719 \times 10^{-7} \delta V^2 - 5.9696 \times 10^{-8} \delta V + 3.82209 \times 10^{-9} \quad \text{A.178}$$

$$d_{24} = 7.83796 \times 10^{-8} \delta V^9 - 1.42706 \times 10^{-6} \delta V^8 + 0.000010944 \delta V^7 - 0.0000459485 \delta V^6 + 0.000114792 \delta V^5 - 0.000173265 \delta V^4 + 0.000152736 \delta V^3 - 0.0000716913 \delta V^2 + 0.0000147074 \delta V - 9.51818 \times 10^{-7} \quad \text{A.179}$$

$$e_{24} = -9.21377 \times 10^{-6} \delta V^9 + 0.000169519 \delta V^8 - 0.00131446 \delta V^7 + 0.0055832 \delta V^6 - 0.014117 \delta V^5 + 0.0215662 \delta V^4 - 0.0192302 \delta V^3 + 0.00912616 \delta V^2 - 0.00190239 \delta V + 0.000125596 \quad \text{A.180}$$

$$f_{24} = 0.000514649 \delta V^9 - 0.00963323 \delta V^8 + 0.0760305 \delta V^7 - 0.328807 \delta V^6 + 0.846379 \delta V^5 - 1.31511 \delta V^4 + 1.19022 \delta V^3 - 0.571825 \delta V^2 + 0.121181 \delta V - 0.00802214 \quad \text{A.181}$$

$$g_{24} = -0.0142065 \delta V^9 + 0.266377 \delta V^8 - 2.1051 \delta V^7 + 9.108 \delta V^6 - 23.4201 \delta V^5 + 36.2574 \delta V^4 - 32.5476 \delta V^3 + 15.3932 \delta V^2 - 3.18617 \delta V + 0.17421 \quad \text{A.182}$$

$$h_{24} = 0.444503 \delta V^9 - 7.73892 \delta V^8 + 56.3223 \delta V^7 - 222.29 \delta V^6 + 515.879 \delta V^5 - 712.659 \delta V^4 + 563.278 \delta V^3 - 227.425 \delta V^2 + 34.808 \delta V - 1.38326 \quad \text{A.183}$$

As equações A.184 até A.211 descrevem os coeficientes das equações empíricas, que estimam a máxima variação de energia da manobra de Swing-By propulsado com $\theta \neq 0$, em função da magnitude do impulso (δV), para excentricidade igual a 0,1 e anomalia verdadeira igual a 0° , 90° , 180° e 270° , respectivamente.

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_{25} = -6.13307 \times 10^{-15} \delta V^7 + 9.28758 \times 10^{-14} \delta V^6 - 5.63354 \times 10^{-13} \delta V^5 + 1.73847 \times 10^{-12} \delta V^4 - 2.84737 \times 10^{-12} \delta V^3 + 2.30099 \times 10^{-12} \delta V^2 - 4.51669 \times 10^{-13} \delta V + 5.85473 \times 10^{-14} \quad \text{A.184}$$

$$b_{25} = 4.64047 \times 10^{-12} \delta V^7 - 7.08315 \times 10^{-11} \delta V^6 + 4.31078 \times 10^{-10} \delta V^5 - 1.32049 \times 10^{-9} \delta V^4 + 2.09219 \times 10^{-9} \delta V^3 - 1.5173 \times 10^{-9} \delta V^2 + 2.21254 \times 10^{-11} \delta V - 8.25787 \times 10^{-12} \quad \text{A.185}$$

$$c_{25} = -7.88878 \times 10^{-10} \delta V^7 + 1.24606 \times 10^{-8} \delta V^6 - 7.68243 \times 10^{-8} \delta V^5 + 2.27297 \times 10^{-7} \delta V^4 - 3.04136 \times 10^{-7} \delta V^3 + 7.97048 \times 10^{-8} \delta V^2 + 2.44158 \times 10^{-7} \delta V - 2.69261 \times 10^{-8} \quad \text{A.186}$$

