

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Perturbações orbitais sobre uma vela solar

Jean P. S. Carvalho<sup>1</sup>

UFRB-Centro de Ciência e Tecnologia em Energia e Sustentabilidade, Feira de Santana-BA  
Eva Tresaco<sup>2</sup>

Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, Espanha

R. Vilhena de Moraes<sup>3</sup>

UNIFESP-Instituto de Ciência e Tecnologia, São José dos Campos-SP

A. F. B. A. Prado<sup>4</sup>

INPE- Mecânica Espacial e Controle, São José dos Campos-SP

**Resumo.** Vela Solar é um tipo de propulsão que utiliza a pressão de radiação solar para gerar aceleração, ganha impulso ao refletir os fótons. Em teoria, esses fótons irão transferir a sua energia para as velas solares, fazendo com que a nave se movimente. No presente momento as velas solares estão ganhando atenção da comunidade científica já que oferecem a possibilidade de missões de longa distância e baixo custo, o que seria impossível para qualquer outro tipo de nave espacial convencional. Neste trabalho, é analisado a dinâmica de uma vela solar em torno de um planeta. São feitas aplicações para uma vela solar em torno do planeta Mercúrio levando em conta a sua distribuição não uniforme de massa ( $J_2$ ,  $J_3$  e  $C_{22}$ ), a perturbação do terceiro corpo (PTC) e a pressão de radiação solar (PRS) para diferentes altitudes. Encontramos órbitas congeladas para altitudes em torno de 300 km, 500 km e 1000 km que são os valores preditos para a missão BepiColombo que está prevista para visitar Mercúrio nos próximos anos.

**Palavras-chave.** Vela Solar, Pressão de Radiação, BepiColombo, Mercúrio.

## 1 Introdução

As velas solares, que impulsionam as sondas usando a força dos fótons que incidem sobre uma finíssima película de material reflexivo, são vistas como promissoras pela comunidade científica, pois, em teoria, permitiriam que sondas viajem além do sistema solar, aproveitando unicamente a luz do Sol e das estrelas. Aqui, neste trabalho, é analisado a dinâmica de uma vela solar (ver referências [7,8]) em torno do planeta Mercúrio. Destacamos que este trabalho é uma continuação do trabalho apresentado por [4] onde foi sugerido uma análise do efeito do termo  $C_{22}$  na dinâmica da vela solar. Aqui é apresentado uma

---

<sup>1</sup>jeanfeg@gmail.com

<sup>2</sup>etresaco@unizar.es

<sup>3</sup>rodolpho.vilhena@gmail.com

<sup>4</sup>antonio.prado@inpe.br

abordagem analítica baseada em [1, 4] e [9, 10]. Integrações numéricas das equações desenvolvidas são realizadas usando o software Maple. São feitas aplicações para uma vela solar em torno do planeta Mercúrio levando em conta a sua distribuição não uniforme de massa ( $J_2$ ,  $J_3$  e  $C_{22}$ ), a perturbação do terceiro corpo (PTC) e a pressão de radiação solar (PRS) para diferentes altitudes. Em [6] é apresentado um estudo do campo de gravidade de Mercúrio baseado nos dados coletados por três anos da sonda Messenger, que orbitou em torno de Mercúrio. Neste trabalho é levado em conta no potencial perturbador os valores numéricos dos coeficientes harmônicos dados por [6] que estão apresentados na Tabela 1. Esses valores dos harmônicos são os mais atuais da literatura. Apresentamos uma comparação quando é desprezado o termo  $C_{22}$  (elipticidade equatorial de Mercúrio) e quando este termo é levado em conta no potencial perturbador.

Tabela 1: Valores dos harmônicos esféricos.

$J_2$	$2,25045 \times 10^{-5}$
$J_3$	$0,47659 \times 10^{-5}$
$C_{22}$	$1,24538 \times 10^{-5}$

Em [6] são apresentadas as altitudes de 300 *km*, 500 *km* e 1000 *km* que corresponde aos valores previsto para futuras missões científicas ao redor de Mercúrio, como a missão BepiColombo. Neste trabalho consideramos essas altitudes para a vela solar.

