

SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM SISTEMAS DE OSCILADORES ACOPLADOS

Aline Pereira da Silva¹, Elbert Einstein Nehrer Macau²

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

¹alinepsfisica@gmail.com.br, ²elbert@lac.inpe.br

Abstract. In this work was investigated phase synchronization between two globally coupled oscillators according to a sinusoidal function. The dynamics of each individual oscillator is described by a discrete dynamical system called circle map. First introduced a two-dimensional discrete dynamical system, described by two circle maps coupled through a nonlinear coupling, describing and analyzing the dynamical characteristics and the differences between the two systems. Were described regions of phase synchronization with the boundaries analysis and explanation of these regions, which are formed in Crisis boundary and bifurcations leading to loss of synchronization. A similar analysis was made for a system of three globally coupled circle maps. We studied in detail the changing balance of the system when the parameters are varied.

Resumo. Este trabalho tem como objetivo a investigação de sincronização de fase entre dois osciladores globalmente acoplados segundo uma função senoidal. A dinâmica individual de cada oscilador é descrita por um sistema dinâmico discreto denominado mapa circular. Primeiramente foi introduzido um sistema dinâmico bidimensional discreto, descrito por dois mapas circulares acoplados através de um acoplamento não linear, descrevendo e analisando a dinâmica, as diferenças e características entre os dois sistemas. Foram descritas as regiões de sincronização de fase, com análise e explicação das fronteiras dessas regiões, as quais são formadas por crises de fronteira e bifurcações que levam à perda de sincronização. Uma análise similar foi feita para um sistema de três mapas circulares globalmente acoplados. Foram estudadas detalhadamente as mudanças de equilíbrio do sistema, quando os parâmetros são variados.

Palavras-chave: sincronização de fase, osciladores acoplados, mapa circular.

1. Introdução

Sincronização ocorre quando sistemas oscilatórios ajustam seus comportamentos um com o outro, de maneira a atingirem um estado onde suas oscilações possuem períodos semelhantes [1]. Este fenômeno foi primeiramente descrito por Huyghens, que notou que dois relógios de pêndulo colocados contíguos em uma mesma parede tendem a sincronizarem seus pêndulos em fase ou em oposição de fase [2].

Sincronização de fase de oscilações é um fenômeno não linear em biologia, física, química, computação e muitas outras áreas da ciência e engenharia [7]. Alguns exemplos de aplicações são: piscar de luzes de um conjunto de uma espécie de vaga-lumes [8,9], células de marca-passo no coração [10,11], atividade rítmica no cérebro devido a disparos sincronizados de um enorme número de neurônios [12-14], células secretoras de insulina do pâncreas [15], construção de manipuladores de robô [16], em rádio-física, rádio-engenharia e rádio-comunicação a sincronização é aplicada para estabilização de geradores, para sintetizar frequências e modulação de sinais em

sistemas Doppler [17] e esquemas de comunicação eficiente [18-20].

O mapa circular proposto por Arnold [21], é um oscilador discreto no tempo, usado quando a variável de interesse é uma fase angular normalizada (o círculo é mapeado sobre ele mesmo). Alguns exemplos de sistemas físicos, cujo comportamento dinâmico pode ser modelado por mapas circulares são: a convecção forçada de Rayleigh-Bénard [22,23], células cardíacas perturbadas periodicamente [24,25], osciladores guiados periodicamente [26,27] e condutividade elétrica em Niobato de Sódio e Bário [28].

Pesquisas sobre sincronização estão atualmente voltadas para sistemas caóticos [29]. Um sistema dinâmico é chamado caótico sempre que sua evolução depende sensitivamente da variação de suas condições iniciais, isto é, duas trajetórias emergindo de condições iniciais próximas, se separam exponencialmente no curso do tempo [30-32].

Este trabalho está focado no estudo de sincronização de fase entre mapas circulares acoplados. Em particular, a transição para a sincronização de fase e a perda de sincronização em sistemas de dois e três mapas circulares acoplados, onde as fronteiras das regiões de sincronização são formadas por bifurcações do sistema.