$$d_{25} = -1.21772 \times 10^{-7} \delta V^7 + 1.68359 \times 10^{-6} \delta V^6 - 9.86291 \times 10^{-6} \delta V^5 + 0.0000338604 \delta V^4 - 0.0000782753 \delta V^3 + 0.000118294 \delta V^2 - 0.000107584 \delta V + 0.0000120479 \quad \text{A.187}$$

$$e_{25} = 0.0000360761 \delta V^7 - 0.000527908 \delta V^6 + 0.00317065 \delta V^5 - 0.0102621 \delta V^4 + 0.0197858 \delta V^3 - 0.0230746 \delta V^2 + 0.0151303 \delta V - 0.0015444 \quad \text{A.188}$$

$$f_{25} = -0.00126571 \delta V^7 + 0.018725 \delta V^6 - 0.113667 \delta V^5 + 0.370744 \delta V^4 - 0.715898 \delta V^3 + 0.831729 \delta V^2 - 0.537273 \delta V + 0.0356406 \quad \text{A.189}$$

$$g_{25} = 0.298871 \delta V^2 + 3.87384 \delta V + 0.230614 \quad \text{A.190}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_{26} = 3.64172 \times 10^{-15} \delta V^8 - 5.94269 \times 10^{-14} \delta V^7 + 3.91809 \times 10^{-13} \delta V^6 - 1.3085 \times 10^{-12} \delta V^5 + 2.18038 \times 10^{-12} \delta V^4 - 1.12263 \times 10^{-12} \delta V^3 - 1.48058 \times 10^{-12} \delta V^2 + 1.9758 \times 10^{-12} \delta V - 1.41518 \times 10^{-13} \quad \text{A.191}$$

$$b_{26} = -1.24603 \times 10^{-12} \delta V^8 + 2.01455 \times 10^{-11} \delta V^7 - 1.25692 \times 10^{-10} \delta V^6 + 3.41985 \times 10^{-10} \delta V^5 - 1.29502 \times 10^{-10} \delta V^4 - 1.4944 \times 10^{-9} \delta V^3 + 3.47726 \times 10^{-9} \delta V^2 - 2.80112 \times 10^{-9} \delta V + 2.20102 \times 10^{-10} \quad \text{A.192}$$

$$c_{26} = -9.01719 \times 10^{-10} \delta V^8 + 1.48952 \times 10^{-8} \delta V^7 - 1.04855 \times 10^{-7} \delta V^6 + 4.2236 \times 10^{-7} \delta V^5 - 1.11186 \times 10^{-6} \delta V^4 + 2.01845 \times 10^{-6} \delta V^3 - 2.38402 \times 10^{-6} \delta V^2 + 1.47486 \times 10^{-6} \delta V - 1.24138 \times 10^{-7} \quad \text{A.193}$$

$$d_{26} = 4.89309 \times 10^{-7} \delta V^8 - 8.04611 \times 10^{-6} \delta V^7 + 0.0000551739 \delta V^6 - 0.000207101 \delta V^5 + 0.000473824 \delta V^4 - 0.000699674 \delta V^3 + 0.000667325 \delta V^2 - 0.000351536 \delta V + 0.0000307908 \quad \text{A.194}$$

$$e_{26} = -0.0000669197 \delta V^8 + 0.00110032 \delta V^7 - 0.00751071 \delta V^6 + 0.0277813 \delta V^5 - 0.0614075 \delta V^4 + 0.0850392 \delta V^3 - 0.0742322 \delta V^2 + 0.0357562 \delta V - 0.00309561 \quad \text{A.195}$$

$$f_{26} = 0.00166311 \delta V^8 - 0.0274476 \delta V^7 + 0.188282 \delta V^6 - 0.701728 \delta V^5 + 1.57172 \delta V^4 - 2.22873 \delta V^3 + 2.02008 \delta V^2 - 1.02469 \delta V + 0.0746768 \quad \text{A.196}$$

