



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21d/2022/07.14.21.38-TDI

DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA EM RESSONÂNCIA TESSERAL COM O ELIPSOIDE TRIAXIAL HOMOGÊNEO

Dairo Antonio Cuellar Mateus

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Rodolpho Vilhena de Moraes, aprovada em 02 de agosto de 2022.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/479GT5E>>

INPE
São José dos Campos
2022

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)
Divisão de Biblioteca (DIBIB)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

Membros:

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21d/2022/07.14.21.38-TDI

DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA EM RESSONÂNCIA TESSERAL COM O ELIPSOIDE TRIAXIAL HOMOGÊNEO

Dairo Antonio Cuellar Mateus

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Rodolpho Vilhena de Moraes, aprovada em 02 de agosto de 2022.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/479GT5E>](http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/479GT5E)

INPE
São José dos Campos
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Mateus, Dairo Antonio Cuellar.

M419d Dinâmica de uma partícula em ressonância tesseral com o elipsoide triaxial homogêneo / Dairo Antonio Cuellar Mateus. – São José dos Campos : INPE, 2022.
xviii + 105 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21d/2022/07.14.21.38-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2022.

Orientadores : Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Rodolpho Vilhena de Moraes.

1. Astrodinâmica. 2. Ressonância. 3. Perturbações orbitais.
4. Harmônicos esféricos. 5. Sistemas Hamiltonianos. I.Título.

CDU 629.7:521.1



Esta obra foi licenciada sob uma [Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÕES

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

DEFESA FINAL DE TESE DAIRO ANTONIO CUELLAR MATEUS
BANCA Nº 212/2022, REG.135763/2018.

No dia 02 de agosto de 2022, às 09h00min, por teleconferência, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle. O trabalho não precisa de correções.

Título: " Dinâmica de uma Partícula em Ressonância Tesseral com o Elipsoide Triaxial Homogêneo "

Membros da Banca:

Dr. Francisco das Chagas Carvalho – Presidente – INPE

Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado– Orientador – INPE

Dr. Diogo Merguizo Sanchez – Orientador –Colégio Cói - Araras-SP/Fundamental II

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes– Orientador – INPE

Dra. Maisa de Oliveira Terra– Membro Externo – ITA

Dra. Rita de Cássia Domingos– Membro Externo – UNESP



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Chefe do Serviço de Pós-Graduação**, em 03/08/2022, às 11:42 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rita de Cássia Domingos (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 13:19 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diogo Merguizo sanchez (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 13:27 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maisa de Oliveira Terra (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 16:02 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolpho Vilhena de Moraes (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 17:08 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco das chagas carvalho (E), Usuário Externo**, em 05/08/2022, às 09:25 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <http://sei.mctic.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **10258391** e o código CRC **C89501EF**.

Referência: Processo nº 01340.006158/2022-19

SEI nº 10258391

“Em nossos dias, descobrimos um método poderoso e elegante de compreender o universo, um método chamado ciência; ele nos revelou um universo tão antigo e tão vasto que as questões humanas parecem, à primeira vista, ter pouca importância”.

CARL SAGAN
em “Cosmos”, 1980

“A história de todas as grandes civilizações galácticas tende a atravessar três fases distintas e identificáveis – as da sobrevivência, da interrogação e da sofisticação, também conhecidas como as fases do como, do porquê e do onde.

Por exemplo, a primeira fase é caracterizada pela pergunta: Como vamos poder comer?

*A segunda, pela pergunta: Por que comemos?
E a terceira, pela pergunta: Onde vamos almoçar?”.*

DOUGLAS ADAMS
em “O Guia Definitivo do Mochileiro das Galaxias”

AGRADECIMENTOS

Finalizar o presente trabalho requiriu de um esforço pessoal, principalmente, mas não seria possível concluí-lo de forma individual. Por tal motivo, agradeço profundamente a oportunidade que o Brasil oferece às pessoas que vemos na ciência, e também em outras áreas do conhecimento, um caminho para contribuir na sociedade e, ao mesmo tempo, melhorar nossas condições de vida. Especialmente, agradeço a oportunidade que oferece a nós estrangeiros. Agradeço aos pesquisadores: Antonio F. Bertachini A. P., Rodolpho Vilhena e Diogo M. Sanchez, pela orientação e pela paciência que tiveram comigo no desenvolvimento desse trabalho. Agradeço aos professores da Universidad del Tolima (Ibagué - Colômbia): José Herman Muñoz Ñungo, Carlos Eduardo Vera Aguirre e o Leonardo Solanilla Chavarro. Aos professores: Leandro Gustavo Gomes, Braulio Augusto Garcia, os dois da Universidade Federal de Itajuba e, ao professor Ricardo Antonio Mosna da Universidade Estadual de Campinas. Também, a todas as pessoas que contribuíram na minha formação. Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, por me outorgar o recurso financeiro para o desenvolvimento dessa tese de doutorado

Agradeço ao meu pai Luis Cuellar e meu irmão Alexander Cuellar por proporcionarme as condições necessárias para realizar os estudos necessários antes e durante a graduação e, também às pessoas que de alguma maneira contribuíram para ser possível o presente resultado. Por último e não menos importante, agradeço pela bela companhia e o apoio da doutora Nicole Nöthen de Oliveira na culminação do presente trabalho.

RESUMO

A dinâmica de uma partícula em ressonância tesseral ao redor de um elipsoide triaxial homogêneo é analisada neste trabalho. Esta ressonância resulta da comensurabilidade entre o spin do corpo e o movimento médio da órbita. Como caso de estudo, analisaremos a dinâmica de uma partícula na órbita da ressonância tesseral 3:1 no planeta anão Haumea. Esta órbita é de nosso interesse por se encontrar na região do anel de poeira que circunda esse planeta anão. Nós propomos quatro modelos da anisotropia do corpo primário e analisamos a sua dinâmica resultante por meio da formulação hamiltoniana e pelo método das equações planetárias de Lagrange. Comparando os resultados obtidos nessas duas abordagens, observamos que o modelo reduzido da anisotropia domina a dinâmica da partícula nas órbitas estudadas. Após isto, analisamos as ressonâncias tesserais 2:1 e 3:1 no elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático ou elipsoide de Jacobi. Nele, determinamos os pontos singulares, centro e pontos de sela, das duas ressonâncias e mostramos que esses pontos não dependem da quantidade de massa do corpo primário. Neste corpo, determinamos o seu período de rotação e a localização das órbitas ao redor dele. Segundo nosso estudo, os asteroides Ida e Chariklo são identificados como elipsoides de Jacobi no Sistema Solar.

Palavras-chave: Astrodinâmica. Ressonância. Perturbações orbitais. Harmônicos esféricos. Sistemas Hamiltonianos.

DYNAMICS OF A PARTICLE IN TESSERAL RESONANCE WITH THE HOMOGENEOUS TRIAXIAL ELLIPSOID

ABSTRACT

The dynamics of a particle in tesseral resonance around a homogeneous triaxial ellipsoid is analyzed in this work. This resonance results from the commensurability between the spin of the body and the mean motion of the orbit. As a case study, we will analyze the dynamics of a particle in the orbit of the tesseral resonance 3:1 on the dwarf planet Haumea. This orbit is of interest to us because it is located in the region of the Haumea's dust ring. We propose four models for the primary body anisotropy and analyze their dynamics using the Hamiltonian formulation and the Lagrange planetary equations method. Comparing the results obtained in these two approaches, we observed that the reduced anisotropy model dominates the particle dynamics in the orbits studied. Also, we analyzed the 2:1 and 3:1 tesseral resonances on the homogeneous triaxial ellipsoid in hydrostatic equilibrium or Jacobi ellipsoid. Using this body, we determine the singular points, center and saddle points, of the two resonances and we show that these points do not depend on the amount of mass of the primary body. In this body, we determine its period of rotation and the location of orbits around it. According to our study, the asteroids Ida and Chariklo are identified as Jacobi ellipsoid in equilibrium in the solar system.

Keywords: Astrodynamics. Resonance. Orbital perturbation. Spherical Harmonics. Hamiltonian system.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Ilustração artística de Haumea.	3
2.1 Elipsoide triaxial.	13
2.2 Relação entre as coordenadas esféricas e os elementos orbitais.	14
2.3 Comparação da função de excentricidade na parte secular $\langle \Phi_{20} \rangle$	21
3.1 Órbitas em ressonância 3:1 no MR1.	35
3.2 Espaço de fase da ressonância 3:1 no MR1.	36
3.3 Excentricidade do centro da ressonância 3:1 no MR1	37
3.4 semieixo crítico da ressonância 3:1 no MR2.	38
3.5 Espaço de fase da ressonância 3:1 no MR2.	38
3.6 Excentricidade do centro da ressonância 3:1 no MR2.	39
3.7 Espaço de fase no semieixo kepleriano da ressonância 3:1 em Haumea. . .	40
3.8 Espaço de fase no semieixo kepleriano da ressonância 3:1 no MR1.	41
3.9 Período médio e comportamento do ângulo ressonante no modelo reduzido. .	43
3.10 MR1 vs MQ1: Caso 1.1.	45
3.11 MR1 vs MQ1: Caso 1.2.	47
3.12 MR1 vs MQ1: Caso 1.3.	48
3.13 MR1 vs MQ1: Caso 1.4.	49
3.14 MR2 vs MQ2: Caso 2.1.	51
3.15 MR2 vs MQ2: Caso 2.2.	52
3.16 MR2 vs MQ2: Caso 2.3.	53
3.17 MR2 vs MQ2: Caso 2.4.	54
3.18 MR2 vs MQ2: Caso 2.5.	55
3.19 MR2 vs MQ2: Caso 2.6.	57
4.1 Período de rotação do Elipsoide em equilíbrio.	69
4.2 Elipsoides em condição de equilíbrio.	71
4.3 Localização das órbitas em ressonância no elipsoide em equilíbrio.	73
5.1 Coeficientes harmônicos do elipsoide em equilíbrio.	77
5.2 Pontos singulares da ressonância 3:1 nas famílias 2 e 3.	80
5.3 Pontos singulares da ressonância 3:1 na Família 1.	80
5.4 Variação do ponto de sela em função do parâmetro q	81
5.5 Localização crítica da ressonância tesseral 3:1.	82
5.6 Ressonância tesseral 2:1 na Família 1.	85
5.7 Espaço de fase da ressonância tesseral 2:1 nos corpos 2 e 3.	86

5.8	Centro da ressonância nas famílias 2 e 3.	87
5.9	Localização crítica da ressonância tesseraral 2:1.	88
.1	Rotina para a obtenção do modelo aproximado	103

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Termos periódicos do Φ_{20} envolvendo a anomalia média.	21
2.1 Conclusão.	22
2.2 Termos periódicos do Φ_{40} envolvendo a anomalia média.	22
2.2 Conclusão.	23
2.3 Termos periódicos do Φ_{22} envolvendo a anomalia média.	23
2.3 Conclusão.	24
2.4 Termos periódicos do Φ_{42} envolvendo a anomalia média.	24
2.4 Conclusão.	25
2.5 Termos periódicos do Φ_{44} envolvendo a anomalia média.	26
2.5 Conclusão.	27
4.1 Famílias de elipsoides em equilíbrio.	67
4.2 Possíveis elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar.	68
4.3 Elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar.	70
5.1 Famílias de elipsoides em equilíbrio.	78

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Definição do problema	4
1.2 Revisão da literatura	5
1.3 Objetivos	9
2 METODOLOGIA	11
2.1 Potencial gravitacional em harmônicos esféricos	11
2.2 Função perturbadora em função dos elementos orbitais	14
2.3 Ressonância tesseral	17
2.4 Modelo aproximado do potencial perturbador em elementos orbitais	20
2.5 Função hamiltoniana do modelo reduzido	29
3 DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA NA REGIÃO DO ANEL DE HAUMEA	33
3.1 Parâmetros do sistema	33
3.2 Semieixo crítico e centro da ressonância	34
3.2.1 A ressonância sob o modelo reduzido 1	34
3.2.2 A ressonância sob o modelo reduzido 2	37
3.3 Efeitos da ressonância tesseral 3:1	42
3.3.1 Efeito do coeficiente J_{22} no movimento da partícula	44
3.3.2 Efeito dos coeficientes J_{22} e J_{42} no movimento da partícula	50
3.4 Discussão e conclusões	57
4 O ELIPSOIDE EM EQUILÍBRIO	63
4.1 Condição de equilíbrio	63
4.2 O elipsoide em equilíbrio no Sistema Solar	67
4.3 Localização da órbita em ressonância tesseral	71
5 RESSONÂNCIA TESSERAL NO ELIPSOIDE EM EQUILÍBRIO	75
5.1 Mudança de Variável	75
5.1.1 Magnitude dos coeficientes J_{20} , J_{22} , J_{40} e J_{42}	76
5.2 Pontos singulares da ressonância tesseral 3:1	77
5.2.1 Localização crítica da ressonância	82

5.2.2	Discussão	83
5.3	Pontos singulares da ressonância tesseral 2:1	84
5.3.1	Localização crítica da ressonância	87
5.3.2	Algumas considerações	88
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
	ANEXO A - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO POTENCIAL GRA- VITACIONAL	99
	ANEXO B - ROTINA IMPLEMENTADA NA OBTENÇÃO DO MODELO APROXIMADO.	103
	ANEXO C - TERMO DE CORIOLIS NO ELIPSOIDE EM EQUI- LIBRIO	105

1 INTRODUÇÃO

O modelo heliocêntrico proposto por Nicolau Copérnico no século XVI, embora pensado pelo astrônomo e matemático Aristarco de Samos 17 séculos antes, obteve reconhecimento na comunidade científica da época. A partir disto, cresceu o interesse por determinar a causa do movimento observado dos astros resultando no conceito operacional de força implícito nas leis de movimento, conhecidas como Leis de Newton, dando início ao estudo da dinâmica dos objetos. As leis de Newton conseguem descrever o movimento dos planetas ao redor do Sol e também na vizinhança dos corpos que compõem o Sistema Solar, baseando-se na Lei da Gravitação Universal. Nos três séculos seguintes, o avanço científico e tecnológico no estudo sobre a dinâmica dos corpos abriu o caminho à Era espacial.

Na Era espacial, a observação de corpos celestes como o Sol, planetas, luas, asteroides e até galáxias, passou a ser feita também a partir do espaço. Atualmente, telescópios (o Telescópio Espacial Hubble e o Telescópio James Webb), sondas espaciais, robôs coletando dados desde a superfície de Marte e sondas que trazem amostras de cometas, constituem as novas formas de observação do universo. Algumas das missões lançadas com o objetivo de observação *in situ*, são: a missão New Horizons (RUSSEL et al., 2005), Dawn (RAYMAN et al., 2006) e Hayabusa (YANO et al., Proceedings... 2003).

Orbitar um corpo celeste mediante um veículo espacial é uma tarefa complexa, pois requer tecnologia suficiente para levar o veículo espacial até o objeto de estudo, tecnologia essa que precisa, às vezes, ser desenvolvida. Portanto, é necessário ter um conhecimento amplo sobre a dinâmica ao redor do sistema de interesse, especialmente para delimitar aquelas regiões que permitam a permanência do veículo espacial durante o tempo da missão. Porém tais regiões podem ser propícias para abrigar material espacial, como poeira e pequenos pedaços rochosos, o que deve ser evitado para o sucesso de uma missão.

A dinâmica na vizinhança do corpo celeste é governada por forças de diferentes fontes, as chamadas forças perturbadoras. Algumas dessas perturbações são: a pressão de radiação solar, perturbação por outros corpos e a força gerada pela não esfericidade (anisotropia) do corpo primário (ou primário).

Uma nova classificação de planetas, os planetas anões, foi introduzida em 2006 pela União Astronômica Internacional e à qual pertence o planeta Plutão. Também fazem parte desta classificação os astros Eris, Haumea e Makemake. O semieixo maior da

órbita de cada um destes quatro planetas anões é maior do que o semieixo maior da órbita de Netuno, mas transitam periodicamente regiões internas à órbita de Netuno devido a excentricidade considerável de suas órbitas, pelo qual são chamados de objetos transnetunianos. O interesse por analisar esse novo conjunto de corpos celestes resulta da informação que tem a oferecer sobre a história de nosso Sistema Solar. Por tal motivo, alguns objetos transnetunianos foram propostos para ser o objetivo de novas missões espaciais (GRUNDY et al., 2009), como é o caso do planeta anão Haumea.

O planeta anão Haumea tem período orbital cerca de 285 anos terrestres. A sua superfície é constituída por uma camada de gelo, pelo qual é classificado junto com outros corpos do Sistema Solar, como planeta anão gelado (BROWN et al., 2007) e, possui duas luas, Hi'iaka e Namaka (RAGOZZINE; BROWN, 2009).

No sistema descrito, em 2016, foi determinada uma região de órbitas quase periódicas no plano equatorial, propícia para posicionar um veículo espacial ao redor de Haumea (SANCHEZ et al., 2016). Porém, no seguinte ano, na proximidade desta região, foi observado um anel de poeira (ORTIZ et al., 2017), o que impediria, no futuro, o posicionamento de um veículo espacial em dita região. Este exemplo ressalta a importância do conhecimento sobre a dinâmica na vizinhança de um astro para o sucesso das missões espaciais. Na região em que foi observado o anel de poeira, encontra-se a órbita da ressonância tesseral 3:1, isto é, 3 rotações de Haumea por período orbital da partícula na órbita. Na Figura 1.1, vemos uma ilustração artística de Haumea e seu anel.

A forma geométrica empregada neste trabalho para modelar Haumea é o elipsoide triaxial. Esse planeta anão não é o único corpo do Sistema Solar com essa forma geométrica. Desde a década de 1980, o elipsoide triaxial tem sido empregado para modelar alguns asteroides, escolha baseada nas observações astronômicas. Como exemplo, temos os asteroides: Gaspra, Bennu, Psyche, Pallas, entre outros. Alguns destes pequenos corpos do Sistema Solar viraram alvo de interesse na comunidade científica e missões espaciais foram já executadas, algumas delas são as missões: Rosetta (2004) (GLASSMEIER et al., 2007) e OSIRIS-REx (2016) (BESHORE et al., Proceedings... 2015). Mais informações sobre estas e outras missões podem ser encontradas em <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions>.

Figura 1.1 - Ilustração artística de Haumea.

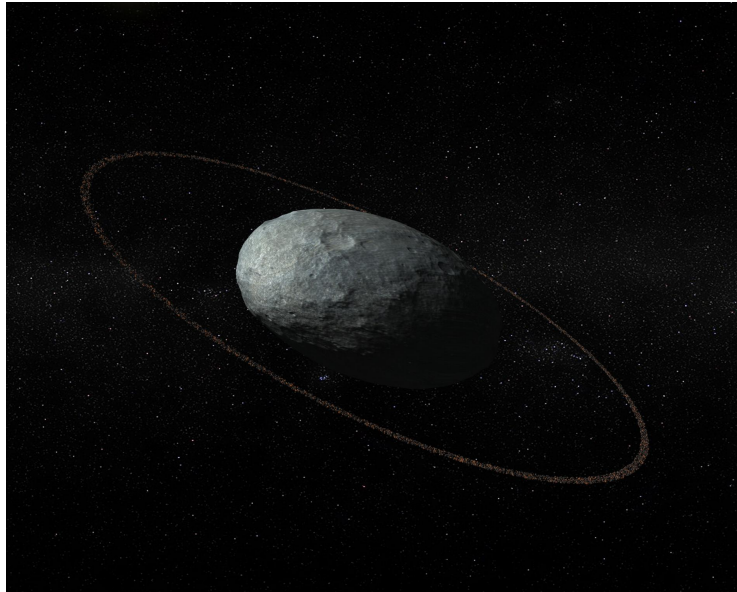


Ilustração do planeta anão Haumea, com proporções certas para o corpo principal e o anel. O anel está a uma distância média de 2.287 km do centro do corpo principal e é mais escuro que a superfície do planeta.

Fonte: Instituto de Astrofísica de Andalucia (2017).

O corpo ideal para a modelagem de Haumea e dos asteroides têm sido o elipsoide triaxial de densidade de massa homogênea. Tal corpo, sob a condição de equilíbrio hidrostático, será o segundo objeto de estudo no presente trabalho. Este corpo teórico tem sido de interesse desde sua descoberta feita por C.G.J. Jacobi na primeira metade do século XIX ([IURATO, 2014](#)) e é conhecido como Elipsoide de Jacobi. Um século depois, tinha-se conhecimento de mais quatro corpos sob tais condições, os quais são analisados na obra intitulada *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* do físico S. Chandrasekhar ([CHANDRASEKHAR, 1969](#)).

Nas seguintes seções do presente capítulo, definimos o problema de nosso interesse. Logo, mencionaremos os esforços feitos pela comunidade científica interessada em resolvê-lo, e, por último, enunciamos os objetivos do nosso trabalho que contribuirão para a solução do problema.

O Capítulo dois contém a metodologia que será aplicada para cumprir os objetivos mencionados, apresentando a função perturbadora, definindo a condição de ressonância tesseral e a formulação hamiltoniana para a análise do sistema dinâmico

reduzido em ressonância.

No Capítulo três, analisaremos a dinâmica de uma partícula na órbita equatorial em ressonância tesseral 3:1 ao redor de Haumea, por meio das equações planetárias de Lagrange.

No capítulo quatro, definimos as condições de equilíbrio hidrostático do elipsoide triaxial homogêneo. Também apresentamos quais asteroides satisfazem as ditas condições de equilíbrio.

No Capítulo cinco, determinamos os pontos singulares das ressonâncias tesserais 3:1 e 2:1 no elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático.

No Capítulo final, faremos algumas conclusões e considerações sobre o exposto nos capítulos anteriores.

1.1 Definição do problema

Na região em que foi observado o anel de poeira ao redor de Haumea, encontra-se a órbita da ressonância tesseral 3:1, isto é, 3 rotações de Haumea por período orbital da partícula na órbita (ORTIZ et al., 2017). A força perturbadora mais significativa nesta região é a força gerada pela anisotropia do campo gravitacional do primário (KOVACS; REGALY, 2018). Por tal motivo, na dinâmica da partícula, consideraremos a superposição da força central e da força perturbadora gerada pela não esfericidade de Haumea. Assim, o problema aqui tratado pode ser enunciado como:

Determinar a influência da ressonância tesseral 3:1 ao redor do planeta anão Haumea.

No presente trabalho, a função modeladora do potencial gravitacional é dada por uma série finita em harmônicos esféricos. Nela, cada um dos harmônicos esféricos é uma série finita de funções cosseno escritas nos elementos orbitais. Os cossenos nos quais o argumento é uma combinação linear envolvendo a anomalia média da partícula e o ângulo de rotação do primário serão chamados de cossenos ressonantes. O efeito da perturbação periódica de cada um dos cossenos ressonantes está relacionado com o semieixo maior da órbita, indicando que para cada órbita em ressonância, tem-se um termo ressonante de maior efeito em comparação aos outros cossenos que compõem a função perturbadora.

A primeira abordagem será mediante o Problema ideal de ressonância (GARFINKEL,

1970). Este problema consiste em analisar a dinâmica gerada pelo termo secular do harmônico zonal e o termo ressonante da ressonância tesseral em questão. Este problema ideal modela de forma reduzida a anisotropia do primário para determinar o efeito isolado do cosseno ressonante. A análise deste problema será inicialmente mediante a formulação hamiltoniana, com o interesse de determinar o centro da ressonância. Logo, usaremos as Equações Planetárias de Lagrange (MURRAY; DERMOTT, 1999; FERNANDES; ZANARDI, 2018), para obter a dinâmica da partícula no modelo reduzido. Porém, o estudo deste modelo não é suficiente obter conclusões determinantes. Posto isto, também analisaremos a dinâmica em dita ressonância sob modelos que incluam o efeito dos demais termos que compõem o harmônico esférico de interesse.

Uma vez estudado o problema ideal da ressonância tesseral 3:1 no caso particular de Haumea. Analisaremos este mesmo problema no caso das ressonâncias tesserais 3:1 e 2:1 em um elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático. Determinaremos os pontos singulares, o centro e os pontos de sela, da ressonância na região equatorial de tais corpos primários. Algumas das características deste corpo ideal, como período de rotação e semieixo maior da órbita das ressonâncias, são examinadas.

Os esforços para determinar a causa da existência do anel de poeira em Haumea é um dos temas mencionados na seção seguinte, junto com resultados sobre algumas características dos asteroides modelados pelo elipsoide triaxial homogêneo.

1.2 Revisão da literatura

Na primeira metade do século XX, houve um interesse por compreender os efeitos da não esfericidade da Terra em um objeto orbitando-a, pois começava o que é conhecido como a *corrida espacial*.

O trabalho publicado por Dirk Brouwer em 1959 (BROUWER, 1959), é considerado um dos trabalhos pioneiros em tratar o efeito da perturbação dos coeficientes harmônicos zonais, sobre a trajetória de satélites artificiais. A análise destes efeitos é conhecida na literatura como o Problema Principal na Teoria de Satélites Artificiais. Sobre esse problema, a principal abordagem para obter uma solução analítica tem sido a formulação hamiltoniana, e o interesse pela procura deste tipo de soluções se manteve por décadas, gerando resultados significativos (CLAES, 1980; DEPRIT, 1981; BREITER, 1997; SAEDELEER, 2005).

A assimetria do primário em torno do eixo de rotação gera efeitos gravitacionais

que são observados em um período orbital, efeitos de curto período. Esta assimetria modelada pelos harmônicos tesserais e setoriais, que serão chamados de tesserais, do potencial gravitacional geram perturbações com grandes efeitos em longos períodos de tempo. Um dos primeiros trabalhos relacionando as variações da órbita com a perturbação gerada pelos harmônicos tesserais foi feito por R. Anderle ([ANDERLE, 1965](#)). Naquele trabalho, as variações periódicas da órbita do satélite 1963 49B foram associadas aos efeitos dos coeficientes até grau 7 e ordem 6, e o resultado obtido foi confirmado no Laboratório Naval de Armas, Virginia - Estados Unidos. A variação observada resultou ser produto da comensurabilidade da frequência angular de rotação da Terra e o movimento médio da órbita, ou seja, produto de uma ressonância tesseral.

Assim como no problema principal da teoria de satélites artificiais, houve esforços para obter uma teoria analítica sobre os efeitos gerados pela assimetria em torno do eixo de rotação do primário ([ROMANOWICZ, 1975](#); [LANE, 1987](#); [SEGERMAN](#); [COFFEY, 2000](#)).

Nos trabalhos até aqui mencionados, os corpos primários são planetas e alguns satélites naturais. No entanto, existe uma outra classe de objetos de interesse chamados de planetas anões, e o interesse por conhecer em profundidade estes corpos têm aumentado na última década ([GRUNDY et al., 2009](#)). Um planeta anão é tal que: i) orbita o Sol, ii) tem suficiente massa para estar em equilíbrio hidrostático, iii) tem objetos na vizinhança de sua órbita e iv) não é um satélite ([NATH, 2018](#)), definição na qual se identifica o planeta Haumea.

Haumea, como já mencionado, é um dos objetos transnetunianos de interesse para futuras missões espaciais. Sua massa estimada é de $4,006 \times 10^{21}$ kg, distribuída no volume determinado pelo elipsoide triaxial de semieixos: $x_1 = 1.161 \pm 30$ km, $x_2 = 852 \pm 4$ km e $x_3 = 513 \pm 16$ km ([ORTIZ et al., 2017](#)). A densidade de massa de Haumea é heterogênea, devido a sua composição rochosa delimitada por uma camada externa de gelo. Porém, neste trabalho, consideramos que corpo o primário tem densidade homogênea. A sua rotação é uma das mais rápidas observadas no Sistema Solar, com período de 3,9155 h. Possui duas luas que o orbitam: Namaka e Hi'iaka, com semieixo maior da órbita cerca de 25.667 km e 49.880 km, respectivamente. Também foi observado, neste sistema, um anel de poeira no seu plano equatorial com semieixo maior nominal $a_{ring} = 2.287^{+75}_{-45}$ km e uma largura média de 70 km ([ORTIZ et al., 2017](#)).

O sistema descrito tem sido objeto de estudo nas duas últimas décadas. Os primeiros estudos identificaram Haumea como sendo a origem da única família colisional observada no cinturão de Kuiper (BROWN et al., 2007), e suas duas luas como produto de tal colisão (VOLK; MALHOTRA, 2012). Logo, as análises foram direcionadas no estudo da dinâmica de partículas na vizinhança de Haumea.

Aplicando a técnica de seções de Poincaré, encontrou-se um conjunto de órbitas periódicas e quase periódicas localizadas no plano equatorial na vizinhança do planeta (SANCHEZ et al., 2016). Logo, a região na qual foi observado o anel de poeira virou alvo de estudos, pois, uma das razões é a presença da órbita da ressonância tesimal 3:1 nessa região. A comparação da magnitude do efeito das forças perturbadoras, tais como a perturbação gerada pela anisotropia de Haumea modelada pelos coeficientes harmônicos C_{20} e C_{22} , a força da pressão de radiação solar e a força do terceiro corpo produzida pela presença das duas luas e do Sol, determinou que a força perturbadora dominante nesta região é devida à anisotropia do primário (KOVACS; REGALY, 2018).

Novamente, modelando a anisotropia de Haumea gerada pelos coeficientes harmônicos de ordem e grau dois, e mediante o método de seções de Poincaré, foram encontradas órbitas quase periódicas na região do anel (WINTER et al., 2019). Naquele trabalho, observou-se que a estrutura dinâmica nessa região é determinada pelas órbitas quase periódicas de excentricidade inicial nula, chamadas de órbitas do primeiro tipo. As órbitas em ressonância tesimal 3:1 com Haumea apresentaram uma oscilação de aproximadamente 600 km em relação a sua condição inicial do semieixo maior da órbita e o ângulo ressonante uma oscilação em torno de π ou $-\pi$. Em contraste, as órbitas periódicas do primeiro tipo oscilaram em torno de sua condição inicial com amplitude menor do que 30 km.

Aplicando um novo método de análise, método de Integrais de Perturbação, foram estudados os efeitos dos coeficientes harmônicos até ordem e grau quatro do potencial gravitacional na região do anel e também o comportamento do ângulo ressonante. Nessa região, o efeito do coeficiente C_{22} é uma ordem de magnitude maior que o efeito de C_{20} , e este último tem a mesma ordem de magnitude que o efeito do C_{44} (SANCHEZ et al., 2020). Os autores também concluíram que, para ter-se uma configuração estável do anel, o ângulo ressonante estaria em circulação.

Considerando a perturbação gerada pela anisotropia do potencial gravitacional do primário e a perturbação do terceiro corpo, apresentou-se uma região estável de órbitas perto da órbita da ressonância 3:1 (SUMIDA et al., 2020). A partir da deter-

minação dessa região e calculando o raio de Roche, os autores do trabalho citado concluem que a existência do anel é possível somente perto desta ressonância.

No estudo apresentado em (MARZARI, 2020), destaca-se a influência da parte secular do coeficiente J_{20} para se contrapor a perturbação secular proporcionada pela lua Namaka. Em outras palavras, o valor elevado do coeficiente J_{20} protege as partículas do anel equatorial da perturbação gerada pelo satélite natural.

Os trabalhos citados na continuação constituem, até a conclusão do presente estudo, os trabalhos que consideramos relevantes em relação ao modelo de elipsoide triaxial empregado para tratar a forma geométrica dos corpos pequenos do Sistema Solar.

Com relação ao modelo de elipsoide triaxial empregado para tratar os corpos pequenos do Sistema Solar, a determinação da forma geométrica de alguns asteroides e a sua relação com o seu período de rotação começou a ser feita nos anos 70 (MCADOO; BURNS, 1973). Porém, ainda levariam oito anos até se considerar seriamente a relação entre a forma elipsoidal e o curto período de rotação desses corpos celestes (FARINELLA et al., 1981). No mesmo ano (1981), o pesquisador S. J. Weidenschilling (WEIDENSCHILLING, 1981) aplicou o modelo de elipsoide triaxial para concluir que, se o período de rotação de um asteroide fosse de quase 4 horas, então a sua densidade de massa deveria ser de 2 a 3 g/cm³. Além disso, se tal corpo fosse composto de Ferro (densidade aproximada de 7 g/cm³), o seu período de rotação seria de quase duas horas.

No ano de 1984, um estudo estatístico sobre os asteroides conhecidos até então, mostrou que a média dos semieixos desses corpos estão na proporção $(1:1/\sqrt{2}:1/2)$ (CAPACCIONI et al., 1984). Com esse dado, foi analisado o corpo elipsoidal de dimensões satisfazendo as proporções mencionadas, densidade de massa 2,5 g/cm³ e período orbital entre 5 e 40 horas. Nele, foi identificada uma zona caótica perto da ressonância tesseraral 1:1 (CHAUVINEAU et al., 1993).

A estabilidade das órbitas ao redor de um corpo celeste é de interesse fundamental para as missões espaciais a tais objetos, pelas razões expostas em parágrafos anteriores. A estabilidade das órbitas em ressonâncias tesserais 1:1 e 2:1 é analisada para uma família de asteroides modelados pelo elipsoide triaxial homogêneo (COMPERE et al., 2012). A designação desta família foi feita fixando a densidade de massa e o eixo maior do corpo, variando a dimensão dos dois eixos de menor longitude e escolhendo três períodos de rotação de mais de 18 horas. Nesse trabalho, analisa-se todos os elipsoides da família sem considerar se satisfazem ou não as condições de

equilíbrio hidrostático.

1.3 Objetivos

As informações fornecidas pelos trabalhos citados sobre o sistema composto pelo planeta anão Haumea, as duas luas que o orbitam e o seu recém descoberto anel de poeira na vizinhança da órbita da ressonância tesseral 3:1, nos motiva a analisar a órbita que segue uma partícula em ressonância tesseral 3:1 com Haumea.

Definimos os objetivos do presente trabalho que contribuirão para determinar a relação entre o efeito da ressonância tesseral 3:1 e a existência do anel em Haumea. Como primeiro objetivo, temos:

- Analisar o efeito da forma geométrica de Haumea sobre uma partícula na órbita equatorial da ressonância tesseral 3:1.