2. Sistema de Osciladores Acoplados

Um exemplo de um oscilador é o mapa circular (ou mapa de círculo), o qual se trata de um mapa unidimensional discreto, cuja iteração da variável é interpretada como a medida de um ângulo que especifica onde a trajetória está sobre um círculo [4,21,28].

Esta ideia é motivada pela consideração do estado de um sistema que pode ser sempre representado por um ponto na superfície de um toróide tridimensional.

Um sistema de dois mapas circulares acoplados pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 2\pi v_1 + \frac{\kappa}{2} \text{sen}(y_n - x_n) \\y_{n+1} &= y_n + 2\pi v_2 + \frac{\kappa}{2} \text{sen}(x_n - y_n)\end{aligned}\quad (1)$$

onde ambas variáveis x e y são calculadas modulo 2π . Nesse sistema, v_1 e v_2 são as frequências de cada oscilador, os quais são mutuamente acoplados através de um acoplamento seno, cuja intensidade é K .

3. Sincronização de Fase entre Osciladores Caóticos

A sincronização de fase entre dois osciladores caóticos é definida como travamento de fase: [33]

$$m_1 x_n - m_2 y_n < \text{const} \quad (2)$$

onde m_1 e m_2 são inteiros, x_n e y_n são as fases dos sistemas interagindo e $m_1 : m_2$ é a razão do travamento das fases, ou a ordem de sincronização. Isto significa que m_2 períodos de y_n correspondem a m_1 períodos de x_n , isto é, enquanto y_n realiza m_2 oscilações, x_n realiza m_1 oscilações.

A sincronização dos osciladores pode ser expressada em termos da diferença entre as variáveis de fase x_n e y_n . Subtraindo a segunda equação da primeira no sistema (1), obtém-se a seguinte equação de diferença de fase:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n + 2\pi(v_1 - v_2) - K \text{sen}(x_n - y_n).$$

Introduzindo uma nova variável $z_n = x_n - y_n$

$$z_{n+1} = z_n + 2\pi(v_1 - v_2) - K \text{sen}(z_n) \quad (3)$$

onde z é calculado modulo 2π . Dessa forma, podemos concluir que a dinâmica da diferença de fase é descrita pelo mapa circular seno unidimensional.

O número de rotação é um número entre 0 e 1 que representa o limite da razão entre a distância angular percorrida e o número de iterações n , ou seja, o aumento médio da fase por unidade de tempo, e é calculado da seguinte maneira:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_0}{n} \quad (4)$$

onde z_n é calculado sem módulo 2π , e o limite é incluído para eliminar qualquer comportamento transiente.

A Figura 1 mostra as regiões de sincronização de fase, denominadas línguas de Arnold, para o sistema (1), as quais representam a largura dos intervalos em que ocorre travamento de frequência, calculadas através da equação (4).

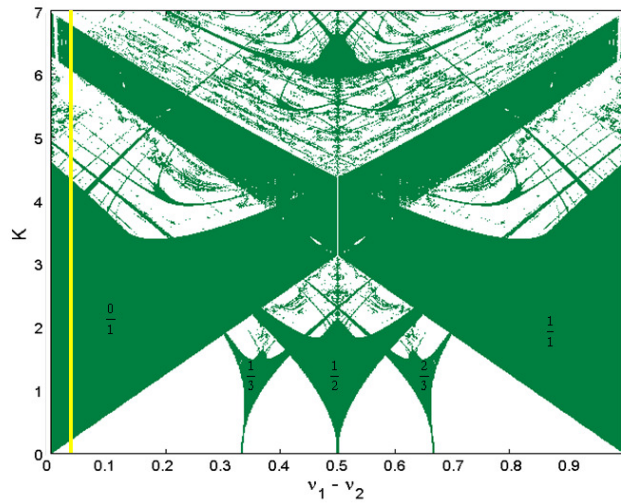


Figura 1: Línguas de Arnold para o sistema (1), as frações mostram os números de rotação para as correspondentes línguas de Arnold.