$$g_{26} = 0.396898 \delta V^2 + 4.04599 \delta V + 0.086048 \quad \text{A.197}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_{27} = 1.54166 \times 10^{-14} \delta V^8 - 2.48407 \times 10^{-13} \delta V^7 + 1.63103 \times 10^{-12} \delta V^6 - 5.57721 \times 10^{-12} \delta V^5 + 1.04433 \times 10^{-11} \delta V^4 - 1.00439 \times 10^{-11} \delta V^3 + 3.59525 \times 10^{-12} \delta V^2 + 5.35061 \times 10^{-13} \delta V - 1.53712 \times 10^{-14} \quad \text{A.198}$$

$$b_{27} = -1.49972 \times 10^{-11} \delta V^8 + 2.41193 \times 10^{-10} \delta V^7 - 1.57771 \times 10^{-9} \delta V^6 + 5.35287 \times 10^{-9} \delta V^5 - 9.84677 \times 10^{-9} \delta V^4 + 9.01478 \times 10^{-9} \delta V^3 - 2.50711 \times 10^{-9} \delta V^2 - 1.10926 \times 10^{-9} \delta V + 7.07095 \times 10^{-11} \quad \text{A.199}$$

$$c_{27} = 5.14027 \times 10^{-9} \delta V^8 - 8.23881 \times 10^{-8} \delta V^7 + 5.35283 \times 10^{-7} \delta V^6 - 1.79048 \times 10^{-6} \delta V^5 + 3.18556 \times 10^{-6} \delta V^4 - 2.63314 \times 10^{-6} \delta V^3 + 2.62996 \times 10^{-7} \delta V^2 + 7.30619 \times 10^{-7} \delta V - 5.81229 \times 10^{-8} \quad \text{A.200}$$

$$d_{27} = -7.25509 \times 10^{-7} \delta V^8 + 0.0000115443 \delta V^7 - 0.0000739251 \delta V^6 + 0.000239692 \delta V^5 - 0.000394232 \delta V^4 + 0.000238909 \delta V^3 + 0.000135346 \delta V^2 - 0.000203188 \delta V + 0.0000176959 \quad \text{A.201}$$

$$e_{27} = 0.0000384481 \delta V^8 - 0.000600324 \delta V^7 + 0.00370002 \delta V^6 - 0.0109875 \delta V^5 + 0.0136973 \delta V^4 + 0.0043891 \delta V^3 - 0.0291443 \delta V^2 + 0.0233843 \delta V - 0.00202991 \quad \text{A.202}$$

$$f_{27} = -0.000957453 \delta V^8 + 0.0146889 \delta V^7 - 0.0876635 \delta V^6 + 0.241625 \delta V^5 - 0.21857 \delta V^4 - 0.377829 \delta V^3 + 1.0549 \delta V^2 - 0.778191 \delta V + 0.0545736 \quad \text{A.203}$$

$$g_{27} = 0.513375 \delta V^2 + 4.27509 \delta V + 0.212819 \quad \text{A.204}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_{28} = 3.52815 \times 10^{-15} \delta V^8 - 6.56384 \times 10^{-14} \delta V^7 + 4.98216 \times 10^{-13} \delta V^6 - 1.97461 \times 10^{-12} \delta V^5 + 4.31147 \times 10^{-12} \delta V^4 - 4.90788 \times 10^{-12} \delta V^3 + 2.19743 \times 10^{-12} \delta V^2 + 3.08602 \times 10^{-13} \delta V + 2.87029 \times 10^{-14} \quad \text{A.205}$$

$$b_{28} = -1.61691 \times 10^{-12} \delta V^8 + 3.47212 \times 10^{-11} \delta V^7 - 2.91551 \times 10^{-10} \delta V^6 + 1.23325 \times 10^{-9} \delta V^5 - 2.75358 \times 10^{-9} \delta V^4 + 2.92817 \times 10^{-9} \delta V^3 - 6.78664 \times 10^{-10} \delta V^2 - 9.50548 \times 10^{-10} \delta V + 2.8833 \times 10^{-11} \quad \text{A.206}$$