A análise será feita primeiramente baseando-nos no problema ideal de ressonância na formulação hamiltoniana e, depois usamos as equações planetárias de Lagrange para observar a variação dos elementos orbitais. Para isto, propomos:

- a) Determinar o centro da ressonância tesseral 3:1 em Haumea a partir do espaço de fase do modelo reduzido da ressonância.
- b) Utilizar as equações planetárias de Lagrange sobre o sistema dinâmico reduzido e também no sistema dinâmico quase completo, para determinar a influência do termo ressonante da ressonância tesseral 3:1 na dinâmica da partícula.

A forma geométrica de Haumea e o estudo do sistema reduzido da ressonância tesseral 3:1 nele, motivou a análise do sistema reduzido de algumas das ressonâncias tesserais no elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático. Essa motivação resulta no segundo objetivo:

- Determinar os pontos singulares das ressonâncias tesseral 2:1 e 3:1 em um elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático.

Este objetivo nos ajudará a determinar, para alguns casos e com base nos resultados obtidos no caso particular de Haumea, se a presença de partículas orbitando corpos

celestes com forma geométrica elipsoidal é devido a sua órbita estar em ressonância tesseral ou não com o primário.

Para chegar nos objetivos propostos, a função perturbadora aqui analisada é desenvolvida no capítulo seguinte.

2 METODOLOGIA

No sistema ideal de dois corpos com simetria esférica e homogêneos, a trajetória que estes corpos seguem, sob a ação da força gravitacional mútua, é bem definida. Determinar as trajetórias neste sistema ideal é conhecido como o Problema de Dois Corpos (FERNANDES; ZANARDI, 2018; MURRAY; DERMOTT, 1999). Nele, o centro de massa do sistema é tomado como referência, e os corpos o orbitam seguindo uma das curvas do conjunto de seções cônicas. A força geradora da dinâmica no problema de dois corpos é a Lei da Gravitação, formulada por Isaac Newton no século XVII e sua formulação matemática é dada por:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.1)$$

em que G é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas de cada um dos dois corpos, \mathbf{e}_r é o vetor unitário na direção que liga os centros de massa dos corpos e r é o módulo da distância entre os centros de massa de cada um dos dois corpos.

Entretanto, os corpos no sistema solar não são esferas. Assim, para um objeto com forma irregular, neste caso m_1 , o vetor da força gravitacional é:

$$\mathbf{F} = -G m_2 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \mathbf{e}_r dv'. \quad (2.2)$$

A integral é definida sobre o volume ocupado por m_1 , $\rho(\mathbf{r}')$ é a função densidade de massa e dv' é o elemento de volume.

Neste trabalho, consideramos o corpo primário como sendo um elipsoide triaxial de densidade homogênea, e o corpo secundário (veículo espacial ou poeira) como sendo uma partícula.

2.1 Potencial gravitacional em harmônicos esféricos

A força exercida sobre o corpo de massa m_2 é expressa por $\mathbf{f} = m_2 \mathbf{a}$, em que \mathbf{a} é a aceleração resultante. Sobre o conceito de massa, tem-se massa inercial e massa gravitacional que são equivalentes (MARION, 2013), e a partir desta equivalência a atração gravitacional exercida por m_1 sobre m_2 , dada pela Equação (2.1), é igual a $m_2 \mathbf{a}$. Com isto, o campo gravitacional gerado pelo corpo m_1 é:

$$\frac{\mathbf{F}}{m_2} = -\frac{G m_1}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.3)$$

O lado direito desta equação decorre de:

$$-\frac{\mu}{r^2}\mathbf{e}_r = -\nabla\left(-\frac{\mu}{r}\right) = -\nabla\Phi, \quad (2.4)$$

na qual ∇ é o operador gradiente e $\mu = Gm_1$ é o parâmetro gravitacional. A função potencial, $\Phi = -\mu/r$, escrita nas coordenadas cartesianas em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, satisfaz a equação:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.5)$$

Esta equação é conhecida como a Equação de Laplace, e a teoria sobre as funções que a satisfazem é chamada de Teoria do potencial (KELLOGG, 1953). A Equação (2.5) em coordenadas esféricas toma a forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\sin\phi \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2} = 0, \quad (2.6)$$

em que r é a variável na direção radial; λ é a longitude, que é o ângulo medido no plano fundamental ou plano equatorial xy ; ϕ é a latitude, o ângulo medido entre o plano fundamental e o eixo perpendicular a ele. A função potencial que satisfaz a Equação (2.6) é dada por:

$$\Phi(r, \lambda, \phi) = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (2.7)$$

na qual R é o raio equatorial médio do primário, $P_{nm}(\sin\phi)$ é a função associada de Legendre, C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes harmônicos esféricos.

O potencial gravitacional também é representado por:

$$\Phi(r, \lambda, \phi) = -\frac{\mu}{r} - \mathcal{R}(r, \lambda, \phi), \quad (2.8)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r, \lambda, \phi) = & \frac{\mu}{r} \left[- \sum_{n=2}^{\infty} J_{n0} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{n0}(\sin\phi) \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\phi) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

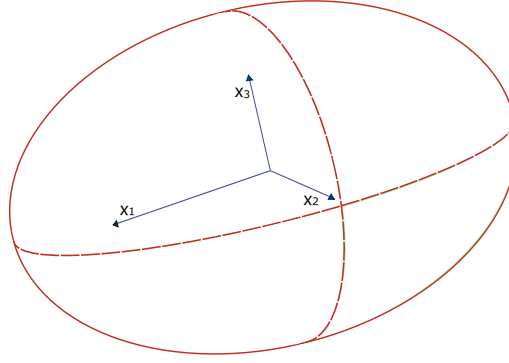
na qual

$$J_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2}, \quad \lambda_{nm} = \frac{1}{m} \tan^{-1}(S_{nm}/C_{nm}). \quad (2.10)$$

Na Equação (2.9), $P_{n0}(\sin \phi)$ e $P_{nm}(\sin \phi)$ são o Polinômio de Legendre de grau n e a Função Associada de Legendre de grau n e ordem m , respectivamente (KAULA, 1966; CHOBOTOV, 2002; WALTER, 2008). Nessa Equação, o potencial gravitacional Φ é dividido em duas partes, a saber: potencial esférico ou termo kepleriano μ/r e a função perturbadora ou potencial perturbador expresso na função \mathcal{R} . O potencial perturbador é constituído pelos harmônicos zonais nos quais $m = 0$; harmônicos setoriais e harmônicos tesserais para os quais $m = n$ e $m \neq n$, respectivamente. Os últimos dois conjuntos de termos, por simplicidade, serão chamados aqui de harmônicos tesserais ou simplesmente de tesserais.

Em um elipsoide triaxial, Figura 2.1, todos seus coeficientes harmônicos com n ou m ímpares são nulos (BALMINO, 1994). Até grau e ordem quatro, estes coeficientes

Figura 2.1 - Elipsoide triaxial.



Elipsoide triaxial e seu semieixos x_1 , x_2 e x_3 .

Fonte: Produção do autor.

são determinados por:

$$\begin{aligned}
 C_{20} &= \frac{1}{5R^2} \left(x_3^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right), \\
 C_{22} &= \frac{1}{20R^2} (x_1^2 - x_2^2), \\
 C_{40} &= \frac{15}{7} (C_{20}^2 + 2C_{22}^2), \\
 C_{42} &= \frac{5}{7} C_{20} C_{22}, \\
 C_{44} &= \frac{5}{28} C_{22}^2,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que os semieixos do corpo, x_1 , x_2 e x_3 satisfazem a desigualdade $x_1 > x_2 > x_3$. Os harmônicos correspondentes a estes coeficientes serão apresentados explicitamente

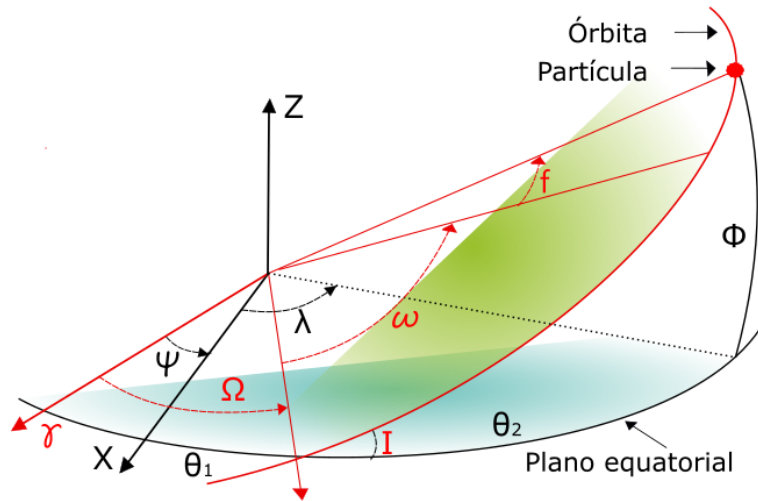
nas seções seguintes. Conforme a relação (2.10), tem-se $J_{2n,2m} = C_{2n,2m}$, porém, por definição $J_{20} = -C_{20}$. Já que $S_{nm} = 0$ para o elipsoide triaxial, então para tal corpo tem-se $\lambda_{nm} = 0$. Uma vez definidos quais são os coeficientes não nulos no corpo de interesse, passamos a descrever os harmônicos esféricos correspondentes de tais coeficientes nos elementos orbitais.

2.2 Função perturbadora em função dos elementos orbitais

Quando consideramos a anisotropia (corpo primário não esférico) do potencial expresso na Equação (2.9), vemos que seu efeito sobre uma partícula seja pequeno em comparação ao efeito do termo kepleriano, temos como trajetória uma elipse com pequenas variações nos seus elementos orbitais. Portanto, é adequado descrever o potencial gravitacional (2.8) em termos dos elementos orbitais: semieixo maior da órbita (a), excentricidade (e), longitude do nodo ascendente (Ω), inclinação do plano orbital (I) e argumento do pericentro (ω) e a anomalia média (ℓ). A anomalia média está relacionado com o tempo e será definido no final da seção, no momento, empregaremos o ângulo de posição do corpo na órbita em referência ao pericentro, ângulo chamado de anomalia verdadeira (f).

A geometria do problema relacionando os elementos orbitais com as coordenadas esféricas é esboçada na Figura 2.2.

Figura 2.2 - Relação entre as coordenadas esféricas e os elementos orbitais.



O sistema referencial de eixos em cor vermelha é o sistema inercial em que γ é o eixo em direção a algum ponto considerado como “fixo”. Em cor preta temos o referencial fixo no corpo.

Fonte: Produção do autor.

Nesta figura, ψ é o tempo sideral do corpo, e os ângulos $\theta_1 = \Omega - \psi$ e $\theta_2 = \lambda - \theta_1$ são ângulos auxiliares para cálculos futuros neste texto.

A análise do efeito gravitacional dos harmônicos zonais:

$$\Phi_{n0} = -J_{n0} \frac{\mu R}{r^{n+1}} P_{n0}(\sin \phi), \quad (2.12)$$

é conhecida como o Problema principal na teoria de satélites (BROUWER, 1959). Isto se deve ao fato de que o valor numérico dos coeficientes J_{n0} da Terra são de várias ordens de magnitude maiores quando comparados com os coeficientes J_{nm} (CHOBOTOV, 2002).

A relação entre a latitude ϕ e a anomalia verdadeira é dada pela regra de Napier:

$$\sin(\phi) = \sin(f + \omega) \sin(I). \quad (2.13)$$

Agora, no caso de $n = 2$ e $n = 4$ temos $P_{20} = 1/2(3s^2 - 1)$ e $P_{40} = 1/8(35s^4 - 30s^2 + 3)$, respectivamente, em que $s = \sin I$. Assim, após um rearranjo dos termos, obtemos:

$$\Phi_{20} = \frac{J_{20}\mu R^2}{r^3} \left[\frac{1}{4}(2 - 3s^2) + \frac{3}{4}s^2 \cos(2f + 2\omega) \right], \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{40} = & -\frac{J_{40}\mu R^4}{r^5} \left[\frac{1}{64}(24 - 120s^2 + 105s^4) + \frac{1}{64}(120s^2 - 140s^4) \cos(2f + 2\omega) \right. \\ & \left. + \frac{35}{64}s^4 \cos(4f + 4\omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Os harmônicos zonais produzem efeitos gravitacionais de curto e longo período, como também efeitos seculares. Efeitos de curto período são observados em um período orbital e proporcionados por aqueles termos nos quais a anomalia verdadeira está presente no argumento do cosseno. Efeitos de longo período são vistos em um tempo maior que o período orbital da partícula. Já os efeitos seculares são acumulativos e crescem monotonicamente e, usualmente, de forma linear (WALTER, 2008). Os efeitos de curto e longo período também são proporcionados pelo harmônicos tesserais.

A assimetria do primário em relação ao eixo de rotação é modelada pelos harmônicos tesserais:

$$\Phi_{nm} = J_{nm} \frac{\mu R}{r^{n+1}} P_{nm}(\sin \phi) \cos m\lambda. \quad (2.16)$$

Já que $\lambda = \theta_1 + \theta_2$, Figura 2.2, então pela soma de ângulos temos:

$$\cos m\lambda = \cos m\theta_1 \cos m\theta_2 - \sin m\theta_1 \sin m\theta_2.$$

Neste caso, as regras de Napier de utilidade, são:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos \theta_2 \cos(f + \omega) + \sin \theta_2 \sin(f + \omega) \cos I, \\ \cos(\theta_2) &= \frac{\cos(f + \omega)}{\cos(\phi)}, \quad \sin(\theta_2) = \frac{\sin(f + \omega)}{\cos(\phi)} \cos(I). \end{aligned}$$

Quando $n = m = 2$, a função associada de Legendre é $P_{22} = 3 \cos^2 \phi$, dessa forma:

$$\begin{aligned} P_{22}(\sin \phi) \cos 2\lambda &= 3 \cos(2\Omega - 2\psi) \cos^2(\omega + f) \\ &\quad - 3 \cos(2\Omega - 2\psi) \sin^2(\omega + f) c^2 \\ &\quad - 3 \sin(2\Omega - 2\psi) \sin(2\omega + 2f) c, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $c = \cos I$. Para simplificar em notação escrevemos $\beta = \psi - \Omega$ notando que β possui o mesmo sinal que o tempo sideral ψ , isto com o fim de identificar facilmente os ângulos ressonantes de órbitas diretas ou retrogradadas. Logo após a soma de ângulos, o tesseral Φ_{22} é expresso por:

$$\begin{aligned} \Phi_{22} &= \frac{J_{22}\mu R^2}{r^3} \left[\frac{3}{2} s^2 \cos 2\beta + \frac{3}{4} (1 + c)^2 \cos(2f - 2\beta + 2\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} (1 - c)^2 \cos(2f + 2\beta + 2\omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Um procedimento análogo é feito para obter os tesserais correspondentes aos coeficientes J_{42} e J_{44} , resultando em:

$$\begin{aligned} \Phi_{42} &= \frac{J_{42}\mu R^4}{r^5} \left[\frac{45}{16} (1 - 7c^2) s^2 \cos 2\beta \right. \\ &\quad - \frac{15}{8} (1 + c)^2 (1 - 7c + 7c^2) \cos(2f - 2\beta + 2\omega) \\ &\quad - \frac{15}{8} (1 - c)^2 (1 + 7c + 7c^2) \cos(2f + 2\beta + 2\omega) \\ &\quad - \frac{105}{32} (1 - c) (1 + c)^3 \cos(4f - 2\beta + 4\omega) \\ &\quad \left. - \frac{105}{32} (1 - c)^3 (1 + c) \cos(4f + 2\beta + 4\omega) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{44} = & \frac{J_{44}\mu R^4}{r^5} \left[\frac{315}{8}(1-c)^2(1+c)^2 \cos 4\beta_{44} \right. \\
& + \frac{105}{4}(1+c)^3(1-c) \cos(2f - 4\beta_{44} + 2\omega) \\
& + \frac{105}{4}(1-c)^3(1+c) \cos(2f + 4\beta_{44} + 2\omega) \\
& + \frac{105}{16}(1+c)^4 \cos(4f - 4\beta_{44} + 4\omega) \\
& \left. + \frac{105}{16}(1-c)^4 \cos(4f + 4\beta_{44} + 4\omega) \right]. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

A distancia radial r será substituída pela expressão:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \tag{2.21}$$

correspondente à distância radial ao centro de massa do sistema, localizado em um dos dois focos da elipse. Vemos que a função perturbadora está em função da anomalia verdadeira. Porém, não temos uma expressão explícita deste elemento em função do tempo. No entanto, a anomalia verdadeira pode ser aproximada por uma série de funções de Bessel em termos da anomalia média e da excentricidade (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Os primeiros termos desta série serão apresentados na seção seguinte. A anomalia média em função do tempo é dada por:

$$\ell(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \tag{2.22}$$

na qual $(\mu/a^3)^{1/2} = \eta$ é chamado de movimento médio da órbita.

A anomalia média, ou o movimento médio da órbita, utiliza-se para definir o conceito de ressonância de movimento médio entre dois corpos (MURRAY; DERMOTT, 1999). A ressonância de movimento médio pode ser definida mediante a equação $d\eta_2 - \eta_1 = 0$, em que η_1 e η_2 é o movimento médio do corpo 1 e do corpo 2, respectivamente. Esta ressonância indica que o corpo 1 realiza d órbitas por período orbital do corpo 2. No presente estudo estamos interessados na ressonância tesseral.

2.3 Ressonância tesseral

A ressonância tesseral acontece quando o movimento médio da partícula é comensurável com o período de rotação do corpo primário. Uma forma de exprimir a ressonância tesseral, considerando como sendo esférico o primário, é mediante a equação $d\ell - \psi = 0$. Esta equação indica que, em um período orbital da partícula o primário completa d rotações. Em termos do movimento médio da partícula, a ressonância é

expressa na forma: $d\eta - \eta_p = 0$, em que η é o movimento médio da partícula e η_p é o spin (ou frequência angular) do primário. O semieixo maior da órbita que satisfaz esta última equação pode ser obtido a partir da terceira lei de Kepler:

$$a = \left(\frac{\mu}{\eta^2} \right)^{1/3}, \quad (2.23)$$

que chamaremos de semieixo kepleriano. No contexto do presente trabalho, a ressonância tesseral $d:1$ também será chamada de ressonância $d:1$.

O termo da função perturbadora que no seu argumento contém a diferença $(d\ell - \psi)$ será chamado de termo ressonante, que dependendo da ordem do tesseral tem-se $m(d\ell - \psi)$. O ângulo que envolve essa diferença o chamaremos de ângulo ressonante.

Em alguns casos, a órbita que segue uma partícula em ressonância é o resultado do efeito de um ou vários termos ressonantes que dominam a dinâmica do objeto. Isto, é devido a que, uma vez integrada a função perturbadora nas equações de movimento, teremos $d\ell - \psi \approx 0$ no denominador de tal termo (ou termos), sobressaindo seu efeito sobre os demais componentes da função perturbadora (O'DONNELL, 2006).

Examinar a dinâmica gerada pelo modelo contendo como único termo periódico o termo ressonante respectivo, modelo reduzido, da ressonância 3:1 será feito no seguinte capítulo. Posto isto, o ângulo ressonante 3:1 no Φ_{22} e Φ_{42} envolve a diferença $2(3\ell - \psi)$. Os termos ressonantes da referida ressonância, nesses dois tesserais, serão obtidos seguindo a formulação clássica exposta no trabalho de William M. Kaula (KAULA, 1966), e serão tomados como referência para validar nosso modelo. A função perturbadora na formulação clássica é dada por:

$$\Phi = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{a} \right)^n \sum_{u=0}^n F_{nm\mu}(i) \sum_{v=-\infty}^{\infty} G_{nuv}(e) S_{nmuv}(\ell, \omega, \Omega, \psi), \quad (2.24)$$

em que $F_{nm\mu}(i)$ e $G_{nuv}(e)$ são funções que dependem da inclinação e da excentricidade da órbita, respectivamente. As componentes da Equação 2.24 são detalhadas no Anexo A.

O ângulo ressonante ou argumento de Kaula é dado por:

$$\Theta_{nmuv} = (n - 2u + v)\ell + (n - 2u)\omega + m(\Omega - \psi), \quad (2.25)$$

em que $(n - 2u + v) = md$. Agora, a ressonância tesseral $md:m$ acontece na região

em que é satisfeita a equação:

$$\dot{\Theta}_{nmuv} = (n - 2u + v)\dot{\ell} + (n - 2u)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\psi}) = 0, \quad (2.26)$$

na qual $\dot{\Theta}_{nmuv}$ é a variação temporal do ângulo ressonante (CELLETTI et al., 2020). O valor de semieixo maior da órbita que satisfaz esta equação, fixando os outros elementos orbitais, é chamado de semieixo crítico da ressonância.

Em Φ_{22} , o termo ressonante que no seu argumento tem a combinação $2(3\ell - \psi)$ é $\Theta_{2204} = 2(3\ell - \psi + \omega + \Omega)$, para o qual $v = 4$ e $u = 0$, e a função da inclinação é dada por:

$$F_{220}(I) = \frac{3}{4}(1 + c)^2. \quad (2.27)$$

Com respeito a função da excentricidade do termo ressonante em questão, o primeiro termo, $k = 0$, é:

$$G_{204}(e) = \frac{e^4(2272 - 1008e^2 + 27e^4 + 1992\sqrt{1 - e^2} - 252e^2\sqrt{1 - e^2})}{2(1 + \sqrt{1 - e^2})^6}. \quad (2.28)$$

Os detalhes para a obtenção desta expressão são apresentados no Anexo A. Agora, a Equação (2.28), expressa como uma série tem a forma:

$$G_{204}(e) = \frac{533}{16}e^4 + \mathcal{O}(e^5). \quad (2.29)$$

Se no ângulo ressonante em Φ_{22} escolhermos $u > 0$, então $v \geq 6$ implicando que $e^v < e^4$ e por conseguinte o efeito desse termo é menor em comparação a aquele em que $u = 0$. Nos casos em que u toma todos os valores até n , ver Apêndice A, obtêm-se ressonâncias múltiplas que podem ser exploradas em outros trabalhos.

No tesseral Φ_{42} , o ângulo ressonante da ressonância 3:1 no qual $n - 2u = 2$ é dado por $\Theta_{4214} = 2(3\ell - \psi + \omega + \Omega)$, tal que $v = 4$ e $u = 1$. A função da inclinação no termo ressonante respectivo é dada por:

$$F_{421}(i) = -\frac{15}{8}(1 + c)^2(1 - 7c + 7c^2), \quad (2.30)$$

e o primeiro termo da função da excentricidade é:

$$G_{414}(e) = \frac{3e^4(1648 - 540e^2 + 9e^4 + 1312\sqrt{1 - e^2} - 108e^2\sqrt{1 - e^2})}{2(1 + \sqrt{1 - e^2})^6}. \quad (2.31)$$

Ou, em primeira aproximação:

$$G_{414}(e) = \frac{555}{8}e^4 + \mathcal{O}(e^5). \quad (2.32)$$

Em Φ_{44} , o ângulo desta mesma ressonância tal que $n - 2u = 4$ é $\Theta_{4408} = 4(3\ell - \psi + \omega + \Omega)$. Nele, temos $v = 8$ implicando que o expoente de valor mínimo na excentricidade é oito. Assim, para órbitas com baixa excentricidade o efeito de tal termo ressonante é pequeno em comparação aos dois termos apresentados acima. Por tal motivo, não será analisado neste trabalho o efeito do harmônico Φ_{44} , mas o apresentamos na seção seguinte com o interesse de apresentar de forma explícita os harmônicos de grau quatro do elipsoide triaxial.

2.4 Modelo aproximado do potencial perturbador em elementos orbitais

A formulação da anisotropia do campo gravitacional em harmônicos esféricos está bem definida na formulação clássica. Porém, para obter cada um dos elementos que compõe a série da função perturbadora até o termo ressonante 3:1 de nosso interesse, é um processo longo que requer cuidado, especialmente na função da excentricidade, tal como mostrado na seção anterior. Por tal motivo, optamos por um método mais simples de obter o potencial perturbador, resultando em um modelo aproximado obtido mediante os seguintes passos:

1. Substituímos, nos harmônicos esféricos, a anomalia verdadeira pela expressão (BROUWER, 1959) :

$$\begin{aligned} f = & \ell + 2e \sin \ell + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\ell + e^3 \left(\frac{13}{12} \sin 3\ell - \frac{1}{4} \sin \ell \right) \\ & + e^4 \left(\frac{103}{96} \sin 4\ell - \frac{11}{24} \sin 2\ell \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

2. Expandimos, na expressão resultante no passo 1, até ordem quatro na excentricidade.
3. Associamos os termos semelhantes, obtidos no passo 2, em função dos cossenos ressonantes.

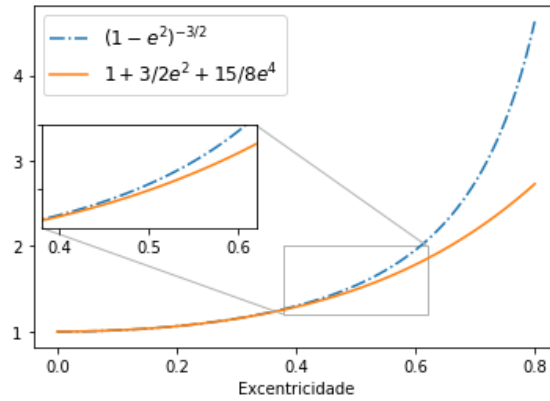
Na Equação G_{204} , o valor mínimo de expoente na excentricidade é quatro, motivo pelo qual executamos o passo dois.

A parte secular dos harmônicos zonais foi mantida na sua forma clássica, que no caso de Φ_{20} é:

$$\langle \Phi_{20} \rangle = \frac{J_2 R^2 \mu}{4a^3} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (2 - 3s^2). \quad (2.34)$$

Para esta expressão não foi empregado o passo dois, pois a função da excentricidade obtida a partir dele diverge rapidamente para $e > 0,5$ com respeito a forma clássica, Figura 2.3. Também, a parte secular de Φ_{40} é mantida na sua forma clássica. A escolha de manter a expressão clássica da parte secular nos dois zonais é justificada no capítulo seguinte.

Figura 2.3 - Comparação da função de excentricidade na parte secular $\langle \Phi_{20} \rangle$.



A curva superior (em azul), é a função da excentricidade na parte secular $\langle \Phi_{20} \rangle$ obtida fazendo a média em termos da anomalia média da partícula. A curva inferior, é a função da excentricidade de $\langle \Phi_{20} \rangle$ obtida mediante o passo 2.

Fonte: Produção do autor.

O modelo aproximado aqui implementado é apresentado a seguir:

$$\Phi_{20} = \frac{J_{20} R^2 \mu}{4a^3} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (2 - 3s^2) + \sum_{i=1}^{12} \frac{J_{20} \mu R^2}{a^3} A_i \cos \Theta_i \quad (2.35)$$

Tabela 2.1 - Termos periódicos do Φ_{20} envolvendo a anomalia média.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_1	$3/32(8 + 9e^2)(2 - 3s^2)e$	ℓ
k_2	$1/8(9 + 7e^2)(2 - 3s^2)e^2$	2ℓ
k_3	$53/32(2 - 3s^2)e^3$	3ℓ
k_4	$77/32(2 - 3s^2)e^4$	4ℓ

Tabela 2.1 - Conclusão.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_5	$1/64e^3s^2$	$\ell - 2\omega$
k_6	$-3/64(8 - e^2)s^2e$	$\ell + 2\omega$
k_7	$1/32e^4s^2$	$2\ell - 2\omega$
k_8	$3/64(16 - 40e^2 + 13e^4)s^2$	$2\ell + 2\omega$
k_9	$3/64(56 - 123e^2)s^2e$	$3\ell + 2\omega$
k_{10}	$1/8(51 - 115e^2)e^2s^2$	$4\ell + 2\omega$
k_{11}	$845/64e^3s^2$	$5\ell + 2\omega$
k_{12}	$1599/64e^4s^2$	$6\ell + 2\omega$

Em que $k_i = (J_{nm}\mu R^n/a^n)A_i \cos \Theta_i$.

$$\begin{aligned}
\Phi_{40} = & -J_{40} \frac{\mu R^4}{a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8}s^2 + \frac{105}{64}s^4\right) \\
& - J_{40} \frac{3\mu R^4}{4a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \left(\frac{15}{8}s^2 - \frac{35}{16}s^4\right) e^2 \cos 2\omega \\
& - \sum_{i=1}^{20} \frac{J_{40} R^4 \mu}{a^5} A_i \cos \Theta_i
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Tabela 2.2 - Termos periódicos do Φ_{40} envolvendo a anomalia média.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_1	$15/512(8 - 40s^2 + 35s^4)(8 + 27e^2)e$	ℓ
k_2	$5/128(8 - 40s^2 + 35s^4)(12 + 31e^2)e^2$	2ℓ
k_3	$435/512(8 - 40s^2 + 35s^4)e^3$	3ℓ
k_4	$745/512(8 - 40s^2 + 35s^4)e^4$	4ℓ
k_5	$245/768(6 - 7s^2)s^2e^3$	$\ell - 2\omega$
k_6	$5/256(6 - 7s^2)(8 + 33e^2)s^2e$	$\ell + 2\omega$
k_7	$-35/3072s^4e^3$	$\ell + 4\omega$
k_8	$335/768(6 - 7s^2)s^2e^4$	$2\ell - 2\omega$
k_9	$5/256(16 + 16e^2 + 65e^4)(6 - 7s^2)s^2$	$2\ell + 2\omega$
k_{10}	$35/384(3 - 2e^2)s^4e^2$	$2\ell + 4\omega$
k_{11}	$15/256(6 - 7s^2)(24 - e^2)s^2e$	$3\ell + 2\omega$
k_{12}	$-105/1024(8 - 25e^2)s^4e$	$3\ell + 4\omega$
k_{13}	$5/384(318 - 179e^2)(6 - 7s^2)s^2e^2$	$4\ell + 2\omega$
k_{14}	$35/512(8 - 88e^2 + 199e^4)s^4$	$4\ell + 4\omega$

Tabela 2.2 - Conclusão.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_{15}	$7705/768(6 - 7s^2)s^2e^3$	$5\ell + 2\omega$
k_{16}	$35/1024(104 - 765e^2)s^4e$	$5\ell + 4\omega$
k_{17}	$2775/128(6 - 7s^2)s^2e^4$	$6\ell + 2\omega$
k_{18}	$105/128(17 - 107e^2)s^4e^2$	$6\ell + 4\omega$
k_{19}	$-131285/3072s^4e^3$	$7\ell + 4\omega$
k_{20}	$-173005/1536s^4e^4$	$8\ell + 4\omega$

A função da inclinação na amplitude dos termos nos harmônicos tesserais é apresentada em função de seno e cosseno, com o objetivo de identificar facilmente os termos não nulos nas órbitas equatoriais. Nas seguintes expressões $\beta = \psi - \Omega$.

$$\begin{aligned} \Phi_{22} = & J_{22} \frac{3}{16} \frac{\mu R^2}{a^3} s^2 (8 + 12e^2 + 15e^4) \cos 2\beta \\ & + \sum_{i=1}^{24} J_{22} \frac{\mu R^2}{a^3} A_i \cos \Theta_i \end{aligned} \quad (2.37)$$

Tabela 2.3 - Termos periódicos do Φ_{22} envolvendo a anomalia média.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_1	$9/32(8 + 9e^2)s^2e$	$\ell + 2\beta$
k_2	$9/32(8 + 9e^2)s^2e$	$\ell - 2\beta$
k_3	$-3/8(9 + 7e^2)s^2e^2$	$2\ell + 2\beta$
k_4	$3/8(9 + 7e^2)s^2e^2$	$2\ell - 2\beta$
k_5	$-159/32s^2e^3$	$3\ell + 2\beta$
k_6	$159/32s^2e^3$	$3\ell - 2\beta$
k_7	$-231/32s^2e^4$	$4\ell + 2\beta$
k_8	$231/32s^2e^4$	$4\ell - 2\beta$
k_9	$1/64(1 + c)^2e^3$	$\ell + 2\beta - 2\omega$
k_{10}	$1/64(1 - c)^2e^3$	$\ell - 2\beta - 2\omega$
k_{11}	$-3/64(1 - c)^2(8 - e^2)e$	$\ell + 2\beta + 2\omega$
k_{12}	$-3/64(1 + c)^2(8 - e^2)e$	$\ell - 2\beta + 2\omega$
k_{13}	$1/32(1 + c)^2e^4$	$2\ell + 2\beta - 2\omega$
k_{14}	$1/32(1 - c)^2e^4$	$2\ell - 2\beta - 2\omega$
k_{15}	$3/64(1 - c)^2(16 - 40e^2 + 13e^4)$	$2\ell + 2\beta + 2\omega$