A região de sincronização 0:1, é limitada pela linha $K = 2\pi(v_1 - v_2)$, a qual é uma bifurcação sela-nó para os pontos fixos estáveis e instáveis dentro da língua. Para $K < 2\pi(v_1 - v_2)$ não existem pontos fixos.

Na linha $K = 1$, o mapa se torna não inversível. Conforme o valor de K aumenta dentro das línguas, podem ocorrer cascatas de duplicação de período, e a dinâmica do sistema torna-se caótica, resultando na perda de sincronização.

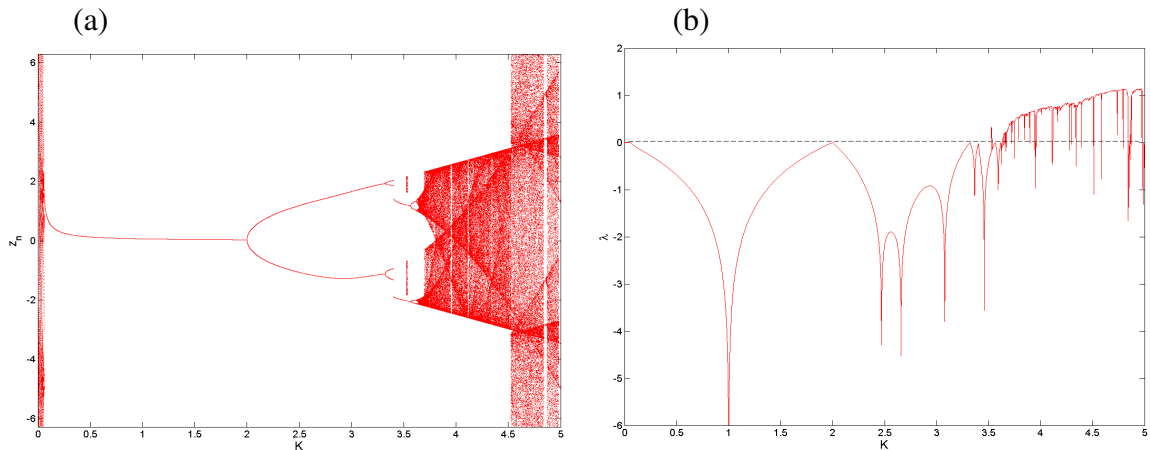


Figura 2: (a) Diagrama de bifurcação e (b) expoente de Lyapunov do sistema (2). Os valores de κ são dados ao longo do eixo horizontal. O valor das condições iniciais é zero. O valor dos parâmetros corresponde à linha amarela destacada na figura 1.

No interior de cada língua de Arnold, as trajetórias são imediatamente atraídas para ponto fixo estável existente. Na fronteira superior da língua de Arnold 0:1 ocorre uma crise de fronteira quando o valor máximo do mapa torna-se igual ao valor do ponto fixo instável. Na fronteira inferior da língua 0:1 ocorre uma bifurcação sela-nó, na qual os pontos fixos estáveis e instáveis deixam de existir e, portanto, as trajetórias que eram atraídas para o ponto fixo estável, agora tendem para o infinito, resultando na perda de sincronização do sistema. Na fronteira esquerda da língua 1:2 ocorre uma bifurcação de duplicação de período, onde a órbita que era quase-periódica se torna periódica com período 2, resultando na sincronização de fase do sistema na ordem 1:2. Na fronteira superior da língua 1:2 ocorre uma bifurcação de duplicação de período, onde a órbita que era periódica com período 2, se torna periódica com período 4.

A figura 2 (a) mostra o diagrama de bifurcação e (b) o respectivo expoente de Lyapunov para $v_1 - v_2 = 0,01$. Comparando as figuras 1 e 2, é possível notar que as bifurcações de duplicação de período ocorrem dentro da língua 0:1, gerando caos e o sistema perde a sincronização de fase conforme o valor de K aumenta. Esse fenômeno ocorre ao longo da linha amarela na figura 1.