## 2 Modelo dinâmico

O desenvolvimento das equações de movimento estão apresentadas em [4] e [9, 10] e não serão aqui reproduzidas. Para reduzir o grau de liberdade do sistema e eliminar os termos de curto período usamos o modelo analítico de média  $\langle F \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} (F) dM$  ([11]), em que  $M$  é a anomalia média. O símbolo  $\langle \langle \rangle \rangle$  significa que foi usado a dupla média. O potencial devido a perturbação do terceiro corpo (Sol) e a pressão de radiação solar é dado por [4]

$$\begin{aligned}
 R_{PTC+PRS} = & \langle\langle R_{PTC} \rangle\rangle + \langle\langle R_{PRS} \rangle\rangle = \frac{15}{32} n_M^2 (\beta - 1) a^2 (1/2 e^2 (\cos(i_\odot) - 1) \times \\
 & (\cos(i_\odot) + 1) (\cos(i) - 1)^2 \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot - 2w) + 1/2 e^2 (\cos(i_\odot) - 1) (\cos(i_\odot) + 1) \times \\
 & (\cos(i) + 1)^2 \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot + 2w) + 2 \sin(i) \sin(i_\odot) e^2 \cos(i_\odot) (\cos(i) - 1) \times \\
 & \cos(-2w + \Omega - \Omega_\odot) + 2 \sin(i) \sin(i_\odot) e^2 \cos(i_\odot) (\cos(i) + 1) \cos(2w + \Omega - \Omega_\odot) - \\
 & 3/5 (\cos(i) + 1) (\cos(i_\odot) + 1) (\cos(i_\odot) - 1) (\cos(i) - 1) (e^2 + 2/3) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) - \\
 & \frac{12}{5} \sin(i) \cos(i_\odot) \cos(i) (e^2 + 2/3) \sin(i_\odot) \cos(\Omega - \Omega_\odot) + (((\cos(i))^2 - 1) (\cos(i_\odot))^2 + \\
 & 2 (\sin(i))^2 (\sin(i_\odot))^2 + (\cos(i))^2 - 1) e^2 \cos(2w) - 3/5 (e^2 + 2/3) (((\cos(i))^2 + 1) \times \\
 & (\cos(i_\odot))^2 - 5/3 + 2 (\sin(i))^2 (\sin(i_\odot))^2 + (\cos(i))^2)) (1 - e_\odot^2)^{-3/2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

em que  $a$  é o semieixo maior,  $e$  é a excentricidade,  $i$  a inclinação,  $w$  é o argumento do periápsis e  $\Omega$  a longitude do nodo ascendente são os elementos orbitais da vela solar e os termos acompanhados de  $\odot$  são os elementos orbitais do terceiro corpo, e  $n_M$  é o movimento médio da vela solar em torno de Mercúrio. Aqui  $\beta = \frac{L_\odot A}{2\pi m G M_\odot c}$ , em que  $M_\odot$  é a massa solar,  $G$  é a constante universal gravitacional,  $L_\odot$  é luminosidade do Sol (ver [7]),  $m$ ,  $A$  são a massa e a área da vela solar, respectivamente, e  $c$  é a velocidade da luz. Para representar o achatamento de Mercúrio usamos as equações desenvolvida por [1] que são escritas como

$$\langle R_{J2} \rangle = -\frac{1}{4} \frac{\epsilon n_M^2 (-2 + 3 \sin^2(i))}{(1 - e^2)^{3/2}} \tag{2}$$

em que  $\epsilon = J_2 R_M^2$  e  $R_M$  é o raio equatorial de Mercúrio. Aqui  $\epsilon_1 = J_3 R_M^3$ .

$$\langle R_{J3} \rangle = -\frac{3}{8} \frac{e \epsilon_1 n_M^2 \sin(i) (-4 + 5 \sin^2(i)) \sin(w)}{(1 - e^2)^{5/2} a} \tag{3}$$