Tabela 2.3 - Conclusão.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_{16}	$3/64(1+c)^2(16-40e^2+13e^4)$	$2\ell-2\beta+2\omega$
k_{17}	$3/64(1-c)^2(56-123e^2)e$	$3\ell+2\beta+2\omega$
k_{18}	$3/64(1+c)^2(56-123e^2)e$	$3\ell-2\beta+2\omega$
k_{19}	$1/8(1-c)^2(51-115e^2)e^2$	$4\ell+2\beta+2\omega$
k_{20}	$1/8(1+c)^2(51-115e^2)e^2$	$4\ell-2\beta+2\omega$
k_{21}	$845/64(1-c)^2e^3$	$5\ell+2\beta+2\omega$
k_{22}	$845/64(1+c)^2e^3$	$5\ell-2\beta+2\omega$
k_{23}	$1599/64(1-c)^2e^4$	$6\ell+2\beta+2\omega$
k_{24}	$1599/64(1+c)^2e^4$	$6\ell-2\beta+2\omega$

$$\begin{aligned}
\Phi_{42} = & -J_{42} \frac{45}{128} \frac{\mu R^4}{a^5} (1-7c^2)(8+40e^2+105e^4)s^2 \cos 2\beta \\
& - \sum_{i=1}^{42} J_{42} \frac{\mu R^4}{a^5} A_i \cos \Theta_i
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Tabela 2.4 - Termos periódicos do Φ_{42} envolvendo a anomalia média.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_1	$45/64(1+c)^2(1-7c+7c^2)(2+7e^2)e^2$	$2\beta-2\omega$
k_2	$45/64(1-c)^2(1+7c+7c^2)(2+7e^2)e^2$	$2\beta+2\omega$
k_3	$-225/256(1-7c^2)(8+27e^2)s^2e$	$\ell-2\beta$
k_4	$-225/256(1-7c^2)(8+27e^2)s^2e$	$\ell+2\beta$
k_5	$245/128(1-c)^2(1+7c+7c^2)e^3$	$\ell-2\beta-2\omega$
k_6	$245/128(1+c)^2(1-7c+7c^2)e^3$	$\ell+2\beta-2\omega$
k_7	$15/128(1+c)^2(1-7c+7c^2)(8+33e^2)e$	$\ell-2\beta+2\omega$
k_8	$15/128(1-c)^2(1+7c+7c^2)(8+33e^2)e$	$\ell+2\beta+2\omega$
k_9	$35/512(1-c)(1+c)^3e^3$	$\ell-2\beta+4\omega$
k_{10}	$-35/512(1-c)^3(1+c)e^3$	$\ell+2\beta+4\omega$
k_{11}	$-75/64(1-7c^2)(12+31e^2)s^2e^2$	$2\ell-2\beta$
k_{12}	$-75/64(1-7c^2)(12+31e^2)s^2e^2$	$2\ell+2\beta$
k_{13}	$335/128(1-c)^2(1+7c+7c^2)e^4$	$2\ell-2\beta-2\omega$
k_{14}	$335/128(1+c)^2(1-7c+7c^2)e^4$	$2\ell+2\beta-2\omega$
k_{15}	$15/128(1+c)^2(1-7c+7c^2)(16+16e^2+65e^4)$	$2\ell-2\beta+2\omega$

Tabela 2.4 - Conclusão.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_{16}	$15/128(1-c)^2(1+7c+7c^2)(16+16e^2+65e^4)$	$2\ell+2\beta+2\omega$
k_{17}	$35/64(1-c)(1+c)^3(3-2e^2)e^2$	$2\ell-2\beta+4\omega$
k_{18}	$35/64(1-c)^3(1+c)(3-2e^2)e^2$	$2\ell+2\beta+4\omega$
k_{19}	$-6525/256(1-7c^2)s^2e^3$	$3\ell-2\beta$
k_{20}	$-6525/256(1-7c^2)s^2e^3$	$3\ell+2\beta$
k_{21}	$45/128(1+c)^2(1-7c+7c^2)(24-e^2)e$	$3\ell-2\beta+2\omega$
k_{22}	$45/128(1-c)^2(1+7c+7c^2)(24-e^2)e$	$3\ell+2\beta+2\omega$
k_{23}	$-315/512(1-c)(1+c)^3(8-25e^2)e$	$3\ell-2\beta+4\omega$
k_{24}	$-315/512(1-c)^3(1+c)(8-25e^2)e$	$3\ell+2\beta+4\omega$
k_{25}	$-11175/256(1-7c^2)s^2e^4$	$4\ell-2\beta$
k_{26}	$-11175/256(1-7c^2)s^2e^4$	$4\ell+2\beta$
k_{27}	$-5/64(1+c)^2(1-7c+7c^2)(318-179e^2)e^2$	$4\ell-2\beta+2\omega$
k_{28}	$5/64(1-c)^2(1+7c+7c^2)(318-179e^2)e^2$	$4\ell+2\beta+2\omega$
k_{29}	$105/256(1-c)(1+c)^3(8-88e^2+199e^4)$	$4\ell-2\beta+4\omega$
k_{30}	$105/256(1-c)^3(1+c)(8-88e^2+199e^4)$	$4\ell+2\beta+4\omega$
k_{31}	$7705/128(1+c)^2(1-7c+7c^2)e^3$	$5\ell-2\beta+2\omega$
k_{32}	$7705/128(1-c)^2(1+7c+7c^2)e^3$	$5\ell+2\beta+2\omega$
k_{33}	$105/512(1-c)(1+c)^3e(104-765e^2)$	$5\ell-2\beta+4\omega$
k_{34}	$105/512(1-c)^3(1+c)e(104-765e^2)$	$5\ell+2\beta+4\omega$
k_{35}	$8325/64(1+c)^2(1-7c+7c^2)e^4$	$6\ell-2\beta+2\omega$
k_{36}	$8325/64(1-c)^2(1+7c+7c^2)e^4$	$6\ell+2\beta+2\omega$
k_{37}	$315/64(1-c)(1+c)^3(17-107e^2)e^2$	$6\ell-2\beta+4\omega$
k_{38}	$315/64(1-c)^3(1+c)(17-107e^2)e^2$	$6\ell+2\beta+4\omega$
k_{39}	$131285/512(1-c)(1+c)^3e^3$	$7\ell-2\beta+4\omega$
k_{40}	$131285/512(1-c)^3(1+c)e^3$	$7\ell+2\beta+4\omega$
k_{41}	$173005/256(1-c)(1+c)^3e^4$	$8\ell-2\beta+4\omega$
k_{42}	$173005/256(1-c)^3(1+c)e^4$	$8\ell+2\beta+4\omega$

$$\begin{aligned}\Phi_{44} = & J_{44} \frac{\mu R^4}{a^5} \frac{315}{64} (1-c)^2 (1+c)^2 (8 + 40e^2 + 105e^4) \cos 4\beta \\ & + \sum_{i=1}^{42} J_{44} \frac{\mu R^4}{a^5} A_i \cos \Theta_i\end{aligned}\tag{2.39}$$

Tabela 2.5 - Termos periódicos do Φ_{44} envolvendo a anomalia média.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_1	$315/32(1+c)^3(1-c)(2+7e^2)e^2$	$4\beta - 2\omega$
k_2	$315/32(1-c)^3(1+c)(2+7e^2)e^2$	$4\beta + 2\omega$
k_3	$1575/128(1-c)^2(1+c)^2(8+27e^2)e$	$\ell - 4\beta$
k_4	$1575/128(1-c)^2(1+c)^2(8+27e^2)e$	$\ell + 4\beta$
k_5	$1715/64(1-c)^3(1+c)e^3$	$\ell - 4\beta - 2\omega$
k_6	$1715/64(1+c)^3(1-c)e^3$	$\ell + 4\beta - 2\omega$
k_7	$105/64(1+c)^3(1-c)(8+33e^2)e$	$\ell - 4\beta + 2\omega$
k_8	$105/64(1-c)^3(1+c)(8+33e^2)e$	$\ell + 4\beta + 2\omega$
k_9	$-35/256(1+c)^4e^3$	$\ell - 4\beta + 4\omega$
k_{10}	$-35/256(1-c)^4e^3$	$\ell + 4\beta + 4\omega$
k_{11}	$525/32(1-c)^2(1+c)^2e^2(12+31e^2)$	$2\ell - 4\beta$
k_{12}	$525/32(1-c)^2(1+c)^2e^2(12+31e^2)$	$2\ell + 4\beta$
k_{13}	$2345/64(1-c)^3(1+c)e^4$	$2\ell - 4\beta - 2\omega$
k_{14}	$2345/64(1+c)^3(1-c)e^4$	$2\ell + 4\beta - 2\omega$
k_{15}	$105/64(1+c)^3(1-c)(16+16e^2+65e^4)$	$2\ell - 4\beta + 2\omega$
k_{16}	$105/64(1-c)^3(1+c)(16+16e^2+65e^4)$	$2\ell + 4\beta + 2\omega$
k_{17}	$35/32(1+c)^4(3-2e^2)e^2$	$2\ell - 4\beta + 4\omega$
k_{18}	$35/32(1-c)^4(3-2e^2)e^2$	$2\ell + 4\beta + 4\omega$
k_{19}	$45675/128(1-c)^2(1+c)^2e^3$	$3\ell - 4\beta$
k_{20}	$45675/128(1-c)^2(1+c)^2e^3$	$3\ell + 4\beta$
k_{21}	$315/64(1+c)^3(1-c)(24-e^2)e$	$3\ell - 4\beta + 2\omega$
k_{22}	$315/64(1-c)^3(1+c)(24-e^2)e$	$3\ell + 4\beta + 2\omega$
k_{23}	$-315/256(1+c)^4(8-25e^2)e$	$3\ell - 4\beta + 4\omega$
k_{24}	$-315/256(1-c)^4(8-25e^2)e$	$3\ell + 4\beta + 4\omega$
k_{25}	$78225/128(1-c)^2(1+c)^2e^4$	$4\ell - 4\beta$
k_{26}	$78225/128(1-c)^2(1+c)^2e^4$	$4\ell + 4\beta$
k_{27}	$35/32(1+c)^3(1-c)(318-179e^2)e^2$	$4\ell - 4\beta + 2\omega$
k_{28}	$35/32(1-c)^3(1+c)(318-179e^2)e^2$	$4\ell + 4\beta + 2\omega$

Tabela 2.5 - Conclusão.

Termo	A_i (Amplitude)	Θ_i (Ângulo)
k_{29}	$105/128(1+c)^4(8-88e^2+199e^4)$	$4\ell-4\beta+4\omega$
k_{30}	$105/128(1-c)^4(8-88e^2+199e^4)$	$4\ell+4\beta+4\omega$
k_{31}	$53935/64(1+c)^3(1-c)e^3$	$5\ell-4\beta+2\omega$
k_{32}	$53935/64(1-c)^3(1+c)e^3$	$5\ell+4\beta+2\omega$
k_{33}	$105/256(1+c)^4(104-765e^2)e$	$5\ell-4\beta+4\omega$
k_{34}	$105/256(1-c)^4(104-765e^2)e$	$5\ell+4\beta+4\omega$
k_{35}	$58275/32(1+c)^3(1-c)e^4$	$6\ell-4\beta+2\omega$
k_{36}	$58275/32(1-c)^3(1+c)e^4$	$6\ell+4\beta+2\omega$
k_{37}	$315/32(1+c)^4(17-107e^2)e^2$	$6\ell-4\beta+4\omega$
k_{38}	$315/32(1-c)^4(17-107e^2)e^2$	$6\ell+4\beta+4\omega$
k_{39}	$131285/256(1+c)^4e^3$	$7\ell-4\beta+4\omega$
k_{40}	$131285/256(1-c)^4e^3$	$7\ell+4\beta+4\omega$
k_{41}	$173005/128(1+c)^4e^4$	$8\ell-4\beta+4\omega$
k_{42}	$173005/128(1-c)^4e^4$	$8\ell+4\beta+4\omega$

As expressões dos harmônicos apresentadas nas tabelas anteriores foram obtidas no software Wolfram Mathematica, e a rotina implementada é exposta no Anexo B.

Podemos observar que, o produto entre a função da inclinação, Equação (2.27), e o primeiro termo na série da excentricidade apresentada na Equação (2.29) é igual à amplitude do cosseno da ressonância 3:1 no Φ_{22} , termo k_{24} da Tabela 2.3. Também observamos que a amplitude do termo ressonante k_{35} da Tabela 2.4 é igual ao produto entre a função da inclinação na Equação (2.30) e o primeiro termo da série da Equação (2.32). Agora, supondo que no passo 1 para obter o modelo aproximado substituímos a anomalia verdadeira f pela expressão $\ell + 2e \sin \ell$ no Φ_{22} . Então, o termo ressonante em questão seria $0,421k_{24}$. Assim mesmo, os demais termos que compõem a função perturbadora teriam uma amplitude menor, gerando um modelo inconsistente com o modelo clássico.

Segundo nosso modelo, para uma partícula na região equatorial, o conjunto de termos ressonantes de efeito não nulo que compõe o harmônico tesseral Φ_{22} é o conjunto $\{k_9, k_{12}, k_{13}, k_{16}, k_{18}, k_{20}, k_{22}, k_{24}\}$, bem como o conjunto $\{k_1, k_6, k_7, k_{14}, k_{15}, k_{21}, k_{27}, k_{31}, k_{35}\}$ no harmônico Φ_{42} . Isto se deve ao fato de que $c = 1$ e $s = 0$ nessa região, implicando $A_i \neq 0$ nos termos listados nos dois conjuntos e $A_i = 0$ nos outros.

Nestes dois conjuntos, os termos $\{k_9, k_{13}\}$ e $\{k_6, k_{14}\}$ em Φ_{22} e Φ_{42} , respectivamente, são os termos ressonantes referentes às ressonâncias de órbitas retrógradas e que podem ser analisados em trabalhos futuros. Nos corpos modelados por um elipsoide triaxial, objeto de estudo neste trabalho, o semieixo maior da órbita da ressonância tesseral $1 : 2$ ($d = 1/2$) é menor que o maior semieixo do corpo primário, tal como será demonstrado na Seção 4.3. Por tal motivo, os termos k_{12} e k_7 em Φ_{22} e Φ_{42} , respectivamente, tampouco serão analisados neste trabalho.

No final, os termos ressonantes nos conjuntos $\{k_{16}, k_{18}, k_{20}, k_{22}, k_{24}\}$ e $\{k_{15}, k_{21}, k_{27}, k_{31}, k_{35}\}$ dos harmônicos Φ_{22} e Φ_{42} , respectivamente, são termos de nosso interesse. Note-se que o ângulo ressonante $\Theta = 2(\ell - \psi + \omega + \Omega)$ referente à ressonância tesseral $1:1$, é comum nos termos k_{16} em Φ_{22} e k_{25} em Φ_{42} . Assim mesmo, nesses dois conjuntos, temos mais quatro ângulos ressonantes e cada um deles está presente nos dois tesserais. A expressão que envolve estes cinco ângulos é a seguinte:

$$\Theta_{d:1} = 2(d\ell - \psi + \omega + \Omega), \quad (2.40)$$

na qual $d = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$. Por exemplo, quando $d = 3/2$ na Expressão (2.40) temos o ângulo ressonante da ressonância $3:2$. De forma análoga, temos o ângulo ressonante da ressonância $2:1$, $5:2$ e $3:1$.

No seguinte capítulo, analisaremos o efeito da anisotropia de Haumea sobre a dinâmica de uma partícula. Tal anisotropia será representada a partir de “submodelos”, com o objetivo de estimar o efeito perturbador que mais se sobressai na órbita estudada. Os modelos propostos, são:

- Modelo Reduzido 1 (MR1): $-\mu/r + \langle \Phi_{20} \rangle$ mais o termo ressonante no Φ_{22} da ressonância em questão.
- Modelo Reduzido 2 (MR2): $-\mu/r + \langle \Phi_{20} \rangle + \langle \Phi_{40} \rangle$ mais o termo ressonante nos harmônicos Φ_{22} e Φ_{42} da ressonância em questão.
- Modelo Quase-completo 1 (MQ1): $-\mu/r + \langle \Phi_{20} \rangle + \Phi_{22}$.
- Modelo Quase-completo 2 (MQ2): $-\mu/r + \langle \Phi_{20} \rangle + \langle \Phi_{40} \rangle + \Phi_{22} + \Phi_{42}$.

A dinâmica proporcionada pelos modelos MR1 e MR2 será analisada inicialmente de forma qualitativa por meio da formulação Hamiltoniana, com o interesse de determinar o valor de excentricidade do centro da ressonância e o regime de libração do ângulo ressonante. Posteriormente, analisaremos a variação da excentricidade,

do semieixo maior da órbita e do ângulo ressonante gerada por cada um dos quatro modelos por meio das equações planetárias de Lagrange.

Comparando os resultados obtidos por meio das equações planetárias de Lagrange nos modelos MQ1 e MR1, como também em MQ2 e MR2, poderemos estimar a influência da ressonância tesseral (ou do cosseno ressonante) na trajetória da partícula.

Os efeitos dos termos periódicos dos harmônicos zonais não são incluídos neste trabalho, pois as órbitas a serem analisadas são órbitas na região equatorial do primário ou próximas de tal região nas quais $\sin I \approx 0$.

O modelo reduzido 2 será empregado para analisar algumas das órbitas tesserais no elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático, pelas razões expostas no final do seguinte capítulo.

2.5 Função hamiltoniana do modelo reduzido

A análise da dinâmica proporcionada pelo modelo reduzido, também chamado de sistema reduzido, mediante a formulação hamiltoniana é conhecida na literatura como o Problema ideal de ressonância (GARFINKEL, 1966; GARFINKEL, 1970).

O sistema reduzido da ressonância $d:1$ nas variáveis de Delaunay é dado por:

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(L, G, H) + \mathcal{A}(L, G, H) \cos \Theta_{d:1}, \quad (2.41)$$

em que o termo kepleriano $\mathcal{H}_0 = -\mu^2/(2L^2)$ é a energia específica da órbita não perturbada. \mathcal{S} é a parte secular e \mathcal{A} é a amplitude do cosseno ressonante do modelo respectivo. As variáveis de Delaunay são definidas por:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, & H &= G \cos I \\ g &= \omega, & h &= \Omega, & l &= \ell. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Neste conjunto de variáveis, L , G e H são os momentos conjugados das variáveis angulares l , g e h , respectivamente. Com esta mudança de variáveis, temos:

$$\langle \Phi_{20} \rangle = J_{20} \mu^4 R^2 \frac{G^2 - 3H^2}{4L^3 G^5} \quad (2.43)$$

$$\langle \Phi_{40} \rangle = J_{40} \mu^6 R^4 \frac{(9G^2 - 15H^2)(3G^4 - 30G^2 H^2 + 35H^4)}{128G^{11} L^5}. \quad (2.44)$$

O sistema modelado pela Equação (2.41), é um sistema não conservativo, pois o argumento $\Theta_{d:1}$ contém explicitamente a variável temporal na anomalia média e no tempo sideral. Para transformar este sistema em um sistema conservativo definimos a variável $\alpha = (d\eta - \eta_p)t$, e logo estendemos o espaço de fase da função \mathcal{F} (MORBIDELLI, 2002). Após isto, o sistema reduzido resulta em:

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}(L, G, H, \Theta_{d:1}) + (d\eta - \eta_p)P_\alpha,$$

em que o segundo termo do lado direito é o termo de Coriolis, devido à introdução do sistema girante. Na função \mathcal{F}' temos três variáveis angulares independentes em $\Theta_{d:1} = 2(\alpha + h + g)$. Portanto, para termos um sistema dinâmico com um grau de liberdade realizamos uma transformação canônica que neste trabalho será a transformação canônica de Mathieu (LANCZOS, 1952), definindo as seguintes variáveis:

$$\theta = \alpha + h + g, \quad \theta_1 = g, \quad \theta_2 = \alpha,$$

e a forma diferencial

$$P_\theta d\theta + P_{\theta_1} d\theta_1 + P_{\theta_2} d\theta_2 = Gdg + Hdh + P_\alpha d\alpha.$$

Associando os termos desta última equação, obtemos:

$$H = P_\theta, \quad G = P_\theta + P_{\theta_1}, \quad P_\alpha = P_\theta + P_{\theta_2}.$$

As variáveis θ_1 e θ_2 , são variáveis cinostênicas do sistema, isto é, P_{θ_1} e P_{θ_2} são constantes e a sua respectiva equação canônica é nula. Assim, podemos definir $P_\alpha = H$. Com esta transformação canônica, o modelo reduzido na formulação hamiltoniana é dado pela função:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(L, G, H) + \mathcal{A}(L, G, H) \cos 2\theta + (d\eta - \eta_p)H. \quad (2.45)$$

Uma análise qualitativa da dinâmica na ressonância tesserar será feita a partir da função hamiltoniana apresentada na Equação (2.45), determinando os pontos singulares da dinâmica, centros da ressonância e pontos de sela, que podem ser de equilíbrio estável ou instável (SUSSMAN; WISDOM, 2015).

Quando o ângulo percorre o intervalo fechado $[0, 2\pi]$ no espaço de fase, dizemos que o ângulo está em circulação. Se este fica confinado em um subintervalo de comprimento menor do que 2π o ângulo está em libração e o seu período não está bem definido.

Já no regime de circulação, o período do ângulo é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}_{d:1}}, \quad (2.46)$$

em que $\dot{\Theta}_{d:1} = 2\dot{\theta}$ é dada por:

$$\dot{\Theta}_{d:1} = 2 \left(d\dot{\ell} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} - \dot{\psi} \right) = 2 \left(d \frac{\partial}{\partial L} (\mathcal{H}_0 + \mathcal{S}) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G} - \eta_p \right). \quad (2.47)$$

Se considerarmos o corpo primário como sendo esférico, o semieixo kepleriano da órbita da ressonância $d:1$ satisfaz a equação $d\eta - \eta_p = 0$. Porém, a não esfericidade do corpo implica que o semieixo maior da órbita em ressonância satisfaz a Equação (2.26), que no formalismo hamiltoniano tem a forma:

$$d \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G} - \eta_p = 0. \quad (2.48)$$

Para cada valor de I esta expressão gera uma faixa de semieixos críticos de órbitas em ressonância $d:1$.

O cosseno ressonante do modelo reduzido não o consideramos na determinação do período do ângulo nem no semieixo crítico da ressonância, pois incluindo tal termo o resultado oscila em torno do valor proporcionado pela parte não periódica do modelo.

No caso do modelo MR2, as derivadas parciais da parte secular são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H} &= 3\eta - \eta_p - J_{40} R^4 \mu^6 \frac{3(-60G^2 H + 140H^3)(3G^2 - 5L^2)}{128G^{11}L^5} \\ &\quad - J_{20} R^2 \mu^4 \frac{3H}{2G^5 L^3}, \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial L} &= \frac{\mu^2}{L^3} - J_{20} R^2 \mu^4 \frac{3(G^2 - 3H^2)}{4G^5 L^4} \\ &\quad + J_{40} R^4 \mu^6 15(3G^4 - 30G^2 H^2 + 35H^4) \left(\frac{1}{64G^{11}L^4} + \frac{(3G^2 - 5L^2)}{128G^{11}L^6} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G} &= -J_{20} R^2 \mu^4 \frac{3(G^2 - 5H^2)}{4G^6 L^3} - J_{40} R^4 \mu^6 \left[\frac{3(3G^2 - 5L^2)(12G^3 - 60GH^2)}{128G^{11}L^5} \right. \\ &\quad \left. + (3G^4 - 30G^2 H^2 + 35H^4) \left(\frac{9}{64G^{10}L^5} - \frac{33(3G^2 - 5L^2)}{128G^{12}L^5} \right) \right], \end{aligned}$$

que também são validas no MR1 substituindo $J_{40} = 0$. As expressões apresentadas neste capítulo são as adequadas para a obtenção dos resultados no capítulo seguinte.

3 DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA NA REGIÃO DO ANEL DE HAUMEA

O planeta anão Haumea tornou-se objeto de estudo desde o ano 2003 e as pesquisas iniciais sobre ele foram direcionadas para determinar a sua origem e causa da existência das duas luas que o orbitam. As observações sobre este sistema continuaram, e em 2017 foi detectado um anel de poeira na região equatorial (ORTIZ et al., 2017). O semieixo maior nominal do anel é $a = 2.287_{-45}^{+75}$ km e possui uma largura de cerca de 70 km. Na região na qual se movimentam as partículas do anel encontra-se a órbita da ressonância tesseral 3:1. Então, determinar se uma partícula em ressonância tesseral 3:1 com Haumea permanece confinada na região do anel é um dos objetivos do presente capítulo. Para cumprir isto, analisaremos a dinâmica gerada pelos modelos da anisotropia do potencial gravitacional propostos na Seção 2.4.

Primeiro, no modelo reduzido determinaremos a faixa de semieixos críticos da ressonância 3:1 considerando a perturbação secular do modelo. Após isto, escolhemos um valor de semieixo crítico e apresentamos o seu espaço de fase para identificar o valor angular do centro da ressonância e também será determinado o valor de excentricidade do centro na faixa de semieixos críticos delimitada. Terceiro, por meio das equações planetárias de Lagrange analisaremos a variação das variáveis: semieixo maior da órbita, excentricidade e ângulo ressonante, sob a dinâmica de cada um dos quatro modelos.

Antes de realizar a análise proposta, devemos definir os parâmetros do sistema e a região selecionada para ser considerada a região do anel.

3.1 Parâmetros do sistema

Neste trabalho, Haumea é modelado como um elipsoide triaxial com semieixos: $x_1 = 1.161$ km, $x_2 = 852$ km e $x_3 = 513$ km, em rotação uniforme de período 3,9155 horas e massa de $4,006 \times 10^{21}$ kg (ORTIZ et al., 2017). No caso deste planeta, alguns autores tomam o raio equatorial médio, R , como sendo igual a $(x_1 x_2 x_3)^{1/3}$ (WINTER et al., 2019) ou $R = (\mu/\eta_p^2)^{1/3}$ (KOVACS; REGALY, 2018). Aqui, escolhemos o raio equatorial médio como sendo $R = x_1$, pois, não é possível ter-se uma partícula orbitando Haumea em uma distância menor que x_1 . Com esta escolha, os coeficientes

harmônicos podem ser obtidos através da Equação (2.11) e tomam os valores:

$$\begin{aligned} J_{20} &= 0.1148054670859791, \\ J_{22} &= 0.02307319939373301, \\ J_{40} &= 0.03052508642861946, \\ J_{42} &= 0.001892092452546749. \end{aligned}$$

A região aqui selecionada para análise é a região equatorial com raio interno de 2.000 km e raio externo de 2.500 km a partir do centro de massa do planeta, região onde se encontra o anel e que chamaremos de região do anel.

Se Haumea for um corpo esférico, o semieixo maior da órbita da ressonância 3:1 seria só o seu semieixo kepleriano. Porém, a anisotropia do primário gera uma região de órbitas em ressonância, determinada pela Equação (2.26), como será constatado na seção seguinte.

3.2 Semieixo crítico e centro da ressonância

A primeira abordagem aqui proposta para tratar nosso problema de interesse nos permite indicar a região e o centro da ressonância, sob a visão dos modelos reduzidos da anisotropia do primário.

3.2.1 A ressonância sob o modelo reduzido 1

Na condição de ressonância tesseral expressa na Equação (2.48), substituímos $d = 3$ e a função \mathcal{S} pela parte secular do coeficiente J_{20} de Haumea. Assim, tal equação na região equatorial resultam em:

$$-0,00044574 + 1,55122864 \times 10^6 \frac{1}{a^{3/2}} + \frac{1,20025307 \times 10^{17}}{a^{7/2}(1 - e^2)^2} = 0,$$

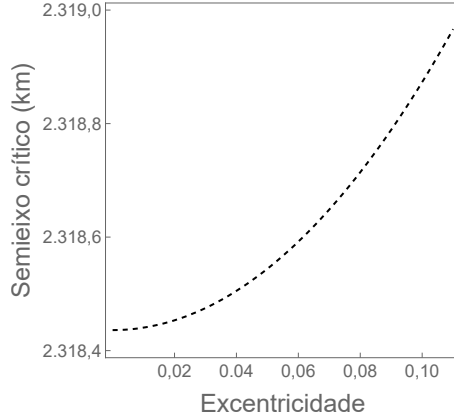
ou melhor

$$-0,00044574a^{7/2} + 1,55122864 \times 10^6 a^2 + \frac{1,20025307 \times 10^{17}}{(1 - e^2)^2} = 0. \quad (3.1)$$

Nesta última equação, vemos que o expoente de maior valor em a é superior a três, logo, esta possui raízes complexas, mas que não são de nosso interesse. Os valores reais de a e e que satisfazem a Equação (3.1) formam a curva apresentada na Figura 3.1. Nela, o intervalo de excentricidade é $(0, 0,1)$. Observamos que as duas variáveis

aumentam seu valor conjuntamente.

Figura 3.1 - Órbitas em ressonância 3:1 no MR1.



Faixa de semieixos críticos da ressonância tesseral 3:1 obtida a partir da Equação (3.1).

Fonte: Produção do autor.

Escolhendo $e = 0$ na Equação (3.1) obtemos o semieixo crítico $a_{c1} = 2.318,46592$ km. Agora, se adicionarmos o termo ressonante respectivo:

$$J_{22} \frac{1599\mu R^2}{64a^3} (1+c)^2 e^4 \cos(2(3\ell - \psi + \omega + \Omega)),$$

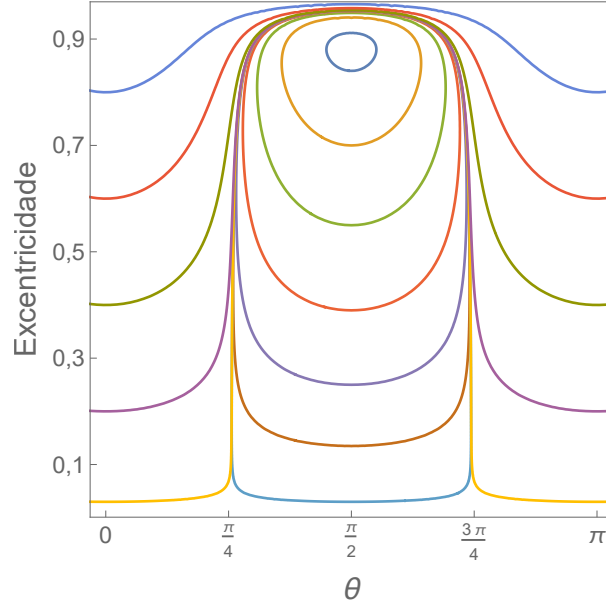
na Equação (2.48) e o mesmo valor $e = 0$, a diferença com respeito à a_{c1} é da ordem de 10^{-11} km. A pequena diferença proporcionada pelo termo ressonante é uma das razões pela qual não serão incluídos os termos periódicos na determinação do semieixo crítico, tanto no modelo reduzido como no modelo quase-completo. A outra razão é a oscilação dos resultados em torno daquele gerado pela parte central e secular do modelo.

A título de exemplo, escolhemos a_{c1} para construir o espaço de fase do sistema dinâmico reduzido 1. O espaço de fase neste modelo para qualquer dos semieixos críticos na faixa determinada acima (Figura 3.1), é semelhante ao espaço de fase apresentado na Figura 3.2. As curvas fechadas constituem o regime de libração do ângulo ressonante. Na vizinhança do centro da ressonância, as duas variáveis apresentam simultaneamente a oscilação de menor amplitude. Nele, observamos que, em relação à variável angular, o centro se encontra em $\theta = \pi/2$, e por simetria do corpo, também em $\theta = 3\pi/2$. Lembrando que $\Theta_{3:1} = 2\theta$, pela transformação canônica feita na Seção 2.5. Então, o centro da ressonância no MR1 se encontra em $\Theta = 180^\circ$.

Em relação ao valor de excentricidade do centro, para obtê-lo aplicamos a definição de máximo e mínimo do Cálculo em várias variáveis. De onde se segue que o zero da função $\partial_e \mathcal{H}(a_{c1}, e, 0, \pi/2)$ (∂_e derivada parcial com respeito a e) é o valor de excentricidade do centro da ressonância, sendo ele $e = 0,88299913$.

A curva de nível $\partial_e \mathcal{H}(a, e, 0, \pi/2) = 0$, Figura 3.3, mostra os valores de excentricidade do centro na faixa de semieixos críticos apresentada acima. Nela, vemos que o centro da ressonância localiza-se em um valor elevado de excentricidade, e o seu valor aumenta quando o semieixo crítico se afasta do centro de massa do sistema.

Figura 3.2 - Espaço de fase da ressonância 3:1 no MR1.

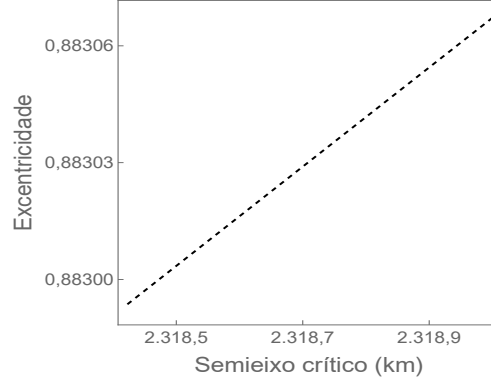


Espaço de fase das órbitas com $a = 2.318,46592$ km e $I = 0^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

É facilmente observado que o valor de excentricidade do centro da ressonância é consideravelmente elevado. Porém, o MR1 é o modelo mais simples com o qual pode-se analisar o comportamento de uma partícula em ressonância. A informação é de melhor qualidade quando incluímos na análise o efeito dos coeficientes harmônicos de grau quatro, ou seja, o modelo reduzido 2.

Figura 3.3 - Excentricidade do centro da ressonância 3:1 no MR1



Valores de excentricidade do centro da ressonância obtidos mediante a curva de nível $\partial_e \mathcal{H}(a, e, 0, \pi/2) = 0$ na faixa de semieixos críticos.

Fonte: Produção do autor.

3.2.2 A ressonância sob o modelo reduzido 2

Considerando o efeito secular dos coeficientes J_{20} e J_{40} , a Equação (2.48) para determinar a faixa de semieixos críticos resulta em:

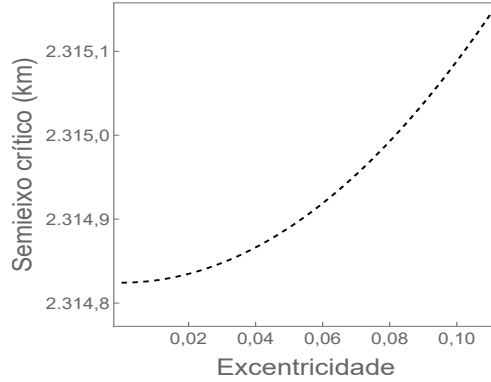
$$0,00044574a^{11/2} - 1,55122864 \times 10^6 a^4 - 1,20025307 \times 10^{17} a^2 / (1 - b^2)^2 + (1,07540390 \times 10^{29} + 8,06552928 \times 10^{28} b^2) / (1 - b^2)^4 = 0 \quad (3.2)$$

A superposição do efeito secular do J_{40} e J_{20} faz com que o semieixo crítico para órbitas tais que $e < 0,1$, seja aproximadamente 4 km menor em comparação ao apresentado no caso anterior, como observado na Figura 3.4. Nesta figura, vemos novamente que o semieixo crítico aumenta seu valor conforme a excentricidade também aumenta.