4. Sincronização de Fase em um Sistema Tridimensional

Considere o seguinte sistema de três osciladores de fase globalmente acoplados:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 2\pi v_1 + \frac{\kappa}{3} [\text{sen}(y_n - x_n) + \text{sen}(z_n - x_n)] \\y_{n+1} &= y_n + 2\pi v_2 + \frac{\kappa}{3} [\text{sen}(x_n - y_n) + \text{sen}(z_n - y_n)] \\z_{n+1} &= z_n + 2\pi v_3 + \frac{\kappa}{3} [\text{sen}(x_n - z_n) + \text{sen}(y_n - z_n)]\end{aligned}\quad (5)$$

onde as variáveis de fase são calculadas modulo 2π .

Subtraindo a segunda equação da primeira, e a primeira da terceira, temos o seguinte sistema bidimensional:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + 2\pi\Delta_1 + \frac{\kappa}{3} [-2\text{sen } u_n + \text{sen } v_n - \text{sen}(u_n + v_n)] \\v_{n+1} &= v_n + 2\pi\Delta_2 + \frac{\kappa}{3} [-2\text{sen } v_n + \text{sen } u_n - \text{sen}(u_n + v_n)]\end{aligned}\quad (6)$$

onde

$$u_n = x_n - y_n, \quad v_n = z_n - x_n, \quad \Delta_1 = v_1 - v_2 \text{ e } \Delta_2 = v_3 - v_1$$

A seguir, serão analisados quatro casos diferentes para o sistema (6), variando Δ_1 e Δ_2 .

4.1 Caso simétrico $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$

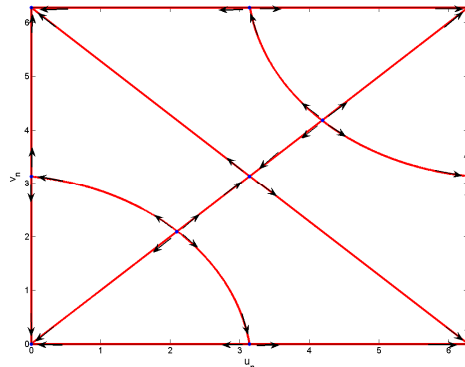


Figura 3: Retrato de fase do sistema (6) com $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Neste caso, os três osciladores de fase são idênticos, e suas frequências são iguais. Há seis pontos fixos: um nodo atrator, três selas hiperbólicas e dois nodos repulsores. A figura 3 mostra o espaço de fase para o sistema (6) com $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

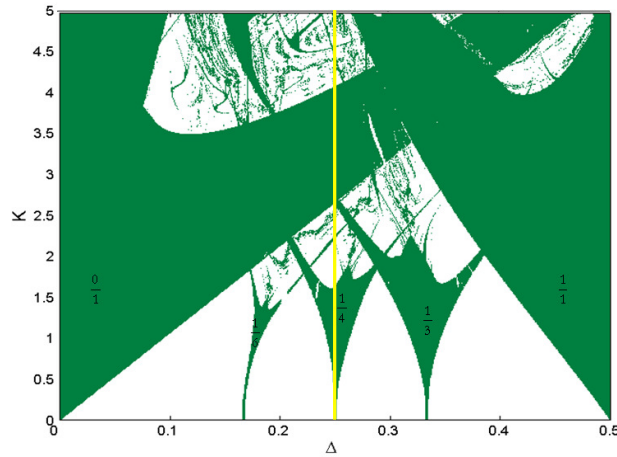
4.2 Caso para $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$

Neste caso, o sistema (5) é reduzido para o seguinte mapa unidimensional:

$$u_{n+1} = u_n + 2\pi\Delta + \frac{\kappa}{3} [\text{sen}(u_n) + \text{sen}(2u_n)] \quad (7)$$

onde $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$.

A Figura 4 mostra as línguas de Arnold, para o sistema (6), com $\Delta_1 = \Delta_2$.