Agora para representar o efeito devido a não esfericidade ( $C_{22}$ ) do planeta Mercúrio, o desenvolvimento da equação (6) será apresentado numa versão estendida deste trabalho. Apenas indicamos aqui como foi feito o desenvolvimento do potencial levando em conta o efeito do termo  $C_{22}$ . O potencial é dado por

$$R_{C22} = -\left(\frac{R_M}{r}\right)^2 C_{22} P_{22}(\sin(\phi)) \cos(2\lambda) \tag{4}$$

em que  $R_M$  é o raio equatorial de Mercúrio,  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Legendre, o ângulo  $(\phi)$  é a latitude da órbita referente ao equador de Mercúrio,  $(\lambda)$  é a longitude do satélite e  $r$  é a posição do veículo espacial em relação ao corpo central. Em termos dos elementos orbitais, o polinômio associado de Legendre para o termo setorial  $C_{22}$  é posto na forma

$$P_{22}(\sin(\phi)) \cos(2\lambda) = 6(\xi^2 \cos^2(f) + \chi^2 \sin^2(f) + \xi \chi \sin(2f)) - 3(1 - s^2 \sin^2(f + g)) \tag{5}$$

em que  $\xi = \cos(g)\cos(h) - \cos(i)\sin(g)\sin(h)$ ,  $\chi = -\sin(g)\cos(h) - \cos(i)\cos(g)\sin(h)$ ,  $s = \sin(i)$  e  $c = \cos(i)$ . Aqui  $f$  é a anomalia verdadeira,  $g$  é o argumento do pericentro e  $h$  é a longitude do nodo ascendente do satélite. Depois de realizarmos as manipulações algébricas necessárias e aplicarmos o método da média, obtemos

$$\langle R_{C_{22}} \rangle = -\frac{3}{2} \frac{\delta n_M^2 ((\cos(i))^2 - 1) \cos(2n_\odot * t - 2\Omega)}{(-e^2 + 1)^{3/2}} \quad (6)$$

em que  $n_\odot$  é o movimento médio de Mercúrio em torno do Sol,  $\delta = C_{22}R_M^2$  e  $t$  é o tempo. Por fim, o potencial perturbador considerado neste trabalho pode ser escrito na forma

$$k = \langle R_{J_2} \rangle + \langle R_{J_3} \rangle + \langle R_{C_{22}} \rangle + \langle\langle R_{PTC} \rangle\rangle + \langle\langle R_{PRS} \rangle\rangle \quad (7)$$

### 3 Resultados

Substituindo o potencial perturbador de longo período dado pela equação (7) nas equações planetárias de Lagrange e integrando numericamente usando o software Maple encontramos órbitas congeladas (ver [2, 3, 5]) em torno de Mercúrio como mostram as Figuras 1-6.

As condições iniciais utilizadas em todas as figuras são:  $i = 90^\circ$ ,  $w = 270^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $\beta = 0.2$ . Na continuação desse trabalho será feita uma análise para diferentes valores de  $\beta$  para investigar sua influência na dinâmica da vela solar, já que este parâmetro diz respeito, em especial, a relação área-massa da vela que é fortemente influenciado pela pressão de radiação solar. Olhando para os diagramas mostrados nas Figuras 1, 3 e 5, mostramos que as órbitas estão librando em torno do ponto de equilíbrio, mas com grande amplitude. Note que a excentricidade é fortemente perturbada quando é levado em conta os termos  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS}$  no potencial perturbador. Veja na Figura 1 que as órbitas, apesar de estarem librando em torno do ponto de equilíbrio, apresentam grande variação da excentricidade e este aumento pode ocasionar uma colisão da vela solar com a superfície de Mercúrio. Mas quando é levado em conta estas perturbações e mais a elipticidade equatorial de Mercúrio ( $C_{22}$ ) as órbitas passam a librar em torno do ponto de equilíbrio com pequena variação da excentricidade e argumento do periápsis conforme mostrado nas Figuras 2, 4 e 6. Esta análise mostra que considerando os novos valores dos coeficientes harmônicos (dados por [6]) o termo  $C_{22}$  é predominante para manter a excentricidade com pequenas variações, o que possibilitou obtermos órbitas congeladas, órbitas com menor variação dos elementos orbitais, para as três altitudes previstas para a missão BepiColombo.

