

# **PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE QUE UTILIZA UM VOLANTE DE INÉRCIA SUSPENSO POR DOIS EIXOS CARDAN**

## **RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)**

Raphael Willian Peres (FATESF, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [raphael-peres@hotmail.com](mailto:raphael-peres@hotmail.com)

Mário César Ricci (DMC/ETE/INPE, Orientador)  
E-mail: [mariocesarricci@uol.com.br](mailto:mariocesarricci@uol.com.br)

Julho de 2015



Peres, R. W.

Projeto de um sistema de controle de atitude que utiliza um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan / Peres, R. W. - São José dos Campos: INPE, 2015.  
86p.

1. Controle. 2. Atitude. 3. Satélite.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao orientador deste projeto Dr. Mário César Ricci, pela atenção, dedicação, apoio e pelas inúmeras revisões feitas neste trabalho no qual sem dúvidas contribuíram muito na qualidade do texto, das equações e dos gráficos.

Ao CONSELHO NACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO – CNPq pelo apoio financeiro recebido através da Bolsa de Iniciação Científica junto ao Programa PIBIC do INPE.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria clássica de controle no projeto de um sistema de controle de atitude de satélites. Pretende-se apresentar os procedimentos de projeto para um sistema de controle de atitude contendo um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan (gimbals), para um satélite estabilizado em três eixos numa órbita geostacionária. A utilização de um volante de inércia com dois eixos cardan é uma opção bastante interessante porque, com apenas um dispositivo, é possível controlar o torque em torno dos três eixos do veículo, através do controle de velocidade da roda e do fenômeno do girotorqueamento com dois graus de liberdade. Se o tamanho da roda e a velocidade são determinados adequadamente é possível cancelar torques cíclicos sem empregar jatos de gás, usando-os apenas periodicamente para cancelar torques de perturbação seculares (que crescem linearmente com o tempo). Nesse sistema, baseado em um volante de inércia, é necessário apenas um sensor de arfagem/rolamento (sensor de Terra) para a manutenção precisa da atitude, diferentemente de sistemas de controle baseados em expulsão de massa os quais têm necessidade de utilização contínua de propulsores, além dos sensores de rolamento, arfagem e guinada. Considera-se que o satélite está na trajetória nominal em órbita e, portanto, que a fase de aquisição da atitude já tenha transcorrido. Serão determinadas propriedades específicas, leis e parâmetros de controle com o intuito de anular o torque de perturbação de pressão de radiação solar e o torque devido ao desalinhamento dos propulsores do sistema de correção de órbita. Será analisada a estabilidade do sistema de controle e serão obtidas respostas para torques de perturbações do tipo impulsivo, em degrau e cíclico. As equações do movimento são desenvolvidas partindo do pressuposto que o satélite é um corpo rígido com uma roda de inércia capaz de gerar momento angular internamente, o qual somado com o momento angular do veículo fornece o momento angular total. Os torques que agem sobre o satélite considerado no modelo são os torques de distúrbio devido à pressão de radiação solar, torques de desalinhamentos do vetor empuxo dos jatos de gás e o torque devido ao gradiente de gravidade.

**Palavras-chave:** Controle. Atitude. Satélite.



# **DESIGN OF A CONTROL SYSTEM THAT USES A WHEEL ATTITUDE OF INERTIA SUSPENDED FOR TWO GIMBALS**

## **ABSTRACT**

The objective of this work is to apply the classical control theory in designing a system for satellite attitude control. It is intended to present the design procedures for an attitude control system containing a flywheel suspended by two gimbals, for three axis stabilized satellite in geostationary orbit. The use of a flywheel with two gimbals is an interesting option because with only one device it's possible to control the torques about vehicle's three axes; through the wheel speed control and gyrotorquing phenomenon. If the wheel size and speed are determined properly it's possible to cancel cyclic torques without using gas jets, using them only periodically to cancel secular disturbance torques. In this system, based on a momentum wheel, just a sensor pitch/roll sensor (Earth) is necessary for the maintenance accurate of attitude, differently from control systems based on mass expulsion, which need continuous use of propellants besides the sensors roll, pitch and yaw. It is considered the satellite is in nominal orbit and, therefore, that the attitude's acquisition phase has already elapsed. Specific properties, control laws and system parameters are determined in order to cancel the torque disturbance of radiation pressure and the torque due to misalignment of the thrusters of the orbit control system. The stability control system is analyzed and responses to impulsive disturbance torques in step and cyclic are obtained. The equations of motion are obtained assuming that the satellite is a rigid body with inertia wheel capable of generating angular momentum internally, which coupled with the angular momentum of the vehicle, provides the total angular momentum. The torques acting on the satellite, which was considered in the model, are the disturbance torques due to solar radiation pressure, torque thrust vector misalignments of gas jets and the torque due to gravity gradient.

**Key-words:** Control. Attitude. Satellite.





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 – Momento angular de $m$ com relação à $O$ .	7
Figura 2.2 – Transformação de coordenadas em um sistema de duas dimensões	10
Figura 2.3 – Construção dos Ângulos de Euler.	12
Figura 2.4 – Taxa de Variação dos Ângulos de Euler.	14
Figura 2.5 – Momento Angular de um Corpo Rígido.	16
Figura 2.6 – Princípio do conceito de torque devido ao Gradiente de Gravidade.	21
Figura 2.7 – Modelo de Gradiente de Gravidade.	22
Figura 3.1 – Concepção artística do satélite estabilizado em três eixos.	31
Figura 3.2 – Orientação nominal da roda de inércia.	32
Figura 3.3 – Componentes do momento angular	33
Figura 3.4 – Esquema do <i>pseudorate modulator</i> .	38
Figura 3.5 – Diagrama de blocos do eixo de arfagem	39
Figura 3.6 – Diagrama de blocos deduzido (eixo de arfagem).	40
Figura 3.7 – Gráfico do lugar das raízes para análise dos parâmetros escolhidos (eixo de arfagem).	43
Figura 3.8 – Diagrama de blocos para o sistema de controle rolamento/guinada	47
Figura 3.9 – Diagrama do lugar das raízes para o sistema de eixos rolamento e guinada para $K=1,25 \text{ N.m/rad}$ .	53
Figura 3.10 – Diagrama do lugar das raízes para o sistema de eixos rolamento e guinada para $K=1,56 \text{ N.m/rad}$ .	54
Figura 3.11 – Diagrama do lugar das raízes para o sistema de eixos rolamento e guinada para $K=0,1 \text{ N.m/rad}$ .	55
Figura 4.1 – Resposta do eixo de arfagem para uma entrada degrau.	59
Figura 4.2 – Resposta do eixo de arfagem para uma entrada impulsiva	60
Figura 4.3 – Resposta do eixo de arfagem para uma entrada cíclica.	61
Figura 4.4 – Variação do momento angular da roda de inércia para correção angular do eixo de arfagem.	62
Figura 4.5 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada degrau no eixo de rolamento.	63
Figura 4.6 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada impulsiva no eixo de rolamento.	64
Figura 4.7 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada degrau no eixo de guinada	65
Figura 4.8 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada impulsiva no eixo de guinada.	66
Figura 4.9 – Resposta do eixo de guinada devido a entrada degrau no eixo de guinada	67
Figura 4.10 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada impulsiva no eixo de guinada.	68
Figura 4.11 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada degrau no eixo de rolamento	69
Figura 4.12 – Resposta do eixo de guinada devido a entrada impulsiva no eixo de rolamento	70

Figura 4.13 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada cíclica do torque solar .....	72
Figura 4.14 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada cíclica do torque solar .....	73
Figura 4.15 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada degrau no eixo de guinada (cardan fixo).....	74
Figura 4.16 – Resposta do eixo de guinada devido a uma entrada degrau no eixo de guinada com correção do momento angular nominal (cardan fixo).....	74
Figura 4.17 – Resposta do eixo de guinada devido a entrada degrau no eixo de rolamento (cardan fixo). .....	75
Figura 4.18 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada cíclica do torque de pressão solar (cardan fixo).....	76

## LISTA DE TABELAS

	<b><u>Pág.</u></b>
Tabela 3.1 – Parâmetros e requisitos de projeto .....	32
Tabela 3.2 – Parâmetros de controle (eixo de arfagem) .....	44
Tabela 3.3 – Parâmetros de controle (eixos de rolamento e guinada) .....	55
Tabela 4.1 – Respostas em regime permanente dos eixos de rolamento e guinada. ....	70



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos .....	2
1.2 Revisão bibliográfica .....	2
1.3 Metodologia .....	3
1.4 Conteúdo do trabalho .....	4
<b>2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....</b>	<b>6</b>
2.1 Definição de atitude .....	6
2.2 Princípios físicos .....	6
2.2.1 Leis de Newton .....	6
2.2.2 Momento angular .....	7
2.3 Sistemas de coordenadas e suas transformações.....	9
2.3.1 Sistema de referência inercial .....	10
2.3.2 Transformações fundamentais .....	10
2.3.3 Ângulos de Euler .....	12
2.4 Equações de Euler e dinâmica de atitude.....	16
2.4.1 Momento angular de um corpo rígido .....	16
2.4.2 Equações de Euler do Movimento .....	19
2.5 Torque devido ao Gradiente de Gravidade .....	21
<b>3 PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO.....</b>	<b>31</b>
3.1 Obtenção da equação do movimento linearizada.....	32
3.2 Projeto de controle para o eixo de arfagem.....	37
3.3 Projeto de controle para os eixos de rolamento e guinada .....	44
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>58</b>
4.1 Resultados obtidos para o controle do eixo de arfagem.....	58
4.2 Resultados obtidos para controle dos eixos de rolamento e guinada .....	62
<b>5 CONCLUSÕES .....</b>	<b>78</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>80</b>



# 1 INTRODUÇÃO

O lançamento do primeiro satélite artificial da Terra, Sputnik I, em 1957 marcou o início da famosa corrida espacial entre EUA e União Soviética, ficando em órbita por seis meses antes de cair. O primeiro satélite dos EUA, Explorer I, devido a problemas de dissipação de energia em suas antenas, teve alteração do seu eixo de giro e ficou fora de controle. Em 1962 o Alouette I, e em 1964 o Explorer XX, ambos sofreram rotação rápida e degradação devido ao torque de radiação solar. Em 1969, o Applications Technology Satellite 5 (ATS5) ficou instável devido à dissipação de energia no tubo de calor, entrando em uma rotação perturbada. Atualmente os satélites exigem expectativa de vida cada vez maior para conclusão de missões espaciais, consequentemente a melhoria contínua do controle da dinâmica de atitude é algo inquestionável.

Existem várias formas de controlar e estabilizar a atitude de um satélite em órbita, dentre elas estão as mais utilizadas como estabilização em três eixos, por rotação e por gradiente de gravidade. Neste projeto será utilizado o conceito de controle e estabilização ativa em três eixos, onde a atitude do veículo espacial é mantida através do uso de uma roda de inércia suspensa por dois eixos cardan (gimbals).

Segundo Wertz (1978), dispositivos para armazenamento de momento angular são usados em satélites para diferentes propósitos, tais como aumentar a estabilidade contra torques de distúrbio, fornecer um momento angular variável permitindo operações a 1 rpo (rotação por órbita) em missões orientadas para a Terra, absorver torques cíclicos e para transferir momento angular para o corpo do satélite para executar manobras de correção de atitude.

Kaplan (1976) reporta que torques de controle de atitude produzidos por dispositivos de transferência de momento angular são geralmente utilizados quando o torque devido ao gradiente de gravidade, sozinho, não é suficientemente capaz de permitir uma satisfatória correção devido às perturbações ocasionadas pelo desalinhamento dos propulsores de correção de órbita e torques de pressão de radiação solar.

De forma geral sobre a lógica empregada neste projeto é que se os sensores detectarem que o satélite adquiriu qualquer movimento de perturbação, automaticamente as rodas de inércia mudam a direção do momento angular interno através da deflexão do eixo cardan (gimbals), de tal modo a anular os torques de distúrbio e manter a orientação adequada do satélite.

## **1.1 OBJETIVOS**

O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria clássica de controle no projeto de um sistema de controle de atitude de satélites. A teoria de controle automático aplicada neste projeto pode ser pensada como um conjunto de técnicas especiais para resolver equações diferenciais lineares.

Necessita-se obter o modelo matemático que forneça as três equações linearizadas para os movimentos de rolamento, arfagem e guinada, em torno das condições nominais e posteriormente realizar o controle adequado e com precisão nos três eixos do satélite.

## **1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Trabalhos semelhantes a este projeto foram citados em artigos e livros de dinâmica de atitude e controle. Barret (1992) relatou em seu artigo publicado pela NASA que para elaborar um sistema de controle de atitude é de extrema importância uma avaliação antecipada dos torques predominantes que poderão agir e influenciar a dinâmica do satélite em órbita. Em seu artigo foram feitas análises do critério de estabilidade para encontrar o dimensionamento necessário da roda de inércia e os parâmetros de controle adequados para os eixos de rolamento, arfagem e guinada.

Kaplan (1976) por sua vez, em seu projeto de controle de atitude utilizando volantes de inércia, conseguiu estimar com perfeição os parâmetros de controle através de duas considerações: tempo de resposta do sistema e analisando analiticamente os requisitos de precisão e comparando com o erro em regime permanente para cada saída. A estabilidade e estimativa do ganho de autopilotagem escolhido teve uma análise mais detalhada usando como meio de avaliação o diagrama do lugar das raízes.



Wertz (1978) resume em seu trabalho que sistemas de controle de atitude que utilizam volantes de inércia basicamente são bastante comuns em projetos de veículos espaciais orientados para a Terra. Wertz (1978) relata que a vantagem deste tipo de projeto é que o volante de inércia pode ser usado como um atuador para o controle sendo uma ferramenta para responder mudanças da orientação nominal, por outro lado a desvantagem é que este equipamento é pesado e tem um custo relativamente elevado, sendo usado exclusivamente em veículos espaciais de grande porte.

### 1.3 METODOLOGIA

Os métodos a serem utilizados para atingir o objetivo são classificados nas seguintes etapas:

- a) **aprofundamento nos estudos teóricos dos assuntos relacionados ao projeto:** Notoriamente nas áreas da física (dinâmica de corpos rígidos), cálculo diferencial, cálculo vetorial, fundamentos da dinâmica orbital e de atitude, manobras de atitude, dispositivos para controle de atitude e teoria clássica de sistemas de controle automáticos;
- b) **análise do sistema:** Observar, interpretar e avaliar os requisitos do projeto;
- c) **modelagem matemática do sistema:** Através da utilização do conhecimento da física e matemática, esta etapa consiste em obter as equações do movimento. A base fundamental para formulação desta etapa está na teoria da *Equação do Movimento de Euler*, que correlaciona o torque com a derivada absoluta do momento angular total;
- d) **linearização da Equação Diferencial:** O objetivo nesta etapa é obter a equação do linearizada do movimento. Uma vez que a equação preliminar do movimento para este projeto é classificada como sendo uma equação diferencial não linear, é de extrema importância aplicar métodos de linearização das equações diferenciais de tal modo a facilitar assim a aplicação do controle;

- e) **aplicação da teoria clássica de controle:** Após a obtenção da equação linear do movimento, será então aplicada a teoria clássica de controle para que assim seja feita a elaboração das leis de controle adequadas para o projeto;
- f) **análise de estabilidade e das respostas:** Análise da estabilidade será feita através do diagrama do lugar das raízes. Para averiguar qual o comportamento do satélite, serão testados diferentes tipos de entradas, o sistema será excitado com torques de tendências constantes (entrada degrau), impulsivas e cíclicas;
- g) **apresentação das respostas e simulações:** As respostas obtidas e as simulações do projeto assim como análise dos parâmetros de controle escolhidos serão apresentadas pelo software Matlab;

#### 1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO

O trabalho será dividido em cinco partes, onde serão abordadas as etapas necessárias para a obtenção do resultado final. Segue o descritivo de cada etapa:

- a) Introdução: São detalhados os conceitos iniciais do trabalho, tais como a base introdutória para elaboração dos demais capítulos;
- b) Fundamentos teóricos: nesta etapa são apresentadas as bases teóricas do projeto, em sua maior parte assuntos relacionados à dinâmica de atitude do satélite, controle linear e todos os conceitos relacionados;
- c) Projeto e implementação: Após coletar toda a base teórica necessária, será então aplicado o conhecimento adquirido para elaborar o projeto de controle de atitude do satélite com seus parâmetros pré-estabelecidos;
- d) Resultados e discussões: Os cálculos, gráficos e simulações implementados até esta etapa serão testados e seus resultados serão apresentados de forma clara e objetiva;

- e) Conclusão: Os resultados obtidos serão analisados e por fim será dada uma conclusão satisfatória do que foi feito no projeto. Espera-se com esta etapa analisar o que se esperava no início do projeto e o que foi encontrado.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 DEFINIÇÃO DE ATITUDE

Segundo Wertz (1978) a atitude de um veículo espacial é definida como sendo a orientação em relação a um referencial conhecido. O movimento capaz de alterar a atitude é, de forma resumida, qualquer rotação do veículo em torno do seu centro de massa.

### 2.2 PRINCÍPIOS FÍSICOS

Algumas propriedades físicas foram largamente utilizadas a fim de conhecer e controlar a atitude do veículo espacial. Estes princípios são muito importantes e é extremamente fundamental uma breve base teórica sobre os principais conceitos.

#### 2.2.1 LEIS DE NEWTON

Newton pode ser identificado como sendo a pessoa responsável por formalizar as leis físicas com as quais é possível determinar completamente o movimento linear. Ele provou três leis mecânicas sendo elas:

- 1) A taxa de variação temporal da quantidade de movimento retilíneo de um corpo é proporcional à resultante das forças aplicadas sobre o corpo, ou seja,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (2.1)$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade linear do corpo. Se a massa é constante, então a Equação 2.1 pode ser expressa como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.2)$$

em que

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

- 2) Para um sistema de partículas, se a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 uma força  $\mathbf{F}_{12}$ , então a partícula 1 exercerá sobre a partícula 2 uma força igual e contrária,  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . Se não há força externa aplicada o centro de massa (ou baricentro) permanece imóvel ou em movimento retilíneo uniforme.
- 3) Quaisquer duas partículas se atraem uma à outra com uma força de magnitude

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.3)$$

$m_1$  e  $m_2$  são as massas das partículas,  $r$  é a distancia entre  $m_1$  e  $m_2$  e  $G = 6,6695 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$  é a constante da gravitação universal.

A lei da gravitação universal, na forma mais completa, também pode ser representada vetorialmente, ou seja,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (2.4)$$

em que  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  representam as posições das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente.

### 2.2.2 MOMENTO ANGULAR

O conceito de momento angular é importante tanto na dinâmica do corpo rígido quanto na dinâmica de partículas. A Figura 2.1 mostra o movimento de uma partícula de massa  $m$  em relação a um ponto  $O$  arbitrário e em relação a um ponto  $O'$  fixo no espaço.

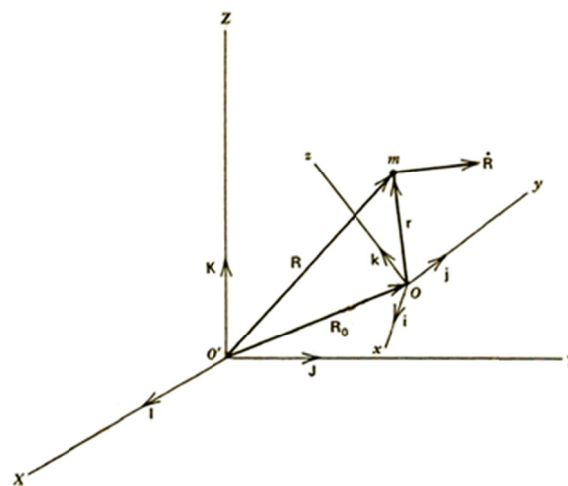


Figura 2.1 – Momento angular de  $m$  com relação à  $O$ .  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 6)

O vetor quantidade de movimento retilíneo da partícula de massa  $m$  da Figura 2.1, também denominado de momento linear, é definido por

$$\mathbf{p} \triangleq m\dot{\mathbf{R}}. \quad (2.5)$$

O momento do momento linear em relação a um ponto arbitrário  $O$  é definido por

$$\mathbf{h}_O \triangleq \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}, \quad (2.6)$$

Uma vez que  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{r}}$ , a Equação 2.6 pode ser escrita como:

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.7)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 2.7 é definido como o momento angular aparente no sistema de referência  $x,y,z$ , que está em movimento e o segundo termo do lado direito da Equação 2.7 é a correção devido ao movimento do ponto  $O$ .

A taxa de variação temporal de  $\mathbf{h}_O$  é de grande importância para o desenvolvimento das equações de movimento de atitude. Expandindo a derivada com relação ao tempo na Equação 2.7, é obtido:

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{R}}_O + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}}_O.$$

Porém  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ , então:

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{R}}_O + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.8)$$

Cada termo do lado direito da Equação 2.8 tem um significado físico. O primeiro representa a taxa de variação aparente do momento angular no sistema não inercial  $x,y,z$ . O segundo termo representa a correção devido à velocidade do ponto  $O$ . O último termo representa o efeito da aceleração do ponto  $O$ .

A taxa de variação do momento angular pode ser equiparada com um torque aplicado com relação o mesmo ponto  $O$ . O momento de uma força agindo em  $m$  com relação ao ponto  $O$  é expresso por:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{M}_O$  representa o torque com relação ao ponto  $O$  aplicado sobre a partícula de massa  $m$  e, neste caso,  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}$  que substituído na Equação 2.9 resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{r} \times m(\ddot{\mathbf{R}}_O + \ddot{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}}_O + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substituindo a Equação 2.10 na Equação 2.8 e rearranjando os termos, é obtido:

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O - \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.11)$$

Ou, por equivalência,

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O + \dot{\mathbf{R}}_O \times m\dot{\mathbf{r}}. \quad (2.12)$$

Uma importante observação pode ser feita imediatamente da Equação 2.12. Se o ponto  $O$  é fixo no espaço ou  $\mathbf{r}$  é constante, então:

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O. \quad (2.13)$$

Através da Equação 2.13 conclui-se que se o torque aplicado em relação ao ponto  $O$  é nulo, então não existe variação do momento angular da partícula em relação ao mesmo ponto  $O$ , neste caso  $\mathbf{h}_O$  é constante. Em outras palavras, o momento angular da partícula é conservado sob a condição de um torque nulo.

### 2.3 SISTEMAS DE COORDENADAS E SUAS TRANSFORMAÇÕES

Segundo Wertz (1978), para todo o descritivo de qualquer movimento de ponto material ou corpo rígido, deve-se necessariamente ter um ou mais sistemas de referência que possam orientar sobre a posição, velocidade, aceleração, rotação, quantidade de movimento; enfim, sistemas que possam dar a visão geral do movimento e como descrevê-lo. Nesta etapa do trabalho foi obtida a base teórica sobre o sistema inercial,

sistema móvel e a transformação de coordenadas de um para o outro, para que deste modo seja possível expressar qualquer coordenada em ambos os sistemas.

### 2.3.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA INERCIAL

Segundo Kaplan (1976), pode-se dizer que o sistema de referência inercial é o mais adequado para ter uma referência exata de qualquer movimento. De maneira geral, suas coordenadas são fixas com relação ao posicionamento das estrelas. Ao longo de um intervalo de tempo de interesse, situações práticas ditam que apenas sistemas de referencial inercial podem garantir uma precisão adequada. Um exemplo da utilização deste conceito seria para descrever o movimento orbital em volta da Terra, sendo este geralmente referenciado com o sistema de coordenadas inercial tendo a origem no centro da Terra com um dos eixos fixo e alinhado para Aries, outro eixo normal ao plano equatorial e o terceiro eixo sendo ortogonal para ambos.