4.3 Caso para $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 > 0$.

Neste caso, a dinâmica do sistema é governada pelo mapa circular seno unidimensional, dado pela equação (3). As línguas de Arnold se assemelham à figura 1.

4.4 Caso geral para $\Delta_1 \neq \Delta_2$.

A Figura 4 mostra as línguas de Arnold para para o sistema (6), com $\Delta_1 \neq \Delta_2$, e $\Delta_1 = 0.9$.

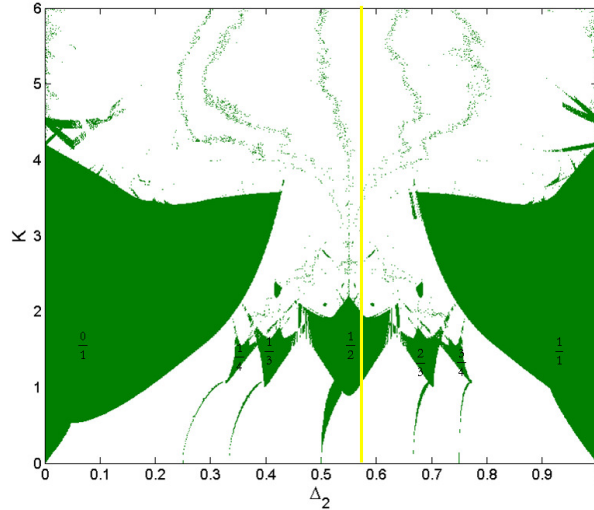


Figura 6: Línguas de Arnold para o sistema (6), com $\Delta_1 \neq \Delta_2$, e $\Delta_1 = 0.9$. As frações mostram os números de rotação para as correspondentes línguas de Arnold.

Na fronteira direita da língua 0:1 ocorre uma bifurcação sela-nó, onde os pontos fixos se tornam próximos e se colidem um com o outro. Após a colisão, o ponto fixo estável que atraía as trajetórias deixa de existir e o sistema perde a estabilidade. Consequentemente, o sistema perde sincronização de fase. Na fronteira superior da língua 0:1 ocorre uma bifurcação Naimark-Sacker, onde um ponto fixo estável sofre bifurcações e surgem mais pontos fixos estáveis. Após várias bifurcações, o sistema se torna caótico e perde a sincronização de fase.

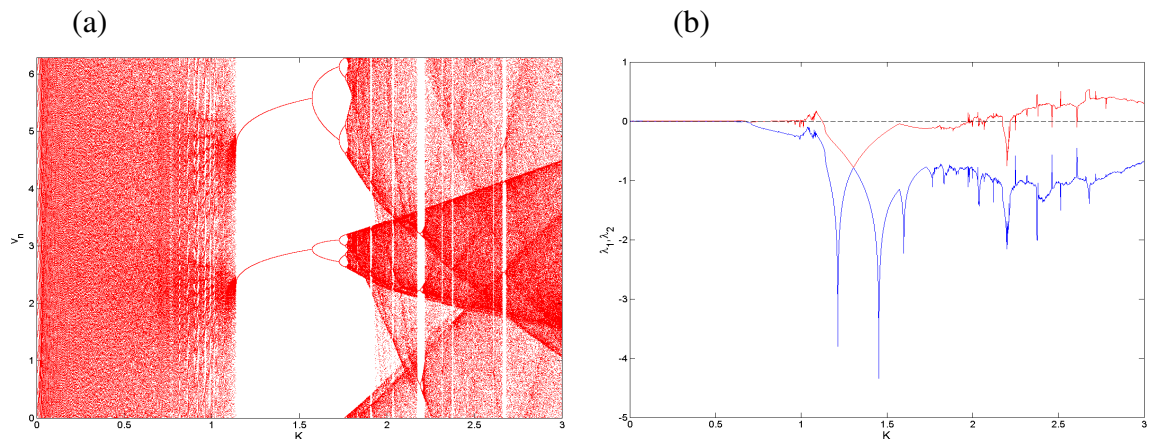


Figura 7: (a) Diagrama de bifurcação e (b) expoente de Lyapunov do sistema (6). Os valores de κ são dados ao longo do eixo horizontal. O valor das condições iniciais é zero. O valor dos parâmetros corresponde à linha amarela destacada na figura 6.