### 4 Conclusões

Neste trabalho analisamos a dinâmica de uma vela solar em torno do planeta Mercúrio considerando a sua distribuição não uniforme de massa ( $J_2$ ,  $J_3$  e  $C_{22}$ ), a perturbação do terceiro corpo (Sol) e a pressão de radiação solar. Encontramos órbitas congeladas para altitudes em torno de 300 km, 500 km e 1000 km que são os valores preditos para a missão

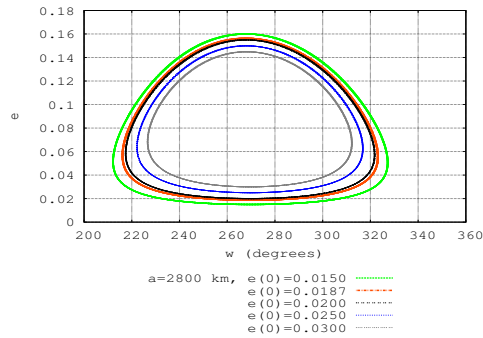


Figura 1: excentricidade ( $e$ ) versus argumento do periápsis ( $w$ -graus). Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS}$ .

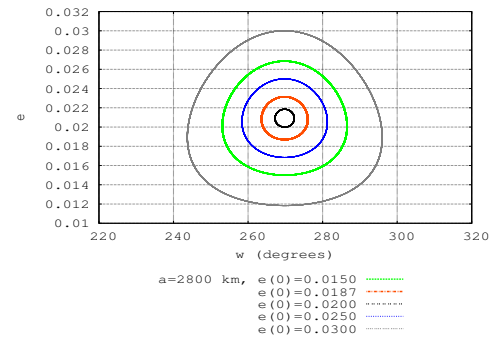


Figura 2: excentricidade ( $e$ ) versus argumento do periápsis ( $w$ -graus). Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS} + C_{22}$ .

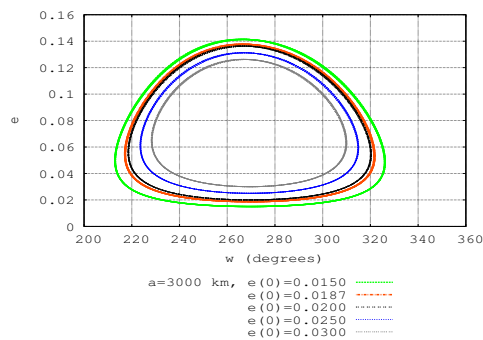


Figura 3: excentricidade ( $e$ ) versus argumento do periápsis ( $w$ -graus). Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS}$ .

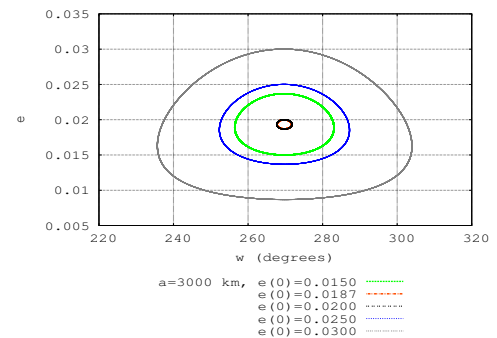


Figura 4: excentricidade ( $e$ ) versus argumento do periápsis ( $w$ -graus). Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS} + C_{22}$ .

BepiColombo que está prevista para visitar Mercúrio nos próximos anos. Usamos os valores mais atuais para os coeficientes harmônicos e mostramos que o termo  $C_{22}$  funciona como um 'mecanismo de proteção' o qual possibilitou encontrarmos órbitas congeladas em torno deste planeta. Na continuação deste trabalho será mostrado o desenvolvimento da equação (6), será investigado a influência do termo devido a pressão de radiação solar sobre a dinâmica do veículo espacial para diferentes valores da razão área-massa da vela solar. A relação área-massa está representada no parâmetro  $\beta$ , em que denominamos de parâmetro tecnológico, o qual está relacionado com a eficácia da vela solar.