No MR2, o cosseno ressonante que se sobressai na órbita da ressonância tesseral 3:1 e que pertence ao harmônico Φ_{42} é dado por:

$$-J_{42} \frac{8325\mu R^4}{64a^5} (1+c)^2 (1-7c+7c^2) e^4 \cos(2(3\ell - \psi + \omega + \Omega)).$$

Figura 3.4 - semieixo crítico da ressonância 3:1 no MR2.

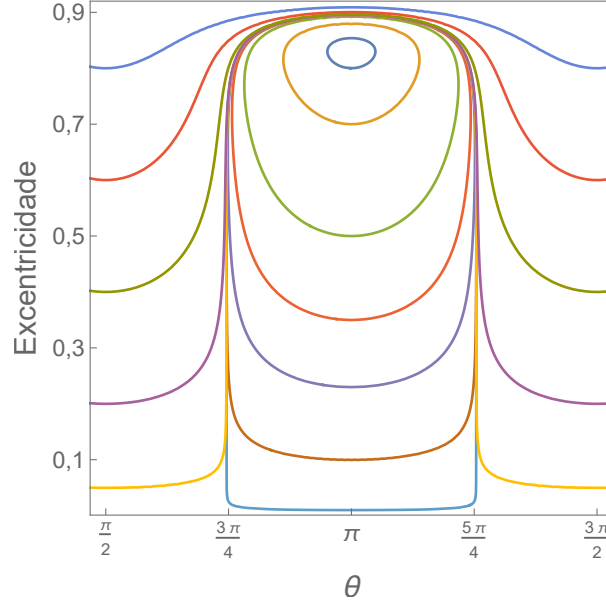


Faixa de semieixos críticos da ressonância tesseral 3:1 obtida a partir da Equação (3.1).

Fonte: Produção do autor.

Na Figura 3.5, apresentamos o espaço de fase das órbitas com semieixo crítico $a_{c2} = 2.314,82430$ km que, é obtido a partir da Equação (3.2) escolhendo $e = 0$.

Figura 3.5 - Espaço de fase da ressonância 3:1 no MR2.



Espaço de fase das órbitas com $a = 2.314,82430$ km e $I = 0^\circ$.

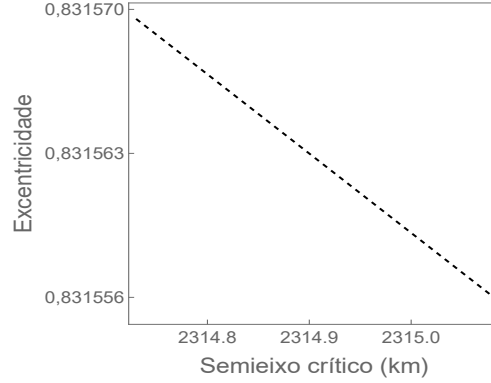
Fonte: Produção do autor.

Vemos que os dois centros da ressonância se deslocaram em um ângulo de $\pi/2$ com respeito ao observado no MR1. No MR2, o centro da ressonância se localiza em

$\theta = 0$, e $\theta = \pi$, consequentemente em $\Theta = 0$ e o seu valor de excentricidade é $e = 0,831569$.

Na Figura 3.6, vemos que o valor de excentricidade do centro da ressonância diminui se o semieixo crítico aumenta. Também vemos que, a excentricidade do centro no MR2 é menor que no MR1, isto devido à diferença de sinal dos dois termos ressonantes que compõem o modelo aqui analisado, ainda assim, continua em um valor elevado.

Figura 3.6 - Excentricidade do centro da ressonância 3:1 no MR2.



Valores de excentricidade do centro da ressonância obtidos mediante a curva de nível $\partial_e \mathcal{H}(a, e, 0, \pi) = 0$ na faixa de semieixos críticos.

Fonte: Produção do autor.

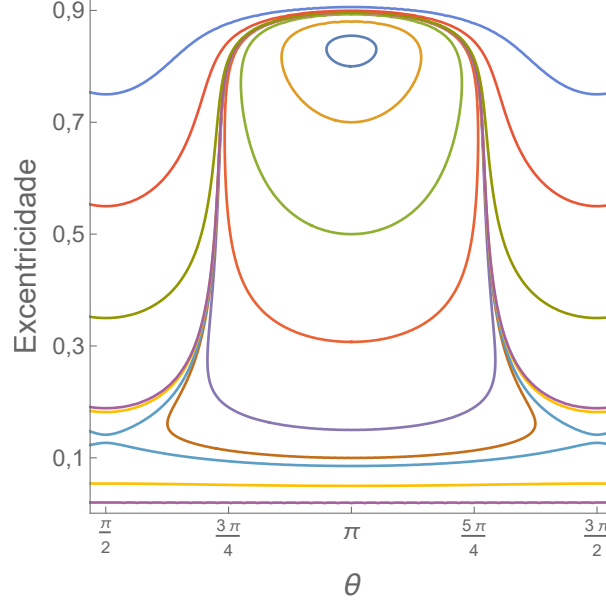
Como caso particular de interesse, apresentamos o espaço de fase das órbitas com semieixo kepleriano da ressonância 3:1, Figura 3.7. Este semieixo kepleriano, $a_k = 2.296,450$ km, também é semieixo crítico, pois é raiz da Equação (3.2) quando $e = 0,717449$. Neste espaço de fase, o centro da ressonância está em $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$ e $e = 0,832217$. Também, observamos dois pontos de sela, pontos instáveis, em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ com valor de excentricidade igual a 0,134225. A curva que contém os dois pontos de sela é chamada de separatriz e o valor mínimo de excentricidade que a gera é a raiz da equação

$$\mathcal{H}(a_k, e, 0, 0) - \mathcal{H}(a_k, 0, 134225, 0, \pi/2) = 0, \quad (3.3)$$

que é $e = 0,085937$. Este valor indica que para órbitas com valores de excentricidade menores que ele e $a = a_k$, o ângulo ressonante está em circulação independente de

sua condição inicial.

Figura 3.7 - Espaço de fase no semieixo kepleriano da ressonância 3:1 em Haumea.



Espaço de fase das órbitas com $a = 2.296,450$ km e $I = 0^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Embora, a separatriz não seja visível nos dois espaços de fase anteriores, e consequentemente os pontos de sela, ela existe e será observada de forma indireta na dinâmica da partícula na seção seguinte.

Antes de continuar faremos algumas observações.

Se no termo ressonante do MR1 a função da excentricidade é a expressão:

$$G_{204}(e) = \frac{e^4(2272 - 1008e^2 + 27e^4 + 1992\sqrt{1-e^2} - 252e^2\sqrt{1-e^2})}{2(1 + \sqrt{1-e^2})^6},$$

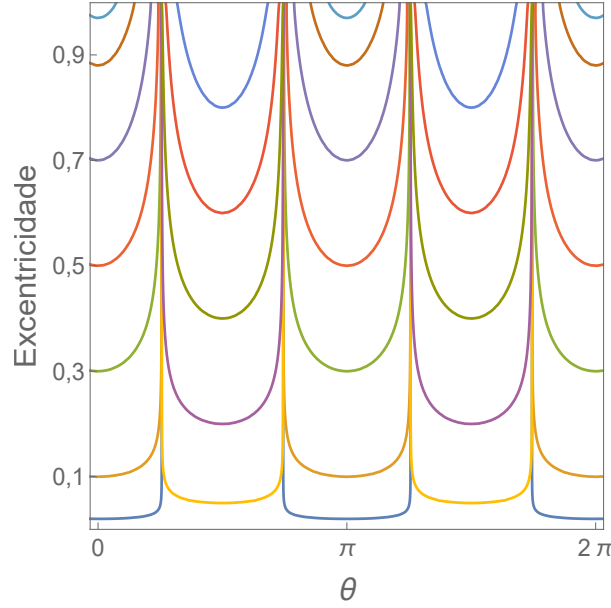
Equação (2.28), obtida mediante a formulação clássica do potencial perturbador, então, o centro da ressonância está localizado em $e = 0,975815$, no caso de $a = a_{c1}$. Agora, se no MR2 a função da excentricidade nos dois termos ressonantes são as Expressões (2.28) e (2.31), apresentadas na Seção 2.3, o centro da ressonância estaria em $e = 0,898627$, quando $a = a_{c2}$. Podemos observar, nesses dois casos, que o valor de excentricidade do centro, nos dois modelos, são superiores aos resultados apresentados nesta seção, mas não afeta os resultados obtidos na seção seguinte. Agora, se a expressão secular do coeficiente J_{20} no MR1 fosse a obtida aplicando o

passo dois descrito na Seção 2.4, isto é:

$$\langle \Phi_{20} \rangle = \frac{J_{20} R^2 \mu}{4a^3} \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 \right) (2 - 3s^2),$$

Então, o centro da ressonância não está presente no espaço de fase, como mostrado na Figura 3.8, ou seja, o centro teria um valor de excentricidade negativo ou maior que 1, resultando em uma inconsistência, ou simplesmente poderia não existir.

Figura 3.8 - Espaço de fase no semieixo kepleriano da ressonância 3:1 no MR1.



Espaço de fase das órbitas com $a = 2.318,46592$ km e inclinação $I = 0^\circ$, tal que a função da excentricidade no cosseno ressonante no MR1 é a Expressão (2.28).

Fonte: Produção do autor.

Uma vez determinada a faixa de semieixos críticos e o centro da ressonância no modelo reduzido, passamos a comparar a dinâmica dos modelos MR1 e MQ1, como também a dos modelos MR2 e MQ2, mediante as equações planetárias de Lagrange. Esta comparação nos permitirá determinar se o cosseno ressonante do modelo reduzido tem um efeito maior que as demais funções periódicas que compõem o modelo quase-completo. Em outras palavras, nos permitirá determinar o efeito da ressonância tesseral 3:1 na dinâmica da partícula. Além disso, poderemos observar se o máximo valor de excentricidade alcançado por uma partícula em ressonância é próximo do valor determinado no espaço de fase.

3.3 Efeitos da ressonância tesseral 3:1

Nesta seção, analisamos a dinâmica de uma partícula sob o efeito dos quatro modelos propostos da anisotropia de Haumea aplicando a técnica das equações planetárias de Lagrange. Este sistema de equações no conjunto de elementos orbitais aqui empregados para descrever a função perturbadora, é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{\eta a} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ell} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\
\frac{d\ell}{dt} &= \eta - \frac{2}{\eta a} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{\eta a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\eta a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{\eta a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ell} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\eta a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\cot I}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\
\frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} + \frac{\cot I}{\eta a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(FERNANDES; ZANARDI, 2018; BROUWER, 1959). Este sistema de equações não é bem definido para órbitas equatoriais circulares, por conseguinte, nas órbitas a serem analisadas temos $I_0 = 0,01^\circ$. No trabalho em que foi divulgado a existência do anel, se concluiu que a figura geométrica que melhor se ajusta às trajetórias que seguem as partículas do anel é a elipse (ORTIZ et al., 2017). Isto nos conduz a definir $e_0 \neq 0$ nos casos de estudo, evitando resultados indefinidos.

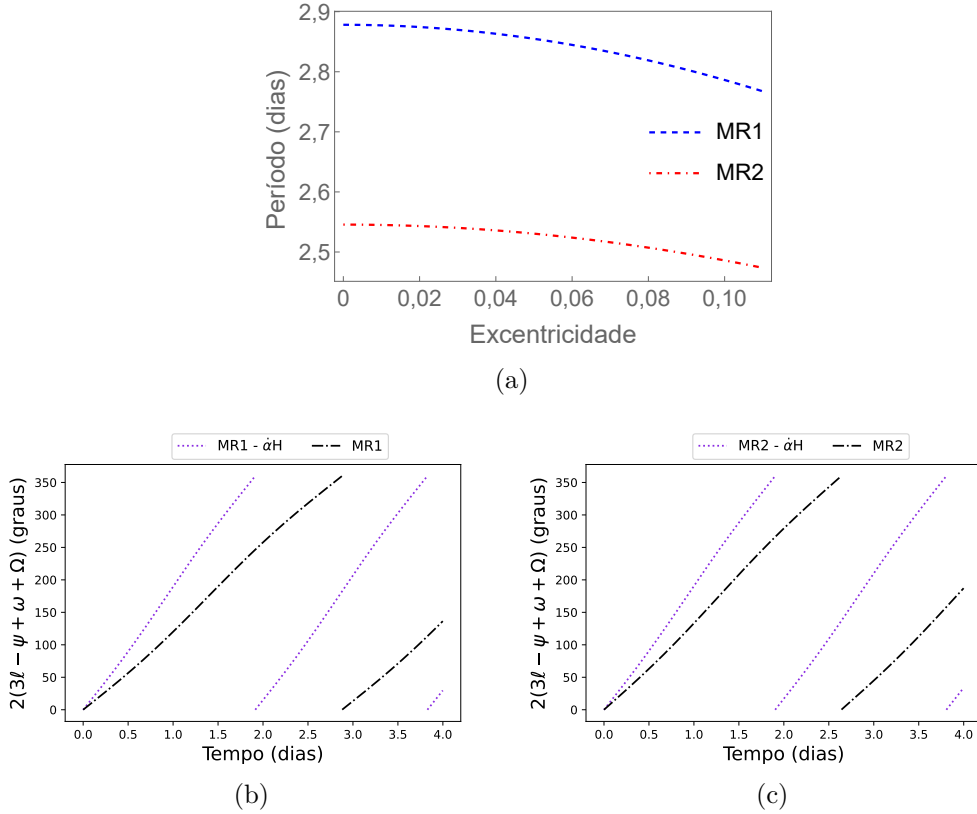
A integração numérica do sistema de Equações (3.4) foi feita aplicando o método Runge-Kutta-Fehlberg RK4(5)6 de passo variável e erro máximo de 10^{-7} (VERIS, 2018), no software Python.

É necessário ressaltar que as curvas em cada um dos espaços de fase apresentados na seção anterior, são curvas nas quais o semieixo maior da órbita é constante. Porém, no sistema de equações planetárias de Lagrange, $\dot{a} \neq 0$. Isto implica uma variação da excentricidade com diferente amplitude à observada no espaço de fase. Ainda assim, se a partícula estiver em ressonância espera-se que esta variável tenha um valor máximo próximo daquele determinado para o centro.

O termo de Coriolis presente na função hamiltoniana apresentada na Equação (2.45) é introduzido em cada um dos quatro modelos da anisotropia, com o objetivo de ter-se consistência entre o observado no espaço de fase e os resultados seguintes. Posto isto, vamos determinar o período do ângulo ressonante no sistema de referência inercial e compará-lo com o período no sistema girante, e assim ver a influência do termo adicionado.

A partir da Equação (2.47) determinamos o período do ângulo nos dois modelos MR1 e MR2 em a_{c1} e a_{c2} , respectivamente, Figura 3.9(a). No sistema inercial os modelos são: MR1- $\dot{\alpha}H$ e MR2- $\dot{\alpha}H$, em que $\dot{\alpha} = (d\eta - \eta_p)$. Na determinação do período não consideramos os termos periódicos do modelo, pois o resultado oscila em torno daquele gerado pela parte secular, pelo que será chamado de período médio. Mas, o comportamento do ângulo é obtido incluindo os termos ressonantes respectivos.

Figura 3.9 - Período médio e comportamento do ângulo ressonante no modelo reduzido.



Na figura (a) temos o período médio do ângulo no caso de $e \in (0, e_{max})$ e $I = 0^\circ$, na curva superior $a = a_{c1}$ e na inferior $a = a_{c2}$. Na figura (b) a órbita é tal que $a_0 = 2.318,46592$ km, $e_0 = 0,05$, $\Theta_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. E em (c) $a_0 = 2.314,82430$ km, $e_0 = 0,05$ e $\Theta_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Na Figura 3.9(b), apresentamos o comportamento do ângulo na órbita de condições iniciais $a_0 = a_{c1}$, $e_0 = 0,05$ e $\Theta_0 = 0^\circ$ nos dois sistemas de referência. Vemos que o período do ângulo no MR1 é próximo do período médio observado na Figura 3.9(a) e difere em quase um dia com respeito ao sistema de referência inercial. Na Figura 3.9(c), a órbita tem condição inicial $a_0 = a_{c2}$, $e_0 = 0,05$ e $\Theta_0 = 0^\circ$. Nela, vemos que o tempo de circulação do ângulo no MR2 é próximo do seu período médio, assim como no MR1. Comparando os resultados nas três figuras, os termos ressonantes dos modelos reduzidos não tem influência significativa no período do ângulo nas órbitas selecionadas. Também, observa-se que a adição do efeito secular do coeficiente J_{40} resulta em uma diminuição do período de circulação do ângulo ressonante.

Para uma partícula orbitando um corpo primário identificamos dois tipos de movimento. Se a variação nos elementos orbitais é pequena gerando um movimento quase-elíptico, dissemos que a partícula está em movimento regular. Caso contrário, dissemos que a partícula está em movimento irregular.

A análise da dinâmica da partícula nas órbitas selecionadas será feita da seguinte maneira. Primeiro, faremos a comparação entre os modelos MR1 e MQ1 em órbitas nas quais $a_0 = a_{c1}$, logo entre os modelos MR2 e MQ2 nas órbitas com $a_0 = a_{c2}$. Para cada valor inicial de excentricidade escolhido teremos dois casos: $\Theta_0 = 0^\circ$ e $\Theta_0 = 90^\circ$. Os elementos orbitais aqui analisados serão a excentricidade e o semieixo maior da órbita que, nos indicara se a partícula permanece na região do anel ou não. Também apresentamos a variação do ângulo ressonante para determinar se o comportamento corresponde com o observado no espaço de fase respectivo.

3.3.1 Efeito do coeficiente J_{22} no movimento da partícula

Nos dois modelos, reduzido e quase-completo, a parte secular é a mesma. Logo, no que segue, quando falarmos do efeito do coeficiente J_{22} , nos referimos à dinâmica gerada pelo efeito dos termos que compõem o harmônico Φ_{22} , MQ1. E quando falarmos do efeito da ressonância tesseral é sobre o efeito do cosseno ressonante que compõe o modelo reduzido 1.

Nos casos analisados para comparar os dois modelos temos que $a_0 = a_{c1} = 2.318,46592$ km e $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$. A diferença em cada um dos casos está na condição inicial de excentricidade (0,09, 0,1, 0,15 e 0,25) e do argumento do pericentro. Por exemplo, na Figura 3.10 temos $e_0 = 0,09$ e, na primeira coluna a órbita tem condição inicial $\omega_0 = 0^\circ$, o que corresponde a $\Theta_0 = 0^\circ$. A órbita com esta condição inicial no ângulo ressonante será chamada de órbita 1. Na segunda coluna da figura, temos

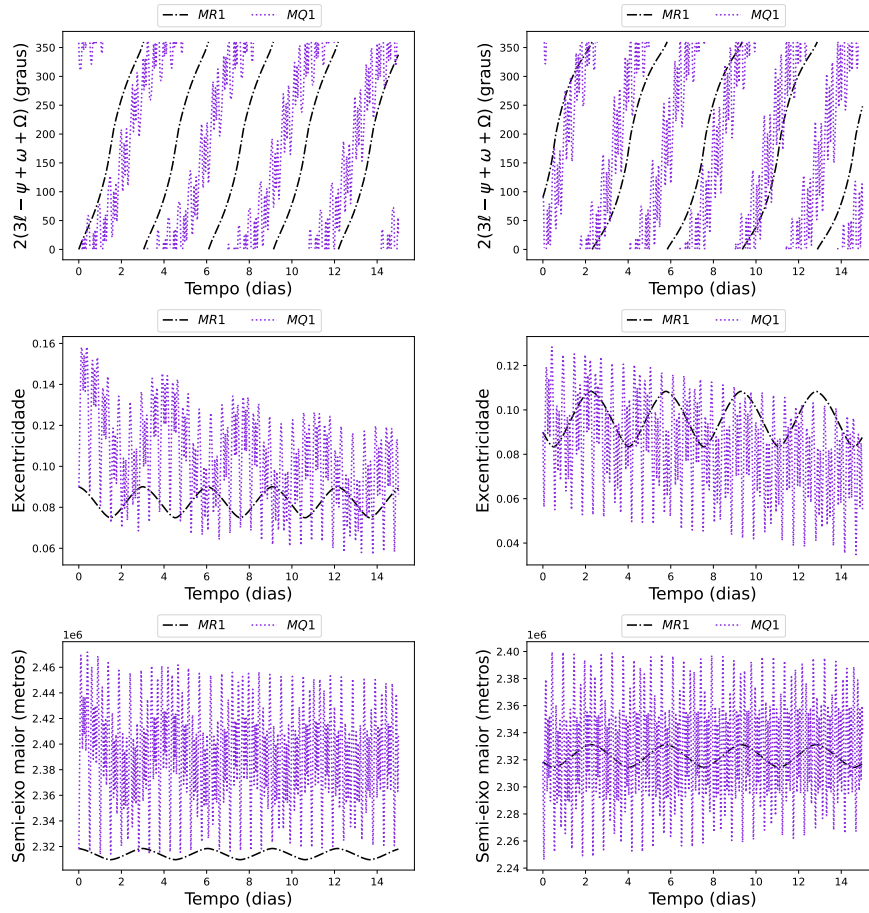
$\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$, que chamaremos de órbita 2.

O tempo de integração nos casos apresentados é de 15 dias, tempo suficiente para que o ângulo ressonante retorne ao seu valor inicial.

Caso 1.1

Neste primeiro caso, $e_0 = 0,09$. O ângulo ressonante está em circulação nos dois modelos e nas duas órbitas, Figura 3.10.

Figura 3.10 - MR1 vs MQ1: Caso 1.1.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.318,46592$ km, $e_0 = 0,09$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

No MQ1 e na órbita 2, o período do ângulo é menor que na órbita 1. Nesta última, a excentricidade oscila ao redor de 0,08 no MR1 e o semieixo maior da órbita em torno da sua condição inicial. Porém, nesta mesma órbita e no MQ1, a excentricidade tem

um comportamento senoidal perturbado com tendência a diminuir seu valor máximo alcançado. No MQ1, o semieixo maior da órbita oscila em torno de 2.400 km, e a excentricidade no último dia de integração assume o valor máximo de 0,12. A órbita kepleriana com $e = 0,12$ e $a = 2.400$ km tem pericentro e apocentro de $r_p = 2.112$ km e $r_a = 2.688$ km, respectivamente. Assim, concluímos que a partícula não permanece confinada na região do anel.

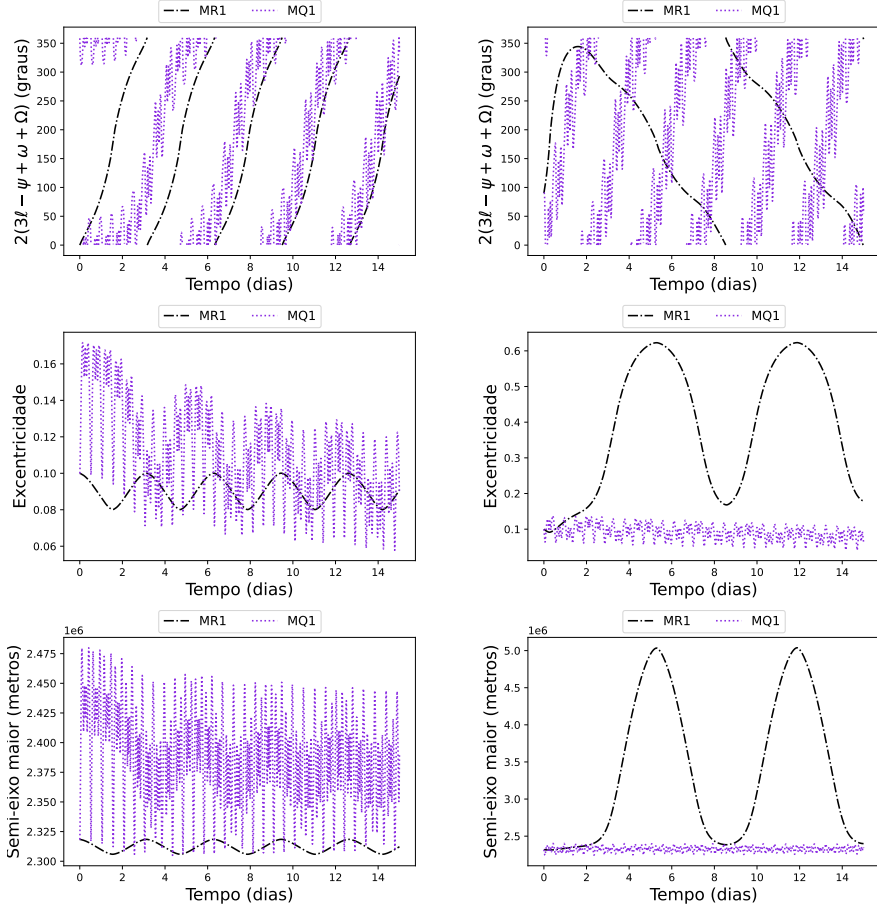
Na órbita 2 e no MQ1, o semieixo maior da órbita oscila em torno dos valores adquiridos no MR1 e seu valor médio é de 2.320 km. No primeiro dia e no mesmo modelo, MQ1, a excentricidade assume seu valor máximo 0,12 e seu valor mínimo próximo a 0,07. Assim, a órbita kepleriana com $a = 2.320$ km e $e = 0,07$ tem $r_p = 2.157,6$ km e $r_a = 2.484,4$ km. Após o primeiro dia, a excentricidade assume valores inferiores a 0,07. Portanto, na órbita 2 e modelando a anisotropia de Haumea mediante o MQ1, podemos concluir que a partícula permanece na região do anel na maior parte do tempo.

Caso 1.2

Aqui $e_0 = 0,1$. O comportamento da partícula nos dois modelos na órbita 1, primeira coluna da Figura 3.11, não difere significativamente do observado na órbita 1 no caso anterior. Portanto, deduzimos que a partícula não permanece na região do anel.

Na órbita 2 e no MR1, o ângulo está em libração nos primeiros nove dias com grande amplitude em torno de $\Theta = 180^\circ$, valor angular em que se encontra o centro de ressonância (Figura 3.2). Esta libração gera um movimento irregular, fazendo com que a excentricidade e o semieixo maior da órbita atinjam o valor de 0,6 e 5.000 km, respectivamente. Comparando os resultados do MR1 na órbita 2, $\Theta_0 = 90^\circ$, do caso presente e anterior, vemos que no intervalo (0,09, 0,1) da excentricidade existe um valor que gera a separatriz entre os regimes do angulo ressonante. Continuando na órbita 2, vemos que, no MQ1, a partícula está em movimento regular, mas esse movimento não é suficiente para que a partícula permaneça confinada na região do anel.

Figura 3.11 - MR1 vs MQ1: Caso 1.2.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.318,46592$ km, $e_0 = 0,1$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Caso 1.3

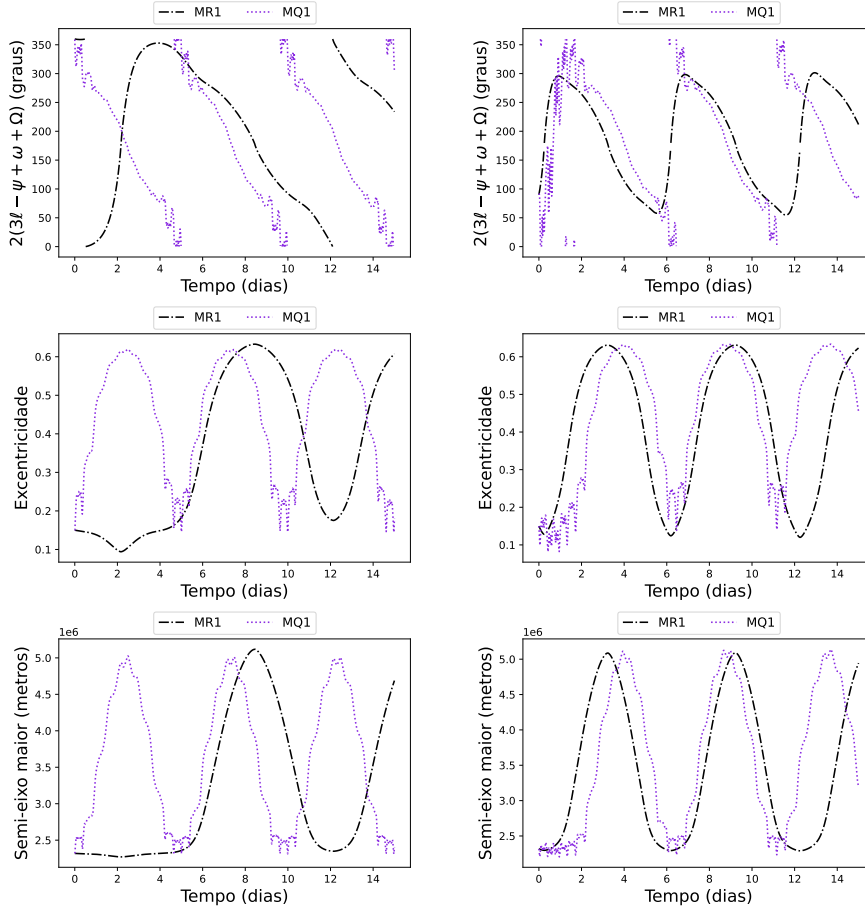
Neste caso $e_0 = 0,15$. Observamos na Figura 3.12, que na órbita 1 e usando o modelo MR1, o ângulo está em libração em torno de 180° , mostrando que a partícula foi capturada pela ressonância nos primeiros 12 dias. Por isso a excentricidade apresenta uma oscilação de amplitude considerável chegando em um valor aproximado de 0,65.

Já o MQ1 gera um movimento de circulação do ângulo com período aproximado de cinco dias. Esta circulação acontece no sentido oposto do observado nos casos 1.1 e 1.2, indicando que o ângulo se encontra no regime de circulação superior, mencionado na seção anterior. Neste mesmo modelo a excentricidade também chega em um valor elevado de quase 0,65. Em relação ao semieixo maior da órbita, este

deixa a região do anel no primeiro dia.

Na órbita 2 o MQ1 mostra, nos primeiros seis dias, uma libração do ângulo em torno de 180° com amplitude próxima da gerada pelo MR1. A maior diferença nesses primeiros dias entre os dois modelos é em relação ao período do ângulo, essa diferença é de quase um dia. Neles dois, a excentricidade supera o valor de 0,6 e o semieixo maior da órbita chega em 5.000 km.

Figura 3.12 - MR1 vs MQ1: Caso 1.3.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.318, 46592$ km, $e_0 = 0,15$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

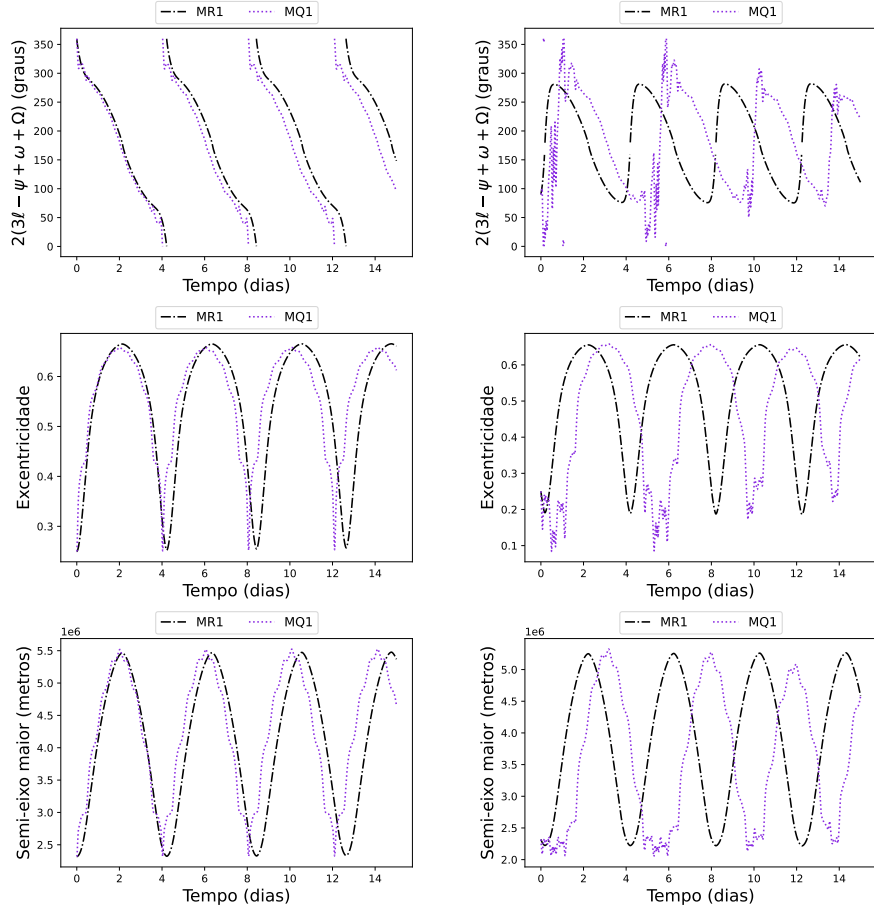
Caso 1.4

Neste ultimo caso, a condição de excentricidade é 0,25. Na órbita 1 vemos que os dois modelos apresentam o mesmo comportamento nas três variáveis, Figura 3.13. O

ângulo está em circulação e o valor alcançado pela excentricidade é cerca de 0,7. No primeiro período do ângulo, a velocidade de circulação é próxima nos dois modelos. Logo, esta velocidade aumenta no MQ1 implicando uma diminuição do período em comparação com o MR1.