$$c_{28} = -5.06046 \times 10^{-10} \delta V^8 + 5.14606 \times 10^{-9} \delta V^7 - 1.33642 \times 10^{-8} \delta V^6 - 1.78118 \times 10^{-8} \delta V^5 + 9.12761 \times 10^{-8} \delta V^4 + 9.61112 \times 10^{-8} \delta V^3 - 6.42253 \times 10^{-7} \delta V^2 + 7.14051 \times 10^{-7} \delta V - 4.4681 \times 10^{-8} \quad \text{A.207}$$

$$d_{28} = 3.64897 \times 10^{-7} \delta V^8 - 5.45938 \times 10^{-6} \delta V^7 + 0.0000334708 \delta V^6 - 0.000110985 \delta V^5 + 0.000227868 \delta V^4 - 0.000327006 \delta V^3 + 0.000342257 \delta V^2 - 0.000212006 \delta V + 0.0000161075 \quad \text{A.208}$$

$$e_{28} = -0.0000538797 \delta V^8 + 0.000849884 \delta V^7 - 0.00554439 \delta V^6 + 0.0195711 \delta V^5 - 0.0414988 \delta V^4 + 0.0562467 \delta V^3 - 0.0498663 \delta V^2 + 0.0252953 \delta V - 0.00197645 \quad \text{A.209}$$

$$f_{28} = 0.00154795 \delta V^8 - 0.024932 \delta V^7 + 0.16693 \delta V^6 - 0.60812 \delta V^5 + 1.33558 \delta V^4 - 1.86682 \delta V^3 + 1.67755 \delta V^2 - 0.847313 \delta V + 0.0509328 \quad \text{A.210}$$

$$g_{28} = 0.394412 \delta V^2 + 4.04077 \delta V + 0.361925 \quad \text{A.211}$$

As equações A.212 até A.247 descrevem os coeficientes das equações empíricas, que estimam a mínima variação de energia da manobra de Swing-By propulsado com $\theta \neq 0$, em função da magnitude do impulso (δV), para excentricidade igual a 0,1 e anomalia verdadeira igual a 0° , 90° , 180° e 270° , respectivamente.

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 0^\circ$:

$$a_{29} = 9.08173 \times 10^{-19} \delta V^8 - 1.74875 \times 10^{-17} \delta V^7 + 1.31852 \times 10^{-16} \delta V^6 - 4.9312 \times 10^{-16} \delta V^5 + 9.41832 \times 10^{-16} \delta V^4 - 8.19546 \times 10^{-16} \delta V^3 + 1.79469 \times 10^{-16} \delta V^2 + 7.38625 \times 10^{-17} \delta V - 2.6155 \times 10^{-17} \quad \text{A.212}$$

$$b_{29} = -1.15403 \times 10^{-15} \delta V^8 + 2.26855 \times 10^{-14} \delta V^7 - 1.73262 \times 10^{-13} \delta V^6 + 6.5174 \times 10^{-13} \delta V^5 - 1.23994 \times 10^{-12} \delta V^4 + 1.04981 \times 10^{-12} \delta V^3 - 1.83013 \times 10^{-13} \delta V^2 - 1.24607 \times 10^{-13} \delta V + 3.89042 \times 10^{-14} \quad \text{A.213}$$

$$c_{29} = 5.94026 \times 10^{-13} \delta V^8 - 1.1945 \times 10^{-11} \delta V^7 + 9.24275 \times 10^{-11} \delta V^6 - 3.49201 \times 10^{-10} \delta V^5 + 6.59125 \times 10^{-10} \delta V^4 - 5.35776 \times 10^{-10} \delta V^3 + 5.83169 \times 10^{-11} \delta V^2 + 8.56909 \times 10^{-11} \delta V - 2.38089 \times 10^{-11} \quad \text{A.214}$$