### 2.3.2 TRANSFORMAÇÕES FUNDAMENTAIS

Para detalhar melhor o conceito de transformações de coordenadas, imagina-se o caso em que se deseja transferir as coordenadas do sistema referencial conhecido  $X,Y$  para o outro sistema referencial  $x,y$ . Estes sistemas são representados pela Figura 2.2

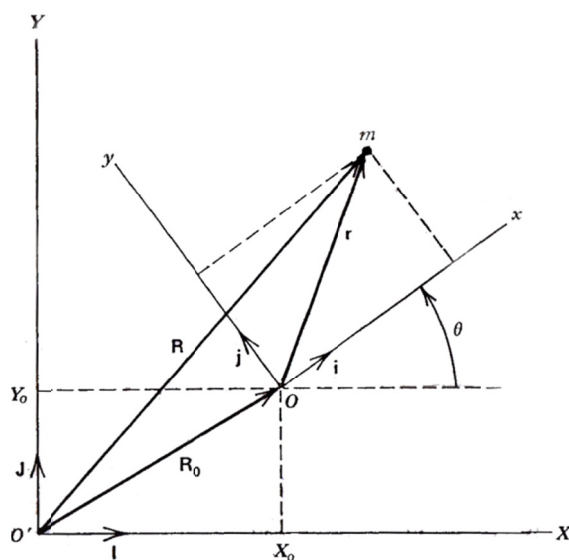


Figura 2.2 – Transformação de coordenadas em um sistema de duas dimensões  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 9)



As componentes dos vetores mostrados na Figura 2.2 são representadas por:

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J},$$

$$\mathbf{R}_O = X_O\mathbf{I} + Y_O\mathbf{J},$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Notando que  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}$ , as componentes  $X, Y$  são representados da seguinte forma:

$$X = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{I} = X_O + x\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{I} \cdot \mathbf{j}, \quad (2.14a)$$

$$Y = \mathbf{R} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J} = Y_O + x\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{J} \cdot \mathbf{j}. \quad (2.14b)$$

Os produtos escalares  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{j}$ , são os cossenos diretores que representam a orientação de cada eixo de um sistema em relação ao outro. Considerando um sistema com duas dimensões mostrado na Figura 2.2, os cossenos diretores são:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} = \cos \theta = \mathbf{J} \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} = -\sin \theta = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{i}$$

Rearranjando os termos da Equação 2.14:

$$X - X_O = x\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad (2.15a)$$

$$Y - Y_O = x\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{J} \cdot \mathbf{j} = x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (2.15b)$$

A Equação 2.15 pode ser representada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X - X_O \\ Y - Y_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A matriz dos cossenos diretores é chamada de *matriz de transformação*. Por definição, quando se trata de uma transformação feita de um sistema ortogonal para outro sistema ortogonal, então a inversa da *matriz de transformação* é igual a sua transposta. Desta forma as componentes  $x, y$  são facilmente obtidas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Nota-se através das Equações 2.16 e 2.17 que o a partícula de massa  $m$ , mostrada na Figura 2.2, pode ser representada tanto no sistema de referencia  $O'$  como também no sistema  $O$  simplesmente aplicando uma *matriz de transformação*.

### 2.3.3 ÂNGULOS DE EULER

Assumindo que ambos os sistemas de referencia  $X,Y,Z$  e  $x,y,z$  tenham o mesmo ponto de origem, segundo Lemos (2007), é possível representar as coordenadas de um sistema para o outro puramente através de uma sequencia de rotações. Essa sequencia de rotações é chamada de Ângulos de Euler.

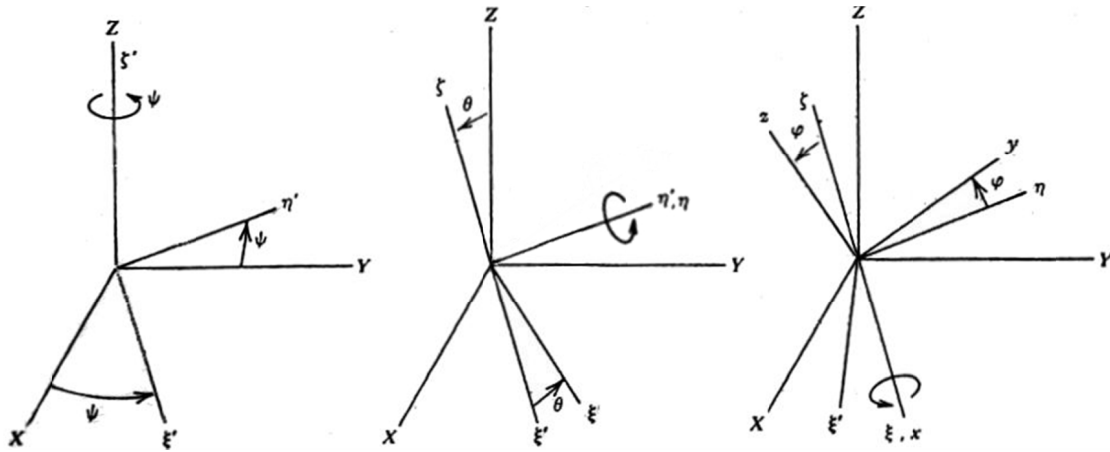


Figura 2.3 – Construção dos Ângulos de Euler.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 11)

As rotações demonstradas da Figura 2.3 são traduzidas da seguinte forma:

1. Rotação em torno do eixo  $Z$  através de um ângulo  $\psi$  produz os eixos  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ .
2. Rotação em torno do eixo  $\eta'$  através de um ângulo  $\theta$  produz os eixos  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .
3. Rotação em torno do eixo  $\xi$  através de um ângulo  $\varphi$  produz os eixos  $x,y,z$

Cada transformação é caracterizada por uma transformação ortogonal:

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.18a)$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\gamma} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix}, \quad (2.18b)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.18c)$$

Agora é possível fazer a transformação direta de  $X,Y,Z$  para  $x,y,z$  apenas combinando esta sequência de rotações,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\delta} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

Observando que  $\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\delta}$  devem permanecer nesta ordem, porque rotações finitas não podem ser representadas como vetores e, portanto, não são comutativas. Isso corresponde a uma sequência de rotação em  $\psi$ ,  $\theta$ , e  $\varphi$ , com o qual também devem ser feitas nesta sequência. Concluindo assim que a matriz de transformação de um sistema para o outro sob regime destas rotações é expresso da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\delta}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Assim,  $\boldsymbol{\alpha}$  transforma as componentes de um vetor expresso no sistema  $X,Y,Z$  para componentes expressos no sistema  $x,y,z$  e vice-versa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Outra observação importante é que  $\alpha$  é uma matriz ortogonal. Sendo ela ortogonal, a seguinte propriedade pode ser utilizada:

$$\alpha^{-1} = \alpha^T$$

Reescrevendo a Equação 2.21 utilizando a propriedade da matriz ortogonal

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \alpha^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

As taxas de variações dos Ângulos de Euler são dadas por  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\phi}$ . A velocidade angular total é representada pelo vetor  $\omega$  expresso em suas componentes no sistema referencial  $x,y,z$ , fixo ao corpo em movimento e representado pela Figura 2.4.

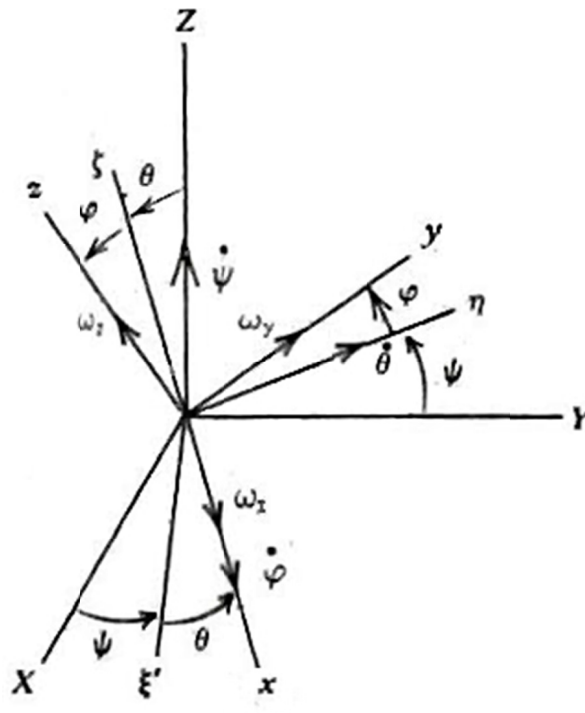


Figura 2.4 – Taxa de Variação dos Ângulos de Euler.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 13)

Segundo Lemos (2007), o vetor velocidade angular  $\omega$  depende linearmente das rotações  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\phi}$ , tal que:

$$\omega = \omega_{\psi} + \omega_{\theta} + \omega_{\phi}, \quad (2.23)$$

em que  $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  e  $\boldsymbol{\omega}_\varphi$  são vetores que representam a taxa de variação angular de  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  respectivamente. Dependendo da escolha do sistema de coordenadas, estes vetores ficam com apenas uma componente ao longo de um único eixo.

$\boldsymbol{\omega}_\psi$  - Rotação de  $\psi$  exclusivamente no eixo Z;

$\boldsymbol{\omega}_\theta$  - Rotação de  $\theta$  exclusivamente no eixo  $\eta$ ;

$\boldsymbol{\omega}_\varphi$  - Rotação de  $\varphi$  exclusivamente no eixo  $x$ .

Através das matrizes de transformação dadas pelas Equações 2.18 e 2.19, pode ser feita a transformação das componentes de cada vetor  $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  e  $\boldsymbol{\omega}_\varphi$  para o sistema de referência das coordenadas  $x,y,z$

$$\boldsymbol{\omega}_\psi = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.24a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.24b)$$

$$\boldsymbol{\omega}_\varphi = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24c)$$

Assimilando as Equações 2.24 e 2.23, é obtido:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta, \quad (2.25a)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (2.25b)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi. \quad (2.25c)$$

Ou na forma de matriz

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

## 2.4 EQUAÇÕES DE EULER E DINÂMICA DE ATITUDE

Um dos conceitos de maior importância para o projeto refere-se ao entendimento e a utilização das Equações de Euler na Dinâmica de Atitude de um veículo espacial. Para o desenvolvimento destas equações serão revisados certos aspectos como a relação de torque com a taxa de variação do momento angular, e apresentar novos conceitos como a relação entre momento angular com a inércia e a rotação de um corpo rígido.

### 2.4.1 MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Segundo Kaplan (1976), uma atenção básica na tratativa de movimento de partículas no espaço é que ela deve ser equilibrada respeitando as equações de movimento de um corpo rígido. Este conceito terá início considerando primeiramente a obtenção de uma equação que represente o momento angular de uma forma geral para o corpo rígido. A Figura 2.5 pode ser usada para tornar este assunto mais esclarecedor.

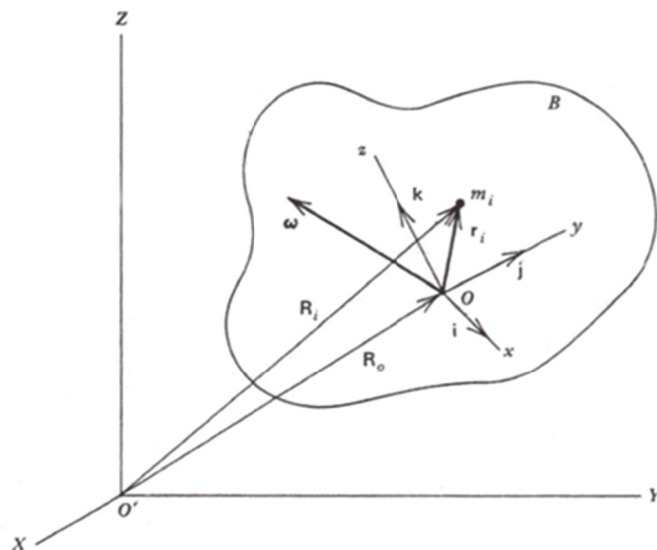


Figura 2.5 – Momento Angular de um Corpo Rígido.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 38)

A Figura 2.5 mostra o movimento de um corpo rígido  $B$  em relação a um ponto fixo  $O'$ . O corpo  $B$  possui um sistema de referência  $x,y,z$ , *fixo no corpo*, com origem no centro de massa  $O$ . A *velocidade absoluta* de um elemento de massa  $m_i$  que se encontra a uma distância  $\mathbf{r}_i$  de  $O$  é dada por:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + [\mathbf{v}_i]_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (2.27)$$

em que  $\mathbf{v}_i \triangleq \dot{\mathbf{R}}_i$ ;  $\mathbf{v}_O \triangleq \dot{\mathbf{R}}_O$  é a *velocidade absoluta* da origem  $O$  do sistema de referência móvel  $x,y,z$ ;  $[\mathbf{v}_i]_B \triangleq [\dot{\mathbf{r}}_i]_B$  é a *velocidade* de  $m_i$  *relativa* ao sistema de referencia móvel  $x,y,z$  e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$  é a velocidade de  $m_i$  devido à velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  do referencial móvel  $x,y,z$  em relação ao referencial fixo  $X,Y,Z$ .

Devido ao fato de  $B$  ser considerado um corpo rígido, obviamente a velocidade relativa de  $m_i$  é nula, pois as partículas estão fixas em relação ao referencial  $x,y,z$ , desta *forma*  $[\mathbf{v}_i]_B = 0$ , então,

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{R}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (2.28)$$

Aplicando a Equação 2.28 na definição do momento angular da Equação 2.6,

$$\mathbf{h}_{Oi} = \mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{h}_{Oi} = \mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i). \quad (2.29)$$

Se o corpo for pensado como um grande número de pequenas massas, então o momento angular total em relação ao ponto  $O$  de  $B$  é:

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{h}_{Oi} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

No qual é mais conveniente ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)m_i - \mathbf{v}_O \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (2.30)$$

Pela definição, o centro de massa  $O$  é definido com o ponto sobre o qual

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Agora a Equação 2.30 pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{h}_o = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) m_i. \quad (2.32)$$

A Equação 2.32 também pode ser verdadeira se  $\mathbf{v}_o = 0$  na Equação 2.30, que seria fisicamente se  $O$  fosse fixo no espaço. Agora, se  $m_i$  for pensando com uma massa ainda menor, aumentando assim o numero de elementos de massas, então a Equação 2.32 pode ser expressa na forma de integral com relação ao corpo  $B$ .

$$\mathbf{h}_o = \int_B \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm. \quad (2.33)$$

Expandindo o termo do integrando na Equação 2.33, a expressão resultante é:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = & [\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y(xy) - \omega_z(xz)]\mathbf{i} \\ & + [-\omega_x(xy) + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z(yz)]\mathbf{j} \\ & + [-\omega_x(xz) - \omega_y(yz) - \omega_z(x^2 + y^2)]\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que  $x, y, z$  e  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  são as componentes dos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\boldsymbol{\omega}$ , respectivamente.

A forma integrada da Equação 2.34 sobre as dimensões do corpo é rigorosamente uma função de distribuição de massas, notando que as componentes da velocidade angular são independentes da distribuição de massa. Assim, qualquer corpo rígido pode ser caracterizado por uma dada configuração constante a fim de estudar o momento angular e consecutivamente o movimento de atitude. Essas constantes são definidas como:

$$I_x = \int_B (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_B (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_B (x^2 + y^2) dm, \quad (2.35)$$

$$I_{xy} = \int_B (xy) dm, \quad I_{xz} = \int_B (xz) dm, \quad I_{yz} = \int_B (yz) dm, \quad (2.36)$$

em que  $I_x, I_y, I_z$ , são os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $x, y, z$ , respectivamente e  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  são os produtos de inércia do corpo  $B$ . Notando que



$I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  e  $I_{yz} = I_{zy}$ , e também que os produtos de inércia podem assumir valores positivos ou negativos, enquanto os momentos de inércia só podem assumir valores positivos. Finalmente, o momento angular de  $B$  pode ser simplificado da seguinte forma

$$\mathbf{h}_O = h_x \mathbf{i} + h_y \mathbf{j} + h_z \mathbf{k}. \quad (2.37)$$

Utilizando como base as Equações 2.33, 2.35, 2.36 e 2.37,  $\mathbf{h}_O$  pode ser representando da seguinte forma:

$$h_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \quad (2.38a)$$

$$h_y = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \quad (2.38b)$$

$$h_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z, \quad (2.38c)$$

que também pode ser expresso na forma de matriz:

$$\mathbf{h}_O = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

A matriz que contem os momentos e os produtos de inércia é conhecida como *tensor de inércia* e é identificado aqui como  $\mathbf{I}$ . Desta maneira, a Equação 2.39 pode ser escrita de forma mais simplificada, como sendo

$$\mathbf{h} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (2.40)$$

em que o subscrito  $O$  é descartado pois geralmente  $\mathbf{h}$  é considerado como sendo medido em relação ao centro de massa, não havendo assim necessidade de ficar discriminando o ponto de referencia adotado.

## 2.4.2 EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

Quando considerado um corpo rígido, as equações que envolvem torque e momento angular normalmente são desenvolvidas através da equação geral de movimento de

atitude. Através da Equação 2.13 foi provado que um torque agindo sobre um ponto é equivalente à taxa de variação do momento angular deste mesmo ponto. Esta afirmação é válida para um corpo rígido quando o ponto em questão é fixo no espaço ou é o próprio centro de massa. No desenvolvimento a seguir, o torque pode ser pensando como sendo aplicado em relação ao centro de massa do corpo rígido, desta forma sem perder a generalidade,

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}. \quad (2.41)$$

A taxa de variação absoluta é

$$\mathbf{M} = \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \quad (2.42)$$

em que o primeiro termo do lado direito da Equação 2.42 representa a taxa de variação aparente do momento angular no sistema de referência  $x,y,z$  fixo no corpo em movimento, e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}$  é o complemento da variação do momento angular devido à rotação do corpo.

Expandido a Equação 2.42 em termo dos componentes vetoriais,

$$\mathbf{M} = (\dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y)\mathbf{i} + (\dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z)\mathbf{j} + (\dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x)\mathbf{k}, \quad (2.43)$$

representando assim três equações diferenciais que relacionam o torque aplicado com a taxa de variação do momento angular:

$$M_x = \dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y, \quad (2.44a)$$

$$M_y = \dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z, \quad (2.44b)$$

$$M_z = \dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x. \quad (2.44c)$$

Estas são conhecidas como *Equações de Euler do Movimento*. Assim, de forma geral, o movimento de atitude de um corpo rígido pode ser modelado através dessas três simples equações. Nota-se que a Equação 2.44 é uma equação diferencial de primeira ordem em

h. No entanto ela pode ser convertida para uma equação diferencial de primeira ordem em  $\omega$  através da aplicação da Equação 2.38. Caso seja necessário representar o movimento no sistema de referencia inercial é necessária aplicação da transformação dada pela Equação 2.25 através dos ângulos de Euler, tornando-se assim uma equação diferencial de segunda ordem.

## 2.5 TORQUE DEVIDO AO GRADIENTE DE GRAVIDADE

Segundo Kaplan (1976), o princípio do torque devido ao gradiente de gravidade pode ser mais facilmente explicado considerando um satélite que possui, em suas dimensões, o comprimento de um dos eixos muito maior do que os outros dois e sendo este referenciado por um sistema de três eixos  $x,y,z$ . Pela Figura 2.6 nota-se que o centro de massa acompanha uma orbita circular e uma deflexão  $\theta$  causada a partir do eixo vertical entre os pontos 1 e 2 causa um torque de restauração gerado pelo desequilíbrio das forças agindo sobre as massas  $m_1$  e  $m_2$ . A força centrífuga agindo sobre  $m_1$  é maior que a força gravitacional sobre o mesmo ponto, por outro lado na massa 2 ocorre o contrário, a força da gravidade agindo sobre  $m_2$  é maior do que a força centrífuga neste mesmo ponto. Sob essas circunstancias, um conjugado de torques é criado tendo as forças aplicadas na direção do eixo vertical. O equilíbrio da força centrífuga e gravitacional ocorre unicamente no centro de massa.

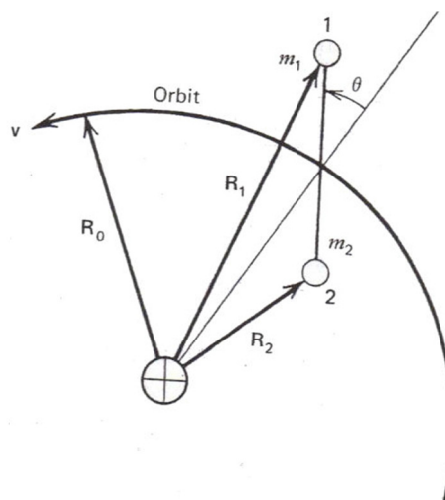


Figura 2.6 – Princípio do conceito de torque devido ao Gradiente de Gravidade.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 199).

A fim de modelar a equação do torque devido ao gradiente de gravidade utilizando notação de partículas, a Figura 2.7 demonstra o caso mais geral:

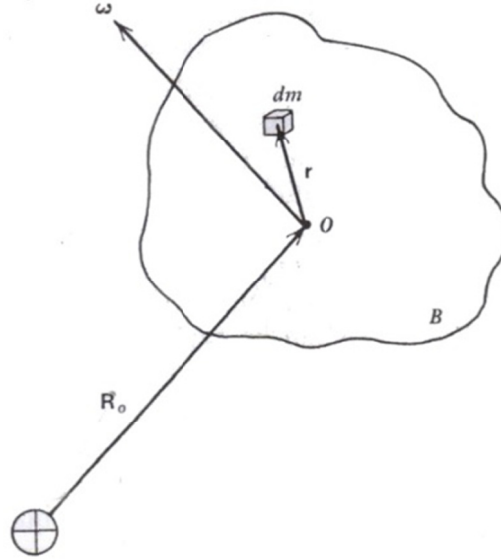


Figura 2.7 – Modelo de Gradiente de Gravidade.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 200).

Se  $\mathbf{G}$  é o torque produzido pela gravidade, então a equação do movimento é simplificada para:

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}, \quad (2.45)$$

em que  $\mathbf{h}$  é o momento angular do corpo  $B$  com relação ao seu centro de massa  $O$  dado pela Equação 2.33,

$$\mathbf{h} = \int_B \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, dm.$$

Para resolução do termo que está sendo integrado, aplica-se a identidade do produto triplo vetorial:

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r},$$

assim o momento angular pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{h} = \int_B [r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \, dm, \quad (2.46)$$

e sua taxa de variação absoluta com relação ao tempo é expressa da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}.$$

Substituindo o termo  $\mathbf{h}$  já fornecido pela Equação 2.46, notando também que  $\dot{\mathbf{r}} = 0$ , pois o corpo é considerado rígido e não há variação do vetor  $\mathbf{r}$ , então a derivada absoluta do momento angular é:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \int_B [r^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}] dm + \int_B (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dm. \quad (2.47)$$

Por outro lado  $\mathbf{G}$  também pode ser decomposto em sua uma forma mais completa. Começando por analisar a definição da Equação 2.9:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Para o torque devido ao Gradiente de Gravidade existe um conjugado de vários torques sendo aplicados sobre o corpo, ou seja, o torque total  $\mathbf{G}$  é a somatória de todos os torques sendo aplicados em cada partícula de massa:

$$\mathbf{G} = \int_B \mathbf{r} \times d\mathbf{F}. \quad (2.48)$$

Pela lei da Gravitação Universal expressa na Equação 2.4 e com base na representação vetorial dada pela Figura 2.7, a força  $\mathbf{F}$  pode ser referenciada da seguinte forma:

$$d\mathbf{F} = - \frac{Gm_T(\mathbf{R}_O + \mathbf{r})dm}{|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^3}. \quad (2.49)$$

Onde  $m_T$  é a massa da Terra, e  $(\mathbf{R}_O + \mathbf{r})$  representa o vetor posição que aponta do centro da Terra para a partícula  $dm$  cujo modulo é  $|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|$ . O termo  $Gm_T$  pode ser expresso pela constante  $\mu_{\oplus}$ . Com essas informações, a força gravitacional agindo na partícula  $dm$  é

$$d\mathbf{F} = - \frac{\mu_{\oplus}(\mathbf{R}_O + \mathbf{r})}{|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^3}. \quad (2.50)$$

Substituindo a Equação 2.50 na Equação 2.48:

$$\mathbf{G} = \int_B \mathbf{r} \times \left[ -\frac{\mu \oplus (\mathbf{R}_O + \mathbf{r})}{|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^3} \right] dm. \quad (2.51)$$

O termo  $|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^3$  pode ser simplificado, notando que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^2 &= (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \\ |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}| &= \sqrt{R_O^2 + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) + r^2} \\ |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}| &= \sqrt{R_O^2 \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)} \\ |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}| &= R_O \sqrt{\left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)} \\ |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^3 &= R_O^3 \sqrt{\left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)^3} \\ |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^3 &= R_O^3 \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)^{3/2} \\ |\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^{-3} &= \frac{1}{R_O^3} \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

A fim de simplificar a Equação 2.52, aplica-se a expansão em *Serie de Taylor* no termo

$\left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)^{-3/2}$ , notando que  $R_O \gg r$ , desta forma a expressão resultante é:

$$\left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right)^{-3/2} = 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + H.O.T, \quad (2.53)$$

em que *H.O.T* é definido como *Higher Order Terms*. Pela expansão utilizando a serie de Taylor *H.O.T* é um valor que tende para zero, portanto:

$$\left(1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2}\right)^{-3/2} \cong 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2}. \quad (2.54)$$

Substituindo os termos da Equação 2.54 em 2.52:

$$|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^{-3} \cong \frac{1}{R_O^3} \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2}\right). \quad (2.55)$$

Substituindo os termos da Equação 2.55 em 2.51:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_B \mathbf{r} \times \left[ -\mu_{\oplus} (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \frac{1}{R_O^3} \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2}\right) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \int_B \mathbf{r} \times \left[ \left( \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \right) - \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \int_B \left[ \left( \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) \mathbf{r} \times (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \right) - \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \int_B \left[ \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) - \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} \int_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) dm + \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} \int_B (\mathbf{R}_O \times \mathbf{r}) dm, \end{aligned}$$

notando que  $\mathbf{R}_O$  do segundo termo do lado direito é independente da distribuição de massa sobre o corpo  $B$  e pode ser colocado fora da integral,

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} \int_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) dm + \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} \mathbf{R}_O \times \int_B \mathbf{r} dm. \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{r}$  está referenciado no centro de massa, ou seja:

$$\int_B \mathbf{r} dm = 0,$$

permitindo assim que a Equação 2.56 seja escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} \int_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) dm. \quad (2.57)$$

A fim de encontrar a condição de equilíbrio da Equação 2.57, o próximo passo é desenvolver analiticamente a equação referente à taxa de variação do momento angular  $\frac{d\mathbf{h}}{dt}$ . Primeiramente assume-se que o sistema de referencia nominal tenha os vetores unitários  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  na direção *Zênite*, *trajetória da orbita* e *orbita normal* respectivamente. Se a única variação angular do corpo é decorrente do movimento orbital  $\dot{\theta}$ , então a Equação 2.47 fornece:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \int_B (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dm$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \int_B [(\mathbf{xI} + \mathbf{yJ} + \mathbf{zK}) \cdot \dot{\theta}\mathbf{K}][(\mathbf{xI} + \mathbf{yJ} + \mathbf{zK}) \times \dot{\theta}\mathbf{K}] dm$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \int_B \dot{\theta}z[(\dot{\theta}y\mathbf{I} - \dot{\theta}x\mathbf{J})] dm$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\theta}^2 \int_B [(yz\mathbf{I} - xz\mathbf{J})] dm$$

Usando a definição do produto de inércia fornecida pela Equação 2.36, então:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\theta}^2 (I_{yz}\mathbf{I} - I_{xz}\mathbf{J}), \quad (2.58)$$

em que  $I_{yz}, I_{xz}$  são os produtos de inércia com relação aos eixos  $x, y, z$  fixo no corpo em movimento, com o qual estão instantaneamente paralelos para  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ , respectivamente.