Na órbita 2, os dois modelos mostram que o ângulo está em libração com grande amplitude em torno de $\Theta = 180^\circ$. Neste caso, o período do ângulo no MQ1 é maior que no MR1. Nos dois modelos, a excentricidade supera o valor de 0,6 no terceiro dia, e o semieixo da órbita permanece na região do anel só no primeiro dia.

Figura 3.13 - MR1 vs MQ1: Caso 1.4.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.318, 46592$ km, $e_0 = 0, 25$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0, 01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

3.3.2 Efeito dos coeficientes J_{22} e J_{42} no movimento da partícula

Nesta seção analisaremos a dinâmica gerada pelos modelos MR2 e MQ2. Nos primeiros cinco casos apresentados, as órbitas têm como condição inicial $a_0 = a_{c2} = 2.314,82430$ km, $\Omega_0 = \ell_0 = 0^\circ$ e, a excentricidade tem como condição inicial: 0,09, 0,1, 0,15, 0,25 e 0,831, um valor para cada caso. Novamente, a órbita 1 é aquela em que $\omega_0 = \Theta_0 = 0^\circ$ e a órbita 2 tem $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

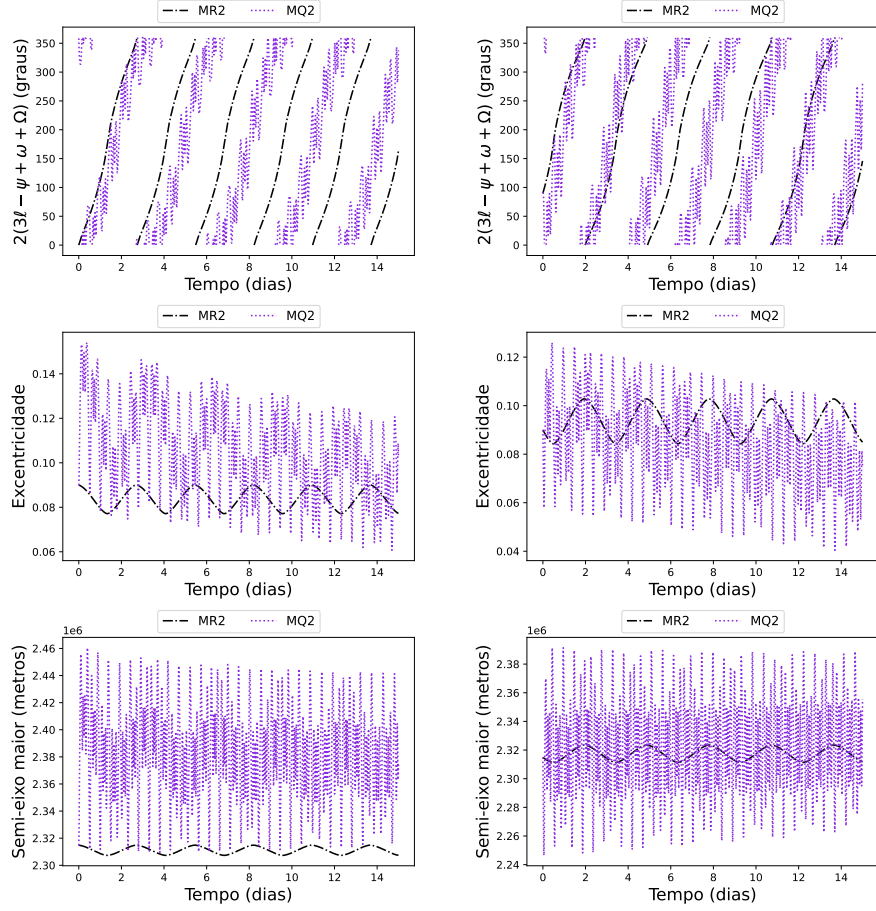
Apresentamos um sexto caso em que a_0 é o semieixo kepleriano da ressonância em questão, $a_0 = 2.296,450$ km.

Caso 2.1

Aqui, temos $e_0 = 0,09$. Na primeira coluna da Figura 3.14 apresentamos a dinâmica da partícula na órbita 1. Nessa órbita, vemos que no MQ2 a excentricidade e o semieixo maior da órbita obtêm valores acima dos proporcionados pelo MR2. Vemos que o efeito dos dois coeficientes, J_{22} e J_{42} , produz uma oscilação da excentricidade com tendência a diminuir seu valor máximo, ainda assim, esse valor máximo no final da integração é maior do que 0,1. No MQ2, o semieixo maior da órbita oscila ao redor de 2.400 km. Com os valores obtidos pela excentricidade e o semieixo maior da órbita, tal como no caso 1.1 e na órbita 1, concluímos que a partícula não permanece confinada na região do anel.

Na segunda coluna da figura, na órbita 2, o ângulo ressonante está em circulação. No tempo da integração, o valor médio do semieixo maior da órbita em MR2 pode ser considerado como o valor médio do MQ2, sendo aproximadamente 2.320 km. Na maior parte do tempo a excentricidade assume valores abaixo de 0,08. A órbita média com $a = 2.320$ km e $e = 0,08$ tem $r_p = 2.134$ km e $r_a = 2.505,6$ km. Considerando essas duas magnitudes, r_p e r_a , e que a excentricidade na maior parte do tempo é inferior a 0,08, com tendência a diminuir seus valores máximos, concluímos que em algum momento a partícula estará confinada na região do anel.

Figura 3.14 - MR2 vs MQ2: Caso 2.1.



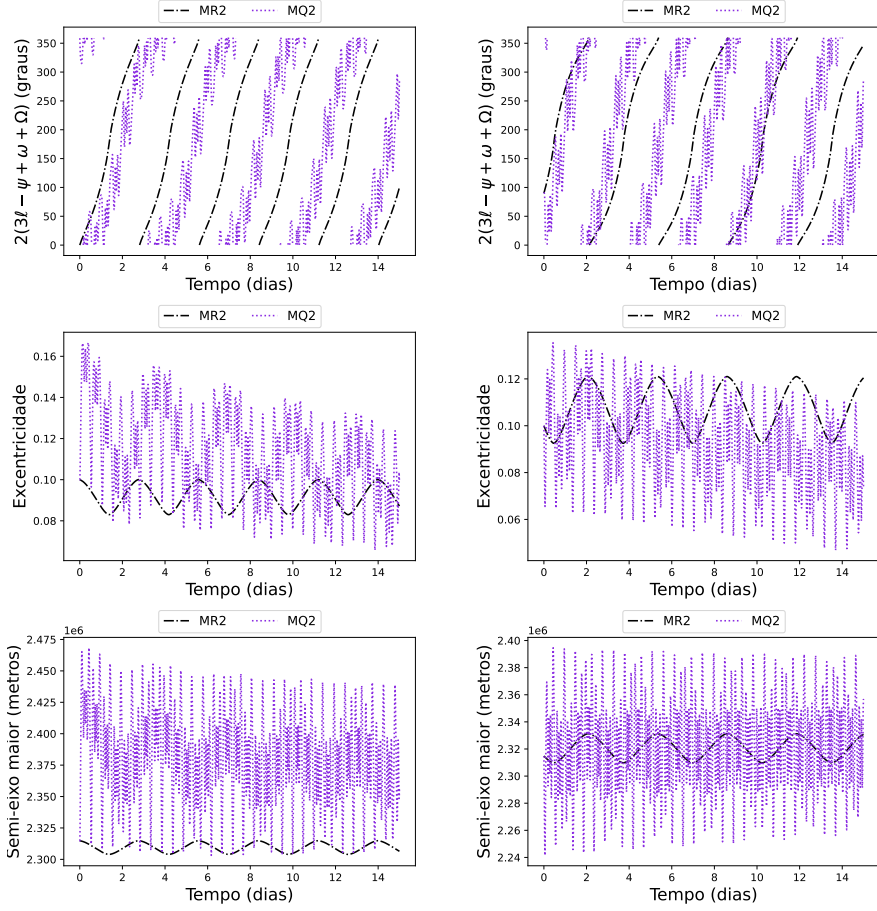
As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.314, 82430$ km, $e_0 = 0,09$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Caso 2.2

Aqui, o valor inicial de excentricidade é 0,1. O MQ2 mostra nas duas órbitas que o ângulo ressonante está em circulação, primeira linha da Figura 3.15. Na órbita 1 e no MQ2, a excentricidade apresenta valores abaixo de 0,12 na maior parte do tempo e o semieixo maior da órbita oscila em torno de 2.380 km, com esses valores concluímos que a partícula não está confinada à região do anel. Na órbita 2 e em ambos modelos, há um movimento regular da partícula. A excentricidade e o semi-eixo maior da órbita possuem valores próximos aos observados na órbita 2 do caso anterior, principalmente, a excentricidade tende a diminuir seus valores máximos, fazendo com que a partícula permaneça na região do anel a maior parte do tempo.

Figura 3.15 - MR2 vs MQ2: Caso 2.2.



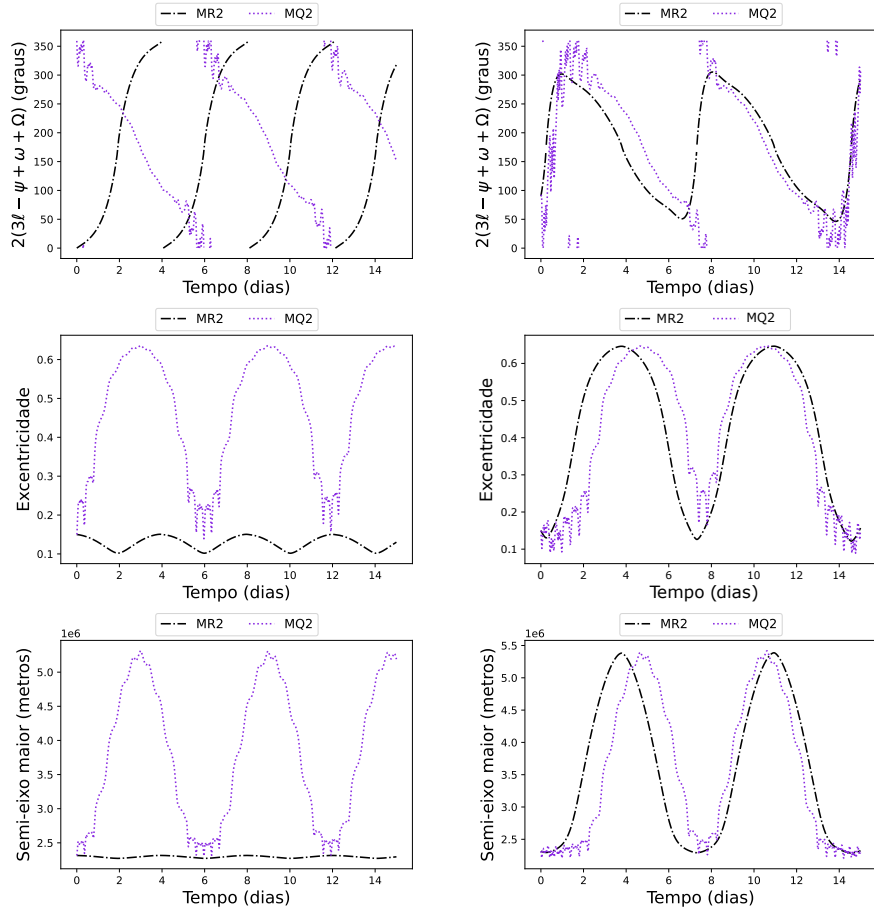
As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.314,82430$ km, $e_0 = 0,1$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerdada, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Caso 2.3

Com $e_0 = 0.15$, na órbita 1 observamos que o ângulo está em circulação em ambos modelos, primeira coluna da Figura 3.16. No entanto, em MR2 o ângulo encontra-se no regime de circulação inferior e a partícula apresenta um movimento regular. No MQ2 o ângulo está no regime de circulação superior, de modo que a excentricidade e o semieixo maior da órbita atingem valores acima de 0,6 e 5.000 km, respectivamente, mostrando um movimento irregular da partícula. A diferença entre os dois modelos no presente caso nos leva a concluir que o valor da excentricidade da separatriz no MR2 é maior que no MQ2.

Figura 3.16 - MR2 vs MQ2: Caso 2.3.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.314, 82430$ km, $e_0 = 0, 15$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0, 01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Na órbita 2, segunda coluna da Figura 3.16, inicialmente os dois modelos apresentam uma libração do ângulo e após oito dias continua em circulação no MQ2. A libração acontece em torno de $\Theta = 180^\circ$. A excentricidade chegando em valores acima de 0,6 e o semieixo maior da órbita acima de 5.000 km, concluímos que, a partícula não fica confinada na região do anel. Os dois modelos apresentam valores próximos nas três variáveis, mostrando que o modelo reduzido representa consideravelmente a dinâmica da partícula nesta órbita.

Caso 2.4

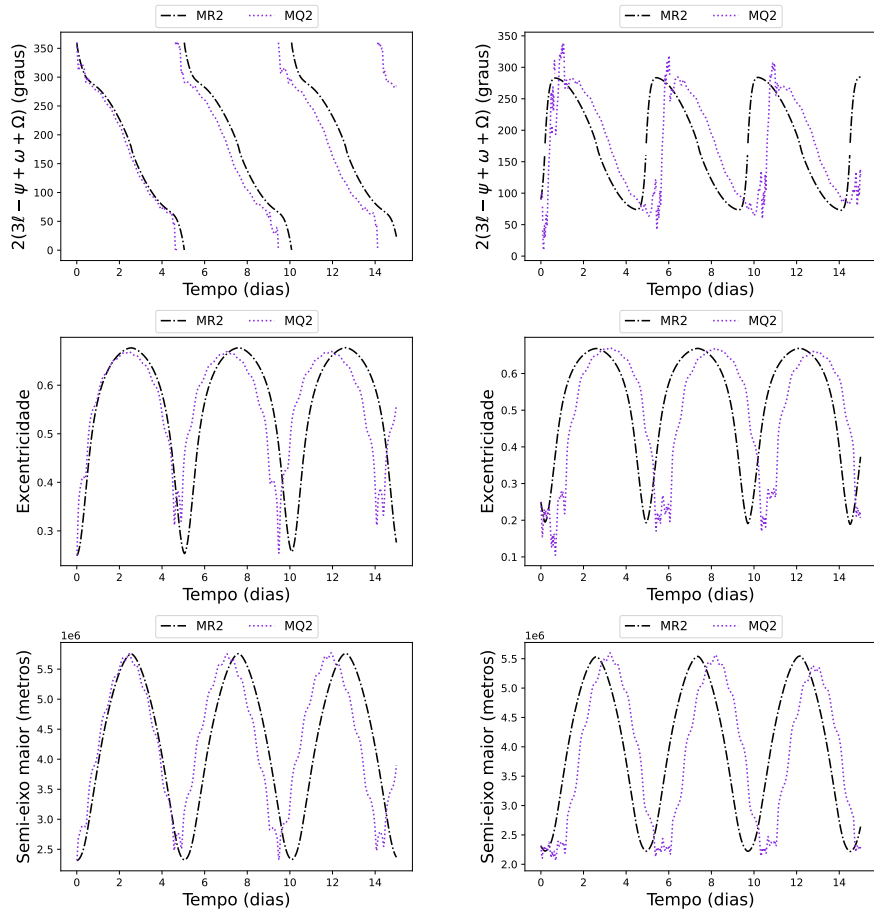
Aqui $e_0 = 0, 25$. Vemos que o ângulo nos dois modelos e na órbita 1 está em circulação, Figura 3.17, e a partir da segunda órbita de circulação do ângulo, no MQ2 o período desta variável diminui em comparação ao MR2. Novamente, os valores de

excentricidade e semieixo maior da órbita apresenta valores elevados e próximos entre os dois modelos, e o semieixo maior da órbita deixa a região do anel no primeiro dia de integração.

Já na órbita 2, tal como no caso 2.3, o ângulo libra em torno de 180° nos dois modelos. A excentricidade supera o valor de 0,6 nos dois modelos e o semieixo maior da órbita alcança valores acima de 5.000 km.

Nas duas órbitas, observamos que o modelo reduzido 2 representa significativamente a dinâmica da partícula modelada pelo MQ2. E, a sua vez, o MR2 mostra um comportamento da partícula consistente com o observado no espaço de fase correspondente, Figura 3.5.

Figura 3.17 - MR2 vs MQ2: Caso 2.4.



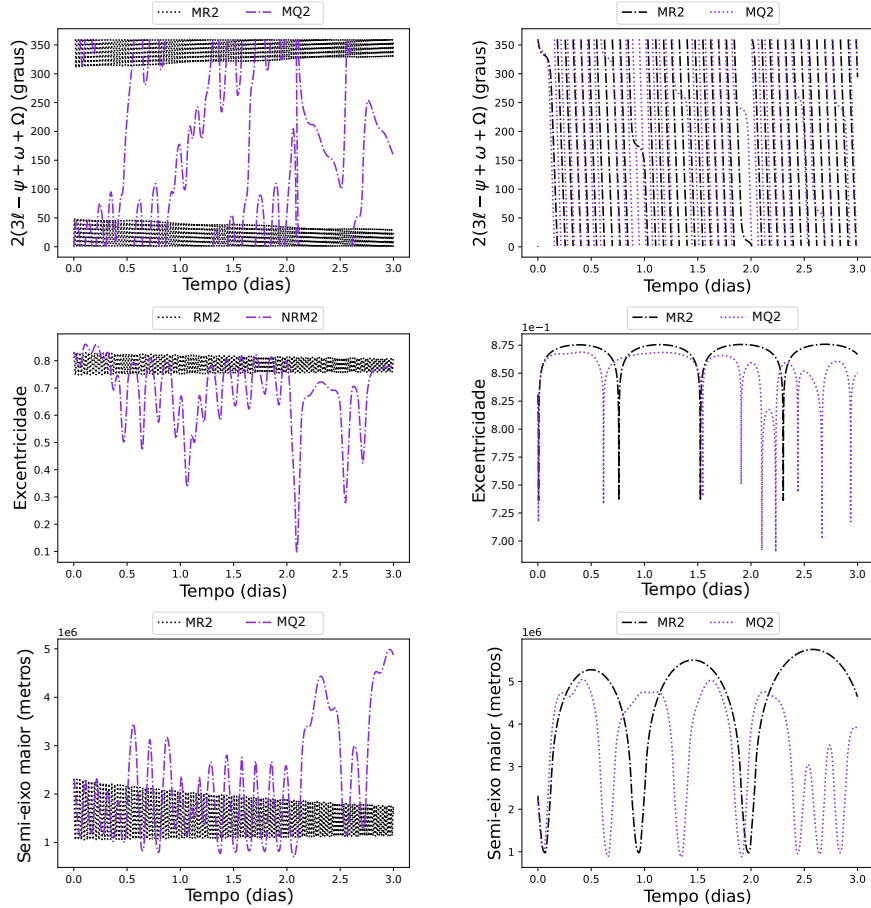
As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.314, 82430$ km, $e_0 = 0,25$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerdada, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Caso 2.5

Neste caso, o tempo de integração é de três dias, tempo suficiente para determinar se o comportamento das variáveis nos dois modelos é similar. A condição inicial de excentricidade nas duas órbitas é o valor do centro da ressonância $e_0 = 0,831$ obtido no MR2. Na órbita 1, primeira coluna da Figura 3.18, vemos que no MR2 o ângulo ressonante oscila em torno de $\Theta = 0^\circ$ e a excentricidade apresenta uma amplitude de oscilação pequena, como observado no espaço de fase na Figura 3.5. Esta ultima variável no MQ2 tem uma queda até 0,1 no segundo dia e depois tende a sua condição inicial. Já no MQ2 o angulo apresenta uma libração nas primeiras horas e depois se mantém em circulação. Em ambos modelos, o semieixo maior da órbita deixa a região do anel no começo da integração.

Figura 3.18 - MR2 vs MQ2: Caso 2.5.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.314,82430$ km, $e_0 = 0,831$, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na órbita 1, coluna esquerda, temos $\omega_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 0^\circ$. Na órbita 2, coluna direita, temos $\omega_0 = 45^\circ$ ou $\Theta_0 = 90^\circ$.

Fonte: Produção do autor.

Na órbita 2, em que Θ_0 está no regime de circulação, o ângulo ressonante e a excentricidade apresentam o comportamento observado no espaço de fase correspondente. O ângulo está em circulação e a excentricidade apresenta uma oscilação pequena durante o tempo analisado. O semieixo maior da órbita no MQ2 segue de cerca os valores obtidos no MR2 até a primeira metade do tempo de integração.

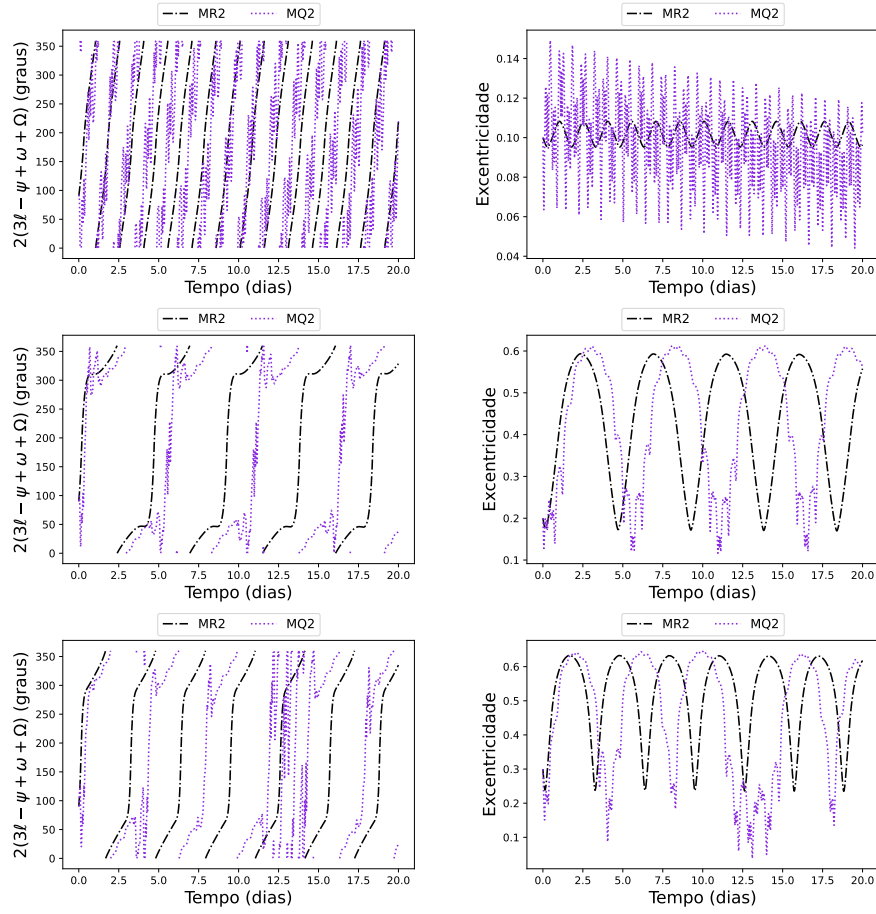
No presente caso, vemos que a excentricidade e o ângulo da ressonância no MR2 apresentam o comportamento esperado segundo o espaço de fase da ressonância sob o MR2. No MQ2 e na órbita 2, estas duas variáveis não diferem consideravelmente em relação ao observado no modelo reduzido.

Caso 2.6

Nesse último caso, a condição inicial do semieixo maior da órbita é o semieixo kepleriano da ressonância, $a_0 = 2.296,450$ km. Considerando que o comportamento do semieixo maior da órbita acompanha o comportamento da excentricidade, segundo o observado nos casos anteriores, isto é, uma grande, ou pequena amplitude na variação do semieixo maior da órbita corresponde a uma grande, ou pequena variação da excentricidade, respectivamente. Ou seja, não se espera uma pequena variação do semieixo maior da órbita e, ao mesmo tempo uma amplitude de oscilação considerável na excentricidade. Com base nesta observação, no presente caso, apresentamos só o comportamento da excentricidade e do ângulo ressonante.

Na Figura 3.19, nós mostramos a variação do ângulo ressonante e da excentricidade de três órbitas diferentes, mas nelas $\Theta_0 = 90^\circ$. Na primeira, segunda e terceira fila temos $e_0 = 0,1$, $e_0 = 0,2$ e $e_0 = 0,3$, respectivamente. Observamos um movimento regular nos dois modelos no caso em que $e_0 = 0,1$. Já nas outras duas órbitas, vemos um movimento irregular, pois o semieixo maior da órbita também apresentaria uma grande oscilação. Nesse movimento irregular, nos dois modelos, o ângulo ressonante apresenta uma aparente libração em torno de $\Theta = 0^\circ$ e como resultado tem-se uma variação considerável da excentricidade, pois adquire valores superiores a 0,6.

Figura 3.19 - MR2 vs MQ2: Caso 2.6.



As duas órbitas tem como condição inicial: $a_0 = 2.296,450$ km, $\Theta_0 = 90^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Na linha superior temos $e_0 = 0,1$. Nas figuras da linha do medio temos $e_0 = 0,2$. Na linha inferior, $e_0 = 0,3$.

Fonte: Produção do autor.

3.4 Discussão e conclusões

A não esfericidade do corpo primário gera um movimento perturbado da partícula que o orbita, e um desses efeitos é que o semieixo crítico da ressonância seja diferente do semieixo kepleriano da mesma. Em Haumea, o efeito secular do coeficiente J_{20} faz com que o semieixo crítico da ressonância tesseral 3:1 seja maior que o semieixo kepleriano da mesma, aproximadamente 22 km. E quando adicionamos o efeito secular do J_{40} , o semieixo crítico da ressonância é quase 18 km maior do que o seu semieixo kepleriano. De forma resumida, $a_k < a_{c2} < a_{c1}$ em que a_{c2} e a_{c1} pertence à faixa de semieixos críticos, apresentada na Seção 3.2, da ressonância no MR2 e no MR1, respectivamente.

O centro da ressonância sob o MR1, na faixa de semieixos críticos apresentada na

Figura 3.1, se localiza em $\Theta = 180^\circ$, com valores de excentricidade no intervalo (0,883, 0,883065). Este resultado é considerado como um resultado de referência. Logo, se uma partícula estiver em ressonância 3:1 com Haumea, espera-se que o seu valor de excentricidade máximo adquirido esteja próximo daquele observado no espaço de fase. Para dar continuidade com o mencionado, a partícula em movimento irregular nos modelos MR1 e MQ1 será o tema do seguinte parágrafo.

Nas órbitas dos casos 1.3 e 1.4, observamos uma concordância de comportamento das três variáveis nos dois modelos, exceto no ângulo na órbita 1 do caso 1.3, mas tal exceção não é relevante nos resultados mencionados a seguir. A concordância entre os modelos nos casos mencionados nos mostra o efeito dominante do cosseno ressonante da ressonância 3:1 na dinâmica da partícula. Em outras palavras, o modelo reduzido 1 representa de forma significativa, nas quatro órbitas, o comportamento da partícula sob o efeito do coeficiente J_{22} . Nessas órbitas, observamos um movimento irregular da partícula refletido na amplitude considerável com que varia a excentricidade, sobrepassando o valor de 0,6. A partir do observado, concluímos que uma partícula em ressonância tesseral 3:1 com Haumea, sob o MR1 ou MQ1, não permanece na região do anel.

No caso 1.1 e na órbita 1 do caso 1.2, vemos um movimento regular da partícula. Nas três órbitas, os dois modelos mostram que o ângulo ressonante está em circulação. Nessas órbitas, temos $e < 0,12$ na maior parte do tempo. Quando $\Theta_0 = 90^\circ$, o semieixo maior da órbita oscila em torno de 2.320 km fazendo com que a partícula permaneça na maior parte do tempo na região do anel. Com essa condição inicial no ângulo, vemos que os valores adquiridos pelo semieixo maior da órbita no MR1, são os valores médios desta variável no modelo quase-completo, indicando que o modelo reduzido representa significativamente a dinâmica da partícula na órbita 2 no caso 1.1. No MQ1, observa-se que a excentricidade tem uma menor amplitude de oscilação quando $\Theta_0 = 90^\circ$.

Outros casos foram realizados nos quais $0.02 \leq e_0 < 0.09$. Neles observamos que, a excentricidade e o semieixo maior da órbita apresentam menor amplitude de oscilação quando $e_0 \rightarrow 0.02$. Logo, raciocinando por indução, concluímos que uma partícula em órbitas com condição inicial $a_0 = a_{c1}$, $I_0 = 0,01^\circ$, $\Theta_0 = 90^\circ$ e $e_0 \approx 0$, tem a sua trajetória confinada na região do anel.

A conclusão feita no parágrafo anterior é similar ao resultado apresentado no trabalho de Winter et al. (2019) (mencionado na Seção 1.2), embora, a função perturbadora e o método de análise não sejam os mesmos, pois naquele trabalho se

considera o efeito de $J_{20} + J_{22}$ e os resultados são obtidos mediante o método de seções de Poincare. Nele se menciona o seguinte: “há uma indicação de que as órbitas de condição inicial e_0 estão fortemente relacionadas com as órbitas que compõem o anel de Haumea ao invés da ressonância 3:1” (tradução nossa). Também, os autores mencionam que, para todas as trajetórias em ressonância tesseral 3:1 com Haumea, na faixa de 2.000 km a 2.750 km, o ângulo ressonante libra em torno de π , tal como mostramos nos casos 1.4 e 1.5.

A órbita 2 do caso 1.2 nos proporciona uma observação indireta da separatriz entre os regimes do ângulo ressonante. Nessa órbita, na qual $e_0 = 0,1$ e $\Theta_0 = 90^\circ$, os dois modelos divergem, pois, o MR1 produz um movimento irregular e o MQ1 um movimento regular. Nessa divergência vemos que, no modelo reduzido, o valor de excentricidade que separa o regime de circulação do de libração está no intervalo (0,09, 0,1). Com respeito ao modelo quase-completo, o efeito do coeficiente J_{22} faz com que o valor de excentricidade da separatriz esteja no intervalo (0,1, 0,15).

A partir do comentado acima sobre os quatro casos, nos quais comparamos os resultados dos modelos MR1 e MQ1, concluímos que a dinâmica produzida pelo modelo reduzido é consideravelmente próxima do comportamento da partícula sob a perturbação do coeficiente J_{22} . Porém, devemos mencionar que esta conclusão não é completamente válida nas órbitas em que e_0 tem valores no intervalo (0,09, 0,15), pois nesse intervalo se encontram os valores de excentricidade da separatriz no MR1 e no MQ1, valores que são diferentes.

Quando incluimos o efeito secular do J_{40} e o coeficiente J_{42} , MR2, o centro da ressonância localiza-se no valor angular $\Theta = 0^\circ$ e com valores de excentricidade no intervalo (0,831556, 0,831570).

Nas duas órbitas do caso 2.4, $e_0 = 0,25$, os dois modelos mostram uma partícula em movimento irregular. De igual forma, na órbita com $e_0 = 0,15$ e $\Theta_0 = 90^\circ$ (caso 2.3). Vemos que o valor máximo da excentricidade se encontra próximo de 0,6, tal como observado nos casos 1.3 e 1.4.

Agora, comparando os casos 1.1 e 2.1, 1.2 e 2.2 vemos que o ângulo ressonante no regime de circulação inferior possui período menor no MQ2 em comparação ao MQ1. Isto é um efeito da parte secular do coeficiente J_{40} . Nesse mesmo regime e nos modelos MR2 e MQ2, a excentricidade e o semieixo maior da órbita apresentam a menor amplitude de oscilação quando $\Theta_0 = 90^\circ$. Assim, uma partícula sob o efeito perturbador dos coeficientes J_{22} e J_{42} e na órbita de condições iniciais $a_0 = a_{c2}$,

$\Theta_0 = 90^\circ$ e $e_0 \approx 0$ é possível que ela permaneça confinada na região do anel.

Ainda que $a_{c1} \neq a_{c2}$, vemos que os resultados gerados pelo MQ2 são próximos daqueles proporcionados pelo MQ1 em cada uma das três variáveis, exceto quando $0,09 < e_0 < 0,15$, o que nos leva a conclusão de que o efeito do coeficiente J_{22} é consideravelmente maior em comparação ao efeito do J_{42} , dominando a dinâmica da partícula. Este efeito dominante do coeficiente J_{22} nas órbitas aqui analisadas, concorda com os resultados obtidos, embora por métodos diferentes, no trabalho de Sanchez et al. (2020). Nesse trabalho é mostrada a dominância do coeficiente J_{22} na dinâmica da partícula na região do anel.

No caso 2.5, no qual e_0 toma o valor do centro da ressonância, o modelo reduzido 2 apresentou um comportamento da excentricidade e do ângulo ressonante como o observado no espaço de fase no mesmo modelo, Figura 3.5. Isto é, na órbita 1 em que Θ_0 está no regime de libração o ângulo apresentou libração em torno de $\Theta = 0^\circ$ no MR2 e a excentricidade oscilou com amplitude pequena em torno do centro, como esperado. Porém, não se observou o mesmo no MQ2. Na órbita 2, a condição inicial do ângulo toma valores no regime de circulação e o comportamento observado foi esse mesmo. Nesta órbita, os dois modelos apresentam o mesmo comportamento nas três variáveis e são consistentes com o observado no espaço de fase correspondente.

A partir dos casos analisados, podemos concluir que os modelos reduzidos representam significativamente a dinâmica gerada pelos modelos quase-completos, exceto nas órbitas com excentricidade inicial próxima à separatriz nos modelos reduzidos e quase-completos. Então, sem considerar as órbitas na vizinhança da separatriz, o MR1 representa significativamente a dinâmica no MQ1 e, de igual forma, o MR2 a dinâmica sob o MQ2, pelo menos nas órbitas com a_0 igual ao semieixo crítico da ressonância.