$$d_{29} = -1.62031 \times 10^{-10} \delta V^8 + 3.32449 \times 10^{-9} \delta V^7 - 2.59834 \times 10^{-8} \delta V^6 + 9.8226 \times 10^{-8} \delta V^5 - 1.82785 \times 10^{-7} \delta V^4 + 1.39917 \times 10^{-7} \delta V^3 - 1.72915 \times 10^{-9} \delta V^2 - 3.07223 \times 10^{-8} \delta V + 7.70886 \times 10^{-9} \quad \text{A.215}$$

$$e_{29} = 2.59065 \times 10^{-8} \delta V^8 - 5.3548 \times 10^{-7} \delta V^7 + 4.18843 \times 10^{-6} \delta V^6 - 0.0000157193 \delta V^5 + 0.0000285693 \delta V^4 - 0.0000200539 \delta V^3 - 2.58669 \times 10^{-6} \delta V^2 + 6.11636 \times 10^{-6} \delta V - 1.41202 \times 10^{-6} \quad \text{A.216}$$

$$f_{29} = -2.51226 \times 10^{-6} \delta V^8 + 0.0000509502 \delta V^7 - 0.000391977 \delta V^6 + 0.00144205 \delta V^5 - 0.00252952 \delta V^4 + 0.00157797 \delta V^3 + 0.000516913 \delta V^2 - 0.000665518 \delta V + 0.000143831 \quad \text{A.217}$$

$$g_{29} = -0.000494819 \delta V^7 + 0.00582708 \delta V^6 - 0.0232857 \delta V^5 + 0.0287337 \delta V^4 + 0.0301016 \delta V^3 - 0.0876355 \delta V^2 + 0.0476554 \delta V - 0.00796952 \quad \text{A.218}$$

$$h_{29} = 0.00842343 \delta V^7 - 0.0978001 \delta V^6 + 0.378965 \delta V^5 - 0.411021 \delta V^4 - 0.655886 \delta V^3 + 1.57057 \delta V^2 - 0.784686 \delta V + 0.112876 \quad \text{A.219}$$

$$i_{29} = -0.0717661 \delta V^9 + 1.30569 \delta V^8 - 10.0558 \delta V^7 + 42.7661 \delta V^6 - 109.89 \delta V^5 + 175.38 \delta V^4 - 171.873 \delta V^3 + 98.1327 \delta V^2 - 29.0742 \delta V + 1.559 \quad \text{A.220}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 90^\circ$:

$$a_{30} = -4.1419 \times 10^{-18} \delta V^9 + 7.67016 \times 10^{-17} \delta V^8 - 6.01467 \times 10^{-16} \delta V^7 + 2.59759 \times 10^{-15} \delta V^6 - 6.71676 \times 10^{-15} \delta V^5 + 1.05592 \times 10^{-14} \delta V^4 - 9.76408 \times 10^{-15} \delta V^3 + 4.86335 \times 10^{-15} \delta V^2 - 1.09942 \times 10^{-15} \delta V + 7.91015 \times 10^{-17} \quad \text{A.221}$$

$$b_{30} = 5.82545 \times 10^{-15} \delta V^9 - 1.07873 \times 10^{-13} \delta V^8 + 8.45907 \times 10^{-13} \delta V^7 - 3.6534 \times 10^{-12} \delta V^6 + 9.4471 \times 10^{-12} \delta V^5 - 1.48503 \times 10^{-11} \delta V^4 + 1.37277 \times 10^{-11} \delta V^3 - 6.8332 \times 10^{-12} \delta V^2 + 1.5439 \times 10^{-12} \delta V - 1.11378 \times 10^{-13} \quad \text{A.222}$$

$$c_{30} = -3.33745 \times 10^{-12} \delta V^9 + 6.18073 \times 10^{-11} \delta V^8 - 4.84731 \times 10^{-10} \delta V^7 + 2.09377 \times 10^{-9} \delta V^6 - 5.41446 \times 10^{-9} \delta V^5 + 8.51012 \times 10^{-9} \delta V^4 - 7.86311 \times 10^{-9} \delta V^3 + 3.91063 \times 10^{-9} \delta V^2 - 8.82985 \times 10^{-10} \delta V + 6.38439 \times 10^{-11} \quad \text{A.223}$$