Fazendo a mesma analogia sobre as referencias adotadas e notando através do modelo dado pela Figura 2.7, é conclusivo que  $\mathbf{R}_o = R_o\mathbf{I}$ . Desta forma a equação do torque devido ao gradiente de gravidade fornecido pela Equação 2.57 pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B (\mathbf{xI} + \mathbf{yJ} + \mathbf{zK}) \cdot (R_o\mathbf{I})[(\mathbf{xI} + \mathbf{yJ} + \mathbf{zK}) \times (R_o\mathbf{I})] dm$$



$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B (xR_o)[(zR_o\mathbf{J} - yR_o\mathbf{K})]dm$$

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^3} \int_B (xz\mathbf{J} - xy\mathbf{K})dm$$

Usando a definição do produto de inércia fornecida pela Equação 2.36:

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^3} (I_{xz}\mathbf{J} - I_{xy}\mathbf{K}). \quad (2.59)$$

Relacionando as Equações 2.58 e 2.59 e substituindo pelas componentes encontradas:

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}$$

$$\frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^3} (I_{xz}\mathbf{J} - I_{xy}\mathbf{K}) = \dot{\theta}^2 (I_{yz}\mathbf{I} - I_{xz}\mathbf{J}).$$

Por definição de movimento de uma órbita  $\dot{\theta}^2 = \mu_{\oplus}/R_o^3$ , desta forma a equação de equilíbrio fica:

$$\frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^3} (I_{xz}\mathbf{J} - I_{xy}\mathbf{K}) + \frac{\mu_{\oplus}}{R_o^3} (I_{yz}\mathbf{J} - I_{xz}\mathbf{I}) = 0. \quad (2.60)$$

É conclusivo através da Equação 2.60 que para haver equilíbrio é necessário que  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , ou seja, o corpo deve ter seus eixos principais de inércia alinhados com o sistema de referencia  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  de tal forma que os produtos de inércia sejam nulos.

O movimento estável utilizando como referência as coordenadas  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  já pode ser investigado, no entanto, de forma mais geral, é conveniente expressar as componentes vetoriais no sistema de referencia que seja fixo ao corpo rígido em movimento  $x, y, z$  com os vetores unitários  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  respectivamente, sendo esta direção não necessariamente coincidente com a direção nominal  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ . Desta forma a Equação 2.57 é reescrita:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B [(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k})] \\ \cdot [(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k})] dm \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B [(xR_x + yR_y + zR_z)][(yR_z - zR_y)\mathbf{i} + (zR_x - xR_z)\mathbf{j} + (xR_y - yR_x)\mathbf{k}] dm$$

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B [(xyR_xR_z + y^2R_yR_z + yzR_z^2 - xzR_xR_y - yzR_y^2 - z^2R_yR_z)\mathbf{i} + (xzR_x^2 + yzR_xR_y + z^2R_xR_z - x^2R_xR_z - xyR_yR_z - xzR_z^2)\mathbf{j} + (x^2R_xR_y + xyR_y^2 + xzR_yR_z - xyR_x^2 - y^2R_xR_y - yzR_xR_z)\mathbf{k}] dm.$$

Usando novamente a definição da Equação 2.36 sobre produtos de inércia:

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} [(\int_B (y^2 - z^2)R_yR_z dm + I_{xy}R_xR_z + I_{yz}R_z^2 - I_{xz}R_xR_y - I_{yz}R_y^2)dm]\mathbf{i} + [(\int_B (z^2 - x^2)R_xR_z dm + I_{xz}R_x^2 + I_{yz}R_xR_y - I_{xy}R_yR_z - I_{xz}R_z^2)dm]\mathbf{j} + [(\int_B (x^2 - y^2)R_xR_y dm + I_{xy}R_y^2 + I_{xz}R_yR_z - I_{xy}R_x^2 - I_{yz}R_xR_z)dm]\mathbf{k}$$

Neste projeto e na maioria dos casos, os eixos fixo ao corpo em movimento  $x, y, z$  apontados na direção  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  respectivamente são considerados como sendo os eixos principais de inércia, então por definição e por simplicidade os produtos de inércia  $I_{xy}, I_{xz}$  e  $I_{yz}$  são nulos pois não há anti-simetria na distribuição de massas. Assim:

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \left[ \left( R_yR_z \int_B (y^2 - z^2) dm \right) \mathbf{i} + \left( R_xR_z \int_B (z^2 - x^2) dm \right) \mathbf{j} + \left( R_xR_y \int_B (x^2 - y^2) dm \right) \mathbf{k} \right] \quad (2.61)$$

Comparando a Equação 2.61 com as expressões encontradas na Equação 2.35 para os momentos principais de inércia, é notável que:

$$\int_B (y^2 - z^2) dm = \int_B (x^2 + y^2) dm - \int_B (x^2 + z^2) dm = I_z - I_y, \quad (2.62a)$$

$$\int_B (z^2 - x^2) dm = \int_B (y^2 + z^2) dm - \int_B (x^2 + y^2) dm = I_x - I_z, \quad (2.62b)$$

$$\int_B (x^2 - y^2) dm = \int_B (x^2 + z^2) dm - \int_B (y^2 + z^2) dm = I_y - I_x. \quad (2.62c)$$

Substituindo as expressões da Equação 2.62 em 2.61, é obtido:

$$G_x = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} (I_z - I_y) R_y R_z, \quad (2.63a)$$

$$G_y = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} (I_x - I_z) R_z R_x, \quad (2.63b)$$

$$G_z = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} (I_y - I_x) R_x R_y. \quad (2.63c)$$

Seguindo o modelo da Figura 2.7, a Equação 2.63 representa o caso mais geral do torque devido ao gradiente de gravidade, desde que os eixos fixos ao corpo sejam os eixos principais de inércia conforme já citado anteriormente. Para o projeto e implementação deste trabalho, um novo sistema de referencia nominal será descrito. Considera-se o sistema de referência que tem suas componentes  $X, Y, Z$  e os vetores unitário  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  alinhadas com a *trajetória da órbita, órbita normal e nadir* respectivamente, conforme orientação da Figura 3.1. Através da consideração preliminar do modelo dado pela Figura 2.7, o vetor  $\mathbf{R}$  é definido como tendo sua origem no centro da Terra e apontando para o centro de massa do satélite. Desta forma, no novo sistema de referencias adotado  $X, Y, Z$ , o vetor  $\mathbf{R}$  terá apenas uma componente na direção oposta de *nadir*, ou seja, na direção de *zênite*. Para transformar a componente de  $\mathbf{R}$  para as coordenadas que tem como referencia os eixos principais de inércia  $x, y, z$  fixo ao corpo em movimento, basta aplicar a matriz de transformação dada na Equação 2.19 para uma sequencia de rotação 3-2-1:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin \theta \\ -R \sin \phi \cos \theta \\ -R \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Considerando que os desvios angulares ocorridos do corpo rígido em movimento com relação ao referencial nominal sejam pequenos, desta forma as aproximações  $\sin \theta \cong \theta$ ,  $\sin \phi \cong \phi$  e  $\cos \theta \cong 1$  são validas. Aplicando esta aproximação na Equação 2.64:

$$R_x = \theta R, \quad (2.65a)$$

$$R_y = -\varphi R, \quad (2.65b)$$

$$R_z = -R. \quad (2.65c)$$

Substituindo os termos da Equação 2.65 na Equação 2.63, o torque devido ao gradiente de gravidade para pequenas deflexões angulares é obtido:

$$G_x = -\frac{3\mu_{\oplus}}{R^3}(I_y - I_z)\varphi, \quad (2.66a)$$

$$G_y = -\frac{3\mu_{\oplus}}{R^3}(I_x - I_z)\theta, \quad (2.66b)$$

$$G_z = -\frac{3\mu_{\oplus}}{R^3}(I_y - I_x)\theta\varphi \cong 0. \quad (2.66c)$$

Notando que  $G_z \cong 0$  porque o produto resultante de  $\theta\varphi$  é aproximadamente nulo devido as pequenas deflexões consideradas.

Para uma órbita geoestacionária pode-se relacionar a velocidade angular com a seguinte definição:

$$\frac{\mu_{\oplus}}{R^3} = \omega_o^2,$$

onde  $\omega_o$  representa a taxa de variação orbital  $\omega_o = 7,28 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

Usando esta definição, a Equação 2.66 fica:

$$G_x = -3\omega_o^2(I_y - I_z)\varphi, \quad (2.67a)$$

$$G_y = -3\omega_o^2(I_x - I_z)\theta, \quad (2.67b)$$

$$G_z = 0. \quad (2.67c)$$

A Equação 2.67 representa o torque devido ao gradiente de gravidade com relação aos eixos principais de inércia sob a condição de pequenos desvios angulares com relação ao referencial nominal. Esta equação será posteriormente utilizada no projeto como sendo um dos torques responsáveis pelo movimento de atitude do satélite.

### 3 PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO

O satélite da Figura 3.1 está na posição nominal com os eixos fixos no corpo  $x, y, z$  – eixos principais de inércia – alinhados com o referencial orbital. A orientação nominal do volante também é mostrada na Figura 3.2, com o eixo de giro coincidindo com o eixo de arfagem. Os parâmetros do satélite assim como os requisitos para o torque de perturbação e de precisão de apontamento são dados na Tabela 3.1. O modelo utilizado é o de um corpo rígido mais um volante de inércia suspenso por dois eixos cardam.

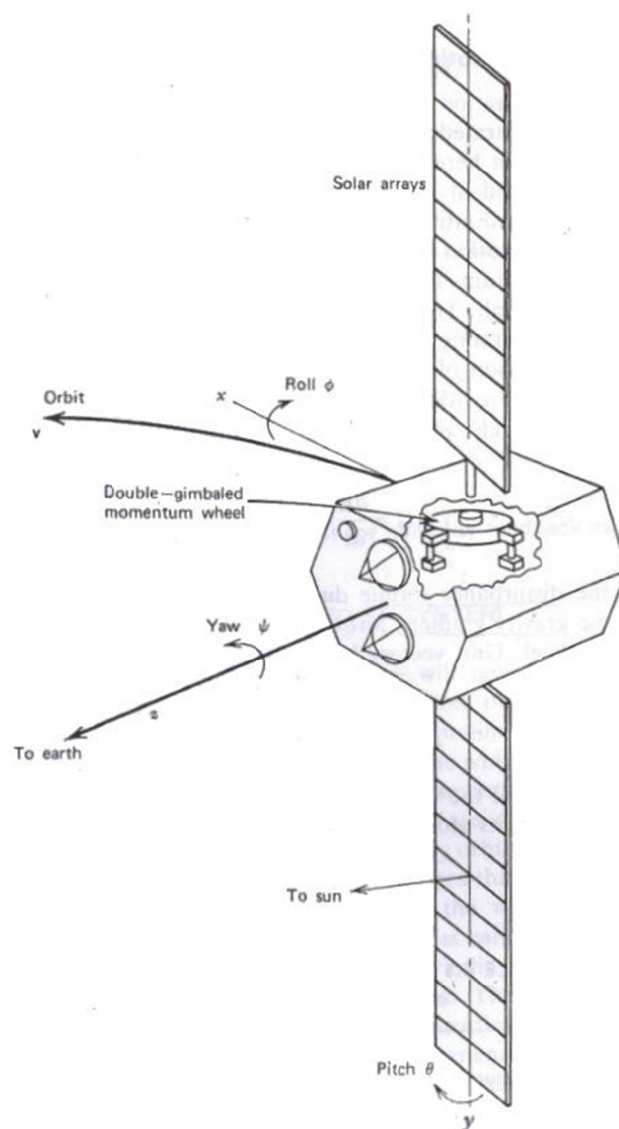


Figura 3.1 – Concepção artística do satélite estabilizado em três eixos.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 242).

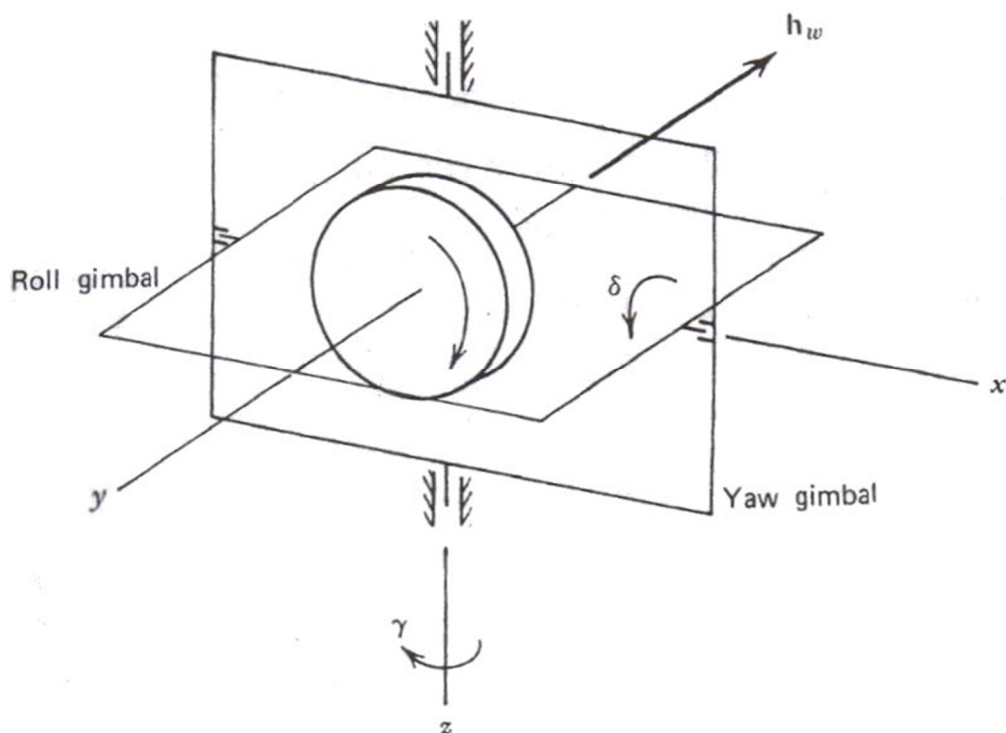


Figura 3.2 – Orientação nominal da roda de inércia.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 243).

Tabela 3.1 – Parâmetros e requisitos de projeto

Massa do satélite	716 Kg
Momento de inércia	$I_x = I_z = 2000 \text{ N.m.s}^2, I_y = 400 \text{ N.m.s}^2$
Requisitos de precisão de atitude	Rolamento ( $\phi$ ) e Arfagem ( $\theta$ ) = 0,05°, Guinada ( $\psi$ ) = 0,40°
Torque de pressão solar (posição orbital $t = 0$ em 6 A.M ou 6 P.M)	$T_x = 2 \times 10^{-5}(1 - 2 \sin \omega_o t) \text{ N.m}$ $T_y = 10^{-4}(\cos \omega_o t) \text{ N.m}$ $T_z = -5 \times 10^{-5}(\cos \omega_o t) \text{ N.m}$
Torque de desalinhamento do propulsor	$T_F = 8,5 \times 10^{-5} \text{ N.m}$

(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 241).

### 3.1 OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO LINEARIZADA

Devido à órbita ser geoestacionária considera-se que os torques ambientais agindo sobre o satélite são apenas decorrentes da pressão de radiação solar, ao gradiente de gravidade e ao desalinhamento dos propulsores. Separando os torques ambientais em duas parcelas as Equações de Euler do movimento para o sistema são dadas por,

$$\mathbf{T} + \mathbf{G} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{T}$  são os torques devidos à pressão de radiação solar e ao desalinhamento dos propulsores;  $\mathbf{G}$  é o torque de gradiente de gravidade;  $\mathbf{h}$  é o momento angular total do sistema (incluindo a roda) e  $\boldsymbol{\omega}$  é o vetor velocidade angular do referencial  $x,y,z$ , fixo no corpo do satélite. O termo entre colchetes na Equação 3.1 representa a derivada do vetor  $\mathbf{h}$  com relação ao referencial fixo no corpo e o último termo representa a derivada de  $\mathbf{h}$  devido à rotação. O vetor  $\mathbf{h}$  representa o momento angular total incluindo a roda de inércia:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_v + \mathbf{h}_w, \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{h}_v$  representa o vetor momento angular apenas do veículo e  $\mathbf{h}_w$  é o momento angular da roda de inércia. O momento angular do veículo  $\mathbf{h}_v$  (excluindo o momento angular da roda) pode ser expresso em termos das componentes  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  correspondente aos eixos principais do corpo  $x,y,z$ , respectivamente, como sendo:

$$\mathbf{h}_v = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}. \quad (3.3)$$

As componentes do momento angular da roda podem ser obtidas da Figura 3.3

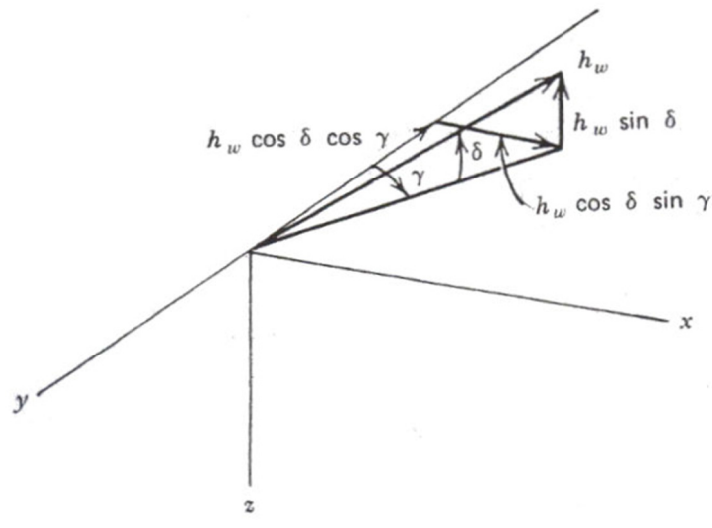


Figura 3.3 – Componentes do momento angular.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 243).

$$\mathbf{h}_w = (\cos \delta \sin \gamma)h_w \mathbf{i} - (\cos \delta \cos \gamma)h_w \mathbf{j} - (\sin \delta)h_w \mathbf{k}, \quad (3.4)$$

em que  $\delta$  e  $\gamma$  são os ângulos de rolamento e guinada do cardam, respectivamente.

Substituindo o primeiro termo do lado direito da Equação 3.1 com as componentes das Equações 3.2, 3.3 e 3.4, é obtido:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b &= \left[ \frac{d(I_x \omega_x)}{dt} + \frac{d(h_w \cos \delta \sin \gamma)}{dt} \right] \mathbf{i}, \\ &+ \left[ \frac{d(I_y \omega_y)}{dt} - \frac{d(h_w \cos \delta \cos \gamma)}{dt} \right] \mathbf{j}, \\ &+ \left[ \frac{d(I_z \omega_z)}{dt} - \frac{d(h_w \sin \delta)}{dt} \right] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Expandindo e resolvendo as derivadas em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b &= [I_x \dot{\omega}_x - \dot{\delta}(\sin \delta \sin \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \cos \gamma)h_w + (\cos \delta \cos \gamma)\dot{h}_w] \mathbf{i} + \\ &[I_y \dot{\omega}_y + \dot{\delta}(\sin \delta \cos \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \sin \gamma)h_w - (\cos \delta \cos \gamma)\dot{h}_w] \mathbf{j} + \\ &[I_z \dot{\omega}_z - \dot{\delta}(\cos \delta)h_w - (\sin \delta)\dot{h}_w] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Combinando o segundo termo do lado direito da Equação 3.1 com as Equações 3.2, 3.3 e 3.4:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} &= (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \times \{ [I_x \omega_x + (\cos \delta \sin \gamma)h_w] \mathbf{i} + [I_y \omega_y - \\ &(\cos \delta \cos \gamma)h_w] \mathbf{j} + [I_z \omega_z - (\sin \delta)h_w] \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

Resolvendo o produto vetorial, então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} &= [\omega_y(I_z \omega_z - h_w \sin \delta) - \omega_z(I_y \omega_y - h_w \cos \delta \cos \gamma)] \mathbf{i} + [\omega_z(I_x \omega_x + \\ &h_w \cos \delta \sin \gamma) - \omega_x(I_z \omega_z - h_w \sin \delta)] \mathbf{j} + [\omega_x(I_y \omega_y - h_w \cos \delta \cos \gamma) - \\ &\omega_y(I_x \omega_x + h_w \cos \delta \sin \gamma)] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substituindo os termos encontrados nas Equações 3.5 e 3.6 na Equação 3.1, então:



$$\begin{aligned}
\mathbf{T} + \mathbf{G} = & [I_x \dot{\omega}_x - \dot{\delta}(\sin \delta \sin \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \cos \gamma)h_w + (\cos \delta \sin \gamma)\dot{h}_w + \\
& \omega_y(\omega_z I_z - h_w \sin \delta) - \omega_z(\omega_y I_y - h_w \cos \delta \cos \gamma)]\mathbf{i} + \\
& [I_y \dot{\omega}_y + \dot{\delta}(\sin \delta \cos \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \sin \gamma)h_w - (\cos \delta \cos \gamma)\dot{h}_w + \omega_z(I_x \omega_x + \\
& h_w \cos \delta \sin \gamma) - \omega_x(I_z \omega_z - h_w \sin \delta)]\mathbf{j} + [I_z \dot{\omega}_z - \dot{\delta}(\cos \delta)h_w - (\sin \delta)\dot{h}_w + \\
& \omega_x(I_y \omega_y - h_w \cos \delta \cos \gamma) - \omega_y(I_x \omega_x + h_w \cos \delta \sin \gamma)]\mathbf{k}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

A Equação 3.7 é classificada como sendo uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não linear. A equação do movimento pode ser linearizada considerando que as deflexões angulares que ocorrem no eixo cardan sejam pequenas. Esta aproximação permite fazer as seguintes substituições:

$$\sin \delta = \delta,$$

$$\sin \gamma = \gamma, \quad (3.8)$$

$$\cos \delta = \cos \gamma = 1.$$

Desvios do momento nominal da roda  $h_n$  também são considerados pequenos, permitido assim que  $h_w = h_n$ . Aplicando a Equação 3.8, os componentes de controle da roda de momento podem ser definidos usando como base a Equação 3.4:

$$h_{xc} = \gamma h_n,$$

$$h_{zc} = -\delta h_n, \quad (3.9)$$

$$\dot{h}_{yc} = -\dot{h}_w.$$

Evidentemente o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  depende linearmente das rotações  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , e  $\omega_o$  tal que :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\phi + \boldsymbol{\omega}_o, \quad (3.10)$$

em que  $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  e  $\boldsymbol{\omega}_\phi$  representam os vetores rotação no eixo de guinada, arfagem e rolamento, respectivamente e  $\boldsymbol{\omega}_o$  representa o vetor velocidade angular decorrente da

órbita geoestacionária. Juntos e somados esses vetores representam a velocidade angular total do veículo. O vetor velocidade angular deve ter suas componentes representadas com relação aos eixos principais de inércia  $x,y,z$ , e para realizar esta conversão basta aplicar a matriz de transformação expressa nas Equações 2.18 e 2.19. Uma vez que a conversão dos vetores  $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  e  $\boldsymbol{\omega}_\varphi$  já foram obtidas através da Equação 2.24, resta converter o vetor  $\boldsymbol{\omega}_o$  para as componentes dos eixos principais de inércia:

$$\boldsymbol{\omega}_o = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_o \cos \theta \sin \psi \\ -\omega_o (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi) \\ -\omega_o (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

notando que a componente  $\omega_o$  da velocidade angular orbital é negativa porque é oposta ao sentido da rotação de arfagem já adotado, conforme mostra a Figura 3.1.