Nas órbitas analisadas sob os modelos reduzidos e quase-completos, vemos que o semieixo maior da órbita tem um comportamento similar ao da excentricidade, isto é, uma pequena variação da excentricidade vem acompanhada de uma pequena variação do semieixo maior da órbita. Assim, mesmo uma oscilação de amplitude considerável no semieixo maior da órbita é vista também na excentricidade.

Neste capítulo vimos que os modelos reduzidos, MR1 e MR2, representam satisfatoriamente a dinâmica de uma partícula na órbita equatorial da ressonância tesseral 3:1 em Haumea. Também, com a observação do parágrafo anterior junto com o resultado obtido por meio das equações planetárias de Lagrange vemos que, o centro

da ressonância está em um valor de excentricidade próximo do observado no espaço de fase. Esses são os argumentos para analisar de forma qualitativa a ressonância tesseral 3:1, mediante a formulação hamiltoniana, no elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático. Pois, determinando o valor de excentricidade do centro, obteríamos informação significativa sobre a dinâmica de uma partícula em ressonância tesseral com o corpo ideal mencionado. Tal estudo será feito no Capítulo cinco.

4 O ELIPSOIDE EM EQUILÍBRIO

No Sistema Solar, os pequenos corpos conhecidos como asteroides são de interesse para comunidade científica e alguns deles tem sido objetivo de missões espaciais. O sólido que melhor representa a forma geométrica, segundo as observações astronômicas, de alguns asteroides é o elipsoide triaxial homogêneo (FARINELLA et al., 1981; CHAUVINEAU et al., 1993; EFROIMSKY, 2002; HU, 2012). No presente trabalho, o elipsoide triaxial homogêneo satisfazendo a condição de equilíbrio hidrostático será objeto do estudo.

O estudo sobre objetos em equilíbrio hidrostático tem seu início no objetivo de determinar a forma de Terra e que Isaac Newton expôs na sua obra Principia (Livro III, proposição XVIII-XX). A forma da Terra determinada nesse momento foi a forma de um esferoide de excentricidade pequena que é um caso particular do esferoide de Maclaurin. No ano de 1834, C. G. J. Jacobi demonstrou que o elipsoide triaxial também satisfaz a condição de equilíbrio hidrostático, por tal motivo é conhecido como elipsoide de Jacobi e que, também nos referiremos a este objeto como elipsoide em equilíbrio. Existem mais objetos que satisfazem a condição de equilíbrio mencionada e na literatura são conhecidos como elipsoide de Dedekind, de Riemann, de Roche e de Darwin (CHANDRASEKHAR, 1969).

Nesse capítulo, primeiro determinaremos a condição de equilíbrio e logo determinaremos quais asteroides, na base de dados consultada, podem ser considerados elipsoides de Jacobi. Na seção final, determinamos a localização, conseqüentemente o semieixo kepleriano, da órbita da ressonância tesseral no corpo aqui tratado.

4.1 Condição de equilíbrio

No corpo em equilíbrio hidrostático, a força centrífuga que experimenta uma partícula é de igual magnitude e no sentido oposto da força gravitacional que atua sobre ela. Para um corpo de forma geométrica arbitrária, esta condição de equilíbrio é expressa pela equação:

$$U + \frac{1}{2}\eta_p^2(x^2 + y^2) = \text{constante}, \quad (4.1)$$

na qual U é o potencial gravitacional interno do corpo. O segundo termo é o potencial centrífugo gerado pela rotação e, a soma dois termos é o potencial efetivo (MARION, 2013). As variáveis x e y são as coordenadas cartesianas da partícula.

Se o corpo é um elipsoide triaxial e seus eixos formam uma base ortogonal do sistema

de coordenadas, então, o potencial gravitacional interno é dado por $U = -(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - D)$, em que α , β e γ são seus semieixos. Os parâmetros A , B , C e D , são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{(\alpha^2 + u)\phi(u)}, & B &= \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{(\beta^2 + u)\phi(u)} \\ C &= \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{(\gamma^2 + u)\phi(u)}, & D &= \pi G \rho \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \frac{du}{\phi(u)}, \end{aligned}$$

em que $\phi(u) = [(\alpha^2 + u)(\beta^2 + u)(\gamma^2 + u)]^{1/2}$ e ρ a densidade de massa do primário (KELLOGG, 1953). Para uma partícula na superfície do corpo, na qual $x = \alpha$ e $y = \beta$, a condição de equilíbrio (4.1) é equivalente às duas equações:

$$\alpha^2 \left(A - \frac{\eta_p^2}{2} \right) = \beta^2 \left(B - \frac{\eta_p^2}{2} \right), \quad (4.2a)$$

$$\alpha^2 \left(A - \frac{\eta_p^2}{2} \right) = C\gamma^2. \quad (4.2b)$$

Após manipulação algebraica na Equação (4.2a), obtemos:

$$\frac{\eta_p^2}{2} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha^2 A - \beta^2 B), \quad (4.3)$$

ou seja,

$$\eta_p^2 = \frac{2\pi G \rho \alpha \beta \gamma}{(\alpha^2 - \beta^2)} \left(\alpha^2 \int_0^\infty \frac{du}{(\alpha^2 + u)\phi(u)} - \beta^2 \int_0^\infty \frac{du}{(\beta^2 + u)\phi(u)} \right), \quad (4.4)$$

Substituindo a Expressão (4.3) na segunda Equação (4.2b), segue-se:

$$\alpha^2 \beta^2 (B - A) = (\alpha^2 - \beta^2) C \gamma^2.$$

Escrevendo de forma explicita os parâmetros A , B e C , está ultima equação é equivalente a:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 + u)(\beta^2 + u)} - \frac{\gamma^2 du}{(\gamma^2 + u)} \right) \frac{du}{\phi(u)} = 0.$$

Para manter esta igualdade independente do valor de u , o integrando deve ser nulo, isso significa:

$$\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 - \gamma^2 u = 0.$$

Isolando a variável de integração na última equação, temos:

$$u = \frac{1}{\gamma^2} (\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2),$$

e deve ser maior que zero, pois os limites de integração são positivos. Para acontecer isso, os semieixos do elipsoide triaxial devem satisfazer a seguinte relação:

$$\frac{1}{\gamma^2} > \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}. \quad (4.5)$$

Um elipsoide triaxial homogêneo é um corpo em equilíbrio hidrostático se a sua frequência angular é definida pela Expressão (4.4) e os semieixos cumprem a relação (4.5). Um estudo amplo sobre o elipsoide em equilíbrio ou elipsoide de Jacobi é feito na obra *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* do físico S. Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1969).

No que segue, definimos o semieixo α como a unidade de medida no elipsoide, dessa forma:

$$\beta = q\alpha, \quad \gamma = s\alpha, \quad \text{com } 0 < s < q < 1.$$

Os parâmetros q e s formam a dupla ($q : s$) que determinam a forma geométrica do elipsoide. Com isto, reescrevemos as integrais elípticas dos coeficientes A e B do corpo. Essas integrais são homogêneas de grau $-3/2$, nos permitindo expressá-las na forma:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{du}{(\alpha^2 + u)\Delta} &= \frac{2}{3}F_J(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2, \alpha^2) = \frac{2}{3}F_J(q^2\alpha^2, s^2\alpha^2, \alpha^2, \alpha^2) \\ &= \frac{2}{3}(\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}F_J(q^2, s^2, 1, 1) \\ &= \frac{2}{3}\alpha^{-3}F_D(q^2, s^2, 1), \end{aligned} \quad (4.6)$$

e

$$\int_0^\infty \frac{du}{(\beta^2 + u)\Delta} = \frac{2}{3}\alpha^{-3}F_D(1, s^2, q^2).$$

Para simplificar em notação escrevemos $F_D(q^2, s^2, 1) = F_\alpha$ e $F_D(1, s^2, q^2) = F_\beta$. Aqui, a integração delas é feita pela aproximação polinomial descrita no trabalho apresentado por B. C. Carlson (CARLSON, 1995). Substituindo as últimas duas expressões na Equação (4.4) e realizando algumas simplificações, o spin do elipsoide é determinado pela expressão:

$$\eta_p^2 = \frac{4\pi G\rho qs}{3(1 - q^2)}(F_\alpha - q^2 F_\beta). \quad (4.7)$$

Esta expressão será chamada de spin teórico ou frequência angular teórica em alguns casos. A primeira observação sobre o elipsoide de Jacobi pode ser feita na Equação

(4.7). Nela, vemos que o spin não depende do tamanho do elipsoide e sim da sua forma geométrica e densidade de massa.

Com os novos parâmetros q e s , a condição (4.8), em uma forma conveniente, resulta em:

$$s < \left(\frac{q^2}{1 + q^2} \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Dessa maneira é fácil ver que $s \rightarrow 1/\sqrt{2}$ quando $q \rightarrow 1$. Nessa relação, temos para cada valor de q um limite superior de s obtido por meio da seguinte função:

$$s_{max}(q) = \left(\frac{q^2}{1 + q^2} \right)^{1/2}, \quad (4.9)$$

que nos permitirá falar em família de elipsoides, facilitando a apresentação dos resultados nas seguintes seções e no seguinte capítulo.

Para continuar, é necessário esclarecer a aproximação polinomial das integrais F_α e F_β , pois os resultados seguintes são baseados na expressão que as contêm, Equação (4.7). Realizamos duas aproximações, $n = 2$ e $n = 3$, nas duas integrais e empregamos os dados do planeta anão Haumea para comparar os resultados. Nesse caso, $\alpha = 1.161$ km, $\beta = 852$ km, $\gamma = 513$ km e $\rho = 1,885$ g/cm³ (ORTIZ et al., 2017). Estes valores de semieixo produzem a forma geométrica $(q : s) = (0,733 : 0,441)$ que satisfaz a condição (4.8). A diferença entre as duas aproximações do spin teórico de Haumea é da ordem de 10^{-13} . Essa pequena diferença é a razão pela qual escolhemos $n = 2$ no algoritmo para obter a aproximação polinomial das integrais F_α e F_β .

O período observado de Haumea é de 3,9155 horas ou a sua frequência angular observada é $4,45749 \times 10^{-4}$. A frequência angular teórica desse corpo é $3,62644 \times 10^{-4}$, quando a forma geométrica $(q:s)$ e ρ são os valores mencionados no parágrafo anterior. Nesse caso, o spin teórico é 81% do spin observado. Posto isto, o planeta anão Haumea para ser considerado um elipsoide em equilíbrio, deve possuir $\rho = 2,858$ g/cm³, valor de densidade necessário para que seu spin observado seja igual ao teórico. Segundo Ortiz et al. (2017), para que Haumea seja considerado um elipsoide de Jacobi a sua densidade deve ser 2,7 g/cm³.

A medida do spin é pouco empregada ao se falar da rotação de corpos celestes, e sim o seu período de rotação. Portanto, a medida do período de rotação dos corpos é um dos critérios aplicados na busca por elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar.

4.2 O elipsoide em equilíbrio no Sistema Solar

A condição de equilíbrio do corpo aqui tratado é determinada pela forma geométrica e densidade de massa, condição expressa na relação entre os semieixos (4.8) e no spin (4.7). Porém, escolhamos o período de rotação ao invés do spin teórico, pois é uma medida mais familiar.

O período de rotação é determinado por $T = 2\pi/\eta'$ em que η' é a frequência angular de rotação (ALONSO; FINN, 1972). O período de rotação do elipsoide em equilíbrio, $T = 2\pi/\eta_p$ em que η_p é a Expressão (4.7), é determinado por meio da função:

$$T(q, s, \rho) = \left(\frac{3\pi(1 - q^2)}{G\rho qs(F_\alpha - q^2 F_\beta)} \right)^{1/2}, \quad (4.10)$$

e que chamaremos de período teórico, T_{co} .

As três variáveis no período teórico geram um número infinito de elipsoides em equilíbrio e, portanto, é impossível tratar cada um deles. Então, escolhemos 3 famílias determinadas pelo parâmetro q . Para cada uma das famílias, o parâmetro s toma valores no intervalo $[0, 2, s_{max}(q)]$, Tabela 4.1, com $s_{max}(q)$ obtido na Equação (4.9). O intervalo de valores da densidade de massa é determinado segundo as observações sobre asteroides.

Tabela 4.1 - Famílias de elipsoides em equilíbrio.

Família	q_i	$s_{max}(q_i)$
Família 1	$q_1 = 0,999$	$s_1 = 0,706$
Família 2	$q_2 = 0,722$	$s_2 = 0,585$
Família 3	$q_3 = 0,446$	$s_3 = 0,407$

A densidade de massa dos corpos celestes não é homogênea, pois estes objetos são compostos por diferentes materiais. Não obstante, no presente trabalho, optamos por um valor de densidade constante representado no parâmetro gravitacional μ . No caso de asteroides, alguns exemplos de densidade de massa, em unidades de g/cm^3 , são: $\rho \approx 1,60$, $\rho \approx 3,3$, $\rho \approx 3,5$, $\rho \approx 4,5$ e $\rho \approx 7,14$, que correspondem aos materiais Condrito Carbonáceo, Condrito ordinário, Enstatita, Ferrero-rochosos e Ferro, respectivamente (CARRY, 2012). Com isto, nas três famílias de elipsoides a densidade de massa toma valores no intervalo $[1, 7] \text{ g/cm}^3$.

O período de rotação dos membros da família 1 é apresentado na Figura 4.1(a). Nela,

observamos um período máximo e mínimo de cerca de oito e duas horas, respectivamente. Esse período máximo observado nesta família é tomado como referência para a definição da família 3, que será determinada com base nas observações.

Segundo a base de dados de corpos do Sistema Solar que possui o Jet Propulsion Laboratory, o planeta de menor período de rotação é Júpiter, com 9,92496 horas. Na classificação de planetas anões, Haumea é o único com período menor que oito horas. Estes dois planetas não são elipsoides de Jacobi. Assim, nessa base de dados, os possíveis elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar são os asteroides.

A busca por esses corpos ideais foi feita no subconjunto de corpos pequenos que cumprem o seguinte: período de rotação menor do que oito horas e que suas dimensões sejam definidas. O segundo critério é com o objetivo de determinar se satisfaz a condição (4.8). O resultado é apresentado na seguinte tabela:

Tabela 4.2 - Possíveis elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar.

Objeto	Extensão (km)	Per. Rot. (h)	μ (km ³ /s ²)
2 Pallas	$582 \times 556 \times 500$	7,8132	14,3
4 Vesta	$572,6 \times 557,2 \times 446,4$	5,34212766	17,288245
16 Psyche	$276 \times 232 \times 189$	4,196	1,53
216 Kleopatra	$276 \times 94 \times 78$	5,385	
243 Ida	$59,8 \times 25,4 \times 18,6$	4,634	0,00275
433 Eros	$34,4 \times 11,2 \times 11,2$	5,270	$4,463e^{-04}$
951 Gaspra	$18,2 \times 10,5 \times 8,9$	7,042	
1620 Geographos	$5,0 \times 2,0 \times 2,1$	5,22204	
66391 Moshup	$1,532 \times 1,495 \times 1,347$	2,7645	
101955 Bennu	$0,5047 \times 0,4918 \times 0,4567$	4,296061	$4,8904e^{-9}$
185851 (2000 DP107)	$0,992 \times 0,938 \times 0,964$	2,7754	$3,224e^{-8}$

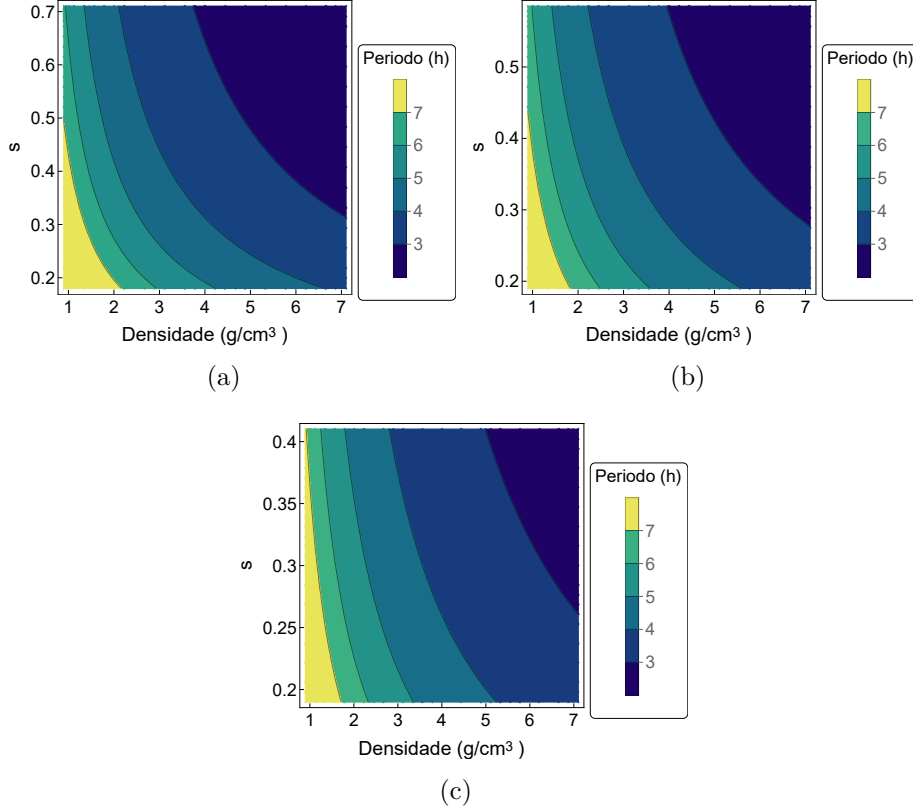
Fonte: Jet Propulsion Laboratory (2021).

Na lista de possíveis elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar, só os asteroides Ida, Gaspra e Kleopatra cumprem a condição nos semieixos, pois a sua forma geométrica ($q : s$) é (0,424 : 0,311), (0,576 : 0,489) e (0,340 : 0,282), respectivamente. A média aritmética dos valores do parâmetro q proporcionados por esses três asteroides é o valor do parâmetro q que define a família 3, $q_3 = (0,424 + 0,576 + 0,340)/3$. O período de rotação dos elementos desta família é apresentado na Figura 4.1(b).

O valor de q na família 2 é o valor médio entre q_1 e q_3 , e seu período de rotação é

mostrado na Figura 4.1(c).

Figura 4.1 - Período de rotação do Elipsoide em equilíbrio.



Período de rotação das famílias 1, 2 e 3, figuras (a), (b) e (c), respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

Nas três famílias de elipsoides observamos que o período de rotação está no intervalo de duas a oito horas, aproximadamente. Logo, espera-se que as famílias de elipsoides nas quais $q \in [q_3, q_1]$ o seu período de rotação também se encontre nesse intervalo de tempo. No subconjunto de elipsoides definido por $(q \rightarrow 1, s \rightarrow 0, 2, \rho \rightarrow 1)$, seu período pode ser maior que oito horas, mas isso não interfere nos resultados apresentados aqui.

Voltando na busca por corpos ideais no Sistema Solar. A densidade de massa do asteroide Ida é $\rho = 2,6 \pm 0,5 \text{ g/cm}^3$ e seu período teórico determinado como $T(0,424, 0,311, 2,6) = 4,620$ horas, também apresentado na Tabela 4.3. Nela, a segunda e terceira coluna mostram o período observado e o teórico, respectivamente. A quarta coluna mostra o valor de densidade teórico obtido como a raiz da equação $T(q, s, \rho) - T_{obs} = 0$, com q e s do respectivo corpo. Comparando T_{obs} e T_{tco} em Ida,

vemos que $T_{obs} - T_{co} = 0,014$ horas equivalente a 0,84 minutos ou, de outra forma, T_{co} é um 99,69% do período de rotação observado. Essa pequena diferença entre os dois períodos pode ser resultado da aproximação polinomial feita nas integrais que compõem a Equação (4.10), ou da incerteza na medição da densidade. Sendo assim, podemos concluir que o asteroide Ida é um elipsoide em equilíbrio no Sistema Solar.

No caso dos asteroides Gaspra e Kleopatra, a densidade de massa ainda não é determinada, segundo a base de dados consultada. Pois, no caso do asteroide Kleopatra se estimam três valores distintos de densidade: $\rho = 3,6 \pm 0,4$ g/cm³, $\rho = 4,9 \pm 0,5$ g/cm³ ou $\rho = 5,4 \pm 0,4$ g/cm³ (SHEPARD et al., 2018). Cada um desses dois asteroides, para serem considerados um elipsoide em equilíbrio, deve ter densidade de massa igual à densidade teórica, apresentada na Tabela 4.3.

Um dos asteroides que atraiu o interesse da comunidade científica na última década é o asteroide Chariklo, devido à presença de anéis em seu entorno (LEIVA et al., 2017). O semieixo maior da sua órbita se encontra entre as órbitas de Saturno e Urano. As dimensões dos semieixos que o modelam são $\alpha = 157 \pm 4$ km, $\beta = 139 \pm 4$ km e $\gamma = 86 \pm 1$ km, do que se deduz uma forma geométrica (0,8853 : 0,5477) que satisfaz a condição (4.8). A sua densidade de massa estimada é $\rho = 0,796^{+2}_{-4}$ g/cm³ e seu período de rotação observado é de $T_{obs} = 7,004 \pm 0,036$ horas.

O período de rotação teórico de um elipsoide de Jacobi com forma geométrica igual a do Chariklo e de igual densidade é $T_{co} = 7,00103$ horas, valor que reside no intervalo no qual se encontra o período de rotação observado. Portanto, concluímos que o asteroide Chariklo também é um elipsoide em equilíbrio do Sistema Solar.

O fato de o asteroide Chariklo não estar presente no resultado apresentado na Tabela 4.2, leva a considerar a possibilidade de outros elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar, além dos dois aqui encontrados.

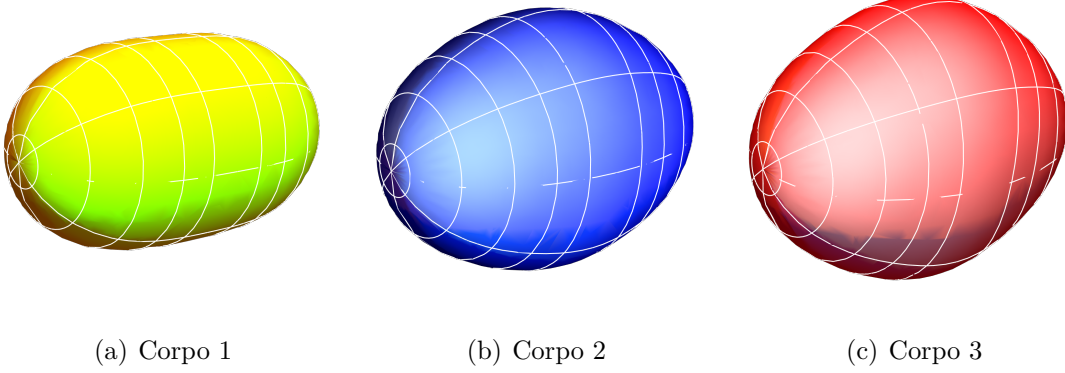
Tabela 4.3 - Elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar.

Asteroide	T_{obs} (h)	T_{tco} (h)	ρ_{tco} g/cm ³
Ida	4,634	4,620	-
Chariklo	7,004	7,001	-
Gaspra	7,042	-	0,793
Kleopatra	5,385	-	2,127

Para termos uma ideia visual do tipo de elipsoides pertencentes a cada uma das

famílias, apresentamos na Figura 4.2 um elemento de cada uma delas. Nessa figura, o corpo 1 é tal que $(q : s) = (q_1 : (0, 2 + s_1)/2) = (0,999 : 0,453)$. De forma análoga, o corpo 2 e o corpo 3 possuem forma geométrica $(q_2 : (0, 2 + s_2)/2)$ e $(q_3 : (0, 2 + s_3)/2)$, respectivamente.

Figura 4.2 - Elipsóides em condição de equilíbrio.



O corpo 1 tem forma geométrica $(0,999 : 0,706)$, os corpo 2 e 3 têm forma geométrica $(0,722 : 0,446)$ e $(0,585 : 0,407)$, respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

Uma vez determinadas as condições que satisfaz um elipsoide em equilíbrio e feita a procura por ele no Sistema Solar. Então, passamos a explorar de forma simplificada a dinâmica de uma partícula em ressonância tesseral com tais corpos, que será feito no capítulo seguinte. Antes disso, determinaremos o semieixo kepleriano da ressonância no elipsoide.

4.3 Localização da órbita em ressonância tesseral

A terceira lei de Kepler, expressa na Equação (2.23), é válida quando supomos que o corpo primário tem simetria esférica. Tal lei continua sendo válida no elipsoide em equilíbrio, porém sua formulação sofre uma alteração.

Multiplicando por α^3/α^3 a função do spin, Equação (4.7), e fazendo um rearranjo dos termos, obtemos a expressão:

$$\frac{\eta_p^2}{\mu} = \frac{1}{\alpha^3(1 - q^2)}(F_\alpha - q^2 F_\beta), \quad (4.11)$$

em que μ é o parâmetro gravitacional e, no caso do elipsoide triaxial é dado por:

$$\mu = \frac{4}{3}\pi G\rho qs\alpha^3. \quad (4.12)$$

Agora, tomando a raiz cubica do inverso multiplicativo da Equação (4.11), obtemos:

$$\left(\frac{\mu}{\eta_p^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{\alpha^3(1-q^2)}{F_\alpha - q^2 F_\beta}\right)^{1/3}. \quad (4.13)$$

O lado esquerdo da última equação define o semieixo kepleriano da órbita com movimento médio igual ao spin do primário, ou seja, determina o semieixo kepleriano da ressonância tesseral 1:1 no elipsoide em equilíbrio. Essa ultima equação, também pode determinar o semieixo kepleriano de órbitas em ressonância tesseral, basta substituir η_p por η_p/d , lembrando que o movimento médio da órbita em ressonância tesseral é comensurável com o spin do primário, isto é, $d\eta - \eta_p = 0$ (Seção 2.3). No lado direito da mesma equação, dividimos por d^2 o radicando. Continuando com a escolha da unidade de medida no elipsoide em equilíbrio, o semieixo de maior comprimento α , determinamos o semieixo kepleriano da órbita em ressonância em múltiplos de α , ou seja, $a = \tau\alpha$ com τ número real positivo. Com isso, obtemos a expressão:

$$\tau\alpha = \left(\frac{\mu d^2}{\eta_p^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(1-q^2)d^2\alpha^3}{F_\alpha - q^2 F_\beta}\right)^{1/3}. \quad (4.14)$$

Observa-se que α não intervem nessa expressão, resultando em:

$$\tau_d(q, s) = \left(\frac{(1-q^2)d^2}{F_\alpha - q^2 F_\beta}\right)^{1/3}. \quad (4.15)$$

O múltiplo τ é a localização da órbita e, portanto, o chamaremos de Localização da órbita.

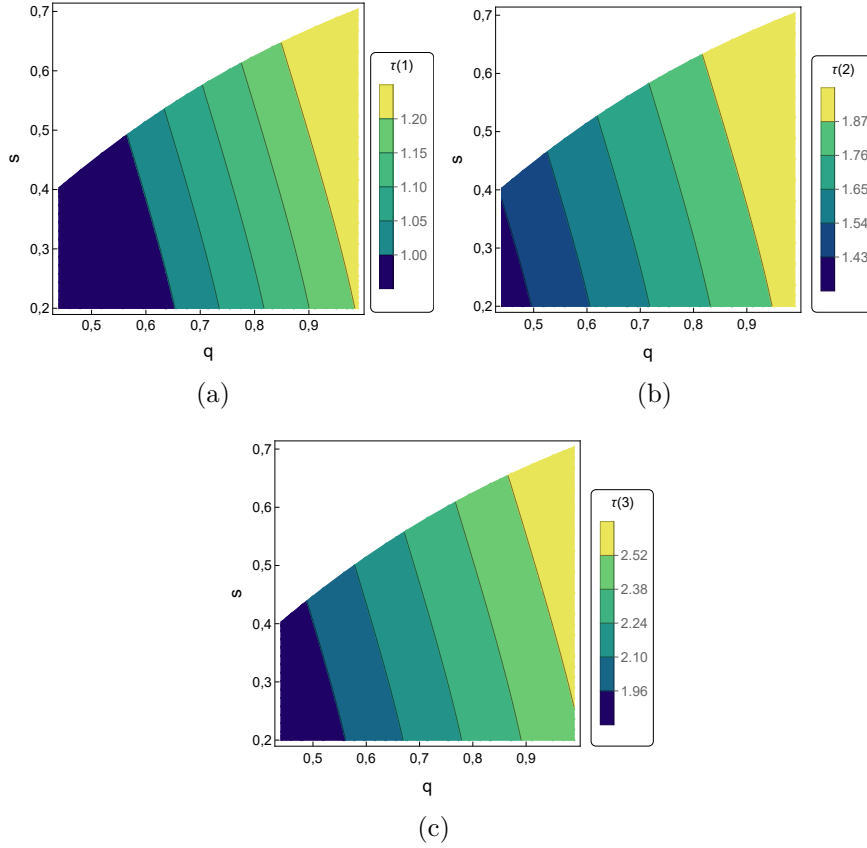
Vemos que a localização da órbita, e consequentemente, o semieixo kepleriano da ressonância, depende da forma geométrica do elipsoide de Jacobi e não da sua quantidade de massa. Esse resultado representa uma forma alternativa, e não uma substituição, da terceira lei de Kepler para um elipsoide em equilíbrio.

A Expressão (4.15) mostra que a localização da ressonância é a mesma para todos os elipsoides em equilíbrio que possuam a mesma forma geométrica, quando aplicamos o modelo de potencial gravitacional considerando a densidade constante.

No caso de órbitas em ressonância, a constante d é um número racional. Se não for racional, então obtemos o semieixo maior de órbitas que não estão em ressonância tesseral. Em outras palavras, τ indica a localização das órbitas ao redor do elipsoide de Jacobi.

No conjunto de Figuras 4.3 observamos a localização das órbitas em ressonância 1:1, 2:1 e 3:1, obtidas por meio da Equação (4.15) para elipsoides nos quais $q \in (q_3, q_1)$ e $s \in (s_3, s_1)$. A área branca em cada uma das figuras corresponde a valores de s maiores do que $s_{max}(q)$.

Figura 4.3 - Localização das órbitas em ressonância no elipsoide em equilíbrio.



Localização das ressonâncias tesserais 1:1, 2:1 e 3:1 obtida mediante a Equação 4.15. $d=1$, $d=2$ e $d=3$ na figura (a), (b) e (c), respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

No caso em que $d=1$, vemos que existe um subconjunto de primários com a característica de que o semieixo kepleriano da ressonância está em $\tau < 1$. Nesse subconjunto,

essa localização implica na impossibilidade de uma partícula estar em ressonância tesseral 1:1 com algum desses corpos. A ressonância 1:1 está em $\tau = 0,909$ e em $\tau = 1,299$ nos elipsoides com forma geométrica (q_3, s_3) e $(q_1: s_1)$, respectivamente. A localização da ressonância tesseral 2:1 está no intervalo $1,379 \leq \tau \leq 2,062$. Por exemplo, nos asteroides Ida e Chariklo a ressonância 2:1 se localiza em $\tau = 1,39109$ e $\tau = 1,908$, respectivamente. A ressonância 3:1 se localiza em $1,798 \leq \tau \leq 2,702$ nos corpos aqui considerados.

Determinando a localização das órbitas em ressonância tesseral com o elipsoide em equilíbrio, passamos a determinar o centro da ressonância tesseral 3:1 e 2:1 em cada uma das três famílias, no capítulo seguinte.

5 RESSONÂNCIA TESSERAL NO ELIPSOIDE EM EQUILÍBRIO

Os resultados obtidos sobre a dinâmica de uma partícula na órbita da ressonância tesseral 3:1 em Haumea são tomados como referência neste capítulo. O estudo desse problema, de forma reduzida, no elipsoide em equilíbrio: determinando o valor de excentricidade do centro da ressonância, ajudaria a compreender a dinâmica de um veículo espacial em ressonância tesseral com primários que possuem forma geométrica próxima dos corpos ideais aqui tratados.

No presente capítulo, determinaremos os valores de excentricidade dos pontos singulares, centro da ressonância e pontos de sela, das orbitas equatoriais em ressonância tesseral 3:1 e 2:1 nas três famílias de elipsoides descritas na Seção 4.2. Também será determinado o semieixo crítico. No caso das ressonâncias 1:1, 3:2 e 5:2, o mesmo procedimento pode ser aplicado para a determinação de tais pontos singulares.

Na Seção 4.3, determinamos a localização das órbitas em ressonância, localização que depende da forma geométrica do elipsoide em questão. Esse resultado nos permite realizar uma mudança de variável no potencial perturbador.

5.1 Mudança de Variável

A perturbação gerada pela forma geométrica do elipsoide em equilíbrio será modelada pela função perturbadora apresentada na Equação (2.9). Porém, fazendo uso da expressão obtida no capítulo anterior, Equação (4.14), substituiremos o semieixo maior da órbita a por $\tau\alpha$ na função perturbadora. Também, escrevemos de forma explícita o parâmetro gravitacional, Equação (4.12), nessa função, resultando em:

$$\begin{aligned} J_{n0} \frac{\mu R^n}{a^{n+1}} &= J_{n0} \frac{4\pi G \rho q s \alpha^3 \alpha^n}{3\tau^{n+1} \alpha^{n+1}} \\ &= J_{n0} \frac{4\pi G \rho q s \alpha^2}{3\tau^{n+1}} \\ &= J_{n0} \frac{4\pi G \rho q s}{3\tau^{n+1}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Uma vez definido o corpo primário, o semieixo α é tomado como a unidade de medida. Logo, $\alpha = 1$ na última linha desta expressão. Assim, temos a função perturbadora em função da localização da órbita, Equação (4.15). Vemos que o parâmetro gravitacional se reduz a $\nu = \frac{4}{3}\pi G \rho q s$. Assim, o harmônico zonal Φ_{n0} é dado por:

$$\Phi_{n0} = -J_{n0} \frac{\nu}{\tau^{n+1}} \frac{(1 + e \cos f)^{n+1}}{(1 - e^2)^{n+1}} P_{n0}(\sin \phi). \quad (5.2)$$

De igual forma, nos harmônicos tesserais temos:

$$\Phi_{nm} = J_{nm} \frac{\nu}{\tau^{n+1}} \frac{(1 + e \cos f)^{n+1}}{(1 - e^2)^{n+1}} P_{nm}(\sin \phi) \cos m\lambda. \quad (5.3)$$

Com o novo parâmetro gravitacional ν e a variável τ , definimos $L = \sqrt{\nu\tau}$, que mantêm a forma funcional da variável de Delaunay L (razão pela qual usamos a mesma letra). Portanto, as outras duas variáveis de Delaunay não sofrem alteração, isto é, mantêm-se $G = L\sqrt{1 - e^2}$ e $H = G \cos I$. Assim, a função hamiltoniana do sistema reduzido 2 e consequentemente as suas derivadas parciais continuam sendo validas e serão empregadas no que segue.