$$d_{30} = 1.00279 \times 10^{-9} \delta V^9 - 1.85749 \times 10^{-8} \delta V^8 + 1.45706 \times 10^{-7} \delta V^7 - 6.29466 \times 10^{-7} \delta V^6 + 1.6278 \times 10^{-6} \delta V^5 - 2.55776 \times 10^{-6} \delta V^4 + 2.36161 \times 10^{-6} \delta V^3 - 1.17319 \times 10^{-6} \delta V^2 + 2.64697 \times 10^{-7} \delta V - 1.91575 \times 10^{-8} \quad \text{A.224}$$

$$e_{30} = -1.69521 \times 10^{-7} \delta V^9 + 3.14053 \times 10^{-6} \delta V^8 - 0.0000246371 \delta V^7 + 0.00010643 \delta V^6 - 0.000275146 \delta V^5 + 0.00043204 \delta V^4 - 0.000398437 \delta V^3 + 0.000197631 \delta V^2 - 0.0000445513 \delta V + 3.2186 \times 10^{-6} \quad \text{A.225}$$

$$f_{30} = 0.0000160551 \delta V^9 - 0.00029729 \delta V^8 + 0.00233063 \delta V^7 - 0.0100587 \delta V^6 + 0.0259707 \delta V^5 - 0.0407093 \delta V^4 + 0.0374629 \delta V^3 - 0.0185422 \delta V^2 + 0.00417556 \delta V - 0.000300246 \quad \text{A.226}$$

$$g_{30} = -0.000794389 \delta V^9 + 0.0146716 \delta V^8 - 0.114677 \delta V^7 + 0.493253 \delta V^6 - 1.26874 \delta V^5 + 1.98085 \delta V^4 - 1.81612 \delta V^3 + 0.896759 \delta V^2 - 0.202044 \delta V + 0.0146095 \quad \text{A.227}$$

$$h_{30} = -1.83114 \times 10^{-8} \delta V^{15} + 0.000657299 \delta V^9 - 0.292045 \delta V^6 + 2.02895 \delta V^5 - 5.67024 \delta V^4 + 7.69908 \delta V^3 - 5.06772 \delta V^2 + 1.47021 \delta V - 0.153981 \quad \text{A.228}$$

$$i_{30} = -0.0473897 \delta V^9 + 0.865746 \delta V^8 - 6.70936 \delta V^7 + 28.8036 \delta V^6 - 75.0307 \delta V^5 + 122.026 \delta V^4 - 122.557 \delta V^3 + 72.1755 \delta V^2 - 22.2745 \delta V + 0.944825 \quad \text{A.229}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 180^\circ$:

$$a_{31} = 3.51386 \times 10^{-18} \delta V^9 - 5.99044 \times 10^{-17} \delta V^8 + 4.25923 \times 10^{-16} \delta V^7 - 1.63885 \times 10^{-15} \delta V^6 + 3.70003 \times 10^{-15} \delta V^5 - 4.95198 \times 10^{-15} \delta V^4 + 3.73766 \times 10^{-15} \delta V^3 - 1.35046 \times 10^{-15} \delta V^2 + 9.70575 \times 10^{-17} \delta V + 4.26694 \times 10^{-17} \quad \text{A.230}$$

$$b_{31} = -5.51113 \times 10^{-15} \delta V^9 + 9.40313 \times 10^{-14} \delta V^8 - 6.69442 \times 10^{-13} \delta V^7 + 2.5813 \times 10^{-12} \delta V^6 - 5.84849 \times 10^{-12} \delta V^5 + 7.87764 \times 10^{-12} \delta V^4 - 6.02515 \times 10^{-12} \delta V^3 + 2.25772 \times 10^{-12} \delta V^2 - 2.15885 \times 10^{-13} \delta V - 5.43132 \times 10^{-14} \quad \text{A.231}$$