Combinando as Equações 2.24, 3.11 e substituindo na Equação 3.10, a velocidade angular em termo das componentes ao longo dos eixos principais de inércia é obtido:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_o \cos \theta \sin \psi \\ -\omega_o (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi) \\ -\omega_o (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega} &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \omega_o \cos \theta \sin \psi - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \varphi - \omega_o (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi) + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \omega_o (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) - \dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Novamente considerando que as deflexões angulares ocasionadas no corpo rígido em relação ao referencial nominal sejam pequenas, a Equação 3.12 pode também ser linearizada:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \psi \omega_o \\ \dot{\theta} - \omega_o \\ \dot{\psi} + \varphi \omega_o \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

cuja derivada com relação ao tempo é:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - \dot{\psi}\omega_o \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} + \dot{\phi}\omega_o \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Aplicando as aproximações fornecidas nas Equações 3.8 e 3.9 na Equação 3.7, é obtido:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \mathbf{G} = & [I_x \dot{\omega}_x + \dot{h}_{xc} + \omega_y(\omega_z I_z + h_{zc}) - \omega_z(\omega_y I_y - h_n)]\mathbf{i} \\ & + [I_y \dot{\omega}_y - \dot{h}_{yc} + \omega_z(I_x \omega_x + h_{xc}) - \omega_x(I_z \omega_z - h_{zc})]\mathbf{j} \\ & + [I_z \dot{\omega}_z + \dot{h}_{zc} + \omega_x(I_y \omega_y - h_n) - \omega_y(I_x \omega_x + h_{xc})]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo  $\mathbf{G}$  pela Equação 2.67,  $\boldsymbol{\omega}$  pela Equação 3.13,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  pela Equação 3.14 e isolando  $\mathbf{T}$  em 3.15, a equação linearizada do movimento é obtida:

$$T_x = I_x \ddot{\phi} + [4\omega_o^2(I_y - I_z) + \omega_o h_n]\phi + [-\omega_o(I_x - I_y + I_z) + h_n]\dot{\psi} + \dot{h}_{xc} - \omega_o h_{zc}, \quad (3.16a)$$

$$T_y = I_y \ddot{\theta} + [3\omega_o^2(I_x - I_z)]\theta + \dot{h}_{yc}, \quad (3.16b)$$

$$T_z = I_z \ddot{\psi} + [\omega_o^2(I_y - I_x) + \omega_o h_n]\psi - [-\omega_o(I_x - I_y + I_z) + h_n]\dot{\phi} + \dot{h}_{zc} + \omega_o h_{xc}. \quad (3.16c)$$

### 3.2 PROJETO DE CONTROLE PARA O EIXO DE ARFAGEM

Projeto de controle automático de arfagem é relativamente mais simples do que os outros eixos, uma vez que seu movimento é independente e desacoplado dos demais eixos. Pelas especificações do satélite dados na Tabela 3.1, temos que  $I_x = I_z$ , desta forma a equação linearizada do movimento de arfagem pode ser simplificada para:

$$T_y = I_y \ddot{\theta} + \dot{h}_{yc}, \quad (3.17)$$

em que  $\dot{h}_{yc}$  representa a taxa de variação do momento angular da roda de inércia e tem o objetivo de impor diretamente o torque de controle sobre o eixo de arfagem. Uma vez que os sensores disponíveis podem fornecer apenas as medições angulares e para haver

amortecimento é necessário também mensurar a taxa de variação angular, um *pseudorate modulator* é empregado no sistema. Basicamente este dispositivo consegue modular o torque de controle  $\dot{h}_{yc}$  e sintetizar a taxa de variação angular  $\dot{\theta}$ , fazendo o torque de controle ser dependente da taxa de variação angular.

O conceito básico do *pseudorate modulator* é mostrador na Figura 3.4:

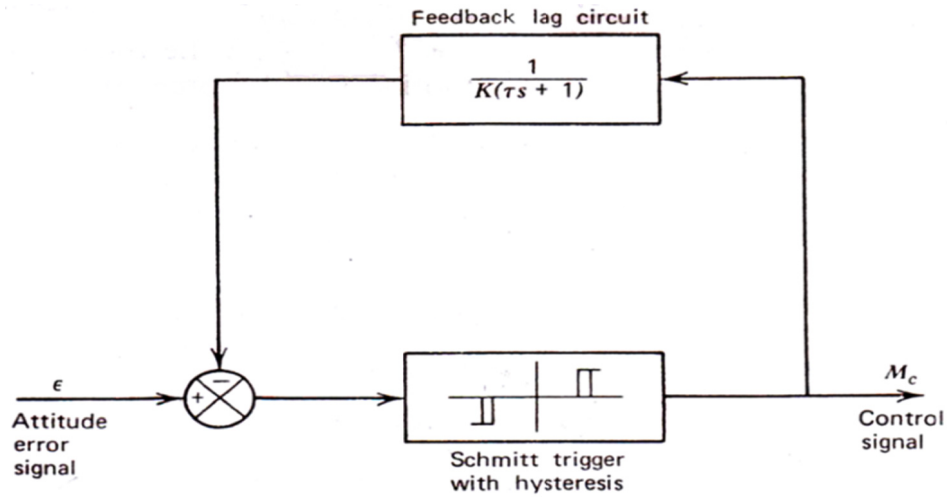


Figura 3.4 – Esquema do *pseudorate modulator*.  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 246).

Segundo Kaplan (1976), o *pseudorate modulator* é basicamente um gerador de pulsos biestáveis onde esses pulsos são de amplitude constante que existem unicamente quando a tensão de entrada fornecida pelo sensor excede um determinado valor. Este dispositivo também é usado no projeto de controle dos eixos de rolamento e guinada. Uma das vantagens da utilização do *pseudorate modulator* é que ele consegue sintetizar a taxa de variação angular quando a medição direta não é possível. Basicamente é composto por um *Schmitt trigger com histerese*, que produz um trem de pulsos, cujo sinal tem a saída na seguinte forma:

$$M_c = K(\tau\dot{\epsilon} + \epsilon) \quad (3.18)$$

Com base no conceito do *pseudorate modulator*, uma forma de controle satisfatória é:

$$\dot{h}_{yc} = K_p(\tau_p\dot{\theta} + \theta), \quad (3.19)$$

A Equação 3.19 tem a forma característica de um controlador proporcional derivativo onde o termo  $\dot{\theta}$  introduz o amortecimento necessário.  $K_p$  e  $\tau_p$  equivalem ao *ganho de autopilotagem* e *constante de tempo derivativo* respectivamente. Através do controlador proporcional derivativo escolhido para este sistema, a Equação 3.17 agora pode ser expressa na forma clássica de um sistema amortecido de segunda ordem:

$$T_y = I_y \ddot{\theta} + K_p \tau_p \dot{\theta} + K_p \theta. \quad (3.20)$$

Aplicando a transformada de Laplace, então:

$$T_y(s) = (I_y s^2 + K_p \tau_p s + K_p) \Theta(s). \quad (3.21)$$

Cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{\Theta(s)}{T_y(s)} = \frac{1}{I_y s^2 + K_p \tau_p s + K_p}. \quad (3.22)$$

O digrama de blocos do controle de arfagem pode ser representando da seguinte forma:

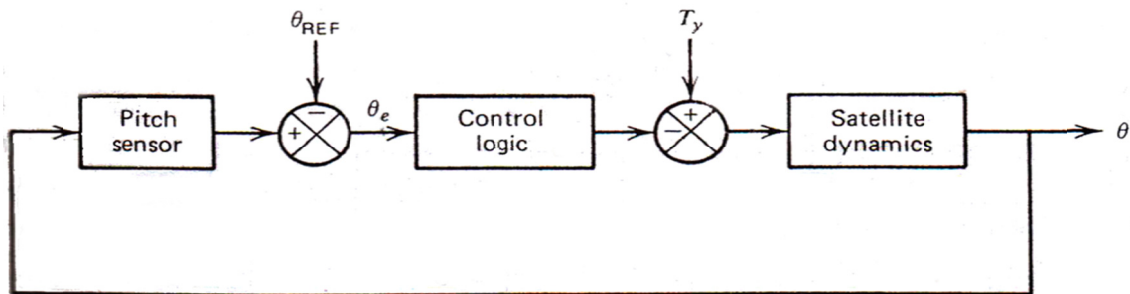


Figura 3.5 – Diagrama de blocos do eixo de arfagem  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 245).

Simplificando o diagrama de blocos da Figura 3.5, assume-se que o ângulo de referencia para o controle seja  $\theta_{REF} = 0$  e que os erros decorrentes do sensor são preliminarmente ignorados. Desta forma, o diagrama de blocos detalhado é relativamente simples e ilustrado na Figura 3.6:

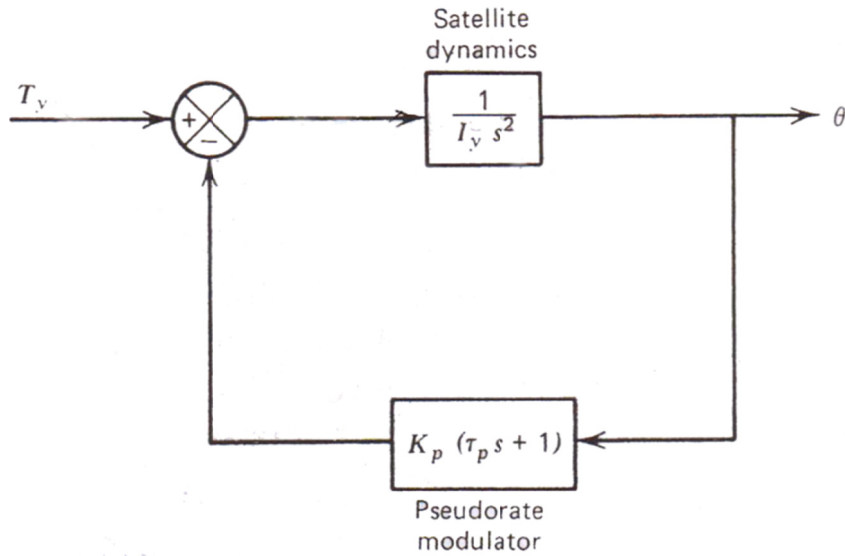


Figura 3.6 – Diagrama de blocos deduzido (eixo de arfagem)  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 246).

A função de transferência da Equação 3.22, em termos clássicos de controle de segunda ordem, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\Theta(s)}{T_y(s)} = \frac{1}{I_y s^2 + K_p \tau_p s + K_p} = \frac{\omega_p^2 / K_p}{s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2}, \quad (3.23)$$

de tal forma que as variáveis de controle, frequência natural e fator de amortecimento, são facilmente obtidas pela seguinte definição:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K_p}{I_y}}, \quad \zeta_p = \frac{\tau_p}{2} \sqrt{\frac{K_p}{I_y}}. \quad (3.24)$$

Uma vez que o *overshoot* não é desejável para tal aplicação, os valores dos parâmetros são inicialmente ajustados  $\zeta_p = 1$  (amortecimento critico). Se  $\zeta_p > 1$ , essa escolha atrasaria a resposta do sistema, enquanto que um valor  $\zeta_p < 1$  ocasionaria o indesejável *overshoot*. Assim, pela Equação 3.24 temos que:

$$K_p = I_y \omega_p^2, \quad \tau_p = \frac{2}{\omega_p}. \quad (3.25)$$

Combinando as Equações 3.25 e 3.23, então a função de transferência assume a seguinte forma:

$$\frac{\Theta(s)}{T_y(s)} = \frac{1}{I_y(s+\omega_p)^2}. \quad (3.26)$$

A seleção do *ganho de autopilotagem*  $K_p$  é baseada em duas considerações, tempo de resposta do sistema e erro no estado estacionário. Uma vez que o requisito de precisão em arfagem é especificado na Tabela 3.1, então o erro no estado estacionário deve ser  $\theta < 0,05^\circ$ . Além disso, a Tabela 3.1 mostra também que o principal torque externo é a pressão de radiação solar que é senoidal com frequência orbital e tem um máximo de  $T_y = 10^{-4} N.m$ . Assumindo que a *constante de tempo derivativo*  $\tau_p$  seja muito menor do que o período orbital, então haverá determinados períodos em que o sistema se comportará como um sistema do tipo entrada degrau, e esses instantes serão os picos da resposta senoidal. Desta forma o erro máximo no estado estacionário pode ser estimado utilizando o *teorema do valor final*.

$$\theta_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta(s). \quad (3.27)$$

Considerando entrada do tipo degrau na variável de Laplace,  $T_y(s) = \frac{10^{-4}}{s} N.m$ , então a saída é:

$$\Theta(s) = \frac{1}{s} \frac{10^{-4}}{I_y(s+\omega_p)^2}. \quad (3.28)$$

Substituindo a Equação 3.28 na Equação 3.27 temos que:

$$\theta_{ss} = \frac{10^{-4}}{I_y \omega_p^2} = \frac{10^{-4}}{K_p}. \quad (3.29)$$

Através da Equação 3.29 e usando o método de *tentativas e erros*, um valor aparentemente adequado para a seleção do ganho é de  $K_p = 0,275 N.m/rad$ , que pela Equação 3.24 fornece  $\omega_p = 0,02622 rad/s$  e  $\tau_p = 80s$ . Esta seleção gera um máximo erro de arfagem de:

$$\theta_{ss} = \frac{10^{-4}}{0,275} = 3,6336 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,0208^\circ,$$

ou seja, bem abaixo do requisito de precisão de  $0,05^\circ$ .

Para analisar a estabilidade do sistema e avaliar o ganho pré-selecionado  $K_p = 0,275 \text{ N.m/rad}$ , será plotado o diagrama do lugar das raízes utilizando a ferramenta *Matlab*. Para realizar tal procedimento, inicialmente é necessário obter a função de transferência em malha aberta que atribui às condições de localização dos pólos no gráfico do lugar das raízes. Através da Figura 3.5, é deduzível que:

$$G(s) = \frac{1}{I_y s^2}, \quad H(s) = K_p(\tau_p s + 1), \quad (3.30)$$

em que  $G(s)$  é a função de transferência referente à dinâmica do satélite ou, em termos de controle, pode ser chamada de *planta* do sistema. Já a função  $H(s)$  é a função de transferência de realimentação do sistema, decorrente do controle proporcional derivativo (PD).

De forma geral, a função de transferência do sistema é:

$$\frac{\Theta(s)}{T_y(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}. \quad (3.31)$$

Segundo Ogata (1997), através da teoria clássica de controle, conclui-se que a condição de pólo da função de transferência seja:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.32a)$$

$$G(s)H(s) = -1 \quad (3.32b)$$

Ou na forma polar,

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (3.32c)$$

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \dots \quad (3.32d)$$

Onde a função de transferência de malha aberta é:



$$G(s)H(s) = \frac{1}{I_y s^2} K_p (\tau_p s + 1) = K_p \frac{(80s+1)}{400s^2} \quad (3.33)$$

O gráfico da Figura 3.7 foi gerado a partir da Equação 3.33 através do Matlab. Nele estão representados todos os possíveis lugares das raízes que respeitam as condições de pólo da Equação 3.32 para cada valor correspondente de  $K_p$ . O gráfico tem a forma típica de uma função de segunda ordem com dois pólos em  $s = 0$  e um único zero na parte real e negativa do gráfico. É notável também que o ganho selecionado  $K_p = 0,275$  tem os pólos correspondentes no eixo real, o que significa coerência com o amortecimento critico  $\zeta_p = 1$ .

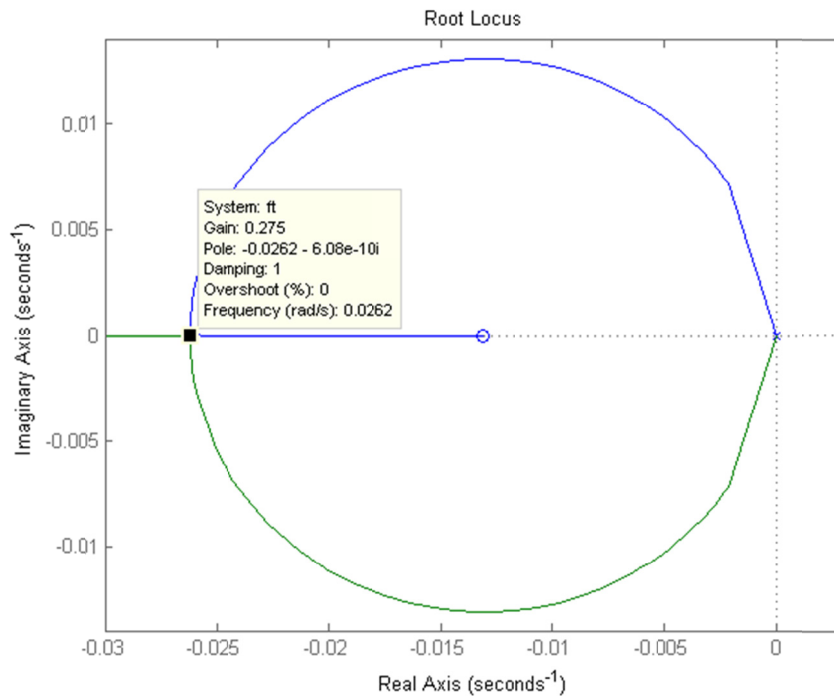


Figura 3.7 – Gráfico do lugar das raízes para análise dos parâmetros escolhidos (eixo de arfagem).

Para facilitar a visualização, segue abaixo a Tabela com valores numéricos dos parâmetros de controle adotados para o eixo de arfagem:

Tabela 3.2 – Parâmetros de controle (eixo de arfagem)

Parâmetros de controle (eixo de arfagem)	Valores
$K_p$ , ganho de autopilotagem.	0,275 N.m/rad
$\tau_p$ , constante de tempo derivativo.	80s
$\omega_p$ , frequência natural.	0,0262 rad/s
$\zeta_p$ , fator de amortecimento.	1

### 3.3 PROJETO DE CONTROLE PARA OS EIXOS DE ROLAMENTO E GUINADA

Segundo Kaplan (1976), o acoplamento entre os eixos de rolamento e guinada é resultado da orientação da roda de momento, no qual é nominal ao longo do eixo normal a órbita. Um conveniente recurso da roda de momento é que ela pode fornecer acoplamento entre os eixos de rolamento e guinada permitindo um controle preciso sem usar um sensor angular direto para guinada. Os torques de controle são produzidos através da deflexão dos eixos cardans. Uma vez que os desvios angulares do eixo de rolamento são monitorados inteiramente pelo sensor de horizonte, este eixo pode ser controlado diretamente de acordo com os erros angulares de rolamento. Os desvios angulares do eixo de guinada são sentidos indiretamente através do acoplamento com o eixo de rolamento. Esta técnica é algumas vezes referenciada como *gyrocompassing*. A magnitude do momento angular nominal da roda  $h_n$  e os ganhos do sistema são escolhidos de tal forma a fazer com que o controle do eixo de rolamento consiga sentir os erros de guinada (Ex. , artificialmente aumentando o efeito de acoplamento). No entanto, isso deve ser feito de tal forma que os erros de rolamento não sejam transformados em erros de guinada e vice versa. Um efeito significativo de acoplamento é alcançado através de valores altos do momento angular da roda. Isso implica que uma condição favorável seja aplicada para o momento angular nominal da roda:

$$h_n \gg \max[I_x \omega_o, I_y \omega_o, I_z \omega_o]. \quad (3.34)$$

Desta forma as equações linearizadas para os eixos de rolamento e guinadas dadas pelas Equações 3.16a e 3.16c podem ser simplificadas para:

$$T_x = I_x \ddot{\phi} + \omega_o h_n \phi + h_n \dot{\psi} + \dot{h}_{xc} - \omega_o h_{zc}, \quad (3.35)$$

$$T_z = I_z \ddot{\psi} + \omega_o h_n \psi - h_n \dot{\phi} + \dot{h}_{zc} + \omega_o h_{xc}. \quad (3.36)$$

Colocando entre colchetes os torques de controle, ou seja, os termos que podem ser ajustados através das deflexões angulares, desta forma:

$$T_x = I_x \ddot{\phi} + \omega_o h_n \phi + h_n \dot{\psi} + [\dot{h}_{xc} - \omega_o h_{zc}], \quad (3.37)$$

$$T_z = I_z \ddot{\psi} + \omega_o h_n \psi - h_n \dot{\phi} + [\dot{h}_{zc} + \omega_o h_{xc}]. \quad (3.38)$$

Esses termos em colchetes serão os responsáveis por manterem o controle dos eixos de rolamento e guinada. Eles irão gerar torques necessários que ajustarão o sistema de acordo com as especificações do projeto. Uma vez que este sistema não possui um sensor direto de guinada,  $\psi$ , a lei de controle deve ter seus termos apenas relacionados com  $\phi$  e  $\dot{\phi}$  que são quantidades medíveis pelos sensores. Usando novamente um *pseudorate modulator*, a lei de controle que satisfaz esse critério é:

$$M_{xc} = \dot{h}_{xc} - \omega_o h_{zc} + \omega_o h_n \phi = K(\tau \dot{\phi} + \phi), \quad (3.39)$$

$$M_{zc} = \dot{h}_{zc} + \omega_o h_{xc} - h_n \dot{\phi} = -kK(\tau \dot{\phi} + \phi), \quad (3.40)$$

onde  $M_{xc}$  e  $M_{zc}$  representam os torques de controle de rolamento e guinada respectivamente,  $K$  é o *ganho de autopilotagem*,  $\tau$  é o *tempo constante derivativo* e  $k$  é a taxa de *ganho proporcional de rolamento para guinada*.

Para o ajuste adequado de controle a ser utilizado, é conveniente definir novos termos de comando do momento angular que desacoplam a taxa orbital.

$$h_{xd} = h_{xc} \text{ e } h_{zd} = h_{zc} - h_n \phi \quad (3.41)$$

Substituindo os novos termos de comando na lei de controle, então:

$$M_{xc} = \dot{h}_{xd} - \omega_o h_{zd} = K(\tau \dot{\phi} + \phi) \quad (3.42)$$

$$M_{zc} = \dot{h}_{zd} + \omega_o h_{xd} = -kK(\tau \dot{\phi} + \phi), \quad (3.43)$$

Desta forma as Equações 3.42 e 3.43 representam um oscilador não amortecido com frequência orbital  $\omega_o$ . Segundo Kaplan (1976) a oscilação dos comandos de momento angular sob esta taxa tem o efeito de desacoplar as dinâmicas de rolamento e guinada que surgem com a frequência orbital. Em outras palavras, os comandos para a deflexão do cardan são referenciados em um sistema inercial, assim como o vetor momento angular, mesmo que o satélite esteja arfando em taxa orbital  $\omega_o$ .

Fisicamente, para que as leis de controle dadas pelas Equações 3.42 e 3.43 sejam verdadeiras, é necessário o ajuste contínuo apenas nas deflexões angulares do cardan  $\delta$  e  $\gamma$ . Desta forma faz-se necessário encontrar qual deve ser a equação necessária capaz de aferir o ângulo necessário para o ajuste em cada instante de tempo. Em termos de deflexão angular do cardan, a Equação 3.41 é reescrita da seguinte forma:

$$h_{xd} = \gamma h_n$$

$$h_{zd} = -\delta h_n - h_n \phi$$

Substituindo  $h_{xd}$  na Equação 3.42 e aplicando a transformada de Laplace temos que a saídas  $\gamma$  é:

$$h_n s \Gamma(s) - \omega_o H_{zd}(s) = K \tau s \Phi(s) + K \Phi(s),$$

$$\Gamma(s) = [K(\tau s + 1)\Phi(s) + \omega_o H_{zd}(s)] \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{h_n}. \quad (3.44)$$

Substituindo  $h_{zd}$  na Equação 3.42 e aplicando a transformada de Laplace temos que a saída  $\Delta$  é:

$$-h_n s \Delta(s) - h_n s \Phi(s) + \omega_o H_{xd}(s) = -k K \tau s \Phi(s) - k K \Phi(s),$$

$$\Delta(s) = -[-k K(\tau s + 1)\Phi(s) - \omega_o H_{xd}(s)] \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{h_n} - \Phi(s). \quad (3.45)$$

Com base nas Equações 3.44 e 3.45 é deduzível a formulação de um diagrama de blocos para o sistema de controle:

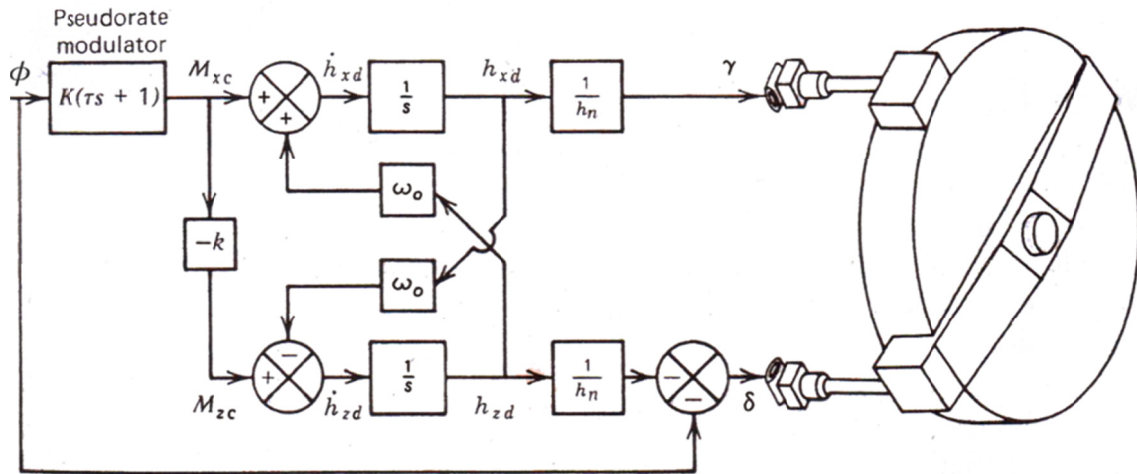


Figura 3.8 – Diagrama de blocos para o sistema de controle rolamento/guinada  
(Fonte: KAPLAN, 1976, p. 253).