5.1.1 Magnitude dos coeficientes J_{20} , J_{22} , J_{40} e J_{42}

Os coeficientes harmônicos aqui considerados e que modelam a forma geométrica do elipsoide triaxial foram apresentados na Seção 2.1. Esses coeficientes são determinados pelos semieixos do corpo e o raio equatorial médio selecionado. Por exemplo, o coeficiente harmônico que mede em primeira aproximação o achatamento do corpo, é dado por:

$$C_{20} = \frac{1}{5R^2} \left(\gamma^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

No Capítulo 3 foi selecionado $R = \alpha$ como o raio médio equatorial de Haumea, e no que segue manteremos essa escolha. Lembrando que $J_{20} = -C_{20}$. Então, os coeficientes harmônicos considerados são determinados da seguinte maneira:

$$J_{20}(q, s) = \frac{1}{10} (1 + q^2 - 2s^2), \quad (5.4a)$$

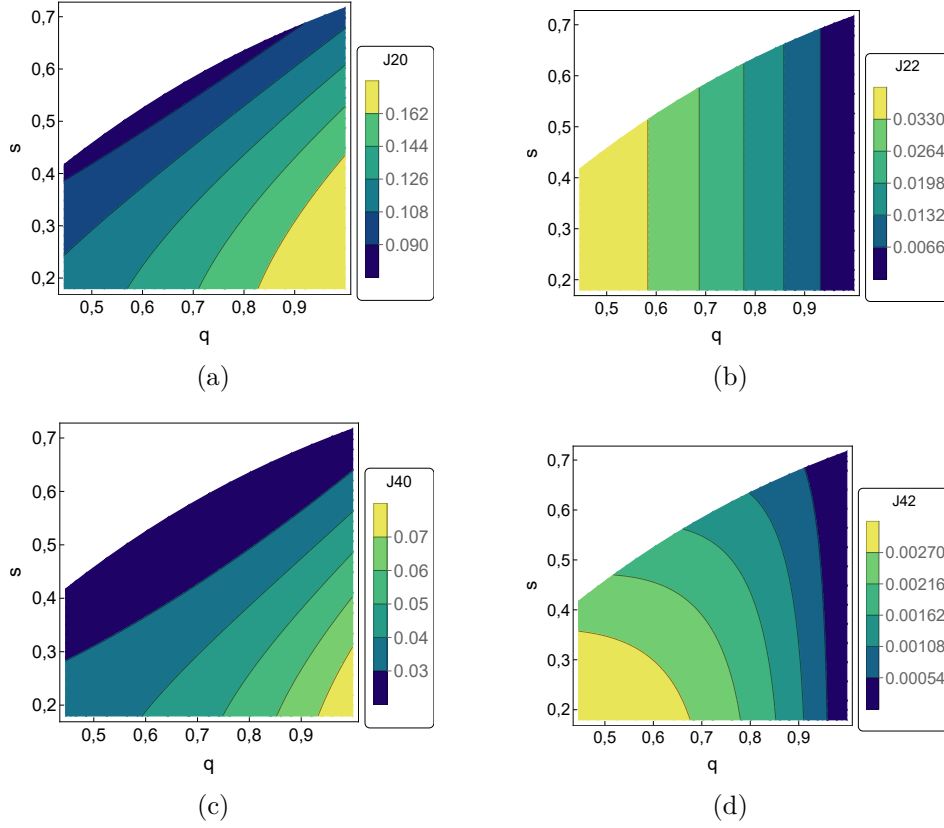
$$J_{40}(q, s) = \frac{21}{40} (3 + 2q^2 + 3q^4 - 8s^2 - 8q^2s^2 + 8s^4), \quad (5.4b)$$

$$J_{22}(q, s) = \frac{1}{20} (1 - q^2), \quad (5.4c)$$

$$J_{42}(q, s) = \frac{1}{280} (1 + q^2 - 2s^2)(q^2 - 1). \quad (5.4d)$$

Os valores desses quatro coeficientes, cumprindo a condição de relação entre as dimensões dos semieixos, são apresentados na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Coeficientes harmônicos do elipsoide em equilíbrio.



Valor dos coeficientes harmônicos dos elipsoides em equilíbrio considerados no presente estudo. Na figura (a) apresentamos os valores de J_{20} que pode tomar um elipsoide de Jacobi que tem $s > 0,2$. Nas figuras (b), (c) e (d) apresentamos os valores dos coeficientes J_{22} , J_{40} e J_{42} , respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

Observamos que o coeficiente J_{20} é da ordem de 10^{-1} . Vemos que $10^{-3} < J_{22} < 10^{-2}$ e que a diferença entre os coeficientes J_{40} e J_{42} é da ordem de 10^{-2} .

5.2 Pontos singulares da ressonância tesserar 3:1

Os pontos singulares, centro e os pontos de sela, da ressonância 3:1 nas órbitas equatoriais com semieixo kepleriano em torno do planeta anão Haumea foram determinados sob os modelos reduzidos, MR1 e MR2. Na presente seção, determinaremos os pontos singulares da ressonância na sua localização e no plano equatorial, mas não para um corpo, e sim para um conjunto de elipsoides. Em outras palavras, nas três famílias de elipsoides em equilíbrio que, são:

Tabela 5.1 - Famílias de elipsoides em equilíbrio.

Família	q_i	$s_{max}(q_i)$
Família 1	$q_1 = 0,999$	$s_1 = 0,706$
Família 2	$q_2 = 0,722$	$s_2 = 0,585$
Família 3	$q_3 = 0,446$	$s_3 = 0,407$

Lembrando que $0,2 < s < s_{max}$.

As componentes do potencial perturbador no modelo reduzido 2 após a mudança de variável feita na Seção 5.1 resultam em:

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{20} \rangle &= J_{20} \frac{\nu}{\tau^3} (1 - e^2)^{-3/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} s^2 \right) \\ \langle \Phi_{20} \rangle &= J_{20} \frac{\nu}{\tau^3} g_{20}(e, I),\end{aligned}\tag{5.5}$$

na qual $g_{20} = (1/2 - 3/2s^2)(1 - e^2)^{-3/2}$. Da mesma maneira, expressamos a parte secular do coeficiente J_{40} , $\langle \Phi_{40} \rangle = -J_{40}(\nu/\tau^5)g_{40}$ em que g_{40} é o produto da função da inclinação e da excentricidade desse termo, Equação (2.36). Os termos ressonantes que contem o ângulo $\Theta_{3:1}$ nos harmônicos Φ_{22} e Φ_{42} , segundo nosso modelo, são dados por:

$$J_{22} \frac{1599\nu}{64\tau^3} e^4 (1 + c)^2 \cos \Theta_{3:1} = J_{22} \frac{\nu}{\tau^3} g_{2262}(e, I) \cos \Theta_{3:1},\tag{5.6}$$

e

$$-J_{42} \frac{8325\nu}{64\tau^5} (1 + c)^2 (1 - 7c + 7c^2) e^4 \cos \Theta_{3:1} = -J_{42} \frac{\nu}{\tau^5} g_{4262}(e, I) \cos \Theta_{3:1}.\tag{5.7}$$

Os sub-índices das funções g_{20} , g_{40} , g_{2262} e g_{4262} foram escolhidos por conveniência para simplificar a notação.

A função hamiltoniana do sistema dinâmico reduzido da ressonância tesseral 3:1 é dada por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(L, G, H) + \mathcal{A}(L, G, H) \cos 2\theta + (3\eta - \eta_p)H,$$

apresentada na Seção 2.5. O centro da ressonância será determinado na órbita com semieixo kepleriano na qual $3\eta - \eta_p = 0$, implicando que o último termo da função não intervem na sua determinação. Porém, será mantido nas expressões seguintes. Escrevemos, novamente, a função \mathcal{H} nos elementos órbitas considerando a mudança de variável $a = \tau_a(q, s)\alpha$. Logo, após manipulações algébricas e algumas simplifica-

ções, a função hamiltoniana do sistema dinâmico tem a forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(q, s, e, I, \theta) = & \nu \left[-\frac{1}{2\tau} - \frac{J_{20}}{\tau^3} g_{20} + \frac{J_{40}}{\tau^5} g_{40} \right. \\ & + \left(\frac{J_{22}}{\tau^3} g_{2262} - \frac{J_{42}}{\tau^5} g_{4262} \right) \cos 2\theta \\ & \left. + \sqrt{\tau} \left(\frac{3}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{(F_\alpha - q^2 F_\beta)^{1/2}}{(1 - q^2)^{1/2}} \right) \sqrt{1 - e^2} c \right],\end{aligned}\quad (5.8)$$

$c = \cos I$. O procedimento para obter o termo de Coriolis na forma apresentada nesta última função se encontra no Anexo C.

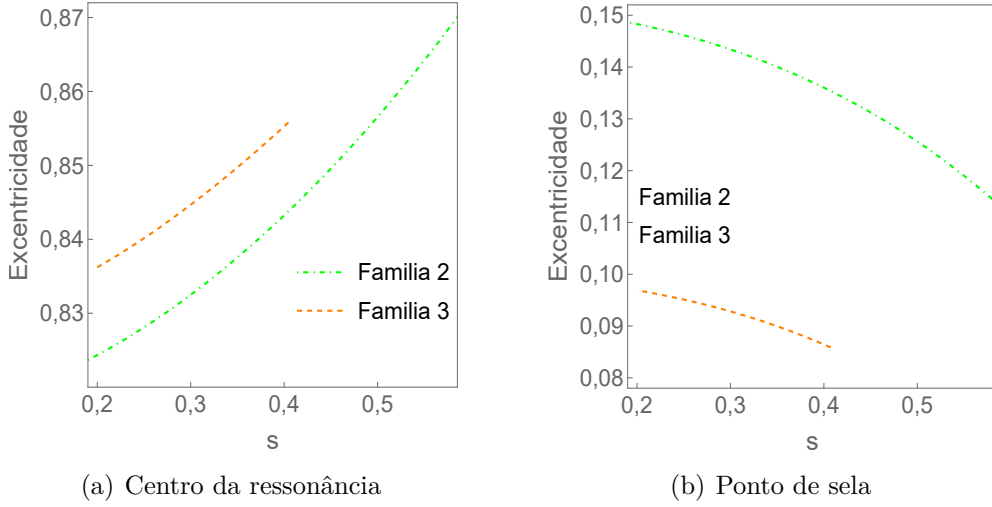
Na Equação (5.8), observamos que o parâmetro gravitacional ν é um fator de escala. Isto implica que os pontos singulares da dinâmica dependam da forma geométrica do elipsoide em equilíbrio e não da quantidade de massa nem de seu tamanho, pois não intervêm nenhum dos semieixos do corpo. Trata-se de uma característica própria do tipo dos primários aqui estudados, pois neles, a localização da órbita não depende da quantidade de massa.

O zero da função $\partial_e \mathcal{H}$ indica o centro da ressonância. Logo, a curva de nível $\partial_e \mathcal{H}(q_i, s, e, 0, \theta) = 0$, $i = 1, 2, 3$ e $\theta = \pi/2$ ou $\theta = \pi$, dependendo da família de elipsoides, indica o valor de excentricidade do centro ou do ponto de sela da ressonância.

Na localização da ressonância 3:1, τ_3 , os membros das famílias 2 e 3 apresentam um espaço de fase similar ao observado no caso de Haumea no semieixo kepleriano da ressonância, Figura 3.7. Pois, o centro se localiza em $\theta = \{0, \pi\}$ e os pontos de sela em $\theta = \{\pi/2, 3\pi/2\}$ ou em $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi$, respectivamente. O valor de excentricidade desses pontos é apresentado na Figura 5.2. Nela, observamos nas duas famílias que o centro tem valor de excentricidade elevado, superior a 0,8.

Os valores de excentricidade do centro e os pontos de sela da ressonância na Família 1 difere consideravelmente das outras duas famílias. Os pontos singulares nessa família têm valores de excentricidade próximos, pelo qual podem ser facilmente confundidos. Com isso em mente, apresentamos o espaço de fase da ressonância no corpo 1, Figura 5.3(a), e o valor de excentricidade dos pontos singulares nos corpos dessa família na Figura 5.3(b). Observa-se que o centro e o ponto de sela estão próximos e acima de 0,7.

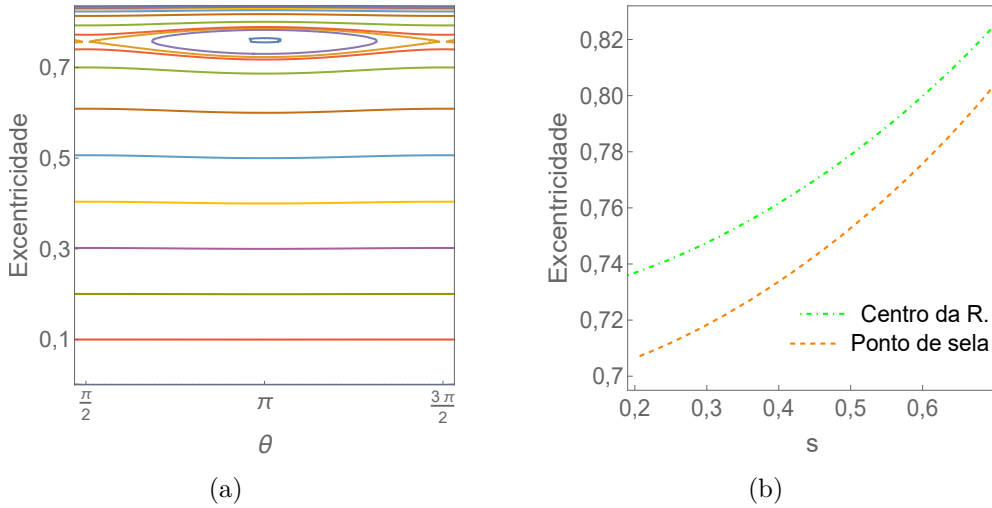
Figura 5.2 - Pontos singulares da ressonância 3:1 nas famílias 2 e 3.



Valor de excentricidade dos pontos singulares da ressonância 3:1 das famílias 2 e 3 na localização da ressonância, τ_3 .

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.3 - Pontos singulares da ressonância 3:1 na Família 1.

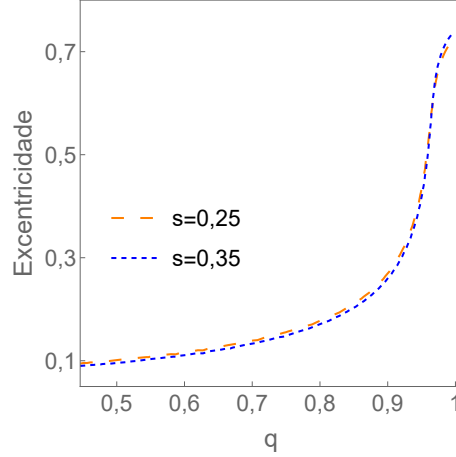


A figura (a) apresenta o espaço de fase da ressonância no corpo 1. A figura (b) mostra o valor de excentricidade dos pontos singulares da ressonância 3:1 na localização τ_3 nos elementos da Família 1.

Fonte: Produção do autor.

Como pode ser visto, existe uma grande diferença entre os valores de excentricidade dos pontos de sela nas famílias 2 e 3 com os da Família 1. A variação desse ponto para diferentes valores de q é apresentada na Figura 5.4. Nela, $q \in [q_3, q_1]$, $s = 0,25$ e $s = 0,35$. Esses dois valores de s garantem a inclusão de um dos membros de cada uma das três famílias. Nas duas curvas: $\partial_e \mathcal{H}(q, 0,25, e, 0, \theta/2) = 0$ e $\partial_e \mathcal{H}(q, 0,35, e, 0, \theta/2) = 0$, observamos um incremento abrupto na excentricidade a partir de $q \approx 0,85$. Ainda assim, é uma variação suave e contínua, como esperado. Tal variação indica que o regime de circulação inferior atinge órbitas com excentricidades altas nos elipsoides em equilíbrio que possuem um valor baixo de J_{22} , já que $J_{22} = (1 - q^2)/20$.

Figura 5.4 - Variação do ponto de sela em função do parâmetro q .



Variação do ponto de sela entre as famílias de elipsoides. As duas curvas são obtidas a partir da curva de nível $\partial_e \mathcal{H}(q, s, e, 0, \theta/2) = 0$ com $s = 0,25$ e $s = 0,35$.

Fonte: Produção do autor.

Os pontos singulares da ressonância em cada uma das três famílias foram apresentados na localização, ou semieixo kepleriano, da ressonância 3:1. Agora, o semieixo crítico da ressonância no elipsoide em equilíbrio também pode ser determinado por meio da Equação (2.48) e, com a mudança de variável expressa na Equação (5.1), então podemos falar em Localização crítica da ressonância, como observaremos na seção seguinte.

5.2.1 Localização crítica da ressonância

Considerando a perturbação secular no modelo reduzido, $\langle \Phi_{20} \rangle + \langle \Phi_{40} \rangle$, a localização crítica da ressonância difere de τ_3 e, pode ser obtida a partir da equação:

$$d \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G} - \eta_p = 0.$$

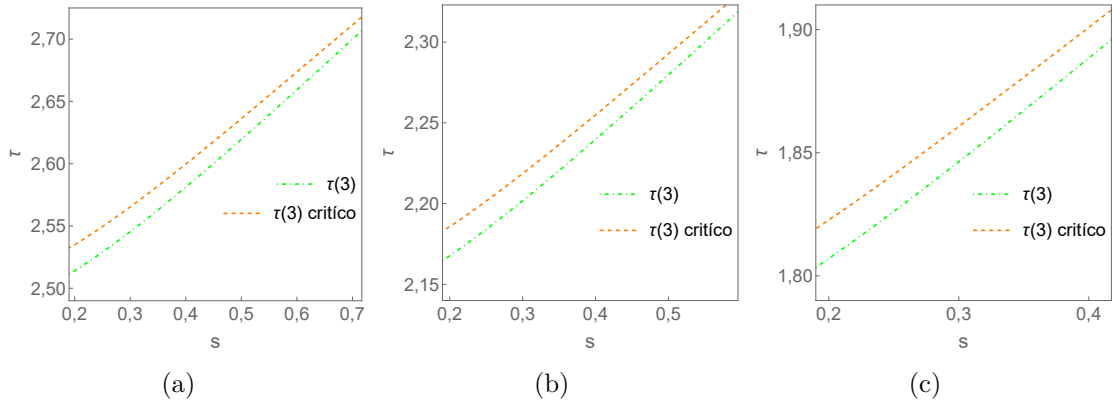
Essa última equação, no caso do elipsoide em equilíbrio, é escrita como:

$$d \left(\frac{\nu}{\tau^3} \right)^{1/2} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G} - \left(\frac{\nu(F_\alpha - q^2 F_\beta)}{(1 - q^2)} \right)^{1/2} = 0. \quad (5.9)$$

Escrevendo as expressões $\partial_H \mathcal{S}$ e $\partial_G \mathcal{S}$, apresentadas no final do Capítulo 2, em função dos elementos orbitais e de τ , temos $\sqrt{\nu}$ como fator comum na Equação (5.9). Logo, concluímos que a localização crítica da ressonância depende, assim como a localização, da forma geométrica e não da quantidade de massa nem de seu tamanho. Ou seja, a localização crítica da ressonância é a mesma em todos os elipsoides de Jacobi que possuem igual forma geométrica.

Escolhemos $e = 0$ na Equação (5.9) e apresentamos na Figura 5.5 a localização crítica da ressonância 3:1 nas três famílias de elipsoides.

Figura 5.5 - Localização crítica da ressonância tesseral 3:1.



Na figura (a) e na curva superior, apresentamos a localização crítica da ressonância na Família 1. A curva inferior é a localização do semieixo kepleriano da órbita em ressonância 3:1. De igual forma, a localização e a localização crítica da ressonância nas famílias 2 e 3 é apresentada nas figuras (b) e (c), respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

Nas três figuras, observamos uma diferença aproximada de 0,02 entre τ_3 e a localização crítica em cada um dos membros das três famílias. Essa diferença pode parecer pequena, já que para um elipsoide com $\alpha = 100$ km, teríamos um $\Delta\alpha \approx 2$ km na localização crítica da ressonância. Não obstante, para um elipsoide em equilíbrio com a forma geométrica e tamanho de Haumea, $\alpha = 1.161$ km, tem-se um $\Delta\alpha \approx 20$ km.

5.2.2 Discussão

Em um elipsoide de Jacobi com forma geométrica $(q_H:s_H) = (0,733 : 0,441)$, forma geométrica de Haumea, o centro da ressonância na órbita de semieixo kepleriano está em $e = 0,847254$ e os pontos de sela em $e = 0,135583$. Agora, em Haumea o centro e os pontos de sela da ressonância na órbita de semieixo kepleriano tem excentricidades 0,832217 e 0,134225, respectivamente. Comparando o caso ideal com os dados proporcionados pelo planeta anão, encontramos um $\Delta e = 0,015037$ e $\Delta e = 0,001358$ no centro e no ponto de sela, respectivamente. Esta pequena diferença implica que os resultados apresentados no caso 2.6 da Seção 3.3.2 são validos no elipsoide de Jacobi com forma geométrica $(q_H:s_H)$. Em outras palavras, uma partícula em ressonância tesseraral 3:1 com um corpo celeste que tenha forma geométrica cerca de $(q_H:s_H)$ apresentaria um movimento irregular.

Podemos ver que, o modelo quase-completo refletiu de forma significativa o comportamento da excentricidade observado no espaço de fase no caso de Haumea. Também, observamos que o comportamento do semieixo maior da órbita e da excentricidade são similares, como mencionado no caso 2.6 da Seção 3.3.2. Então, nos baseando nessas duas observações feitas na Seção 3.5 e na dedução feita no parágrafo anterior, apresentamos as conclusões seguintes.

O asteroide Chariklo possui dois anéis que o circundam. O semieixo maior nominal do anel interno e externo são $a = 391 \pm 4$ km e $a = 405 \pm 4$ km, respectivamente (WOOD et al., 2017). Vamos supor que os anéis se encontram na região equatorial, tal como no trabalho de R. Leiva et al. (2017). Nesse ultimo trabalho, a órbita da ressonância tesseraral 3:1 em Chariklo é estimada na faixa 420 ± 20 km, faixa na qual estão os semieixos nominais dos dois anéis. No nosso trabalho, Chariklo é considerado um elipsoide em equilíbrio com forma geométrica (0,88535: 0,54777), ver Seção 4.2. Assim, a órbita da ressonância 3:1 tem semieixo kepleriano $\tau_{3157} = 392,53$ km e semieixo critico em torno de 394,727 km. No espaço de fase da ressonância o ângulo ressonante libra em torno de $\Theta = 0^\circ$. No semieixo kepleriano, o centro da ressonância e os pontos de sela tem valores de excentricidades de 0,837749 e

0,208989, respectivamente. No semieixo critico, o centro está em $e = 0,835685$ e os pontos de sela em $e = 0,00270753$. Embora, tenha-se um $\Delta q = 0,1515$ e $\Delta s = 0,1059$ entre a forma geométrica de Haumea e Chariklo, no semieixo kepleriano temos um $\Delta e = 0,0055$ no valor de excentricidade do centro desta ressonância. Logo, considerando essa pequena diferença concluimos o seguinte: se uma partícula está em ressonância tesseral 3:1 na região equatorial do asteroide Chariklo, então, o seu movimento é um movimento irregular que não permite a sua permanência na região em que foram observados seus anéis. Em outras palavras, o mecanismo que permite a existência dos anéis não é o mecanismo de ressonância tesseral. Para a confirmação deste resultado pode ser empregadas as Equações Planetárias de Lagrange, assim como no Capítulo três, o que pode ser feito em um trabalho futuro.

Nas três famílias de elipsoides aqui estudadas, o centro da ressonância se encontra em um valor de excentricidade acima de 0,7. Consequentemente, uma partícula em ressonância tesseral 3:1 com algum dos membros dessas famílias apresentará um movimento irregular, não permitindo a sua permanência em uma região determinada por $(\tau_3 \pm \tau)\alpha$ com $\tau \approx 0$. Essa conclusão também é válida em corpos do sistema solar tal que seus semieixos satisfaçam a relação (4.8), como é o caso de Haumea, pois, seus coeficientes J_{22} e J_{42} intervêm na determinação do centro da ressonância calculado no semieixo kepleriano dela e seu spin não o faz, já que o termo de Coriolis é nulo na órbita com semieixo kepleriano da ressonância.

Um procedimento análogo ao feito na presente seção pode ser aplicado para a determinação do centro da ressonância 3:1 em outras famílias de elipsoides em equilíbrio. Na seção seguinte, e de forma análoga, determinaremos o centro da ressonância tesseral 2:1 para cada uma das três famílias de primários aqui considerados.

5.3 Pontos singulares da ressonância tesseral 2:1

A ressonância tesseral 2:1 no elipsoide triaxial modelado pelos harmônicos tesserais Φ_{22} e Φ_{42} tem como ângulo ressonante $\Theta_{2:1} = 2(2\ell - \psi - \Omega - \omega)$, segundo nosso modelo aproximado. Neste caso, os termos ressonantes nos dois harmônicos mencionados são dados por:

$$J_{22} \frac{\nu}{8\tau^3} e^2 (51 - 115e^2) (1 + c)^2 \cos \Theta_{2:1} = J_{22} \frac{\nu}{\tau^3} g_{2242} \cos \Theta_{2:1},$$

e

$$-J_{42} \frac{5\nu}{64\tau^5} (1 + c)^2 (1 - 7c + 7c^2) e^2 (318 - 179e^2) \cos \Theta_{2:1} = -J_{42} \frac{\nu}{\tau^5} g_{4242} \cos \Theta_{2:1},$$

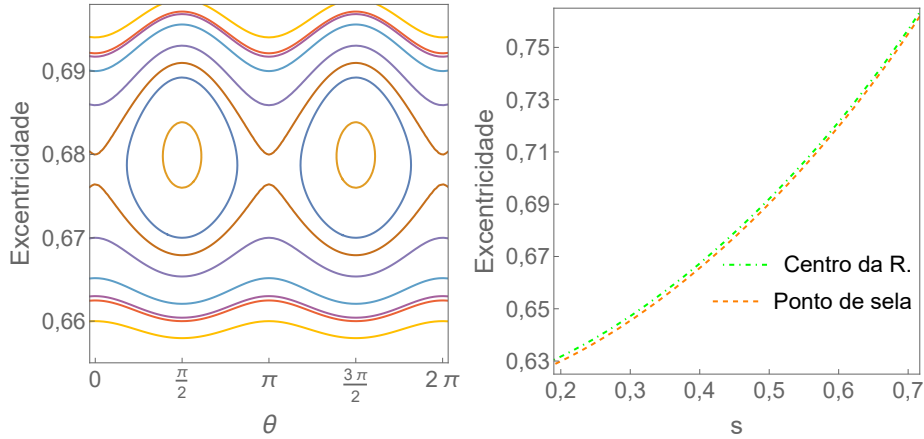
que são os termos k_{20} e k_{27} das Tabelas 2.3 e 2.4, respectivamente.

No presente caso, $d = 2$ na função hamiltoniana (2.45) e, a amplitude do cosseno ressonante é a soma das amplitudes dos dois termos apresentados acima. Assim, a função hamiltoniana do modelo reduzido resulta em:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, s, e, I, \theta) = & \nu \left[-\frac{1}{2\tau} + \frac{J_2}{\tau^3} g_{20} - \frac{J_4}{\tau^5} g_{40} \right. \\ & + \left(\frac{J_{22}}{\tau^3} g_{2242} - \frac{J_{42}}{\tau^5} g_{4242} \right) \cos 2\theta \\ & \left. + \sqrt{\tau} \left(\frac{2}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{(F_\alpha - q^2 F_\beta)^{1/2}}{(1 - q^2)^{1/2}} \right) \sqrt{1 - e^2} c \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Neste cenário, a Família 1 apresenta novamente uma dinâmica diferente com respeito às outras duas famílias, e para exemplificar isto apresentamos o espaço de fase do corpo 1 das órbitas com localização $\tau = \tau_2$, Figura 5.6(a).

Figura 5.6 - Ressonância tesseral 2:1 na Família 1.



(a) Espaço de fase, corpo 1

(b) Pontos singulares da R. tesseral 2:1

Na figura (a), apresentamos o espaço de fase da ressonância 2:1 no corpo 1. A figura (b) mostra o valor de excentricidade dos pontos singulares da ressonância na localização τ_2 nos elipsoides da Família 1. A curva superior mostra o valor de excentricidade do centro e a curva inferior o valor dessa variável do ponto de sela.

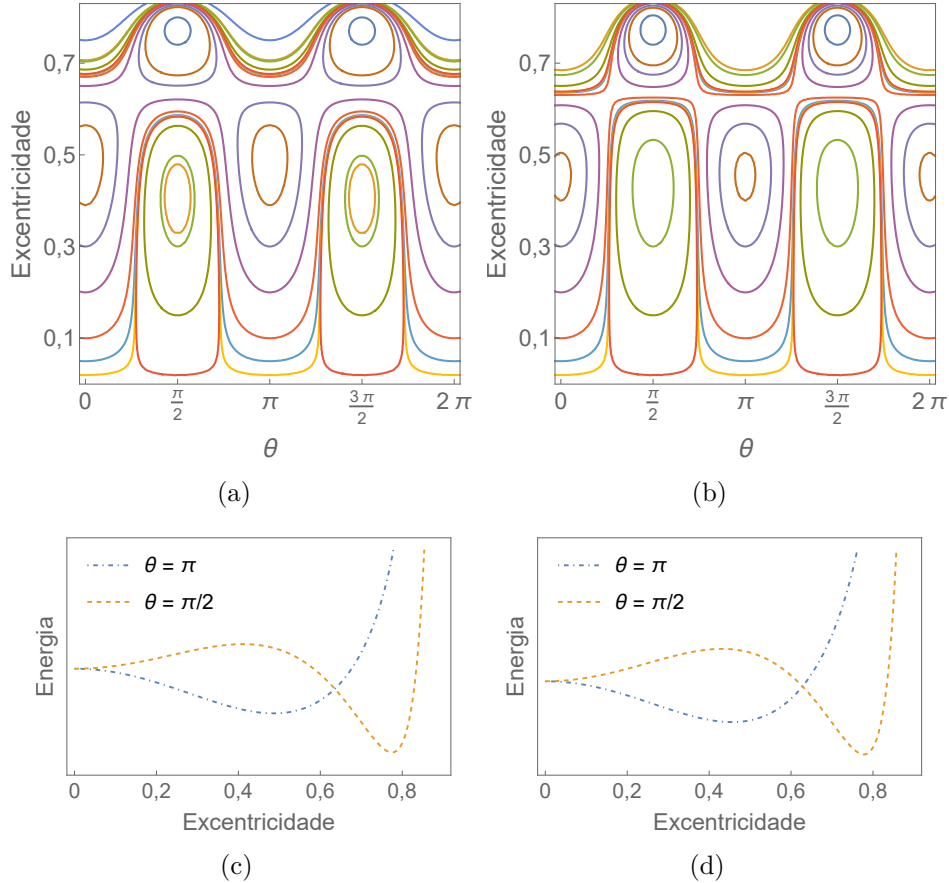
Fonte: Produção do autor.

Neste corpo, o centro se localiza em $\theta = \{\pi/2, 3\pi/2\}$ ou $\Theta = 180^\circ$, com valor de excentricidade de 0,679999, os pontos de sela em $\Theta = 0^\circ$ e $e = 0,678215$. O valor da excentricidade do ponto de sela mostra que o regime de circulação inferior compreende órbitas de excentricidade considerável, tal como no caso da ressonância

3:1 nessa família. O valor de excentricidade do centro e dos pontos de sela em cada um dos elipsoides da Família 1 é apresentado na Figura 5.6(b).

O espaço de fase nos corpos 2 e 3 são apresentados nas Figuras 5.7(a) e 5.7(b). Neles, notamos seis regimes de libração do ângulo ressonante. Nesses regimes temos centros da ressonância estáveis e instáveis e, para identificá-los mostramos, nos dois corpos, as curvas de energia $\mathcal{H}(q, s, e, 0, \pi/2)$ e $\mathcal{H}_{42}(q, s, e, 0, \pi)$ nas Figuras 5.8(c) e 5.8(d). Na curva na qual $\theta = \pi/2$, tem-se um máximo local em $e = 0,411$ e $e = 0,431$ no corpo 2 e 3, respectivamente, indicando um ponto instável. Já na curva em que $\theta = \pi$, vemos um centro de ressonância estável em $e = 0,774819$ e em $e = 0,777689$ no corpo 2 e 3, respectivamente.