$$c_{31} = 3.54858 \times 10^{-12} \delta V^9 - 6.0607 \times 10^{-11} \delta V^8 + 4.32152 \times 10^{-10} \delta V^7 - 1.67037 \times 10^{-9} \delta V^6 + 3.79944 \times 10^{-9} \delta V^5 - 5.15249 \times 10^{-9} \delta V^4 + 3.9935 \times 10^{-9} \delta V^3 - 1.54758 \times 10^{-9} \delta V^2 + 1.79978 \times 10^{-10} \delta V + 2.71202 \times 10^{-11} \quad \text{A.232}$$

$$d_{31} = -1.2044 \times 10^{-9} \delta V^9 + 2.05944 \times 10^{-8} \delta V^8 - 1.47105 \times 10^{-7} \delta V^7 + 5.70122 \times 10^{-7} \delta V^6 - 1.30228 \times 10^{-6} \delta V^5 + 1.77848 \times 10^{-6} \delta V^4 - 1.39646 \times 10^{-6} \delta V^3 + 5.57827 \times 10^{-7} \delta V^2 - 7.46893 \times 10^{-8} \delta V - 6.68001 \times 10^{-9} \quad \text{A.233}$$

$$e_{31} = 2.2966 \times 10^{-7} \delta V^9 - 3.93214 \times 10^{-6} \delta V^8 + 0.000028141 \delta V^7 - 0.000109378 \delta V^6 + 0.000250945 \delta V^5 - 0.000345133 \delta V^4 + 0.000274376 \delta V^3 - 0.000112564 \delta V^2 + 0.0000167135 \delta V + 8.29418 \times 10^{-7} \quad \text{A.234}$$

$$f_{31} = -0.0000241344 \delta V^9 + 0.000413778 \delta V^8 - 0.00296715 \delta V^7 + 0.0115665 \delta V^6 - 0.0266541 \delta V^5 + 0.0369088 \delta V^4 - 0.0296764 \delta V^3 + 0.0124519 \delta V^2 - 0.00199322 \delta V - 0.0000463766 \quad \text{A.235}$$

$$g_{31} = 0.00125564 \delta V^9 - 0.0215515 \delta V^8 + 0.154801 \delta V^7 - 0.604954 \delta V^6 + 1.39928 \delta V^5 - 1.94849 \delta V^4 + 1.58042 \delta V^3 - 0.673693 \delta V^2 + 0.112993 \delta V + 0.000992633 \quad \text{A.236}$$

$$h_{31} = -5.85314 \times 10^{-9} \delta V^{15} + 0.000143625 \delta V^9 - 0.0406112 \delta V^6 + 0.238331 \delta V^5 - 0.617097 \delta V^4 + 1.00622 \delta V^3 - 1.14075 \delta V^2 + 0.753109 \delta V - 0.213892 \quad \text{A.237}$$

$$i_{31} = 0.00892103 \delta V^9 - 0.091074 \delta V^8 + 0.0514941 \delta V^7 + 3.01529 \delta V^6 - 17.3085 \delta V^5 + 44.7714 \delta V^4 - 62.2128 \delta V^3 + 46.6796 \delta V^2 - 17.3459 \delta V + 0.757875 \quad \text{A.238}$$