De forma geral sobre o entendimento do diagrama, o sensor de rolamento envia o sinal de entrada que é processada pelo *pseudorate modulator*. Consecutivamente os comandos de deflexão do cardan  $\gamma$  e  $\delta$  são produzidos de acordo com as leis de controle já estabelecidas. Em outras palavras, através da entrada  $\phi$ , as saídas  $\gamma$  e  $\delta$  se ajustam para manterem as Equações 3.39 e 3.40 verdadeiras, desta forma as equações do movimento podem ter seus coeficientes alterados substituindo os termos de controle da Equação 3.39 na Equação 3.37:

$$T_x = I_x \ddot{\phi} + K\tau \dot{\phi} + K\phi + h_n \dot{\psi}, \quad (3.46a)$$

e substituindo os termos de controle da Equação 3.40 na Equação 3.38:

$$T_z = I_z \ddot{\psi} + \omega_o h_n \psi - kK\tau \dot{\phi} - kK\phi. \quad (3.46b)$$

Na Equação 3.46a é notável que o coeficiente de  $\phi$  é modificado de  $\omega_o h_n$  para  $K$ , enquanto que na Equação 3.46b o coeficiente de  $\dot{\phi}$  é modificado de  $-h_n$  para  $-kK\tau$ . Isso significa que os movimentos no eixo de rolamento e guinada agora podem ser ajustados apenas alterando os parâmetros controláveis  $K$ ,  $\tau$  e  $k$ .

Para investigar a estabilidade do sistema, assim como as respostas de rolamento e guinada, as novas equações do movimento são reescritas na forma de Laplace

$$T_x(s) = I_x s^2 \Phi(s) + K(\tau s + 1)\Phi(s) + h_n s \Psi(s), \quad (3.47a)$$

$$T_z(s) = I_z s^2 \Psi(s) + \omega_o h_n \Psi(s) - kK(\tau s + 1)\Phi(s). \quad (3.47b)$$

Que em sua forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} T_x(s) \\ T_z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x s^2 + K(\tau s + 1) & h_n s \\ -kK(\tau s + 1) & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Cramer para encontrar as saídas  $\Phi(s)$  e  $\Psi(s)$ , então:

$$\Phi(s) = \frac{\begin{vmatrix} T_x(s) & h_n s \\ T_z(s) & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_x s^2 + K(\tau s + 1) & h_n s \\ -kK(\tau s + 1) & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}}$$

e

$$\Psi(s) = \frac{\begin{vmatrix} I_x s^2 + K(\tau s + 1) & T_x(s) \\ -kK(\tau s + 1) & T_z(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_x s^2 + K(\tau s + 1) & h_n s \\ -kK(\tau s + 1) & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}}$$

É notável que os denominadores de ambas saídas são idênticos, desta forma é conveniente definir a *equação característica* como sendo:

$$E.C. = \begin{vmatrix} I_x s^2 + K(\tau s + 1) & h_n s \\ -kK(\tau s + 1) & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} E.C. &= I_x I_z s^4 + K I_z \tau s^3 + (K I_z + I_x \omega_o h_n + kK \tau h_n) s^2 + (\omega_o h_n K \tau + kK h_n) s \\ &\quad + \omega_o h_n K \end{aligned} \quad (3.48)$$

Desta forma, a resposta angular de rolamento é obtida:

$$\Phi(s) = \frac{T_x(s)(I_z s^2 + \omega_o h_n) - T_z(s) h_n s}{E.C.} \quad (3.49)$$

Quando  $T_z = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Phi(s)}{T_x(s)} = \frac{I_z s^2 + \omega_o h_n}{E.C.} \quad (3.50)$$

Quando  $T_x = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Phi(s)}{T_z(s)} = \frac{-h_n s}{E.C.} \quad (3.51)$$

Da mesma maneira a resposta angular de guinada é obtida:

$$\Psi(s) = \frac{T_z(s)(I_x s^2 + K\tau s + K) + kK(\tau s + 1)T_x(s)}{E.C.} \quad (3.52)$$

Quando  $T_x = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Psi(s)}{T_z(s)} = \frac{I_x s^2 + K\tau s + K}{E.C.} \quad (3.53)$$

Quando  $T_z = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Psi(s)}{T_x(s)} = \frac{kK(\tau s + 1)}{E.C.} \quad (3.54)$$

A seleção dos valores dos parâmetros de controle de rolamento e guinada inicia-se examinando a equação característica, no qual pode ser fatorada em um produto de dois polinômios quadráticos:

$$E.C. \cong (I_x s^2 + K\tau s + K)(I_z s^2 + k h_n s + \omega_o h_n) = 0. \quad (3.55)$$

Essa equação só é verdadeira desde que

$$K\tau I_z \gg k h_n I_x. \quad (3.56)$$

As raízes da Equação 3.55 leva a obtenção dos parâmetros de frequência natural e taxa de amortecimento:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{I_x}}, \quad \zeta_1 = \frac{K\tau}{\sqrt{4KI_x}} = \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{K}{I_x}} \quad (3.57a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_o h_n}{I_z}}, \quad \zeta_2 = \frac{k h_n}{\sqrt{4 \omega_o h_n I_z}} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{h_n}{\omega_o I_z}}. \quad (3.57b)$$

Segundo Kaplan (1976), as raízes de altas frequências ( $\omega_1, \zeta_1$ ) são características da dinâmica de rolamento, enquanto as raízes de baixas frequências ( $\omega_2, \zeta_2$ ) são características da dinâmica de guinada durante a correção do desvio angular  $\psi$ . Um grande valor de  $h_n$  resultaria em um rápido ajuste de guinada em respeito ao período orbital.

O *ganho de autopilotagem*  $K$  é selecionado a partir da aplicação do teorema do valor final na Equação 3.49, considerando  $T_z \cong 0$  e um torque constante no eixo de rolamento, ou seja,  $T_x = \text{constante}$ , desta forma:

$$\phi_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_x}{s^4 I_x I_z + K I_z \tau s^3 + (K I_z + I_x \omega_o h_n + k K \tau h_n) s^2 + (\omega_o h_n K \tau + k K h_n) s + \omega_o h_n K}.$$

$$\phi_{ss} = \frac{T_x}{K} \quad (3.58)$$

Levando em consideração que o máximo torque que possa ocorrer no eixo de rolamento seja decorrente do desalinhamento dos propulsores  $T_x = T_F = 8,5 \times 10^{-5} N.m$  dado pela Tabela 3.1, e que o valor permissível do desvio angular no eixo seja de até  $0,05^\circ$ , então pela Equação 3.58 leva a um valor mínimo requerido de  $K = 0,097 N.m/rad$  com uma frequência natural correspondente de  $\omega_1 = 0,007 rad/s$ . Grandes valores de  $K$  resultam em pequeno erro no estado estacionário e rápido tempo de resposta, desta forma uma frequência natural de  $\omega_1 = 0,025 rad/s$  que corresponde ao ganho  $K = 1,25 N.m/rad$  é escolhida de momento. O valor definitivo de  $K$  também dependerá de uma análise do lugar das raízes. Valores de  $\tau$  (*tempo constante de rolamento*) e  $k$  (*ganho proporcional de rolamento para guinada*) são selecionados de tal forma a fornecer amortecimento critico para as dinâmicas de rolamento e guinada, assim, a partir da Equação 3.57, ajustando  $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$ ,  $h_n = 200 N.m.s$ , é então encontrado  $\tau = 80s$  e  $k = 0,054$ .

Para justificar a escolha de  $h_n = 200 N.m.s$ , é aplicado o teorema do valor final na Equação 3.52 considerando as entradas  $T_x$  e  $T_z$  entradas do tipo degrau, desta forma:



$$\psi_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_z K + kK(\tau s + 1)T_x}{I_x I_z s^4 + K I_z \tau s^3 + (K I_z + I_x \omega_o h_n + kK\tau h_n)s^2 + (\omega_o h_n K \tau + kK h_n)s + \omega_o h_n K}.$$

$$\psi_{ss} = \frac{T_z + kT_x}{\omega_o h_n}. \quad (3.59)$$

Uma vez que a contribuição do torque no eixo de rolamento é pequena (porque  $k=0,054$ ), apenas o torque no eixo de guinada precisa ser considerado para a estimação do valor de  $h_n$ ,

$$h_n \geq \frac{|T_z|}{\omega_o |\psi_{ss}|_{max}}. \quad (3.60)$$

Considerando que a máxima amplitude do torque no eixo de guinada seja  $T_z = T_F = 8,5 \times 10^{-5} N.m$ , e que o desvio angular máximo permissível no eixo de guinada seja de  $0,40^\circ$  conforme Tabela 3.1, então pela Equação 3.60 esses parâmetros levam a um valor mínimo que o momento angular nominal da roda deve trabalhar:

$$h_n \geq 167,25 N.m.s$$

Portanto, o valor de  $h_n = 200 N.m.s$  satisfaz esse critério além de assegurar que  $\psi_{ss}$  mantenha as especificação do limite angular até que a correção seja feita. Além do mais, a seleção em conjunto destes parâmetros satisfazem as condições das Equações 3.34 e 3.56.

Para o ajuste final de todos os parâmetros do sistema, é de extrema importância uma análise do diagrama do lugar das raízes usando como base a equação característica em sua forma completa dada pela Equação 3.48. No entanto, é preciso primeiramente encontrar a função de transferência de malha aberta  $G(s)H(s)$ .

Seja a função de transferência em malha fechada escrita na sua forma geral da seguinte forma:

$$FTMF = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

Definindo os numeradores de  $G(s)$  e  $H(s)$  como  $N_1(s)$  e  $N_2(s)$  respectivamente e os denominadores de  $G(s)$  e  $H(s)$  como  $D_1(s)$  e  $D_2(s)$  respectivamente. Dessa forma,

$$FTMF = \frac{N_1(s)D_2(s)}{N_1(s)N_2(s)+D_1(s)D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{E.C.}, \quad (3.61)$$

e por definição a função de transferência de malha aberta escrita da seguinte forma:

$$FTMA = G(s)H(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} \quad (3.62)$$

Segundo Ogata (1997) e por definição na teoria clássica de controle, quando o ganho  $K=0$  no lugar das raízes então os pólos de malha fechada são os mesmos pólos de malha aberta. Fazendo  $K = 0$  na Equação Característica 3.48 é obtido o denominador da Equação 3.62,

$$D_1(s)D_2(s) = I_x I_z s^4 + I_x \omega_o h_n s^2. \quad (3.63)$$

Pela Equação 3.61 é observável que:

$$N_1(s)N_2(s) + D_1(s)D_2(s) = E.C. \quad (3.64)$$

Expandindo  $E.C.$  e substituindo os termos da Equação 3.63 em 3.64:

$$N_1(s)N_2(s) + I_x I_z s^4 + I_x \omega_o h_n s^2 = I_x I_z s^4 + K I_z \tau s^3 + (K I_z + I_x \omega_o h_n + k K \tau h_n) s^2 + (\omega_o h_n K \tau + k K h_n) s + \omega_o h_n K,$$

Colando  $N_1(s)N_2(s)$  em evidências:

$$N_1(s)N_2(s) = K I_z \tau s^3 + (K I_z + k K \tau h_n) s^2 + (\omega_o h_n K \tau + k K h_n) s + \omega_o h_n K \quad (3.65)$$

Substituindo as Equações 3.63 e 3.65 na Equação 3.62 é obtida a função de transferência em malha aberta para o sistema de rolamento e guinada

$$FTMA = G(s)H(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = K \frac{I_z \tau s^3 + (I_z + k \tau h_n) s^2 + (\omega_o h_n \tau + k h_n) s + \omega_o h_n}{I_x I_z s^4 + I_x \omega_o h_n s^2}. \quad (3.66)$$

Com base nos parâmetros pré-definidos de  $\tau = 80s$ ,  $h_n = 200 N.m.s$ ,  $k=0,054$  e nos valores da Tabela 3.1 que contem as especificações do satélite, a Equação 3.66 pode ser escrita em caráter numérico:

$$FTMA = K \frac{160000s^3 + 2864s^2 + 11,96s + 0,01456}{4 \times 10^6 s^4 + 29,12s^2}. \quad (3.67)$$

O gráfico da Figura 3.9 é gerado a partir da Equação 3.67 através da ferramenta Matlab, respeitando as condições de pólo da Equação 3.32 para todos os possíveis lugares das raízes para cada valor de K correspondente.

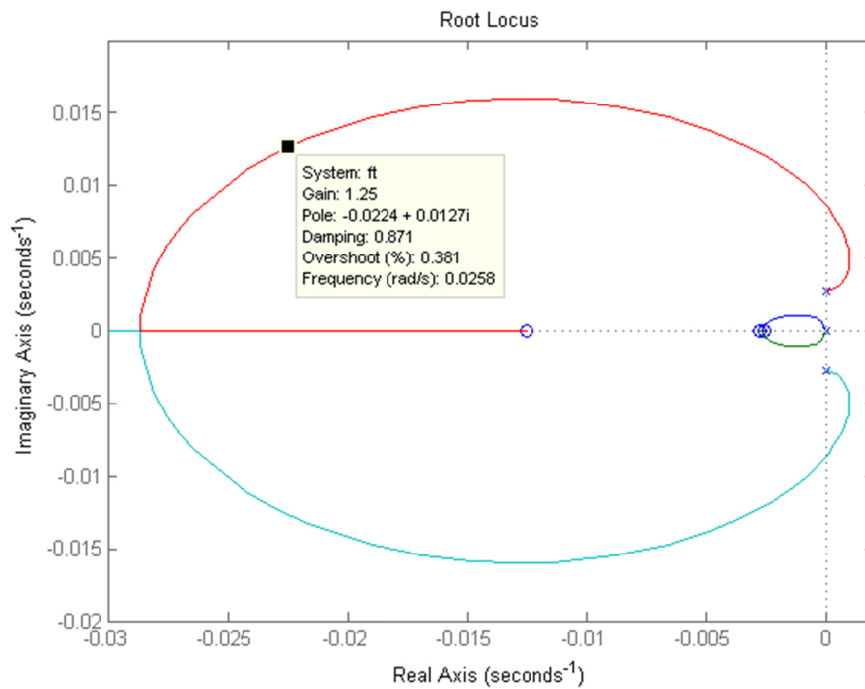


Figura 3.9 – Diagrama do lugar das raízes para o sistema de eixos rolamento e guinada para  $K=1,25 N.m/rad$ .

O diagrama do lugar das raízes contem a representação de dois sistemas de 2º ordem. O movimento de guinada é representado pelo loop interno do caminho do lugar das raízes, enquanto o movimento de rolamento é representado para loop externo do caminho do lugar das raízes.

Conforme é visualizado no gráfico, o valor preliminar escolhido do ganho de autopilotagem  $K = 1,25 \text{ N.m/rad}$  não fornece ao sistema um amortecimento crítico  $\zeta_1 = 1$ . Assim um novo valor de *ganho de autopilotagem* é escolhido através de tentativas e erros,  $K = 1,56 \text{ N.m/rad}$ . Esse valor proporciona um amortecimento bem próximo ao amortecimento crítico conforme mostra a Figura 3.10:

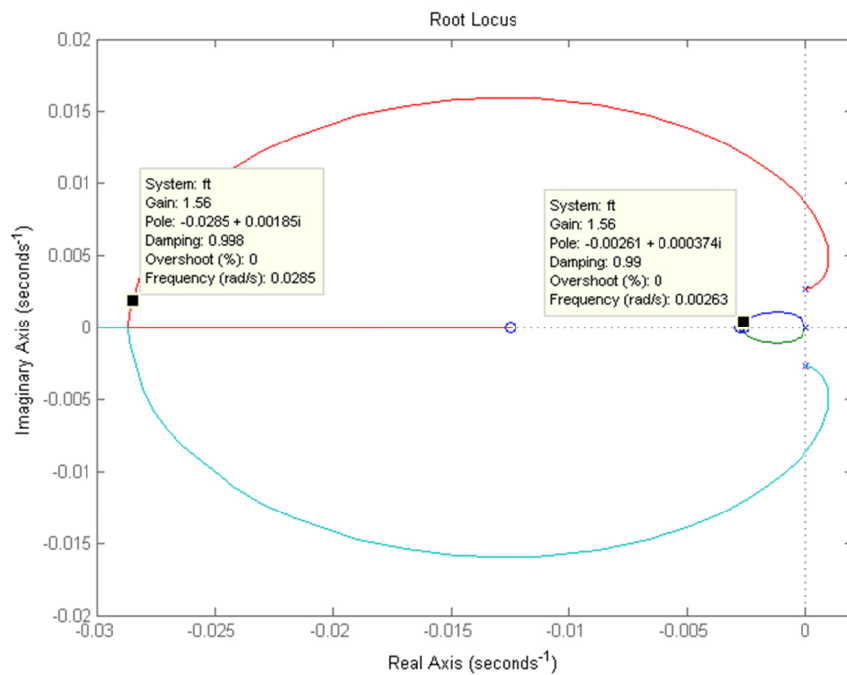


Figura 3.10 – Diagrama do lugar das raízes para o sistema de eixos rolamento e guinada para  $K=1,56 \text{ N.m/rad}$ .

Visualizando o gráfico da Figura 3.11 é possível verificar que o sistema apresenta-se estável para todos os valores de  $K > 0,1 \text{ N.m/rad}$ .

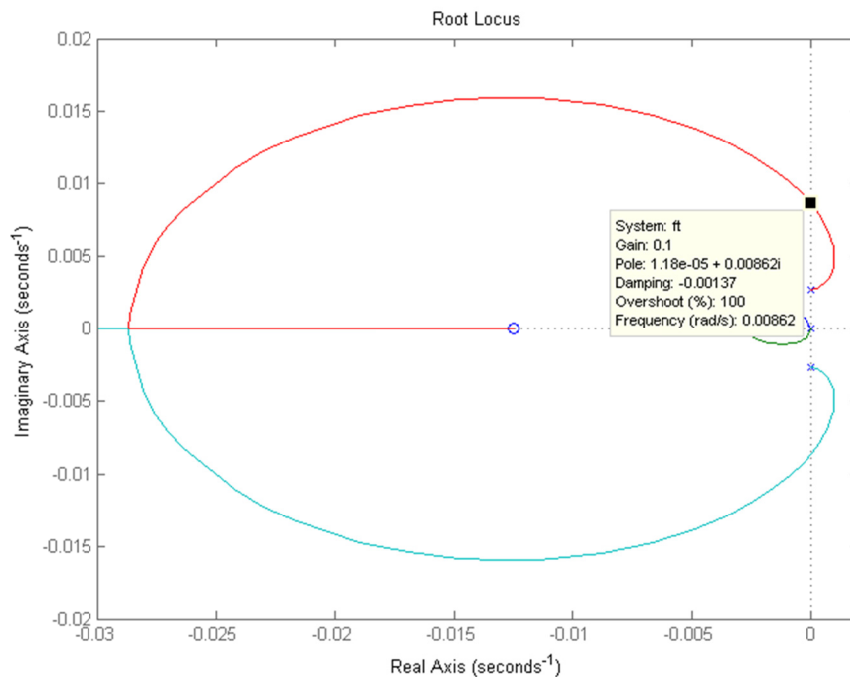


Figura 3.11 – Diagrama do lugar das raízes para o sistema de eixos rolamento e guinada para  $K=0,1 \text{ N.m/rad}$ .

A Tabela 3.3 resume todos os valores dos parâmetros de controle escolhidos para o sistema de eixos rolamento/guinada:

Tabela 3.3 – Parâmetros de controle (eixos de rolamento e guinada).

Parâmetros de controle (eixos de rolamento e guinada)	Valores
$h_n$ , magnitude do momento angular nominal da roda	200 <i>N.m.s</i>
$K$ , ganho de autopilotagem.	1,56 <i>N.m/rad</i>
$k$ , ganho proporcional de rolamento para guinada	0,054
$\tau$ , constante de tempo derivativo.	80s
$\omega_1$ , frequência natural (dinâmica de rolamento).	0,0285 <i>rad/s</i>
$\zeta_1$ , fator de amortecimento (dinâmica de rolamento).	0,998
$\omega_2$ , frequência natural (dinâmica de guinada).	0,00263 <i>rad/s</i>
$\zeta_2$ , fator de amortecimento (dinâmica de guinada).	0,990

A fim de analisar com mais precisão todos os possíveis casos que possam vir a ocorrer em situação realista, é interessante investigar qual seria o comportamento do satélite se a roda de inércia fosse fixa. Isso poderia acontecer se os eixos cardan (gimbals) por algum motivo viesse a falhar e assim não proporcionando a deflexão angular, ou simplesmente se o sistema fosse inicialmente projetado para trabalhar desta forma. Reescrevendo as Equações 3.37 e 3.38 considerando os torques de controle iguais à zero, são obtidas as novas equações do movimento em que roda de inércia seja fixa,

$$T_x = I_x \ddot{\varphi} + \omega_o h_n \dot{\varphi} + h_n \dot{\psi}, \quad (3.68)$$

$$T_z = I_z \ddot{\psi} + \omega_o h_n \dot{\psi} - h_n \dot{\varphi}. \quad (3.69)$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$T_x(s) = I_x s^2 \Phi(s) + \omega_o h_n \Phi(s) + h_n s \Psi(s), \quad (3.70)$$

$$T_z(s) = I_z s^2 \Psi(s) + \omega_o h_n \Psi(s) - h_n s \Phi(s). \quad (3.71)$$

Reescrevendo as Equações 3.70 e 3.71 na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_x(s) \\ T_z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x s^2 + \omega_o h_n & h_n s \\ -h_n s & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Aplicando o *método de Cramer* para encontrar as saídas de  $\Phi(s)$  e  $\Psi(s)$ ,

$$\Phi(s) = \frac{\begin{vmatrix} T_x(s) & h_n s \\ T_z(s) & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_x s^2 + \omega_o h_n & h_n s \\ -h_n s & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}},$$

$$\Psi(s) = \frac{\begin{vmatrix} I_x s^2 + \omega_o h_n & T_x(s) \\ -h_n s & T_z(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_x s^2 + \omega_o h_n & h_n s \\ -h_n s & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix}},$$

onde,  $\begin{vmatrix} I_x s^2 + \omega_o h_n & h_n s \\ -h_n s & I_z s^2 + \omega_o h_n \end{vmatrix} = I_x I_z s^4 + h_n (I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n) s^2 + \omega_o^2 h_n^2$ .

Desta forma, a saída do eixo de rolamento com os termos de controle nulos é:

$$\Phi(s) = \frac{T_x(s)(I_z s^2 + \omega_o h_n) - T_z(s)h_n s}{I_x I_z s^4 + h_n(I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n)s^2 + \omega_o^2 h_n^2}. \quad (3.73)$$

Se  $T_z(s) = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Phi(s)}{T_x(s)} = \frac{I_z s^2 + \omega_o h_n}{I_x I_z s^4 + h_n(I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n)s^2 + \omega_o^2 h_n^2}. \quad (3.74)$$

Se  $T_x(s) = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Phi(s)}{T_z(s)} = \frac{-h_n s}{I_x I_z s^4 + h_n(I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n)s^2 + \omega_o^2 h_n^2}. \quad (3.75)$$

Da mesma forma, a saída do eixo de guinada com os termos de controle nulos é:

$$\Psi(s) = \frac{T_z(s)(I_x s^2 + \omega_o h_n) + T_x(s)h_n s}{I_x I_z s^4 + h_n(I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n)s^2 + \omega_o^2 h_n^2}. \quad (3.76)$$

Se  $T_x(s) = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Psi(s)}{T_z(s)} = \frac{I_x s^2 + \omega_o h_n}{I_x I_z s^4 + h_n(I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n)s^2 + \omega_o^2 h_n^2}. \quad (3.77)$$

Se  $T_z(s) = 0$ , a função de transferência é:

$$\frac{\Psi(s)}{T_x(s)} = \frac{h_n s}{I_x I_z s^4 + h_n(I_x \omega_o + I_z \omega_o + h_n)s^2 + \omega_o^2 h_n^2}. \quad (3.78)$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os testes realizados com o projeto de controle de atitude do satélite para os eixos de arfagem, rolamento e guinada nesta sequencia. Os resultados serão expostos na forma de tabelas e gráficos gerados pelo Matlab.