A figura 7 (a) mostra o diagrama de bifurcação e (b) o respectivo expoente de Lyapunov para $\Delta_2 = 0.58$. Comparando as figuras 6 e 7, é possível notar que as bifurcações de duplicação de período ocorrem dentro da língua 1:2, gerando caos e o

sistema perde a sincronização de fase conforme o parâmetro K aumenta. Esse fenômeno ocorre ao longo da linha amarela na figura 6.

5. Conclusões

Foi considerada a dinâmica de sistemas de duas e três dimensões, formados por mapas circulares globalmente acoplados através de um acoplamento senoidal. Para investigar a sincronização de fase nestes sistemas, consideramos os mapas correspondentes para as diferenças de suas variáveis de fase originais e estuda a estabilidade e bifurcações de equilíbrio.

No caso de duas dimensões, a dinâmica da diferença das fases é descrita pelo mapa circular seno. Foram plotados vários diagramas das línguas de Arnold para órbitas periódicas, e explicado como ocorre a perda de sincronização quando os parâmetros são variados.

Para o caso de três dimensões, o sistema para as diferenças das fases é bidimensional e mais complicado do que uma única equação do caso bidimensional. Portanto, para o sistema de três osciladores acoplados, foram considerados vários casos particulares. No caso em que todos os três osciladores têm a mesma frequência, foi esboçado o retrato de fase do sistema, mostrando o comportamento dinâmico e os pontos fixos existentes. No caso em que as frequências dos dois osciladores diferem da frequência do terceiro, o problema pode ser reduzido a uma equação unidimensional para a diferença das fases. Foi explicado o comportamento das trajetórias, bem como a estabilidade estrutural do sistema devido à existência de pontos fixos órbitas periódicas. Foi considerado também o caso bidimensional, onde a diferença entre as frequências de dois osciladores é fixa com valor igual a zero, e o terceiro oscilador difere dos outros dois. Neste caso, a dinâmica do sistema é descrita pelo mapa circular unidimensional. Finalmente, considerou-se o caso geral onde todas as frequências dos osciladores são diferentes e explicou-se brevemente como as regiões de sincronização de fase podem mudar à medida que as diferenças das frequências variariam.

Referências

- [1] P. Bak; T. Bohr e M. H. Jensen, *Mode-Locking and the Transition to Chaos in Dissipative Systems*, Physica Scripta, T9, 50-58 (1985).
- [2] J. Kurths e G. Osipov, *Regular and chaotic phase synchronization of coupled circle maps*, Physical Review E, 65, 016216 (2001).
- [3] M. G. Rosenbluem, A. S. Pikovsky e J. Kurths, *Phase Synchronization of Chaotic Oscillators*, Physical Review Letters 76, 1804 (1996).
- [4] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: an introduction for scientists and engineers*, Oxford University Press, New York (1994).
- [5] D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna e E. Siggia, *Universal Transition from Quasi-Periodicity to Chaos in Dissipative Systems*, Physical Review Letters 49, 132-35 (1982).
- [6] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New York (1983).
- [7] A.P. Mijolaro, L.F.C. Aberto and N.G. Bretas, *Synchronization of a Class of Second-Order Nonlinear Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos an Applied Sciences and Engineering, v. 18, p. 3461-3471 (2008).
- [8] J. Buck, *Synchronous rhythmic flashing of fireflies*, Quart. Rev. Biol. 63, 265 (1988).
- [9] J. Buck e E. Buck, *Synchronous fireflies*, Scientific Am. 234, 74 (1976).
- [10] C. S. Peskin, *Mathematical Aspects of Heart Physiology*, Courant Institute of Mathematical Science Publication, New York, pp. 268-278 (1975).
- [11] V. Torre, J. A theory of synchronization of heart pace-maker cells, Theor. Biol. 61, 55 (1976).
- [12] F. C. Hoppensteadt e E. M. Izhikevich, *Weakly Connected Neural Networks*, Springer-