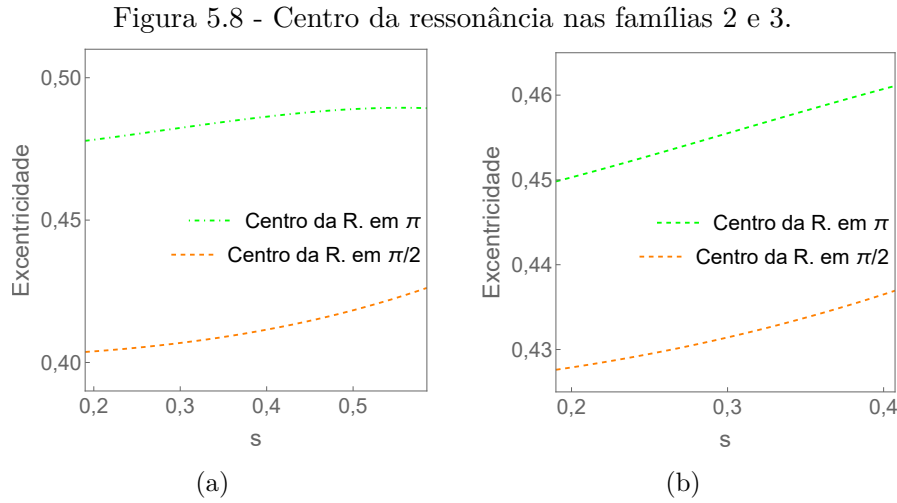
Figura 5.7 - Espaço de fase da ressonância tesseral 2:1 nos corpos 2 e 3.



As figuras (a) e (b) são o espaço de fase das órbitas em ressonância 2:1 com o corpo 1 e 2, respectivamente. Na figura (c), as duas curvas são obtidas a partir das funções $\mathcal{H}(q_2, s_2, e, 0, \pi/2)$ e $\mathcal{H}_{42}(q_2, s_2, e, 0, \pi)$. As curvas na figura (d) são obtidas de forma análoga, com a diferença de $q = q_3$ e $s = s_3$.

Fonte: Produção do autor.

No espaço de fase dos corpos 2 e 3 têm-se vários pontos de sela, observados de forma indireta, que exibem uma dinâmica mais complexa em comparação ao visto na Família 1. O nosso interesse é determinar o valor de excentricidade do centro da ressonância e nestas duas famílias ele está em três valores de excentricidade. O valor de excentricidade do centro acima de 0,6 não é de nosso interesse, pois é um valor consideravelmente elevado para uma órbita na localização τ_2 . Posto isto, apresentamos o valor de excentricidade do centro estável e instável nas famílias 2 e 3, Figura 5.8.



A curva superior na figura (a) mostra o valor de excentricidade do centro estável da ressonância, centro em $\theta = \pi$, na Família 2. A curva inferior é o valor de excentricidade do centro instável da ressonância nessa mesma família. Da mesma forma, a figura (b) apresenta o valor de excentricidade do centro estável e instável na curva superior e inferior, respectivamente, na Família 3.

Fonte: Produção do autor.

Aqui, assim como na seção anterior, foram exibidos os valores de excentricidade dos pontos singulares da ressonância na sua localização, τ_2 . Na seguinte subseção apresentamos a localização crítica da órbita.

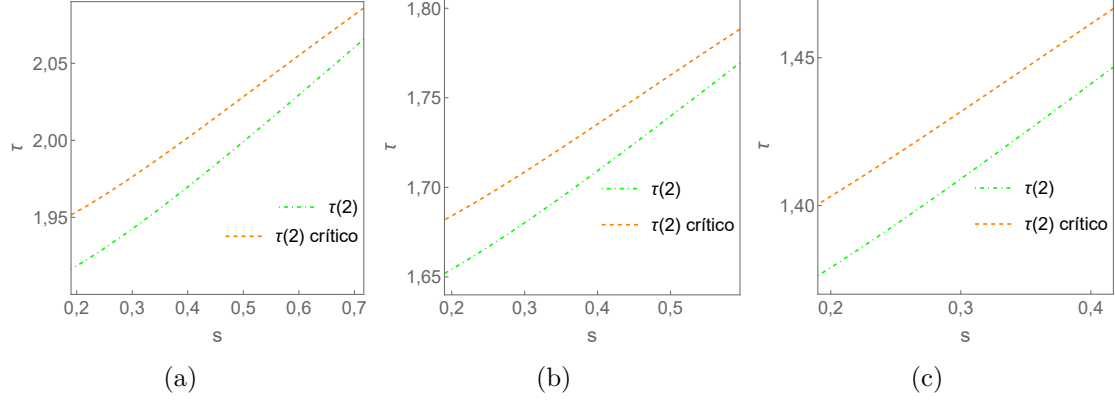
5.3.1 Localização crítica da ressonância

Considerando a perturbação secular dos coeficientes J_{20} e J_{40} no plano equatorial, obtemos a localização crítica da ressonância 2:1 nas três famílias, Figura 5.9, por meio da Equação (5.9) na qual $d = 2$ e selecionamos $e = 0$.

Vemos que a perturbação gera um semieixo crítico da ressonância maior do que o semieixo kepleriano. Esse aumento é cerca de $0,03\alpha$ para cada elemento das três

famílias de elipsoides de Jacobi aqui tratados.

Figura 5.9 - Localização crítica da ressonância tesseral 2:1.



Na figura (a) e na curva superior, apresentamos a localização crítica da ressonância 2:1 na Família 1. A curva inferior é a localização do semieixo kepleriano da órbita em ressonância. De igual forma, a localização e a localização crítica da ressonância nas famílias 2 e 3 é apresentada nas figuras (b) e (c), respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

5.3.2 Algumas considerações

Empregando a função hamiltoniana, Equação (2.45), para descrever o sistema dinâmico reduzido da ressonância tesseral no elipsoide em equilíbrio, tal como as Funções (5.10) e (5.8), vemos que os valores angulares e de excentricidade dos pontos singulares das ressonâncias tesserais dependem da forma geométrica do primário e não da quantidade de massa.

A dinâmica da ressonância 2:1 é mais complexa nos elementos das famílias 2 e 3 que nos corpos da Família 1, isso devido à existência de seis centros da ressonância, tendo entre eles centros estáveis e centros instáveis. Consequentemente, nessas duas famílias, a ressonância 2:1 possui mais de dois pontos de sela, em contraste, a Família 1 apresenta só dois pontos de sela. Isto indica que existe um valor de q que pode ser considerado como sendo uma “separatriz” entre as dinâmicas.

Por último, na Família 3, o centro estável da ressonância está em torno de $e = 0,455$ e o semieixo crítico na faixa $(1,403, 1,463)\alpha$. A órbita kepleriana com $a = 1,403\alpha$ e $e_0 = 0,455$ possui pericentro $r_p = 1,403\alpha(1 - e_0) = 0,764\alpha$. A órbita kepleriana com $a = 1,463\alpha$ e o mesmo valor de excentricidade tem $r_p = 0,797\alpha$. Essas duas órbitas nos leva a concluir que não existem partículas em ressonância tesseral 2:1 com algum elemento da Família 3.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, analisamos a dinâmica de uma partícula em ressonância tesseral com o elipsoide triaxial homogêneo. No modelo aproximado do potencial gravitacional aqui aplicado, consideramos os efeitos dos coeficientes harmônicos J_{20} , J_{22} , J_{40} e J_{42} . A partir deste modelo, selecionamos quatro “submodelos” que representam a anisotropia do corpo primário: dois modelos reduzidos, MR1 e MR2, e dois modelos quase-completos, MQ1 e MQ2.

Nosso primeiro objetivo foi analisar o efeito da forma geométrica de Haumea sobre uma partícula na órbita da ressonância tesseral 3:1. Essa órbita é de interesse por encontrar-se na região onde foi observado o anel de poeira que circunda o planeta anão. O anel tem semieixo maior nominal de 2.287^{+75}_{-45} km e largura de cerca de 70 km. Neste trabalho, selecionamos a região equatorial entre 2.000 km e 2.500 km como sendo a região do anel. Começamos o estudo determinando o semieixo crítico da ressonância que difere do seu semieixo kepleriano. Na região equatorial de Haumea, o semieixo kepleriano desta ressonância tem 2.296,450 km e o seu semieixo crítico, considerando a perturbação secular do coeficiente J_{20} e para órbitas com baixa excentricidade, tem cerca de 2.318,5 km. Considerando também o efeito secular dos coeficientes J_{20} e J_{40} em órbitas com baixa excentricidade, o semieixo crítico da referida ressonância está em 2.315 km, aproximadamente.

No sistema dinâmico reduzido 1, o centro da ressonância 3:1 tem valor de excentricidade $e \approx 0,88303$ e o ângulo ressonante libra em torno de $\Theta = 180^\circ$. No modelo reduzido 2 o centro está em $e \approx 0,831563$ e o ângulo ressonante tem libração em $\Theta = 0^\circ$. Após a determinação desses pontos singulares, analisamos por meio das equações planetárias de Lagrange, a dinâmica da partícula na órbita com semieixo maior inicial igual ao um dos semieixos críticos da ressonância 3:1. Nos casos em que foram analisados os efeitos dos modelos MR1 e MQ1 as condições iniciais das órbitas são: $a_0 = 2.318,46592$ km, $\ell_0 = \Omega_0 = 0^\circ$ e $I = 0,01^\circ$. Os casos se diferenciam na condição inicial da excentricidade e do ângulo ressonante. Os casos em que $0,15 \leq e_0 \leq 0,25$, a partícula está em ressonância tesseral 3:1 com Haumea e o valor em que chega a excentricidade é cerca de 0,6 e o semieixo maior da órbita alcança valores acima de 5.000 km, Figuras 3.12 e 3.13. Mostrando que a partícula não permanece na região do anel. Nos casos em que $e < 0,09$ o ângulo ressonante se mostrou em circulação e a partícula permaneceu na maior parte do tempo na região do anel, Figuras 3.10 e 3.11. Também foram analisados casos nos quais $0.02 \leq e_0 < 0.09$ e $\Theta_0 = 90^\circ$, neles observamos que a excentricidade e o semi-eixo maior da órbita

apresentam menor amplitude de oscilação quando $e_0 \rightarrow 0.02$. Logo, raciocinando por indução, concluímos que uma partícula em órbitas com as condições iniciais mencionadas e $e \approx 0$, tem a sua trajetória confinada na região do anel.

Na análise do efeito dos modelos MR2 e MQ2, os casos têm $a_0 = 2.314,82430$ km e nos demais elementos orbitais mantêm-se as mesmas condições iniciais mencionadas no parágrafo anterior. Os resultados não diferem consideravelmente dos resultados obtidos nos modelos MR1 e MQ1, isto é, nos casos em que $0,15 \leq e_0 \leq 0,25$ a partícula entra em ressonância 3:1 com Haumea e não permanece na região do anel, Figuras 3.16 e 3.17. Agora, quando $e_0 \rightarrow 0$ a partícula fica confinada na região que designamos como sendo a região do anel.

A partir dos resultados obtidos sobre a dinâmica de uma partícula em ressonância 3:1 com Haumea, concluímos que, o mecanismo de ressonância tesseral 3:1 não é o responsável pela existência do anel de Haumea, segundo o efeito dos modelos aqui analisados.

O elipsoide triaxial homogêneo em equilíbrio hidrostático ou elipsoide de Jacobi foi nosso segundo objeto de estudo.

A condição de equilíbrio entre a força gravitacional e a força centrífuga gerada pela rotação do elipsoide resulta em duas relações que devem ser satisfeitas: sobre às dimensões de seus semieixos e sobre seu spin. Logo, para um elipsoide ser considerado em equilíbrio deve satisfazer essas duas relações.

Nosso segundo objetivo foi o de determinar os pontos singulares da ressonância tesseral 2:1 e 3:1 no plano equatorial no elipsoide de Jacobi. Para isto, empregamos o modelo reduzido 2 que inclui os termos ressonantes respectivos às duas ressonâncias nos harmônicos Φ_{22} e Φ_{42} e, determinamos os pontos singulares por meio da formulação hamiltoniana. Sob a visão dos modelos reduzidos e por meio dessa formulação, encontramos que os valores de excentricidade e dos pontos singulares da ressonância dependem da forma geométrica do primário e não da sua quantidade de massa, Funções (5.8) e (5.10). O semieixo crítico da ressonância também possui uma localização e que chamamos de Localização crítica. Esta localização crítica e, consequentemente o semieixo crítico da ressonância, ao igual que a localização da órbita (Equação (4.15)), não depende da quantidade de massa e sim de sua forma geométrica.

Em resumo, as características do Elipsoide de Jacobi que não dependem de suas

dimensões nem de sua quantidade de massa e sim, da sua forma geométrica, são as seguintes:

- Localização das órbitas, forma alternativa da terceira lei de Kepler, Equação (4.15).
- Magnitude dos coeficientes harmônicos zonais e tesserais.
- Localização crítica da órbita, conseqüentemente o semieixo crítico da ressonância, Equação (5.9).
- Valor de excentricidade e angular do centro e do ponto de sela das ressonâncias tesserais, quando empregado o modelo reduzido para a análise da ressonância, Equações (5.8) e (5.10).

A busca por asteroides que possam ser considerados com sendo elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar, nos levou a pesquisar na base de dados do Jet Propulsion Laboratory. O resultado da busca nos velou a concluir que, só os asteroides Ida e Chariklo satisfazem as duas relações mencionadas na Seção 4.1 e, portanto, os consideramos como sendo elipsoides em equilíbrio no Sistema Solar. Essa conclusão está restringida à base de dados consultada e à data em que foi realizada.

Em um trabalho futuro, pode ser feita uma análise similar à feita no caso particular de Haumea (Capítulo três), sobre a ressonância tesseral 3:1 nos asteroides: Chariklo e Ida. Pois, estes corpos são casos propícios na confirmação dos resultados obtidos sobre esta ressonância no elipsoide em equilíbrio, Capítulo cinco, especialmente Chariklo que possui anéis cerca da localização da ressonância tesseral 3:1.

No presente trabalho, a forma geométrica dos corpos considerados satisfazem a relação entre seus semieixos: $1/\gamma^2 > 1/\alpha^2 + 1/\beta^2$, com $\alpha > \beta > \gamma$. Nestes corpos, e como observamos nos Capítulos 3 e 5, o semieixo crítico da ressonância tesseral 3:1 é razoavelmente próximo da sua superfície e o seu valor de excentricidade, no plano equatorial, é consideravelmente elevado. Como resultado, uma partícula em ressonância tesseral 3:1 com estes corpos apresentaria um movimento irregular.

O presente trabalho contribui na busca por determinar a razão da existência de anéis em corpos satisfazendo a condição mencionada acima e na vizinhança da ressonância 3:1. Pois, o presente estudo indica a análise de outros mecanismos causantes que não sejam a ressonância tesseral 3:1.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física: um curso universitário-mecânica**. [S.l.]: Editora Blucher, 1972. [67](#)
- ANDERLE, R. Observations of resonance effects on satellite orbits arising from the thirteenth-and fourteenth-order tesseral gravitational coefficients. **Journal of Geophysical Research**, v. 70, n. 10, p. 2453–2458, 1965. [6](#)
- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 60, n. 3, p. 331–364, 1994. [13](#)
- BESHORE, E.; LAURETTA, D.; BOYNTON, W.; SHINOHARA, C.; SUTTER, B.; EVERETT, D.; GAL-EDD, J.; MINK, R.; MOREAU, M.; DWORKIN, J. The osiris-rex asteroid sample return mission. In: **IEEE AEROSPACE CONFERENCE, 2015**. [S.l.: s.n.], Proceedings... 2015. p. 1–14. [2](#)
- BREITER, S. Second-order solution for the zonal problem of satellite theory. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 67, n. 3, p. 237–249, 1997. [5](#)
- BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. **The Astronomical Journal**, v. 64, p. 378, 1959. [5](#), [15](#), [20](#), [42](#)
- BROUWER, D.; CLEMENCE. **Methods of celestial mechanics**. [S.l.]: Academic Press, 1961. [17](#)
- BROWN, M. E.; BARKUME, K. M.; RAGOZZINE, D.; SCHALLER, E. L. A collisional family of icy objects in the kuiper belt. **Nature**, v. 446, n. 7133, p. 294–296, 2007. [2](#), [7](#)
- CAPACCIONI, F. et al. Shapes of asteroids compared with fragments from hypervelocity impact experiments. **Nature**, v. 308, n. 5962, p. 832–834, 1984. [8](#)
- CARLSON, B. C. Numerical computation of real or complex elliptic integrals. **Numerical Algorithms**, v. 10, n. 1, p. 13–26, 1995. [65](#)
- CARRY, B. Density of asteroids. **Planetary and Space Science**, v. 73, n. 1, p. 98–118, 2012. [67](#)

- CELLETTI, A.; GALES, C.; LHOTKA, C. Resonances in the earth's space environment. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 84, p. 105185, 2020. [19](#)
- CHANDRASEKHAR, S. **Ellipsoidal figures of equilibrium**. [S.l.]: Yale University, 1969. [3](#), [63](#), [65](#)
- CHAUVINEAU, B.; FARINELLA, P.; MIGNARD, F. Planar orbits about a triaxial body: Application to asteroidal satellites. **Icarus**, v. 105, n. 2, p. 370–384, 1993. [8](#), [63](#)
- CHOBOTOV, V. A. **Orbital mechanics**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. [13](#), [15](#)
- CLAES, H. Analytical theory of earth's artificial satellites (ateas). **Celestial Mechanics**, v. 21, n. 2, p. 193–198, 1980. [5](#)
- COMPERE, A.; LEMAÎTRE, A.; DELSATE, N. Detection by megno of the gravitational resonances between a rotating ellipsoid and a point mass satellite. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 112, n. 1, p. 75–98, 2012. [8](#)
- DEPRIT, A. The main problem in the theory of artificial satellites to order four. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 4, n. 2, p. 201–206, 1981. [5](#)
- EFROIMSKY, M. Euler, jacobi, and missions to comets and asteroids. **Advances in Space Research**, v. 29, n. 5, p. 725–734, 2002. [63](#)
- FARINELLA, P.; PAOLICCHI, P.; TEDESCO, E.; ZAPPALA, V. Triaxial equilibrium ellipsoids among the asteroids? **Icarus**, v. 46, n. 1, p. 114–123, 1981. [8](#), [63](#)
- FERNANDES, S.; ZANARDI, M. **Fundamentos de astronáutica e suas aplicações**. [S.l.: s.n.], 2018. 499 p. [5](#), [11](#), [42](#)
- GARFINKEL, B. Formal solution in the problem of small divisors. **The Astronomical Journal**, v. 71, p. 657, 1966. [29](#)
- _____. On the ideal resonance problem. In: GIACAGLIA, G. E. O. E. (Ed.). **Periodic orbits, stability and resonances**. [S.l.]: Springer, 1970. p. 474–481. [5](#), [29](#)

- GLASSMEIER, K.-H.; BOEHNHARDT, H.; KOSCHNY, D.; KÜHRT, E.; RICHTER, I. The rosetta mission: flying towards the origin of the solar system. **Space Science Reviews**, v. 128, n. 1, p. 1–21, 2007. [2](#)
- GRUNDY, W. et al. Exploration strategy for the ice dwarf planets 2013-2022. **SBAG Community White Paper**, 2009. [2](#), [6](#)
- HU, X. **Comparison of ellipsoidal and spherical harmonics for gravitational field modeling of non-spherical bodies**. Tese (Doutorado) — The Ohio State University, 2012. [63](#)
- IURATO, G. The dawning of the theory of equilibrium figures: a brief historical account from the 17th through the 20th century. **arXiv preprint arXiv:1409.3858**, 2014. [3](#)
- KAULA, W. M. **Theory of satellite geodesy**. [S.l.]: Waltham, Mass, 1966. [13](#), [18](#), [99](#)
- KELLOGG, O. D. **Foundations of potential theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 1953. [12](#), [64](#)
- KOVACS, T.; REGALY, Z. Dynamics of haumea's dust ring. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 479, n. 4, p. 4560–4565, 2018. [4](#), [7](#), [33](#)
- LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. London: Oxford University Press, 1952. [30](#)
- LANE, M. T. An analytical treatment of resonance effects on satellite orbits. **Celestial Mechanics**, v. 42, n. 1-4, p. 3–38, 1987. [6](#)
- LEIVA, R. et al. Size and shape of chariklo from multi-epoch stellar occultations. **The Astronomical Journal**, v. 154, n. 4, p. 159, 2017. [70](#)
- MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. [S.l.]: Academic Press, 2013. [11](#), [63](#)
- MARZARI, F. Ring dynamics around an oblate body with an inclined satellite: the case of haumea. **Astronomy & Astrophysics**, v. 643, p. A67, 2020. [8](#)
- MCADOO, D. C.; BURNS, J. A. Further evidence for collisions among asteroids. **Icarus**, v. 18, n. 2, p. 285–293, 1973. [8](#)
- MORBIDELLI, A. **Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics**. [S.l.]: London; New York: Taylor & Francis, 2002. [30](#)

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. [5](#), [11](#), [17](#)

NATH, D. Demotion of pluto relegates the planethood status of earth.

International Journal of Engineering and Applied Sciences, v. 5, n. 4, p. 257234, 2018. [6](#)

O'DONNELL, K. **Satellite orbits in resonance with tesseral harmonics: Absolute and relative orbit analysis**. [S.l.]: University of Surrey (United Kingdom), 2006. [18](#)

ORTIZ, J. L. et al. The size, shape, density and ring of the dwarf planet haumea from a stellar occultation. **Nature**, v. 550, n. 7675, p. 219–223, 2017. [2](#), [4](#), [6](#), [33](#), [42](#), [66](#)

RAGOZZINE, D.; BROWN, M. E. Orbits and masses of the satellites of the dwarf planet haumea (2003 el61). **The Astronomical Journal**, v. 137, n. 6, p. 4766, 2009. [2](#)

RAYMAN, M. D.; FRASCHETTI, T. C.; RAYMOND, C. A.; RUSSELL, C. T. Dawn: a mission in development for exploration of main belt asteroids vesta and ceres. **Acta Astronautica**, v. 58, n. 11, p. 605–616, 2006. [1](#)

ROMANOWICZ, B. A. On the tesseral-harmonics resonance problem in artificial-satellite theory. **SAO Special Report**, v. **373**, 1975. [6](#)

RUSSEL, C.; RAYMOND, C.; FRASCHETTI, T.; RAYMAN, M.; POLANSKEY, C.; SCHIMMELS, K.; JOY, S. Dawn mission and operations. **Proceedings of the International Astronomical Union**, v. 1, n. S229, p. 97–119, 2005. [1](#)

SAEDELEER, B. D. Complete zonal problem of the artificial satellite: generic compact analytic first order in closed form. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 91, n. 3-4, p. 239–268, 2005. [5](#)

SANCHEZ, D.; HOWELL, K.; PRADO, A. On the dynamics of a spacecraft in the irregular haumea-hi'iaka binary system. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 158, p. 3681–3697, 2016. [2](#), [7](#)

SANCHEZ, D. M.; DEIENNO, R.; PRADO, A. F.; HOWELL, K. C. Perturbation maps and the ring of haumea. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 496, n. 2, p. 2085–2097, 2020. [7](#)

- SEGERMAN, A.; COFFEY, S. An analytical theory for tesseral gravitational harmonics. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 76, n. 3, p. 139–156, 2000. [6](#)
- SHEPARD, M. K. et al. A revised shape model of asteroid (216) kleopatra. **Icarus**, v. 311, p. 197–209, 2018. [70](#)
- SUMIDA, I.; ISHIZAWA, Y.; HOSONO, N.; SASAKI, T. N-body simulations of the ring formation process around the dwarf planet haumea. **The Astrophysical Journal**, v. 897, n. 1, p. 21, 2020. [7](#)
- SUSSMAN, G. J.; WISDOM, J. **Structure and interpretation of classical mechanics**. [S.l.]: The MIT Press, 2015. [30](#)
- VERIS, A. de I. **Practical astrodynamics**. [S.l.]: Springer, 2018. [42](#)
- VOLK, K.; MALHOTRA, R. The effect of orbital evolution on the haumea (2003 el61) collisional family. **Icarus**, v. 221, n. 1, p. 106–115, 2012. [7](#)
- WALTER, U. **Astronautics**. [S.l.]: Springer, 2008. [13](#), [15](#)
- WEIDENSCHILLING, S. How fast can an asteroid spin? **Icarus**, v. 46, n. 1, p. 124–126, 1981. [8](#)
- WINTER, O.; BORDERES-MOTTA, G.; RIBEIRO, T. On the location of the ring around the dwarf planet haumea. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 484, n. 3, p. 3765–3771, 2019. [7](#), [33](#)
- WOOD, J.; HORNER, J.; HINSE, T. C.; MARSDEN, S. C. The dynamical history of chariklo and its rings. **The Astronomical Journal**, v. 153, n. 6, p. 245, 2017. [83](#)
- YANO, H.; FUJIWARA, A.; KAWAGUCHI, J. Successful launch and scientific premises of “hayabusa” asteroid sample return mission. In: **WORKSHOP ON COMETARY DUST IN ASTROPHYSICS**. [S.l.: s.n.], Proceedings... 2003. [1](#)

ANEXO A - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO POTENCIAL GRAVITACIONAL

Formulação clássica do potencial gravitacional em harmônicos esféricos:

$$\Phi = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{a}\right)^n \sum_{u=0}^n F_{nmu}(i) \sum_{v=-\infty}^{\infty} G_{nuv}(e) S_{nmuv}(\ell, \omega, \Omega, \psi), \quad (.1)$$

(KAULA, 1966). A função da inclinação é dada por:

$$\begin{aligned} F_{nmu}(i) = & \sum_{w=0}^{\min(u,k)} \frac{(2n-2w)!}{w!(n-w)!(n-m-2w)!2^{2n-2w}} (\sin i)^{n-m-2w} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \\ & \times \sum_c \binom{n-m-2w+s}{c} \binom{m-s}{u-w-c} (-1)^{c-k}, \end{aligned} \quad (.2)$$

com $k = \left\lceil \frac{n-m}{2} \right\rceil$. c toma valores tal que o coeficiente binomial não seja nulo. A função da excentricidade é:

$$G_{nuv}(e) = (-1)^{|v|} (1 + \beta^2)^n \beta^{|q|} \sum_{k=0}^{\infty} P_{nuvk} Q_{nuvk} \beta^{2k}, \quad (.3)$$

em que

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \quad (.4)$$

$$P_{nuvk} = \sum_{r=0}^h \binom{2u' - 2n}{h-r} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{(n - 2u' + v')e}{2\beta} \right)^r, \quad (.5)$$

com $h = k + q'$ quando $q' > 0$ e $h = k$ quando $q' < 0$, e

$$Q_{nuvk} = \sum_{r=0}^h \binom{-2u'}{h-r} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{(n - 2u' + v')e}{2\beta} \right)^r, \quad (.6)$$

na qual $h = k$ quando $q' > 0$ e $h = k - q'$ quando $q' < 0$, $p = p'$ e $q' = q$ quando $p \geq n/2$, $p' = n - p$ e $q' = -q$ quando $p < n/2$. A expressão S_{nmuv} é dada por:

$$S_{nmuv} = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix}_{n-m \text{ impar}}^{n-m \text{ impar}} \cos \Theta_{nmuv} + \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix}_{n-m \text{ impar}}^{n-m \text{ impar}} \sin \Theta_{nmuv}, \quad (.7)$$

na qual

$$\Theta_{nmuv} = (n - 2u)\omega + (n - 2u + v)\ell + m(\Omega - \psi), \quad (.8)$$

$$J_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2}, \quad J_{n0} = -C_{n0}. \quad (.9)$$

$$C_{nm} = -J_{nm} \cos(m\lambda_{nm}), \quad S_{nm} = -J_{nm} \sin(m\lambda_{nm}) \quad (.10)$$

No harmônico Φ_{22} , o ângulo da ressonância tesseral 3:1 considerado neste trabalho é:

$$\Theta_{22uv} = (2 - 2u)\omega + (2 - 2u + v)\ell + 2(\Omega - \psi) = 2\omega + 6\ell + 2(\Omega - \psi), \quad (.11)$$

em que $u = 0$ e $v = 4$. Assim, na função da excentricidade temos:

$$G_{204}(e) = (-1)^{|4|}(1 + \beta^2)^2 \beta^{|4|} \sum_{k=0}^{\infty} P_{204k} Q_{204k} \beta^{2k}. \quad (.12)$$

Já que $u = 0 < n/2$. Então, $u' = u$ e $v' = v > 0$. Logo,

$$P_{204k} = \sum_{r=0}^{k+4} \binom{-4}{k-r+4} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{3e}{\beta}\right)^r, \quad (.13)$$

$$Q_{204k} = \sum_{r=0}^{k+4} \binom{0}{k-r} \frac{1}{r!} \left(\frac{3e}{\beta}\right)^r. \quad (.14)$$

Quando $k = 0$, tem-se $Q_{2040} = 1$ e

$$\begin{aligned} P_{2040} &= \binom{-4}{4} + \binom{-4}{3} \frac{(-1)^1 3e}{1! \beta} + \binom{-4}{2} \frac{(-1)^2 [3e]^2}{2! \beta^2} \\ &\quad + \binom{-4}{3} \frac{(-1)^3 [3e]^3}{3! \beta^3} + \binom{-4}{0} \frac{(-1)^4 [3e]^4}{4! \beta^4} \\ P_{2040} &= 284 + \frac{27e^4}{8} + 249\sqrt{1-e^2} - \frac{63}{2}e^2(4 + \sqrt{1-e^2}). \end{aligned} \quad (.15)$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}
G_{204}(e) = & - \frac{e^4(-2272 + 1008e^2 - 27e^4 - 1992\sqrt{1-e^2} + 252e^2\sqrt{1-e^2})}{2(1 + \sqrt{1-b^2})^6} \\
& + (-1)^{|4|}(1 + \beta^2)^2 \beta^{|4|} \sum_{k=1}^{\infty} P_{204k} Q_{204k} \beta^{2k}
\end{aligned} \tag{.16}$$

De forma similar obtemos o primeiro termo da função $G_{414}(e)$ do termo ressonante no harmônico Φ_{42} .

ANEXO B - ROTINA IMPLEMENTADA NA OBTENÇÃO DO MODELO APROXIMADO

Na Figura .1, a variável Φ_{nm} é o harmônico esférico em questão e, o passo 1 e 2 correspondem ao primeiro e segundo passo mencionados na Seção 2.4, respectivamente. No item 3, realizamos a soma de ângulos sem incluir a inclinação. O passo três mencionado no Capítulo dois é feito no item 4 da rotina. No item cinco, posicionamos cada um dos termos da serie como entradas de um vetor, facilitando a identificação dos cossenos ressonantes de interesse. Os últimos dois itens são executados para simplificar em notação a amplitude dos termos ressonantes do modelo.

Figura .1 - Rotina para a obtenção do modelo aproximado

```

1.  $\Phi[f] = \Phi_{nm} / . f \rightarrow f + 2 b \sin[f] + 5/4 b^2 \sin[2f] + ((13/12) \sin[3f] - (1/4) \sin[f]) b^3$ 
   [seno [seno [seno [seno
    $+ ((103/96) \sin[4f] - (11/24) \sin[2f]) b^4$ 
   [seno [seno

2.  $\Phi_s[f] = \text{Series}[\Phi[f], \{b, 0, 4\}]$ 
   [série

3.  $\Phi_r[f] = \text{TrigReduce}[\Phi_s[f]]$ 
   [reduz funções trigonométricas

4.  $\Phi_c[f] = \text{Collect}[\Phi_r[f], \{\cos[6f - 2\beta + 2\omega], \cos[5f + 2\beta + 2\omega], \cos[4f + 2\beta + 2\omega], \dots\}]$ 
   [agrupa coeficientes [cosseno [cosseno [cosseno

5.  $\Phi_v[f] = \text{Level}[\Phi_c[f], 1]$ 
   [nível

6.  $\Phi_f[f] = \text{Table}[\text{Factor}[\text{Part}[\Phi_v[f], z]] + z, \{z, 1, \text{Length}[\Phi_v[f]]\}]$ 
   [tabela [fatoriza [parte [comprimento

7.  $\Phi_t[f] = \Phi_f[f] /. \{(-1 + c) (1 + c) \rightarrow -s^2, (-1 + c)^2 \rightarrow (1 - c)^2\}$ 

```

Descrição do procedimento realizado para a obtenção do modelo aproximado, procedimento implementado no software Wolfram Mathematica.

Fonte: Produção do autor.

ANEXO C - TERMO DE CORIOLIS NO ELIPSOIDE EM EQUILIBRIO

No termo de coriolis apresentado na Função (2.45) e escrito nas variáveis empregadas no Capítulo cinco temos $H = \sqrt{\nu\tau}\sqrt{1-e^2}\cos I$. O movimento médio da partícula é dado por:

$$\eta = \left(\frac{4\pi G \rho q s \alpha^3}{3\alpha^3 \tau^3} \right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{\tau^3} \right)^{1/2}, \quad (.1)$$

em que ν é o parâmetro gravitacional do elipsoide. O spin do primário é expressado por:

$$\eta_p = \left(\frac{4\pi G \rho q s \alpha^3}{3\alpha^3 (1-q^2)} (F_\alpha - q^2 F_\beta) \right)^{1/2} = \left(\frac{\nu (F_\alpha - q^2 F_\beta)}{1-q^2} \right)^{1/2}. \quad (.2)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} (3\eta - \eta_p)H &= \sqrt{\nu\tau} \left(3 \left(\frac{\nu}{\tau^3} \right)^{1/2} - \left(\frac{\nu (F_\alpha - q^2 F_\beta)}{1-q^2} \right)^{1/2} \right) \sqrt{1-e^2} \cos I \\ &= \sqrt{\nu}\sqrt{\tau} \left(3\sqrt{\nu} \left(\frac{1}{\tau^3} \right)^{1/2} - \sqrt{\nu} \left(\frac{(F_\alpha - q^2 F_\beta)}{1-q^2} \right)^{1/2} \right) \sqrt{1-e^2} \cos I \quad (.3) \\ &= \nu\sqrt{\tau} \left(3 \left(\frac{1}{\tau^3} \right)^{1/2} - \left(\frac{(F_\alpha - q^2 F_\beta)}{1-q^2} \right)^{1/2} \right) \sqrt{1-e^2} \cos I. \end{aligned}$$

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.