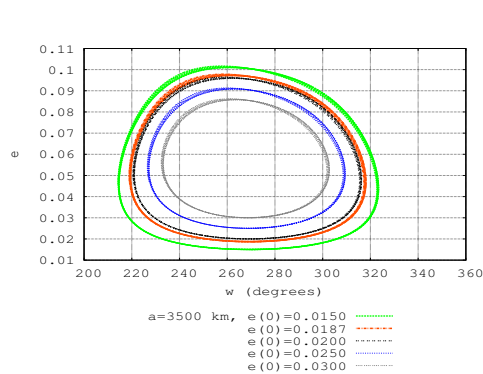


Figura 5: excentricidade ( $e$ ) versus argumento do periápsis ( $w$ -graus). Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS}$ .

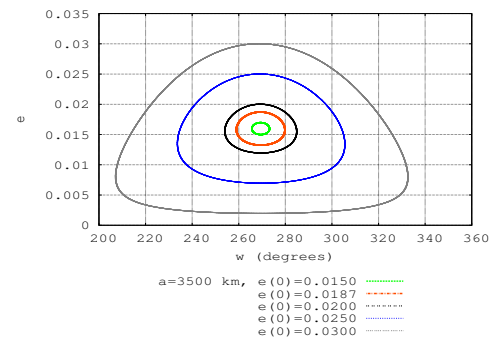


Figura 6: excentricidade ( $e$ ) versus argumento do periápsis ( $w$ -graus). Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + R_{PTC} + R_{PRS} + C_{22}$ .

## Agradecimentos

Patrocinado pelo CNPq - Brasil. Os autores são gratos ao CNPq (contrato N<sup>o</sup> 306.953/2014-5).

## Referências

- [1] J. P. S. Carvalho, R. Vilhena de Moraes, A. F. B. A. Prado. Dynamics of artificial satellites around Europa. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2013, Article ID 182079, 7 pages doi 0.1155/2013/182079.
- [2] J. P. S. Carvalho, R. Vilhena de Moraes, A. F. B. A. Prado. Some Orbital Characteristics of Lunar Artificial Satellites, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 108:371–388, 2010.
- [3] J. P. S. Carvalho, A. Elipe, R. Vilhena de Moraes, A. F. B. A. Prado. Low-altitude, near-polar and near-circular orbits around Europa, *Advances in Space Research*, 49:994–1006, 2012.
- [4] J. P. S. Carvalho. Orbital evolution of a solar sail around a planet. In: Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2015, Natal. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2015.
- [5] A. Elipe, M. Lara. Frozen orbits about Moon. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 26:238–243, 2003.
- [6] E. Mazarico, A. Genova, S. Goossens, et al. The gravity field, orientation, and ephemeris of Mercury from MESSENGER observations after three years in orbit. *Journal of Geophys. Res. Planets*. 119:2417–2436, 2014. DOI: 10.1002/2014JE004675.

- [7] C. R. McInnes. *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer-Praxis Series in Space Science and Technology, Springer-Verlag, 1999.
- [8] C. R. McInnes, Solar Sailing: Orbital Mechanics and Mission Applications, *Advances in Space Research*. 31:1971–1980, 2003.
- [9] E. Tresaco, J. P. S. Carvalho, A. Elife. Frozen orbits computation for a mercury solar sail. In: *25th AASIAA Space Flight Mechanics Meeting*, 2015, Williamsburg, VA. 25th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2015.
- [10] E. Tresaco, A. Elife, J. P. S. Carvalho. Frozen Orbits for a Solar Sail Around Mercury, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015. DOI: 10.2514/1.G001510.
- [11] Szebehely, V., *Adventures in Celestial Mechanics*. University of Texas Press, (1989).