### 4.1 RESULTADOS OBTIDOS PARA O CONTROLE DO EIXO DE ARFAGEM

Uma vez que os parâmetros de controle já foram definidos, serão analisadas agora as respostas decorrentes de perturbações degrau, impulsiva e cíclica. Basicamente as entradas do tipo degrau e impulsiva são ocasionadas pelo desalinhamento dos propulsores de correção de órbita que funcionam em tempos intercalados de maneira contínua ou não. Já a entrada do tipo cíclica é inteiramente ocasionada pelo torque de pressão de radiação solar. Conforme Tabela 3.1, as entradas são:

$$T_y = 10^{-4}(\cos \omega_o t)N.m, \quad T_F = 8,5 \times 10^{-5}N.m, \quad (4.1)$$

onde  $T_y$  é o torque decorrente da pressão solar e  $T_F$  é uma estimativa do torque devido ao desalinhamento dos propulsores.

Seja a função de transferência dada pela Equação 3.22 e substituindo os valores dados pela Tabela 3.2:

$$\frac{\Theta(s)}{T_y(s)} = \frac{1}{400s^2 + 22s + 0,275}. \quad (4.2)$$

Considerando primeiramente uma entrada degrau e aplicando a transformada de Laplace  $T_F(s) = \frac{8,5 \times 10^{-5}}{s} N.m$ . Substituindo esta entrada na Equação (4.2) e multiplicando pelo fator de conversão de radiano para graus  $\frac{180}{\pi}$ :

$$\Theta(s) = \frac{1}{s} \frac{8,5 \times 10^{-5}}{400s^2 + 22s + 0,275} \left( \frac{180}{\pi} \right) \quad (4.3)$$

Cujo gráfico é plotado através do Matlab:



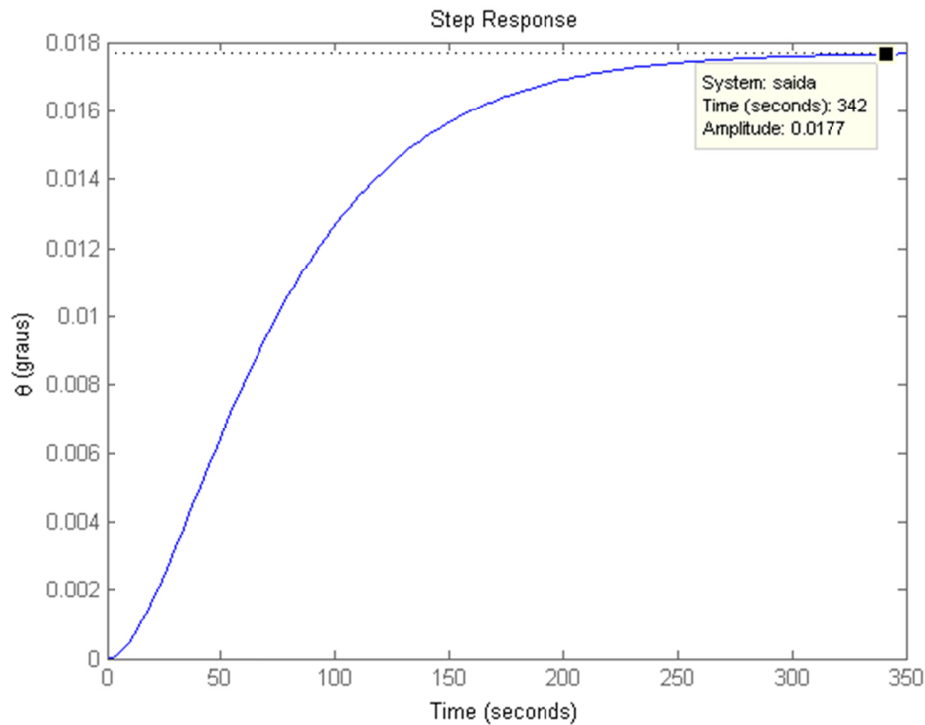


Figura 4.1 – Resposta do eixo de arfagem para uma entrada degrau.

É notável que o sistema comporta-se adequadamente, sem overshoot, com um tempo de resposta aceitável e tendo o limite de amplitude de  $\theta = 0,0177^\circ$ , bem inferior ao erro permissível de  $\theta = 0,05^\circ$ .

Considera-se agora uma entrada do tipo impulsiva, que em seu caso de maior magnitude corresponde à  $T_y = 8,5 \times 10^{-5} N.m$  e na variável de Laplace equivale à  $T_y(s) = 8,5 \times 10^{-5} N.m$ . Substituindo esta entrada na Equação 4.2 e multiplicando pelo fator de conversão de radiano para graus, então:

$$\Theta(s) = \frac{8,5 \times 10^{-5}}{400s^2 + 22s + 0,275} \left( \frac{180}{\pi} \right) \quad (4.4)$$

Cujo gráfico é representado pela Figura 4.2:

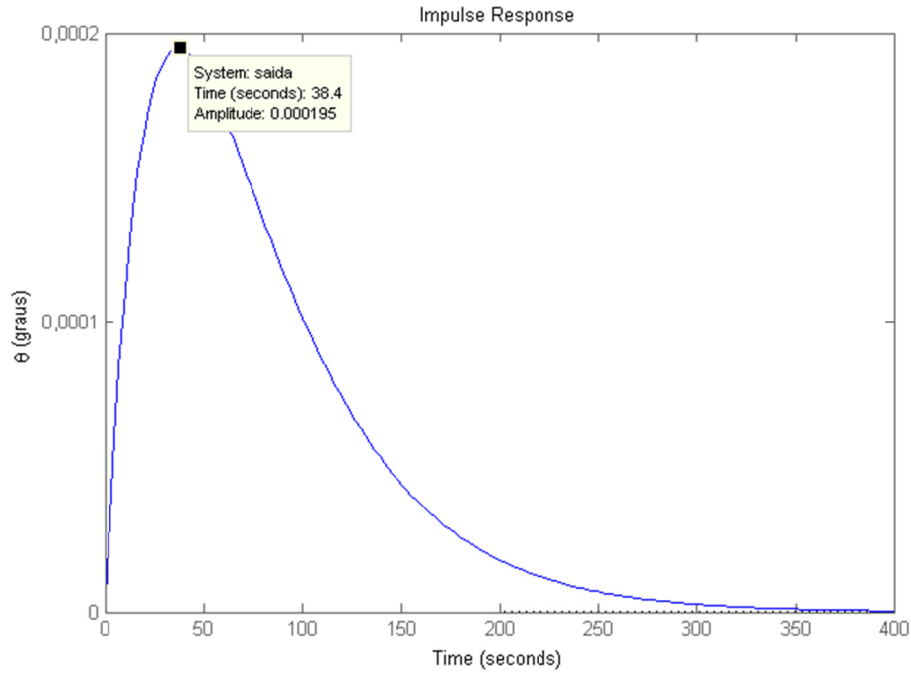


Figura 4.2 – Resposta do eixo de arfagem para uma entrada impulsiva

É notável que a resposta devido ao torque devido ao desalinhamento dos propulsores na sua forma impulsiva é de preocupação desprezível, tendo sua amplitude máxima de aproximadamente  $0,0002^\circ$  de erro.

O torque de perturbação cíclico devido à pressão de radiação solar para este projeto é aproximado para  $T_y = 10^{-4}(\cos \omega_o t)N.m$  conforme Tabela 3.1. Aplicando a transformada de Laplace,  $T_y(s) = \frac{10^{-4}s}{s^2 + \omega_o^2} = \frac{10^{-4}s}{s^2 + (7,28 \times 10^{-5})^2} N.m$ . Substituindo  $T_y(s)$  na Equação 4.2 e aplicando o fator de conversão de radianos para graus, a resposta devido à entrada cíclica é:

$$\Theta(s) = \left( \frac{10^{-4}s}{s^2 + (7,28 \times 10^{-5})^2} \right) \frac{1}{400s^2 + 20,98s + 0,275} \left( \frac{180}{\pi} \right) \quad (4.5)$$

Cujo gráfico é representado pela Figura 4.3.

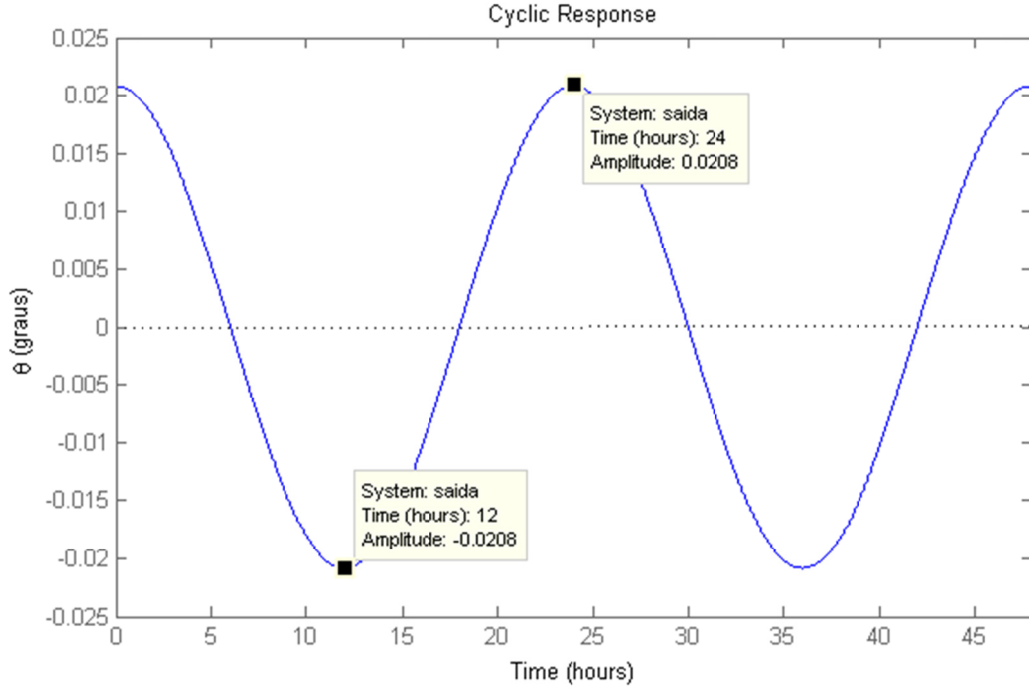


Figura 4.3 – Resposta do eixo de arfagem para uma entrada cíclica

A entrada cíclica devido ao torque de perturbação solar causa uma resposta periódica para o sistema com amplitude em torno de  $0,02^\circ$ , ou seja, bem abaixo do limite de erro permissível de  $0,05^\circ$ , conforme exposto na Tabela 3.1.

Uma vez que o torque de controle do eixo de arfagem seja inteiramente dependente da taxa de variação da velocidade da roda de inércia, é interessante analisar qual a variação do momento angular que a roda de inércia deve fazer para manter o controle. Aplicando a transformada de Laplace na Equação 3.19 e assumindo que o momento angular inicial é  $h_n$ , então:

$$H_{yc}(s) = \frac{(k_p \tau_p s + k_p)}{s} \Theta(s) + \frac{h_n}{s}.$$

Substituindo todos os parâmetros conforme valores da Tabela 3.2 e substituindo  $\Theta(s)$  pela Equação 4.5, é obtido a resposta do momento angular da roda de inércia devido a entrada cíclica do torque de perturbação solar no eixo de arfagem,

$$H_{yc}(s) = \frac{80000s^5 + 4196s^4 + 55s^3 + 4,974 \times 10^{-5}s^2 + 2,915 \times 10^{-7}s}{400s^6 + 20,98s^5 + 0,275s^4 + 1,112 \times 10^{-7}s^3 + 1,457 \times 10^{-9}s^2}$$

O gráfico é plotado através do Matlab:

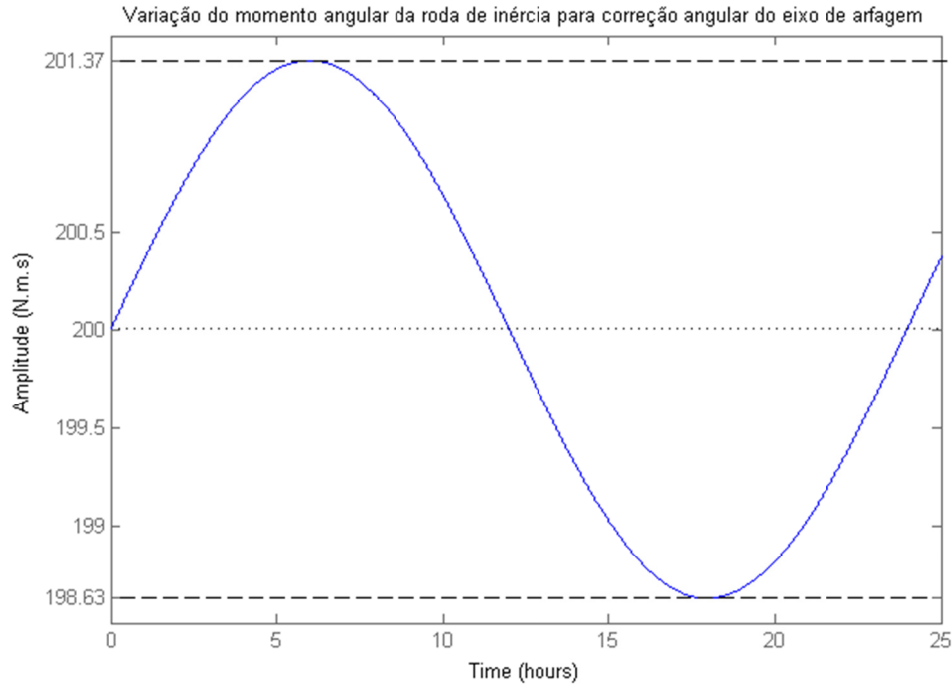


Figura 4.4 – Variação do momento angular da roda de inércia para correção angular do eixo de arfagem.

Através da observação da Figura 4.4 é notável que a amplitude tem o pico de variação de 1,37 *N.m.s* com relação ao valor médio de  $h_n = 200$  *N.m.s*. Desta forma o torque de controle do eixo de arfagem, no qual é obtido alterando a velocidade nominal da roda, pode ser aplicado sem exceder 1% de variação em  $h_n$  e assim não acarretando problemas para o sistema de controle dos eixos de rolamento e guinada.

## 4.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA CONTROLE DOS EIXOS DE ROLAMENTO E GUINADA

As equações do movimento linearizadas dadas por (3.46a) e (3.46b) são resolvidas numericamente, a partir dos parâmetros pré-estabelecidos, para que desta forma seja possível obter a resposta do sistema para entradas de torque solar em sua forma degrau, impulsiva e cíclica. A entrada do tipo degrau e impulsiva ocorre no satélite quando há

desalinhamento nos propulsores de correção de órbita, que neste caso já tem um valor pré-estabelecido dado pela Tabela 3.1  $T_f = 8,5 \times 10^{-5} \text{ N.m}$ . O torque de pressão de radiação solar ocasiona uma entrada do tipo cíclica na dinâmica do satélite.

Considera-se o primeiro caso em que ocorra uma entrada do tipo degrau no eixo de rolamento devido ao desalinhamento dos propulsores e deseja-se analisar o desvio angular no próprio eixo de rolamento. Aplicando os valores parâmetros da Tabela 3.3 na Equação 3.50 é obtida a expressão:

$$\frac{\Phi(s)}{T_x(s)} = \frac{I_z s^2 + \omega_0 h_n}{E.C.} = \frac{200s^2 + 0,01456}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271}. \quad (4.6)$$

O torque de perturbação de entrada degrau devido ao desalinhamento dos propulsores na variável de Laplace é dado por  $T_x(s) = \frac{8,5 \times 10^{-5}}{s} \text{ N.m}$ , então a saída em graus é obtida como sendo:

$$\Phi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0,17s^2 + 1,238 \times 10^{-6}}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.7)$$

O gráfico desta resposta é obtido pelo Matlab:

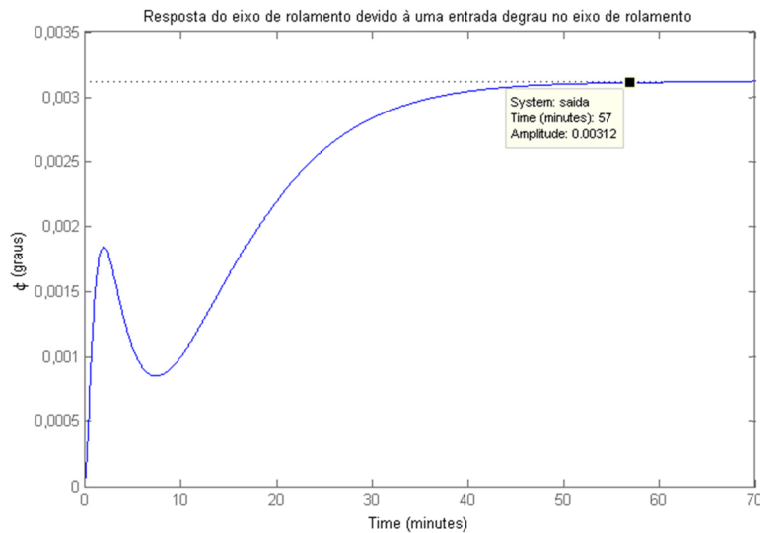


Figura 4.5 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada degrau no eixo de rolamento.

Identifica-se nesta análise que a resposta demora quase uma hora para estabilizar, no entanto isso não é preocupante uma vez que a amplitude do erro é pequena e mesmo em regime permanente não ultrapassa 0,00312°.

Será analisado a influencia do torque devido ao desalinhamento dos propulsores em sua forma impulsiva ocasionada no eixo de rolamento e verificar qual o desvio angular que ocasionará no próprio eixo de rolamento. Seja  $T_x(s) = 8,5 \times 10^{-5} N.m$  e aplicando essa entrada na Equação 4.6, então:

$$\Phi(s) = \frac{0,17s^2 + 1,238 \times 10^{-6}}{4 \times 10^6 s^4 + 249600 s^3 + 4497 s^2 + 18,67 s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.8)$$

O gráfico correspondente é plotado através do Matlab:

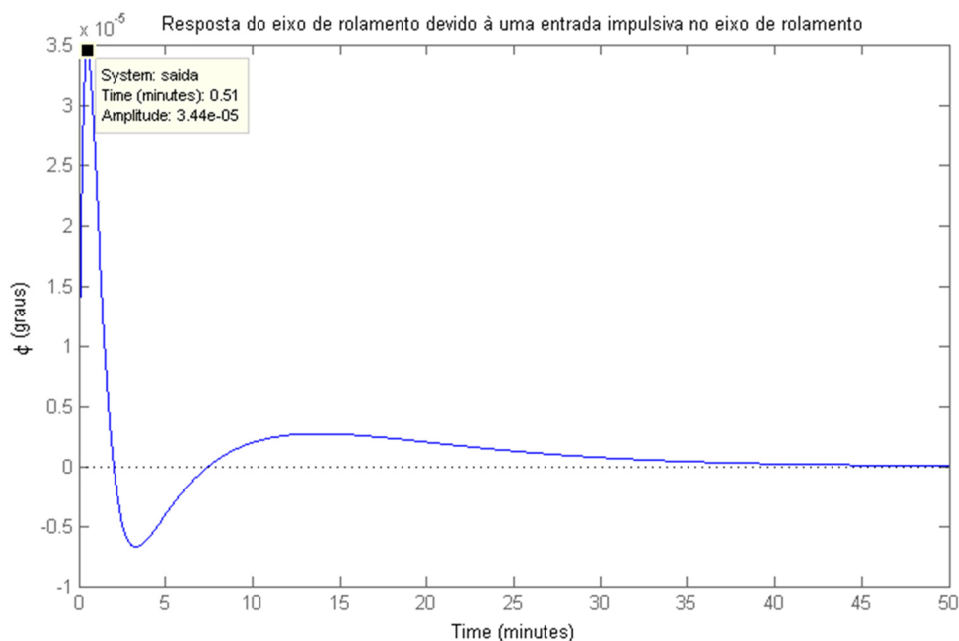


Figura 4.6 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada impulsiva no eixo de rolamento.

É notável que a amplitude máxima para a entrada do tipo impulsiva é desprezível e em regime permanente o valor do erro angular tende a zero.

A próxima análise a ser feita refere-se à resposta do eixo de rolamento devido à entrada degrau ocasionada no eixo de guinada, pela Equação 3.51:

$$\frac{\Phi(s)}{T_z(s)} = \frac{-h_n s}{E.C.} = \frac{-200s}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271} \quad (4.9)$$

Em carácter numérico, a entrada degrau devido ao desalinhamento dos propulsores que ocorre no eixo de guinada é  $T_z = 8,5 \times 10^{-5} N.m$ , que na forma de Laplace é dada por  $T_z(s) = \frac{8,5 \times 10^{-5}}{s} N.m$ . Aplicando essa entrada na Equação 4.9, então a saída angular do eixo de rolamento é:

$$\Phi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{-0,017s}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.10)$$

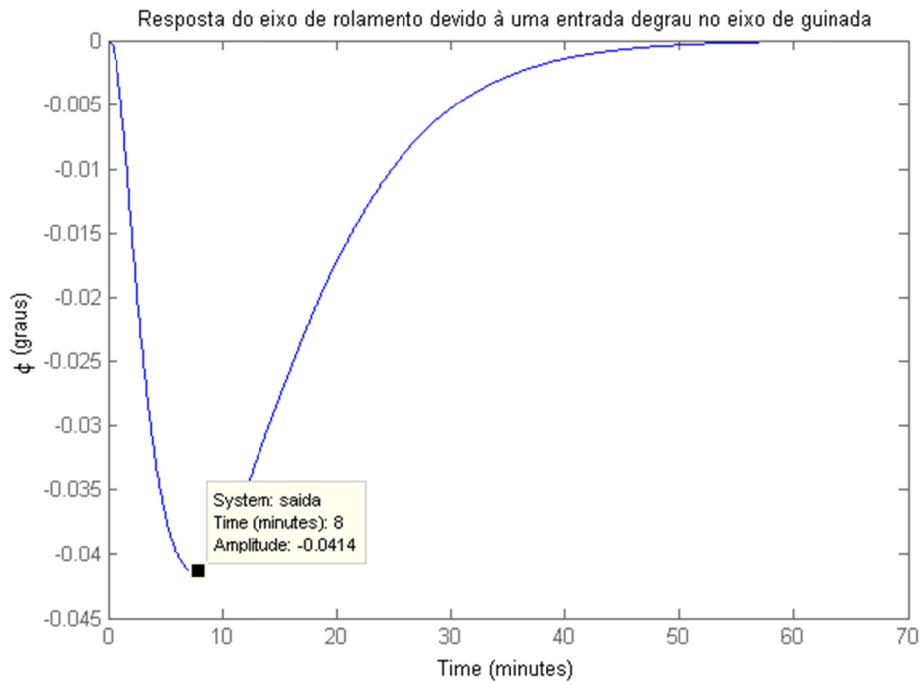


Figura 4.7 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada degrau no eixo de guinada

Conforme análise do gráfico é possível perceber que a resposta tem tendência estável. O pico máximo do erro ocorre em aproximadamente oito minutos, no entanto não ultrapassa de  $-0,0414^\circ$ . A resposta em regime permanente suavemente tende a zero.

O próximo passo é analisar a resposta do eixo de rolamento devido a uma entrada impulsiva no eixo de guinada. O torque de perturbação impulsiva devido ao desalinhamento dos propulsores de correção de órbita é dado por  $T_z(s) = 8,5 \times 10^{-5} N.m$ , substituindo na Equação 3.51:

$$\Phi(s) = \frac{-0,017s}{4 \times 10^6 s^4 + 249600 s^3 + 4497 s^2 + 18,67 s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.11)$$

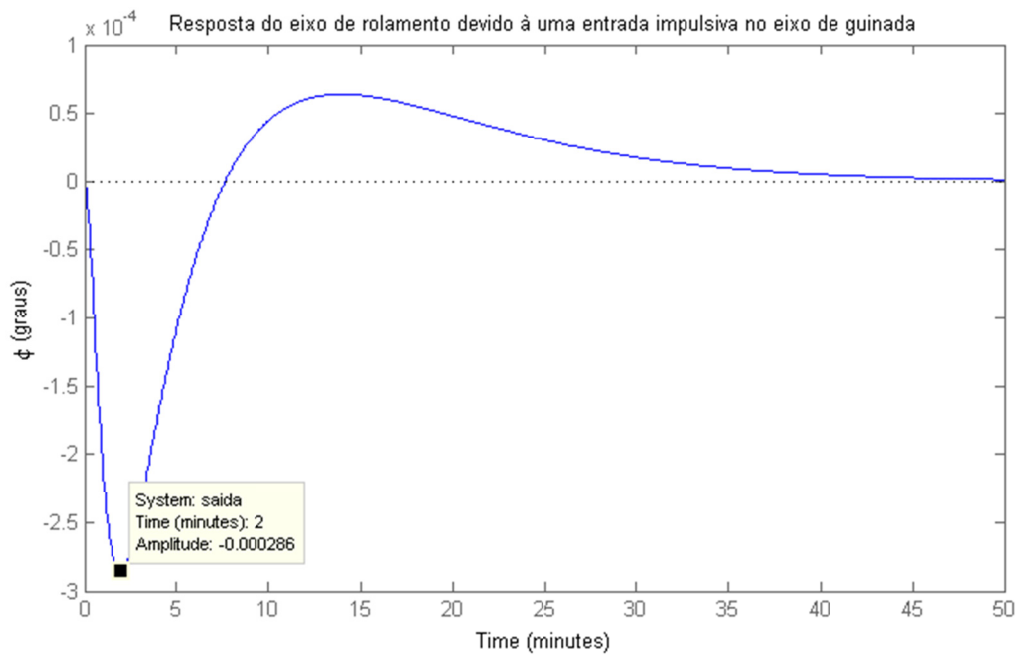


Figura 4.8 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada impulsiva no eixo de guinada.