Equações referentes à $e = 0,1$ e $\nu = 270^\circ$:

$$a_{32} = -8.95997 \times 10^{-18} \delta V^9 + 1.48061 \times 10^{-16} \delta V^8 - 1.01776 \times 10^{-15} \delta V^7 + 3.77527 \times 10^{-15} \delta V^6 - 8.18979 \times 10^{-15} \delta V^5 + 1.05024 \times 10^{-14} \delta V^4 - 7.64624 \times 10^{-15} \delta V^3 + 2.86443 \times 10^{-15} \delta V^2 - 4.64983 \times 10^{-16} \delta V + 2.83004 \times 10^{-17} \quad \text{A.239}$$

$$b_{32} = 1.25931 \times 10^{-14} \delta V^9 - 2.07719 \times 10^{-13} \delta V^8 + 1.4247 \times 10^{-12} \delta V^7 - 5.27057 \times 10^{-12} \delta V^6 + 1.13944 \times 10^{-11} \delta V^5 - 1.4544 \times 10^{-11} \delta V^4 + 1.05161 \times 10^{-11} \delta V^3 - 3.89654 \times 10^{-12} \delta V^2 + 6.2222 \times 10^{-13} \delta V - 3.80806 \times 10^{-14} \quad \text{A.240}$$

$$c_{32} = -7.22904 \times 10^{-12} \delta V^9 + 1.19 \times 10^{-10} \delta V^8 - 8.14181 \times 10^{-10} \delta V^7 + 3.00267 \times 10^{-9} \delta V^6 - 6.46519 \times 10^{-9} \delta V^5 + 8.20542 \times 10^{-9} \delta V^4 - 5.88155 \times 10^{-9} \delta V^3 + 2.14813 \times 10^{-9} \delta V^2 - 3.35253 \times 10^{-10} \delta V + 2.05597 \times 10^{-11} \quad \text{A.241}$$

$$d_{32} = 2.18152 \times 10^{-9} \delta V^9 - 3.58336 \times 10^{-8} \delta V^8 + 2.44512 \times 10^{-7} \delta V^7 - 8.98634 \times 10^{-7} \delta V^6 + 1.92583 \times 10^{-6} \delta V^5 - 2.42753 \times 10^{-6} \delta V^4 + 1.72116 \times 10^{-6} \delta V^3 - 6.16866 \times 10^{-7} \delta V^2 + 9.32149 \times 10^{-8} \delta V - 5.68235 \times 10^{-9} \quad \text{A.242}$$

$$e_{32} = -3.70334 \times 10^{-7} \delta V^9 + 6.06997 \times 10^{-6} \delta V^8 - 0.0000413036 \delta V^7 + 0.000151235 \delta V^6 - 0.000322396 \delta V^5 + 0.000403103 \delta V^4 - 0.000281953 \delta V^3 + 0.0000985646 \delta V^2 - 0.0000142134 \delta V + 8.46041 \times 10^{-7} \quad \text{A.243}$$

$$f_{32} = 0.0000349298 \delta V^9 - 0.000571369 \delta V^8 + 0.0038774 \delta V^7 - 0.0141428 \delta V^6 + 0.0299739 \delta V^5 - 0.0371229 \delta V^4 + 0.0255291 \delta V^3 - 0.00863004 \delta V^2 + 0.00115864 \delta V - 0.000065213 \quad \text{A.244}$$

$$g_{32} = -0.00166894 \delta V^9 + 0.0272586 \delta V^8 - 0.184565 \delta V^7 + 0.670833 \delta V^6 - 1.41346 \delta V^5 + 1.73257 \delta V^4 - 1.16817 \delta V^3 + 0.378633 \delta V^2 - 0.0458832 \delta V + 0.00249095 \quad \text{A.245}$$

$$h_{32} = 3.28098 \times 10^{-8} \delta V^{15} - 0.000914852 \delta V^9 + 0.350391 \delta V^6 - 2.38153 \delta V^5 + 6.70189 \delta V^4 - 9.44567 \delta V^3 + 6.51463 \delta V^2 - 1.82092 \delta V + 0.0932831 \quad \text{A.246}$$

$$i_{32} = -0.0781551 \delta V^9 + 1.40065 \delta V^8 - 10.6099 \delta V^7 + 44.3279 \delta V^6 - 111.829 \delta V^5 + 175.296 \delta V^4 - 169.11 \delta V^3 + 95.6242 \delta V^2 - 28.3764 \delta V + 1.62826 \quad \text{A.247}$$