- Verlag, New York (1997).
- [13] C. J. DeLuca, A. M. Roy e Z. Erim, *Synchronization of motor unit firings in human muscles*, J. Neurophysiol. 70, 2010 (1993).
 - [14] W. Singer e C. M. Gray, *Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis*, Ann. Rev. Neurosci. 18, 555 (1995).
 - [15] A. Sherman, J. Rinzel e J. Keizer, *Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing*, Biophys. J. 54, 411 (1988).
 - [16] Y.-H. Liu, Y. Xu e M. Bergerman, *Cooperation control of multiple manipulators with passive joints*, IEEE Trans. Robot. Autom. 15, 258 (1999).
 - [17] *Phase-Locked Loops and Their Applications*, editado por W. C. Lindsey e M. K. Simon (IEEE Press, New York, 1978)
 - [18] L. M. Pecora e T. L. Carroll, *Synchronization in Chaotic Systems*, Phys. Rev. Lett. 64, 821 (1990).
 - [19] K. Cuomo e A. V. Oppenheim, *Circuit implementation of synchronization chaos with applications to communications*, Phys. Rev. Lett. 71, 65 (1993).
 - [20] J. Y. Chen, K. W. Wong, L. M. Cheng e J. W. Shuai, *A Secure Communication Scheme Based on Phase Synchronization of Chaotic Systems*, Chaos, 13, 508 (2003).
 - [21] V. I. Arnold, *Small denominators I: mapping the circumference into itself*, American Mathematical Society Translations, Series 2, 46, 213 (1965).
 - [22] M. H. Jensen, L. Kadanoff, A. Libchaber, I. Pröccacia e J. Satavans, *Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-Bénard Experiment*, Physical Review Letters 55, 2798-801 (1985).
 - [23] J. Stavans, F. Heslot e A. Libchaber, *Fixed Winding Number and the Quasiperiodic Route to Chaos in a Convective Fluid*, Physical Review Letters 55, 596-99 (1985).
 - [24] L. Glass, A. Shrier and J. Belair, *Chaotic Cardiac Rhythms*, in Chaos (A. V. Holden, ed.) (Princeton, NJ, 1986).
 - [25] M. Coutemancho, L. Glass, J. Belair, D. Scagliotti e D. Gordon, *A Circle Map in a Human Heart*, Physica D 40, 299-310 (1989).
 - [26] L. Glass, M. R. Guevar, J. Belair e A. Shrier, *Global Bifurcations and Chaos in a Periodically Forced Biological Oscillator*, Physical Review B 29, 1348-57 (1984).
 - [27] P. Bryant and C. Jeffries, *The Dynamics of Phase Locking and Points or Resonance in a Forced Magnetic Oscillator*, Physica D 25, 196-232 (1987).
 - [28] S. Martin and W. Martienssen, *Circle Map and Mode Locking in the Driven Electrical Conductivity of Barium Niobate Crystals*, Physical Review Letters 56, 1522-25 (1986).
 - [29] I. I. Blekhman, *Synchronization in Science and Technology*, ASME Press, New York (1988).
 - [30] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Reading: Perseus Books Publishing (1994).
 - [31] E. Ott, *Chaos in dynamical system*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
 - [32] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2006).
 - [33] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares e C. S. Zhou, *The synchronization of chaotic systems*, Physics Reports, 366, 1-101 (2002).
 - [34] M. W. Hirsch, S. Smale e R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, (2004).
 - [35] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, *Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Chaotic Transients*, Physica D 7, 181 (1983).
 - [36] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, *Chaotic Attractors in Crisis*, Physical Review Letters, 48, 22, 1507-1510 (1982).
 - [37] A. Vasylenko, Yu. Maistrenko e M. Hasler, *Modeling Phase Synchronization in Systems of Two and Three Coupled Oscillators*, Nonlinear Oscillations, 7, 3 (2004).