A amplitude máxima do erro angular visto na Figura 4.8 é desprezível, cerca de  $0,0003^\circ$ , e a resposta em regime permanente tende a zero.

O próximo passo é analisar a resposta do eixo de guinada após sofrer um torque de perturbação ocasionado no próprio eixo de guinada. Substituindo os parâmetros de controle da Tabela 3.3 na Equação 3.53, então,

$$\frac{\Psi(s)}{T_z(s)} = \frac{I_x s^2 + K\tau s + K}{E.C.} = \frac{2000s^2 + 124,8s + 1,56}{4 \times 10^6 s^4 + 249600 s^3 + 4497 s^2 + 18,67 s + 0,02271} \quad (4.12)$$



Considera-se uma entrada do tipo degrau devido ao torque de perturbação do desalinhamento dos propulsores de correção de órbita  $T_z(s) = \frac{8,5 \times 10^{-5}}{s} N.m$ . Aplicando essa entrada na Equação 4.12, então:

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0,17s^2 + 0,0106s + 1,326 \times 10^{-4}}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.13)$$

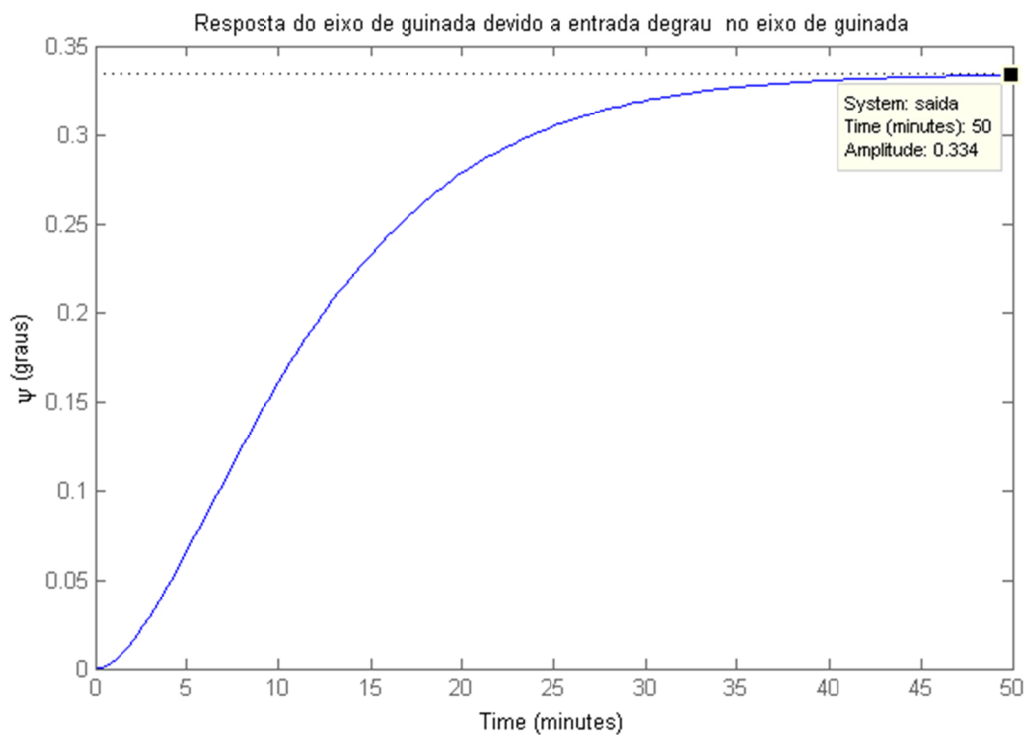


Figura 4.9 – Resposta do eixo de guinada devido a entrada degrau no eixo de guinada

Pela Figura 4.9 é notável que a maior amplitude ocorre em regime permanente e equivale a  $0,334^\circ$  em aproximadamente 50 minutos. Mesmo assim a resposta ainda está abaixo do limite permissível do erro de atitude para o eixo de guinada, no qual pela Tabela 3.1 equivale a  $0,40^\circ$ .

É analisada a seguir a saída do eixo de guinada devido a uma entrada do tipo impulsiva também no eixo de guinada, ou seja,  $T_z(s) = 8,5 \times 10^{-5} N.m$ . Aplicando esta entrada na Equação 4.12, então a resposta angular em graus tem a seguinte forma:

$$\Psi(s) = \frac{0,17s^2 + 0,01601s + 1,326 \times 10^{-4}}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Cujo gráfico é plotado através do Matlab:

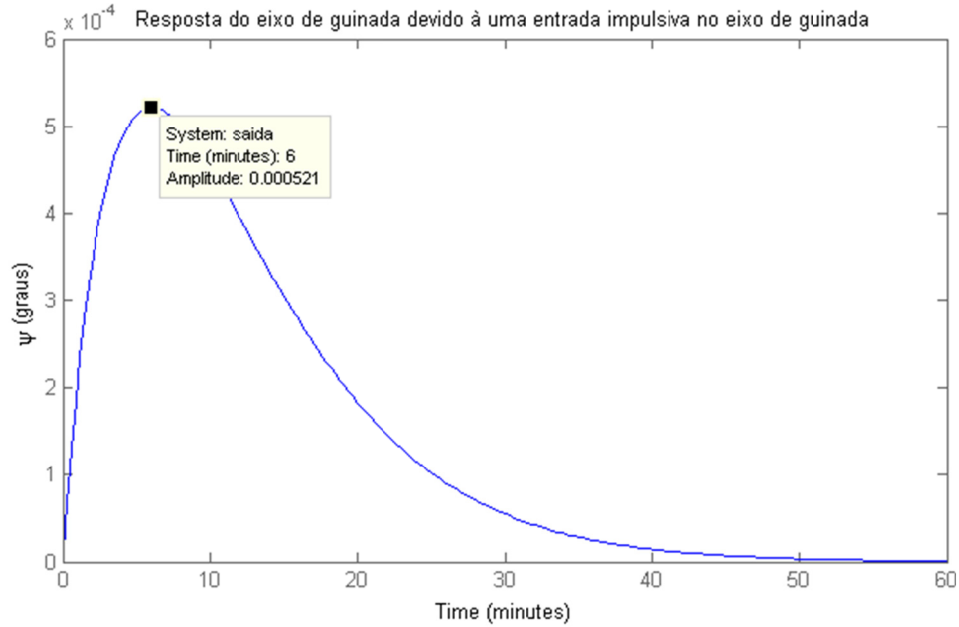


Figura 4.10 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada impulsiva no eixo de guinada.

É observável na Figura 4.9 que a amplitude máxima deste erro angular é desprezível, cerca de 0,0005°, e em regime permanente a resposta tende a zero.

Utilizando a Equação 3.54 e aplicando os parâmetros da Tabela 3.3, será analisada a resposta do eixo de guinada devido a uma perturbação ocorrida no eixo de rolamento:

$$\frac{\Psi(s)}{T_x(s)} = \frac{kK(\tau s + 1)}{E.C.} = \frac{6,7392s + 0,0842}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271}. \quad (4.14)$$

Considera-se uma entrada degrau devido ao torque de perturbação do desalinhamento dos propulsores no eixo de rolamento,  $T_z(s) = \frac{8,5 \times 10^{-5}}{s} N.m$ , então a resposta angular de guinada é obtida como sendo:

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{5,7283 \times 10^{-4}s + 7,157 \times 10^{-6}}{4 \times 10^6 s^4 + 249600s^3 + 4497s^2 + 18,67s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.15)$$

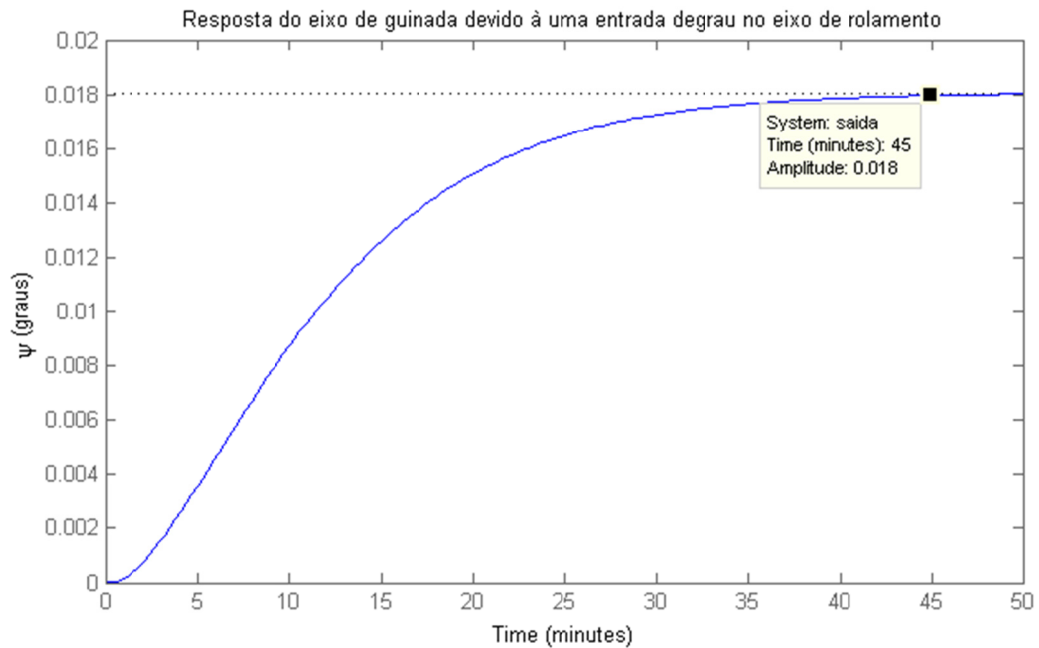


Figura 4.11 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada degrau no eixo de rolamento

Pela Figura 4.11 é notável que a maior amplitude ocorre em regime permanente e equivale a 0,018°, ou seja, muito abaixo do limite permissível do erro de atitude para o eixo de guinada, no qual equivale a 0,40°.

O próximo passo é analisar a resposta do eixo de guinada devido a uma entrada do tipo impulsiva no eixo de rolamento, neste caso  $T_x(s) = 8,5 \times 10^{-5} N.m$ .

$$\Psi(s) = \frac{5,728 \times 10^{-4}s + 7,16 \times 10^{-6}}{4 \times 10^6 s^4 + 249600 s^3 + 4497 s^2 + 18,67 s + 0,02271} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (4.16)$$

O gráfico é plotado através do Matlab:

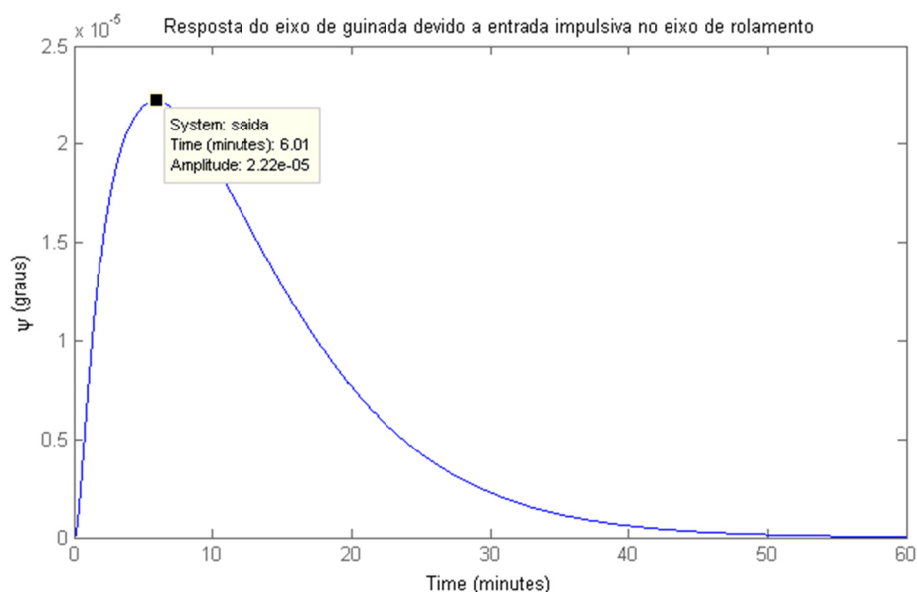


Figura 4.12 – Resposta do eixo de guinada devido a entrada impulsiva no eixo de rolamento

Através da análise da Figura 4.12 nota-se que o sistema demora cerca de uma hora para se acomodar, no entanto isso não é preocupante uma vez que a amplitude máxima é desprezível.

A Tabela 4.1 resume os valores em regime permanente para cada saída:

Tabela 4.1 – Respostas em regime permanente dos eixos de rolamento e guinada.

Saída	Entrada	Tipo de entrada	Valores em regime permanente (graus)
Rolamento ( $\phi$ )	Eixo de rolamento	Degrau	0,00312°
		Impulsiva	0°
	Eixo de guinada	Degrau	0°
		Impulsiva	0°
Guinada ( $\psi$ )	Eixo de guinada	Degrau	0,333°
		Impulsiva	0°
	Eixo de rolamento	Degrau	0,018°
		Impulsiva	0°

Comparando a Tabela 4.1 com a Tabela 3.1 é notável que os valores em regime permanente estão todos abaixo do limite de erro angular permissível.

O próximo objetivo é analisar a interferência que a entrada na sua forma puramente cíclica pode ocasionar na resposta dos eixos de rolamento e guinada. De uma forma geral, o torque de perturbação solar é essencialmente cíclico com período orbital. O primeiro passo para obtenção deste resultado é aplicar a transformada de Laplace nas equações de entrada  $T_x(t)$  e  $T_z(t)$  fornecidas pela Tabela 3.1,

$$T_x(t) = 2 \times 10^{-5}(1 - 2\text{sen } \omega_o t)$$

$$T_x(s) = \frac{2 \times 10^{-5}}{s} - \frac{4 \times 10^{-5} \omega_o}{s^2 + \omega_o^2} = \frac{2 \times 10^{-5} s^2 + 2 \times 10^{-5} - 4 \times 10^{-5} \omega_o s}{s^3 + \omega_o^2 s}, \quad (4.17)$$

e

$$T_z(t) = -5 \times 10^{-5} \cos \omega_o t$$

$$T_z(s) = -\frac{5 \times 10^{-5} s}{s^2 + \omega_o^2} \quad (4.18)$$

Aplicando as Equações 4.17 e 4.18 na Equação 3.49, é obtida a resposta do eixo de rolamento devido à entrada cíclica do torque de pressão de radiação solar ocasionado nos eixos de rolamento e guinada:

$$\Phi(s) =$$

$$\frac{0,04s^6 + 0,009994s^5 + 2,916 \times 10^{-7}s^4 + 1,057 \times 10^{-11}s^3 + 3,088 \times 10^{-15}s^2 - 2,247 \times 10^{-19}s + 8,179 \times 10^{-24}}{4 \times 10^6 s^9 + 249600s^8 + 4497s^7 + 18,67s^6 + 0,02276s^5 + 1,979 \times 10^{-7}s^4 + 2,409 \times 10^{-10}s^3 + 5,243 \times 10^{-16}s^2 + 6,38 \times 10^{-19}s} \quad (4.19)$$

Através do Matlab é obtido o gráfico da Figura 4.13:

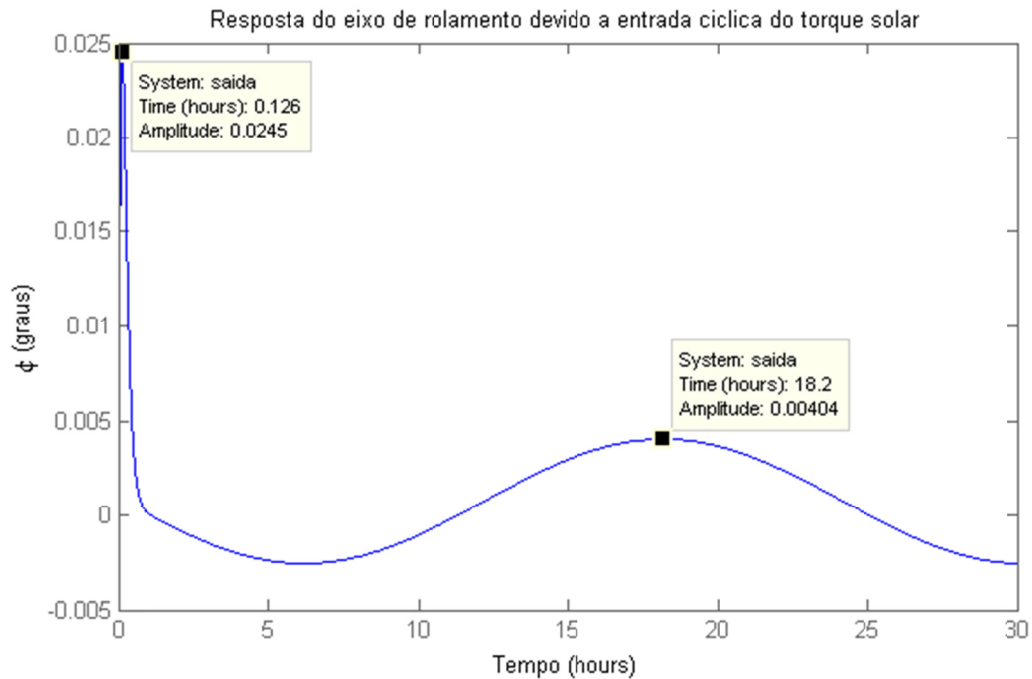


Figura 4.13 – Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada cíclica do torque solar

Verifica-se que aos oito minutos aproximadamente a amplitude chega em seu patamar mais alto de 0,0245°, e logo em seguida se mantém oscilante com amplitude de 0,004°. Mesmo com a amplitude mais alta, o erro angular ainda está abaixo do limite especificado no eixo de rolamento, que é de 0,05°.

Aplicando as Equações 4.17 e 4.18 na Equação 3.52, é obtida a resposta em graus do eixo de guinada devido à entrada cíclica ocasionada pelo torque de pressão solar nos eixos de rolamento e guinada:

$$\Psi(s) = \frac{-0,1s^6 - 0,006105s^5 - 7,634 \times 10^{-5}s^4 - 2,769 \times 10^{-10}s^3 - 3,956 \times 10^{-13}s^2 - 1,296 \times 10^{-18}s + 4,732 \times 10^{-23}}{4 \times 10^6 s^9 + 249600s^8 + 4497s^7 + 18,67s^6 + 0,02276s^5 + 1,979 \times 10^{-7}s^4 + 2,409 \times 10^{-10}s^3 + 5,243 \times 10^{-16}s^2 + 6,38 \times 10^{-19}s}$$

(4.20)

Através do Matlab é obtido o gráfico da Figura 4.14:

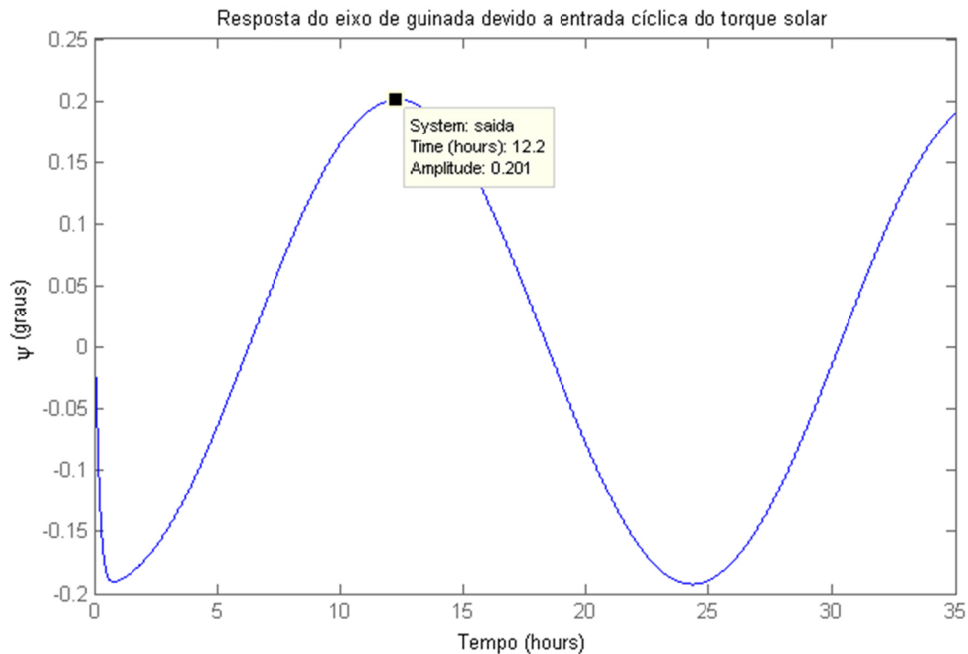


Figura 4.14 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada cíclica do torque solar

É notável que a maior amplitude da resposta do eixo de guinada devido a uma entrada cíclica ocorre periodicamente e corresponde à 0,201°, ou seja, abaixo do limite de erro permissível de 0,40°.

Desta etapa em diante será realizado testes para o movimento dos eixos de rolamento e guinada para a situação em que a roda de inércia esteja fixa e por algum problema distinto não haja deflexão angular no eixo cardan. Serão consideradas apenas entradas do tipo degrau e cíclica uma vez que a entrada do tipo impulsiva não apresentar desvios angulares significativos. Começando por analisar a resposta do eixo de guinada devido a uma entrada degrau no eixo de guinada. Através da Equação 3.77, considerando  $T_z = T_F = 8,5 \times 10^{-5} N.m$  que pela Tabela 3.1 corresponde ao torque devido ao desalinhamento dos propulsores, então:

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} \frac{0,17s^2 + 1,238 \times 10^{-6}}{4 \times 10^6 s^4 + 4,006 \times 10^4 s^2 + 0,000212} \frac{180}{\pi} \quad (4.21)$$

O gráfico correspondente da Equação 4.21 é plotado através do Matlab:

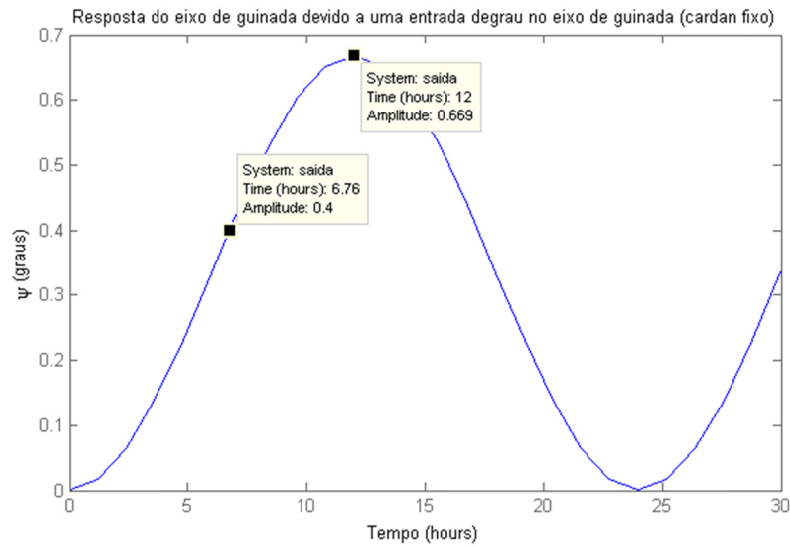


Figura 4.15 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada degrau no eixo de guinada (cardan fixo).

Nota-se que a amplitude máxima da resposta ultrapassa o desvio angular permissível para o eixo de guinada de  $\psi = 0,40^\circ$  em 6 horas e 46 minutos. A forma passiva de contornar tal problema seria ajustar o momento angular nominal para  $334 \text{ N.m.s}$ , fisicamente apenas alterado a velocidade da roda de inércia. Desta forma a Equação 4.21 seria reescrita da seguinte forma:

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} \frac{0,17s^2 + 2,067 \times 10^{-6}}{4 \times 10^6 s^4 + 1,117 \times 10^5 s^2 + 0,00059} \frac{180}{\pi} \quad (4.22)$$

E o gráfico é plotado através do Matlab:

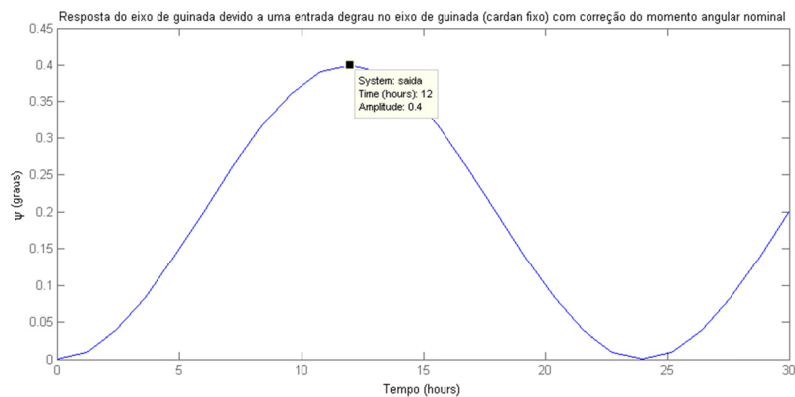


Figura 4.16 – Resposta do eixo de guinada devido a uma entrada degrau no eixo de guinada com correção do momento angular nominal (cardan fixo).



Através da análise da Figura 4.16, é notável que a resposta se comporta de maneira periódica com amplitudes máximas de  $0,40^\circ$ , ou seja, bem no limite do erro permissível para este eixo.

Continuando a analisar a resposta do eixo de guinada para a situação em que a roda de inércia esteja fixa, considera-se uma entrada do tipo degrau que ocorra no eixo de rolamento devido ao desalinhamento dos propulsores. Lembrando que agora o momento angular nominal está ajustado para  $h_n = 334 \text{ N.m.s}$ . Utilizando a Equação 3.78, a resposta é dada por:

$$\Psi(s) = \frac{1}{s} \frac{0,02839s}{4 \times 10^6 s^4 + 1,117 \times 10^5 s^2 + 0,000592} \frac{180}{\pi}, \quad (4.23)$$

Cujo gráfico é plotado através do Matlab:

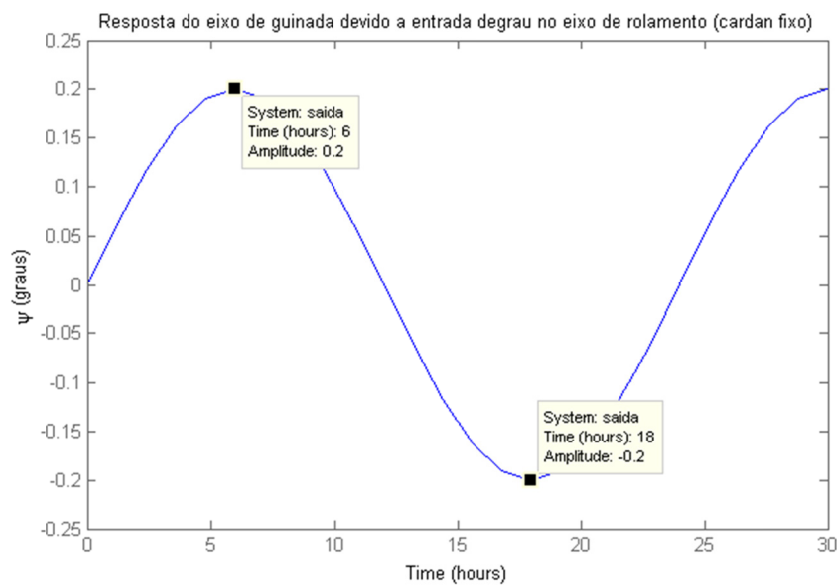


Figura 4.17 – Resposta do eixo de guinada devido a entrada degrau no eixo de rolamento (cardan fixo).

É notável que a resposta mostrada na Figura 4.17 é aceitável, tendo suas máximas amplitudes de  $0,2^\circ$ , ou seja, abaixo de  $0,4^\circ$  que é o requisito de precisão de atitude para a deflexão deste eixo.

Sabendo que  $I_x = I_z$  pelas configurações adotadas no projeto, é conclusivo que as Equações 3.74 e 3.77 são iguais sob esta condição, e comparando as Equações 3.75 e 3.78 é perceptível que as respostas também são iguais, porem com sinas invertidos. Com base nesta percepção é conclusivo que as amplitudes máximas da resposta do eixo de rolamento serão iguais aos das respostas do eixo de guinada. Como a tolerância do erro permissível do eixo de rolamento é de apenas  $0,05^\circ$  descrito na Tabela 3.1, isso significa que a roda de inércia estando fixa definitivamente não poderia ser usada para estabilizar os desvios angulares no eixo de rolamento, sendo necessária a aplicação de outro dispositivo para efetivação do controle neste eixo.

Continuando a análise no eixo de guinada, falta verificar qual o comportamento da resposta devido a uma entrada cíclica ocasionada pelo torque de perturbação solar em ambos os eixos (rolamento e guinada). Substituindo os termos das Equações 4.17 e 4.18 na Equação 3.76 e utilizando o valor no momento angular nominal corrigido  $h_n = 334 \text{ N.m.s}$ , então a saída é:

$$\Psi(s) = \frac{-0,1s^6 + 0,00668s^5 - 2,189 \times 10^{-6}s^4 + 7,081 \times 10^{-11}s^3 - 1,16 \times 10^{-14}s^2 + 1,87 \times 10^{-19}s}{4 \times 10^6 s^9 + 1,117 \times 10^5 s^7 + 0,001775 s^5 + 9,403 \times 10^{-12} s^3 + 1,661 \times 10^{-20} s} \frac{180}{\pi}. \quad (4.24)$$

Cujo gráfico é gerado pelo Matlab:

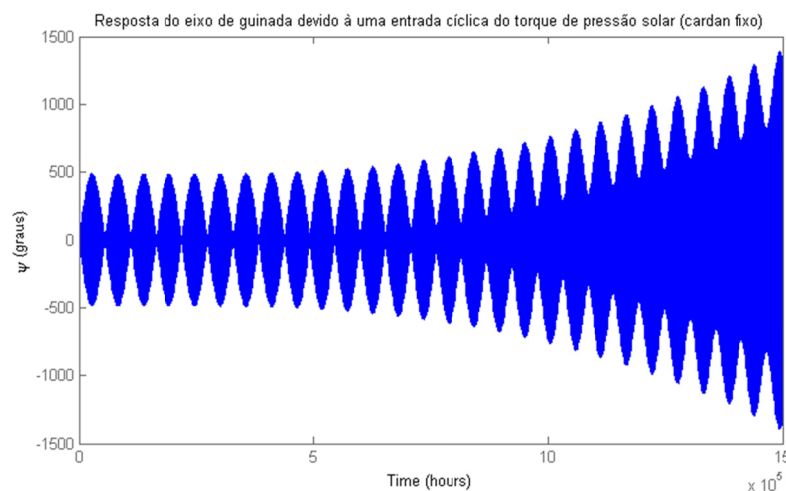


Figura 4.18 – Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada cíclica do torque de pressão solar (cardan fixo).

A Figura 4.18 mostra que, em regime permanente, a resposta angular do eixo de guinada com o cardan fixo entra em ressonância e tende para amplitudes infinitas. Conclui-se com esta ultima analise que o projeto não teria eficácia se a roda de inércia fosse fixa, mostrando assim a importância do dispositivo que faz a deflexão angular do cardan e a necessidade de que ele esteja sempre funcionando adequadamente, caso contrário haveria a inevitável perda do controle da atitude do satélite.

## 5 CONCLUSÕES

O projeto de controle de atitude para um satélite estabilizado em três eixos numa órbita geostacionária que utiliza um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan (*gimbals*) mostrou ser bastante promissor. Em evidente fator conclusivo, os resultados apontaram eficácia na obtenção das respostas respeitando os requisitos de precisão de atitude. Dentre todos os resultados deste trabalho, merece destaque a obtenção da equação linearizada do movimento que por sua vez desacoplou o movimento de arfagem dos movimentos de rolamento e guinada, simplificando assim a aplicação da teoria de controle. Vale ressaltar que devido às leis de controle desenvolvidas e ao acoplamento entre os eixos de rolamento e guinada, torna-se possível a aplicação deste projeto utilizando apenas um sensor de horizonte, facilitando assim a medição angular. Diferentemente da maioria dos projetos que utilizam CMG (*Control Moment Gyros*) sendo necessárias três rodas de inércia, uma para cada eixo, este projeto conseguiu êxito e precisão nos resultados apenas com uma roda de inércia, alcançando assim vantagens significativas como a diminuição de gastos, melhoria na dinâmica de movimento e redução da massa do satélite. Através dos cálculos realizados e das respostas obtidas, a simulação feita para o caso em que o satélite ocasionalmente esteja com a roda de inércia fixa mostrou ser instável nesta situação, concluindo dessa maneira a importância do correto funcionamento do dispositivo que gera a deflexão angular nos eixos cardan, pois caso contrário haveria a inevitável perda do controle da atitude do satélite. Todos os resultados obtidos para este projeto vieram através da aplicação do conhecimento teórico de controle e dinâmica de atitude auxiliados por ferramentas de simulações computacionais, no entanto, pretende-se para trabalhos futuros implementar este desenvolvimento para efetivação de testes práticos e na possível aplicação em novos satélites.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRET, C. Spacecraft Flight Control System Design Selection Process for a Geostationary Communication Satellite. **Launch Vehicles and Space Vehicles**, Washington, Marshall Space Flight Center: NASA, NASA Technical Paper 3289, Document ID: 19930001814, 1992.

KAPLAN, M. H. **Modern Spacecraft Dynamics & Control**. New York: John Wiley, 1976.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2ª edição, Niterói: Livraria da Física, 2007.

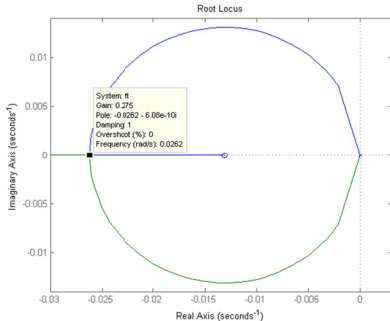
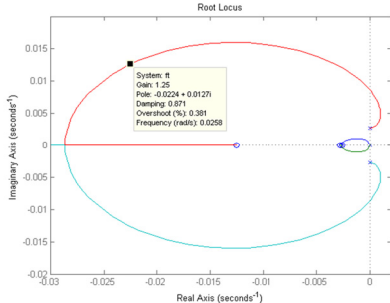
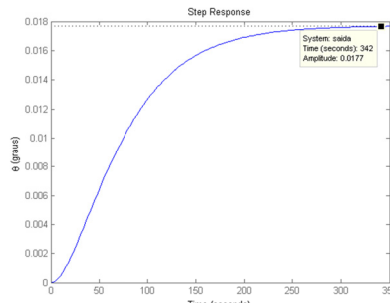
OGATA, K. **Engenharia de controle moderna**. 3ª edição, Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1997.

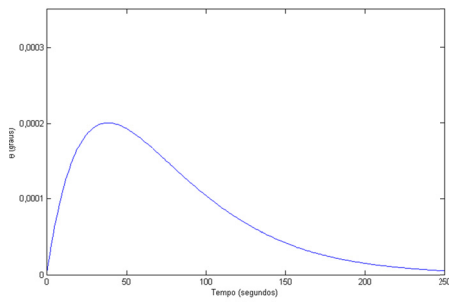
WERTZ, J. R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1978.

## APÊNDICE A

### Código fonte das funções programadas no Matlab para geração dos gráficos

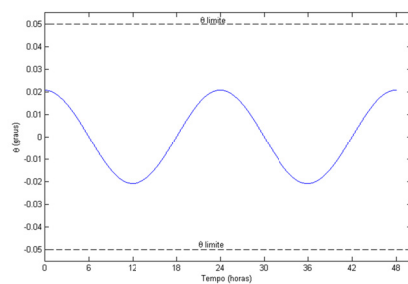
Tabela A.1 Gráficos e códigos fonte dos programas gerados pelo Matlab

Gráficos gerados	Códigos Matlab
	<pre>Kp=0.275; Iy=400; wp=sqrt(Kp/Iy); tp=2/wp; ft=tf([tp 1],[Iy 0 0]); rlocus(ft)</pre>
Gráfico do lugar das raízes para análise dos parâmetros escolhidos (eixo de arfagem)	
	<pre>ix=2000; iz=2000; t=80; w0=7.28*10^-5; hn=200; k=0.054; nun=[iz*t iz+k*t*hn w0*hn*t+k*hn w0*hn]; den=[ix*iz 0 ix*w0*hn 0 0]; ft=tf(nun,den); rlocus(ft)</pre>
Gráfico do lugar das raízes para análise dos parâmetros escolhidos (eixo de rolamento e guinada)	
	<pre>Iy=400; Kp=0.275; tp=80; Ty=8.5*10^-5; ft=tf(1,[Iy Kp*tp Kp]); saida=Ty*ft*180/pi; step(saida)</pre>
Resposta do eixo de arfagem para uma entrada degrau.	



```
Iy=400;
Kp=0.275;
tp=80;
Ty=8.5*10^-5;
ft=tf(1,[Iy Kp*tp Kp]);
saida=Ty*ft*180/pi;
impulse(saida)
```

Resposta do eixo de arfagem para uma entrada impulsiva



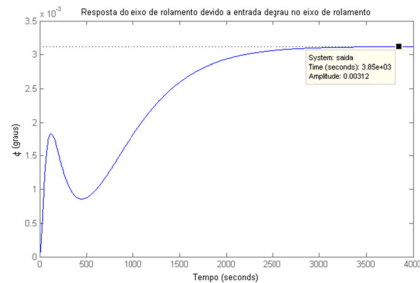
```
Iy=400;
Kp=0.275;
tp=80;
Ty=tf([10^-4 0],[1 0 (7.28*10^-5)^2]);
ft=tf(1,[Iy Kp*tp Kp]);
saida=Ty*ft*180/pi;
impulse(saida)
```

Resposta do eixo de arfagem para uma entrada cíclica



```
Iy=400;
Kp=0.275;
tp=80;
hn=tf(200,[1 0]);
Ty=tf([10^-4 0],[1 0 (7.28*10^-5)^2]);
ft=tf(1,[Iy Kp*tp Kp]);
saida=Ty*ft;
Hy=(tf([Kp*tp Kp],[1 0])*saida)+hn;
impulse(Hy)
```

Variação do momento angular da roda de inércia para correção angular do eixo de arfagem



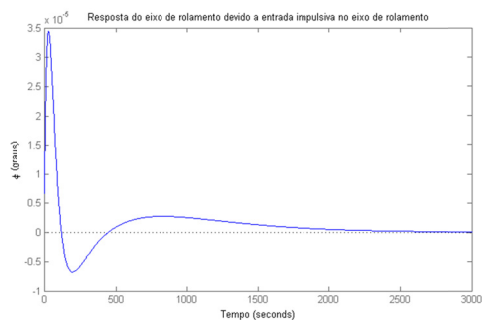

---

```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[Iz 0 wo*hn];
ft=tf(nun,EC);
Tx=8.5*10^-5;
saida=Tx*ft*(180/pi);
step(saida)

```

Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada degrau no eixo de rolamento



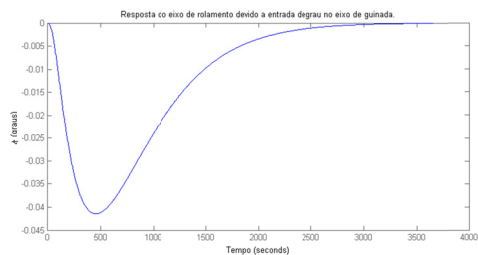

---

```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[Iz 0 wo*hn];
ft=tf(nun,EC);
Tx=8.5*10^-5;
saida=Tx*ft*(180/pi);
impulse(saida)

```

Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada impulsiva no eixo de rolamento




---

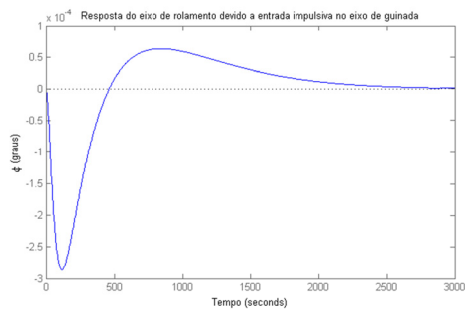
```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[-hn 0];
ft=tf(nun,EC);
Tz=8.5*10^-5;
saida=Tz*ft*(180/pi);
step(saida)

```

Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada degrau no eixo de guinada



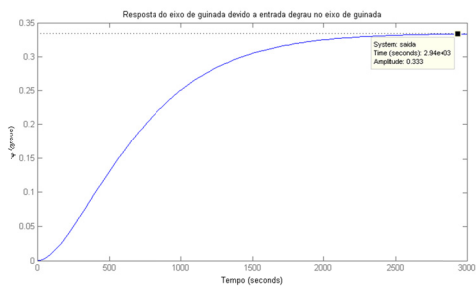


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[-hn 0];
ft=tf(nun,EC);
Tz=8.5*10^-5;
saida=Tz*ft*(180/pi);
impulse(saida)

```

Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada impulsiva no eixo de guinada

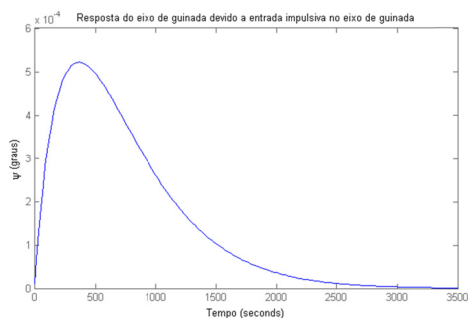


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[Ix K*t K];
ft=tf(nun,EC);
Tz=8.5*10^-5;
saida=Tz*ft*(180/pi);
step(saida)

```

Resposta do eixo de guinada devido a entrada degrau no eixo de guinada

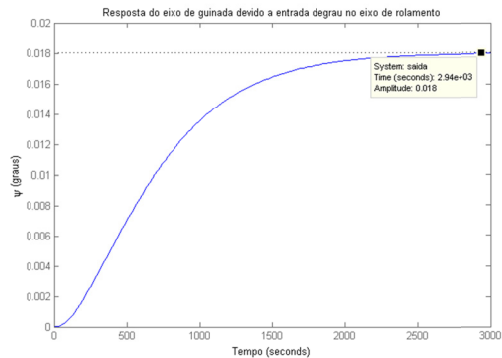


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[Ix K*t K];
ft=tf(nun,EC);
Tz=8.5*10^-5;
saida=Tz*ft*(180/pi);
impulse(saida)

```

Resposta do eixo de guinada devido a uma entrada impulsiva no eixo de guinada

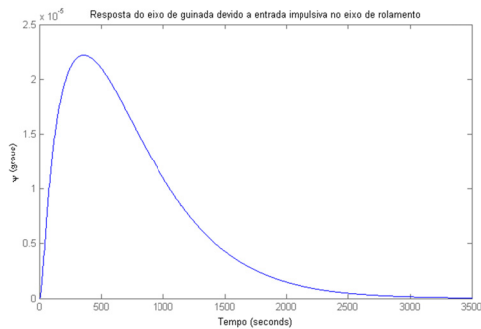


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[k*K*t k*K];
ft=tf(nun,EC);
Tx=8.5*10^-5;
saida=Tx*ft*(180/pi);
step(saida)

```

### Resposta do eixo de guinada devido a uma entrada degrau no eixo de rolamento

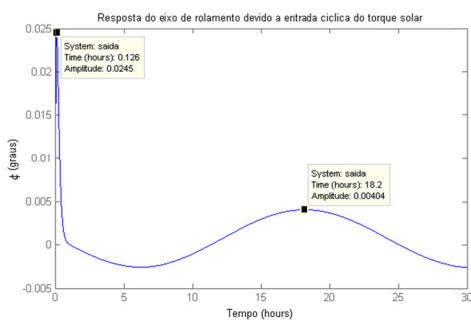


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=[Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K];
nun=[k*K*t k*K];
ft=tf(nun,EC);
Tx=8.5*10^-5;
saida=Tx*ft*(180/pi);
impulse(saida)

```

### Resposta do eixo de guinada devido à entrada impulsiva no eixo de rolamento

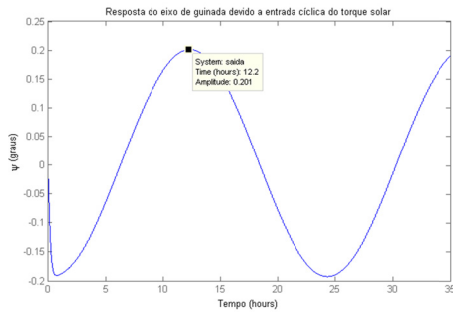


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=tf([Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K],1);
Tx=tf([2*10^-5 -wo^4*10^-5
(wo^2)*2*10^-5],[1 0 wo^2 0]);
Tz=tf([-5*10^-5 0],[1 0 wo^2]);
aux1=tf([Iz 0 wo*hn],1);
aux2=tf([hn 0],1);
nun=Tx*aux1-Tz*aux2;
saida=(nun/EC).*(180./pi);
impulse(saida)

```

## Resposta do eixo de rolamento devido à uma entrada cíclica do torque solar

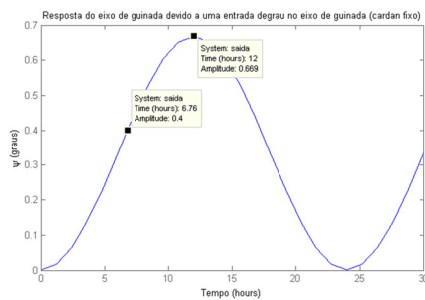


```

Ix=2000;
Iz=2000;
K=1.56;
t=80;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
k=0.054;
EC=tf([Ix*Iz K*Iz*t
K*Iz+Ix*wo*hn+k*K*t*hn
wo*hn*K*t+k*K*hn wo*hn*K],1);
Tx=tf([2*10^-5 -wo*4*10^-5
(wo^2)*2*10^-5],[1 0 wo^2 0]);
Tz=tf([-5*10^-5 0],[1 0 wo^2]);
aux1=tf([Ix K*t K],1);
aux2=tf([k*K*t K*k],1);
nun=Tz*aux1+Tx*aux2;
saida=(nun/EC).*(180./pi);
impulse(saida)

```

## Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada cíclica do torque solar

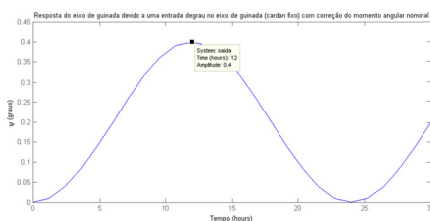


```

Ix=2000;
Iz=2000;
wo=7.28*10^-5;
hn=200;
ft=tf([Ix 0 wo*hn],[Ix*Iz 0
hn*(Ix*wo+Iz*wo+hn) 0
(wo^2)*(hn^2)]);
saida=ft*(8.5*10^-5)*(180/pi);
step(saida)

```

## Resposta do eixo de guinada devido à uma entrada degrau no eixo de guinada (cardan fixo)

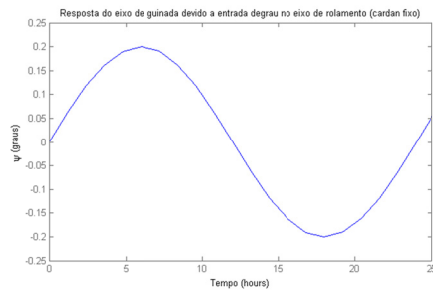


```

Ix=2000;
Iz=2000;
wo=7.28*10^-5;
hn=334;
ft=tf([Ix 0 wo*hn],[Ix*Iz 0
hn*(Ix*wo+Iz*wo+hn) 0
(wo^2)*(hn^2)]);
saida=ft*(8.5*10^-5)*(180/pi);
step(saida)

```

## Resposta do eixo de guinada devido a uma entrada degrau no eixo de guinada (cardan fixo) com correção do momento angular nominal

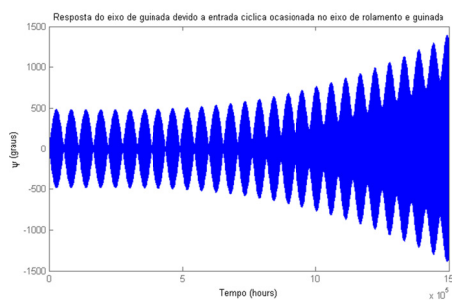


```

Ix=2000;
Iz=2000;
wo=7.28*10^-5;
hn=334;
ft=tf([hn 0],[Ix*Iz 0
hn*(Ix*wo+Iz*wo+hn) 0
(wo^2)*(hn^2)]);
saida=ft.*(8.5*10^-5).*(180/pi);
step(saida)

```

Resposta do eixo de guinada devido a entrada degrau no eixo de rolamento (cardan fixo)



```

Ix=2000;
Iz=2000;
wo=7.28*10^-5;
hn=334;
den=tf([Ix*Iz 0
hn*(Ix*wo+Iz*wo+hn) 0
(wo^2)*(hn^2)],1);
Tx=tf([2*10^-5 -wo*4*10^-5
(wo^2)*2*10^-5],[1 0 wo^2 0]);
Tz=tf([-5*10^-5 0],[1 0 wo^2]);
aux1=tf([Ix 0 wo*hn],1);
aux2=tf([hn 0],1);
saida=(Tz*aux1+Tx*aux2)/den;
saidag=saida.*(180/pi);
impulse(saidag)

```

Resposta do eixo de guinada devido a uma entrada cíclica ocasionada no eixo de rolamento e guinada (cardan fixo).